

15.3-6

假定你希望兑换外汇，你意识到与其直接兑换，不如进行多种外币的一系列兑换，最后兑换到你想要的那种外币，可能会获得更大收益。假定你可以交易 n 种不同的货币，编号为 $1, 2, \dots, n$ ，兑换从1号货币开始，最终兑换为 n 号货币。对每一种货币 i 和 j 给定汇率 r_{ij} ，意味着你如果有 d 个单位的货币 i ，可以兑换 dr_{ij} 个单位的货币 j 。进行一系统的交易需要支付一定的佣金，金额取决于交易的次数。令 c_k 表示 k 次交易需要支付的佣金。证明：如果对所有 $k = 1, 2, \dots, n$ ， $c_k = 0$ ，那么寻找最优兑换序列的问题具有最优子结构性质。然后请证明：如果佣金 c_k 为任意值，那么问题不一定具有最优子结构性质。

这个问题有点类似无权最短或最长路径，因为寻找从1号货币到 n 号货币的兑换序列 s ，可以简写成

$$1 \xrightarrow{s} 6 \quad (1)$$

假如兑换序列中使用到 $x \in [1, 6]$ 号货币，那么公式(1)可以写成

$$1 \xrightarrow{s_1} x \xrightarrow{s_2} 6 \quad (2)$$

因此原问题的解，需要用到两个子问题的解。

1. 无佣金的情况，存在最优子结构的证明，如下

假如 s 是最优解的情况下， s_1 不是最优解，那么存在 s'_1 使得 $1 \rightarrow x$ 的兑换收益更大，替换 s_1 后得到的新解比 s 的兑换收益更大，与假设矛盾；同理，也可以应用于 s_2 。总之，我们看到该情况下，原问题的最优解是由子问题的最优解构成的，因此具备最优子结构性。

2. 有佣金的情况，不一定存在最优子结构的证明，如下

为了方便理解，我们需要对题目进行一定的更改。题目说， c_k 为任意值，并且强调不一定具有最优子结构，显得不是很明确。但我们完全可以换种说法，即当兑换的次数大到一定程度后，会产生天价的佣金，使得收益变小甚至出现负收益。然后，我们再换一种说法，即兑换次数存在一个上限 l ，超过该上限，则兑换失败。

这样，基于1的证明，我们假设 s_1 的兑换序列需要 m 次兑换过程，而 s_2 的兑换序列需要 n 次兑换过程，此时存在以下关系

$$\begin{aligned} m &< l \\ n &< l \\ m + n &< 2l \end{aligned} \tag{3}$$

因此，如果想要保证 $m + n < l$ ，就必须谨慎调整 m 和 n ，这样的结果就是，子问题之间是相关的，故而不是最优子结构性质。

□ Finish the English solution

Imagine that you wish to exchange one currency for another. You realize that instead of directly exchanging one currency for another, you might be better off making a series of trades through other currencies, winding up with the currency you want. Suppose that you can trade n different currencies, numbered $1, 2, \dots, n$, where you start with currency 1 and wish to wind up with currency n . You are given, for each pair of currencies i and j , an exchange rate r_{ij} , meaning that if you start with d units of currency i , you can trade for dr_{ij} units of currency j . A sequence of trades may entail a commission, which depends on the number of trades you make. Let c_k be the commission that you are charged when you make k trades. Show that, if $c_k = 0$ for all $k = 1, 2, \dots, n$, then the problem of finding the best sequence of exchanges from currency 1 to currency n exhibits optimal substructure. Then show that if

commissions c_k are arbitrary values, then the problem of finding the best sequence of exchanges from currency 1 to currency n does not necessarily exhibit optimal substructure.