第四章 马尔可夫链

王寒松[著]

1. Markov链的定义. 随机过程$\{\xi_n, n\in T\}$, 对$\forall$正整数$n\in T$(时刻)和$i_0, i_1 \cdots i_{n+1}\in I$(状态)有

$P\{\xi_{n+1}=i_{n+1}|\xi_0=i_0, \xi_1=i_1\cdots\xi_n=i_n\}=P\{\xi_{n+1}=i_{n+1}|\xi_n=i_n\}$ 则称$\{\xi_n\}$为Markov链.

2. 一步转移概率: $p_{ij}(n)=P\{\xi_{n+1}=j|\xi_n=i\}$

齐次Markov链: $p_{ij}(n)$不依赖于n, 记为p_{ij}

$\boxed{\text{一步转移矩阵}}$: $P=(p_{ij})=\begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} & \cdots \\ p_{21} & \cdots & p_{2n} & \cdots \\ \cdots & & & \end{bmatrix}$ 任一行和为1

$\sum_{j\in I} p_{ij}=1$

3. n步转移概率: $p_{ij}^{(n)}=P\{\xi_{m+n}=j|\xi_m=i\}$ 从状态i到j经过n步

$\boxed{\text{n步转移概率矩阵}}$: $P^{(n)}=(p_{ij}^{(n)})$ 每一行和为1

性质: ① $p_{ij}^{(n)}=\sum_{k\in I}p_{ik}^{(l)}p_{kj}^{(n-l)}$ $\boxed{\text{C-K方程}}$

$p_{ij}^{(0)}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$

$p_{ij}^{(n)}=\sum_{k\in I}p_{ik}p_{kj}^{(n-1)}$

$P^{(n)}=P\cdot P^{(n-1)}$ $P^{(n)}=P^n$

4. 初始概率: $p_i=P\{\xi_0=i\}$

绝对概率: $p_j(n)=P\{\xi_n=j\}$

性质: $p_j(n)=\sum_{i\in I}p_i p_{ij}^{(n)}$ $p_j(n)=\sum_{k\in I}p_k(n-1)p_{kj}$

5. 若$\{\xi_n, n\in T\}$为Markov链, 则对$\forall i_1\cdots i_n\in I$有: $P\{\xi_1=i_1,\cdots\xi_n=i_n\}=\sum_{i\in I}p_i p_{ii_1}p_{i_1i_2}\cdots p_{i_{n-1}i_n}$

$P\{\xi_0=i, \xi_1=i_1\cdots\xi_n=i_n\}=p_i p_{ii_1}p_{i_1i_2}\cdots p_{i_{n-1}i_n}$

$P\{\xi_1=i_1,\cdots\xi_n=i_n|\xi_0=i\}=p_{ii_1}p_{i_1i_2}\cdots p_{i_{n-1}i_n}$

6. i可达j: 存在$n\geq 1$使$p_{ij}^{(n)}>0$ 记$i\to j$ 性质: $\boxed{\text{传递性}}$: 若$i\to k$且$k\to j$则$i\to j$

i不可达j: 任意n均有$p_{ij}^{(n)}=0$ 记 $i\not\to j$

i, j互通: $i\to j$且$j\to i$

7. ~~若~~若使$p_{ii}^{(n)}>0$的所有n存在最大公约数d则称i是$\boxed{\text{周期}}$为d的. $d(i)=d$.

$d(i)=G.C.D\{n: p_{ii}^{(n)}>0\}$

若$d(i)=1$则称状态i是非周期的. $\Longleftrightarrow$ 若$p_{ii}^{(1)}>0$则i是非周期的.

如果$d(j)=d$, 则当$n\neq d$整数倍时, $p_{jj}^{(n)}=0$ 但不一定对所有n有$p_{jj}^{(nd)}>0$.

$T_{ij}=n$: 从状态i出发, 首次到达状态j的时间.

$f_{ij}^{(n)}=P\{T_{ij}=n|\xi_0=i\}$ 从状态i出发经n步首次到达状态j的概率. 从i→j走n步的概率. n可有多个, $\boxed{\text{概率}}$→可能.

$f_{ij}=P\{T_{ij}<\infty|\xi_0=i\}=\sum_{n=1}^{\infty}f_{ij}^{(n)}$ 从i出发经有限步终于到达状态j的概率. 每条道首达概率之和.

$f_{ij}^{(0)}=0$. 对任意i, j成立.

$p_{ij}^{(n)}=P\{\xi_n=j|\xi_0=i\}=\sum_{l=1}^{n}f_{ij}^{(l)}\,p_{jj}^{(n-l)}$ → 从j出发经n-l步回到j

$f_{ij}>0 \Longleftrightarrow i\to j$

从i出发经n步到达j 所有路径和 从i出发经l步到j 首次

从i到j平均时间: $\mu_{ij} = E(T_{ij}) = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ij}^{(n)}$

平均返回时间: $\mu_i = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)}$

8. 常返态: $f_{ii}=1$ $\begin{cases} \text{正常返: } \mu_i<\infty & \text{有限步返回.} \\ \text{零常返: } \mu_i=\infty \end{cases}$

迟早从必返回.

非常返态: $f_{ii}<1$ 可能回不来

遍历态: $f_{ii}=1,\ \mu_i<\infty,\ d=1$ 遍历态 = 正常返 + 非周期 → 状态图中有自圈

9. j常返态 $\Longleftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)}=\infty$ j是周期为d常返 $\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(nd)} = \frac{d}{\mu_j}$

j非常返 $\Longleftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)} = \frac{1}{1-f_{jj}} \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)}=0$ j是零常返或非常返 $\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}=0$.

10. 若j是常返的，则系统从j出发无穷多次返回j的概率为1.
若j是非常返的，则系统从j出发无穷多次返回j的概率为0.

11. 状态j常返 $\Longleftrightarrow f_{jj}=1 \Longleftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)}=\infty$

状态j正常返 $\Longleftrightarrow f_{jj}=1$ 且 $\mu_j<\infty \Longleftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)}=\infty,\ \lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)}>0$.

状态j零常返 $\Longleftrightarrow f_{jj}=1$ 且 $\mu_j=\infty \Longleftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)}=\infty.\ \lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)}=0$

状态j非常返 $\Longleftrightarrow f_{jj}<1 \Longleftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)}<\infty$ 收敛. $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)}=0$.

12. 有限状态的Markov链至少有一个常返态.
若i常返，并且 $i\to j$ 则 $j\to i$.

13. 若 $i\leftrightarrow j$，则状态i, j有下列情况:
①同为常返或同为非常返
②同为正常返或同为零常返
③有相同的周期.

14. 若C是I的子集，若对 $\forall i\in C,\ j\notin C$，有 $i\not\to j$，则C为闭集. 只进不出

不可约: 若I中状态均互通，则称Markov链不可约. 任意两个状态互通 ⟹ Markov链不可约

C是闭集 $\Longleftrightarrow$ 对 $\forall i\in C,\ j\notin C$，有 $p_{ij}=0$

状态空间I可分为常返和非常返态两部分，分别记为C, D.

Markov链所有常返态构成一个闭集.

Markov链状态空间I可以分解为下列不相交子集和: $I = D + C_1 + C_2 + \cdots$

非常返态　常返.

若I有限则D一定不是闭集.

王家松[著]

15. 若C是闭集，则以C为状态空间也构成一个Markov链.

16. 不可约Markov链的状态必为以下情况之一：正常返、零常返、非常返.

有限Markov链 ⇒ 不存在零常返态

有限Markov链 ⇒ D不是闭集.

闭集是出不去的，只有进来的.

有限＋不可约Markov链 ⇒ 正常返

D不是闭集　不存在零常返.

17. Markov链的平稳分布：
$$\begin{cases} \pi_j = \sum_{i\in I} \pi_i p_{ij} \\ \sum_{j\in I} \pi_j = 1 \end{cases}$$

或
$$\begin{cases} (\pi_0, \pi_1 \cdots) = (\pi_0, \pi_1 \cdots) \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & \cdots \\ \cdots \end{pmatrix} \\ \sum_{j\in I} \pi_j = 1 \end{cases}$$

$\vec{\pi} = \vec{\pi} \vec{P}$

$\vec{\pi}(E - \vec{P}) = 0.$

18. 不可约非周期Markov链必属于以下两种之一：

(1) 所有状态是非常返或零常返，且不存在平稳分布.

(2) 所有状态是正常返，且存在平稳分布，该平稳分布为：$\pi_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{1}{\mu_j}$

区别!

1. 连续时间马尔可夫链：随机过程 $\{X(t), t\geq 0\}$. 状态空间 $I=\{i_n, n\geq 0\}$.

$P\{X(t_{n+1})=i_{n+1} \mid X(t_1)=i_1, X(t_2)=i_2 \cdots X(t_n)=i_n\}=P\{X(t_{n+1})=i_{n+1} \mid X(t_n)=i_n\}$.

2. $P\{X(s+t)=j \mid X(s)=i\}=p_{ij}(s,t)$ 表示 s时刻处于i状态条件下，经过时间t后转移到状态j的转移概率.

若只与时间差t有关则称为齐次转移概率函数. $p_{ij}(t)$

3. 对一次 s, t 成立: $\boxed{\sum_{j\in I} p_{ij}(t)=1}$ $p_{ij}(s+t)=\sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}(t)p_{kj}(s)$.

4. 正则性条件(连续性条件): $\lim_{t\to 0^+} p_{ij}(t)=\begin{cases}0 & i\neq j\\ 1 & i=j\end{cases}$

~~说明~~ 说明刚进入某个状态不可能立即又跳跃到另一个状态.

5. $\begin{cases}\text{绝对概率分布: } p_j(t)=P\{X(t)=j\}.\\ \text{初始概率分布: } p_j=p_j(0)=P\{X(0)=j\}.\end{cases}$

$p_j(t)=\sum_{i\in I} p_i p_{ij}(t)$.

6. 设 $p_{ij}(t)$ 满足连续性条件，则: $\begin{cases} q_{ii}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1-p_{ii}(\Delta t)}{\Delta t}\\ q_{ij}=\lim_{\Delta t}\frac{p_{ij}(\Delta t)}{\Delta t}.\end{cases}$

q_{ij} 为齐次连续时间马尔可夫链从状态i到j的转移速率(跳跃强度).

7. ~~齐次~~ 有限齐次马尔可夫链 $\Rightarrow q_{ii}=\sum_{j\neq i} q_{ij}<\infty$. (保守).

8. 有限状态 $\Rightarrow Q=\begin{pmatrix}-q_{00} & q_{01} & \cdots & q_{0n}\\ q_{10} & q_{11} & \cdots & q_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ q_{n0} & q_{n1} & \cdots & q_{nn}\end{pmatrix}$ 行和为0.

9. Kolmogrov 向后方程：设 $q_{ii}=\sum_{j\neq i} q_{ij}$ 则有: $p'_{ij}(t)=\sum_{k\neq i} q_{ik}p_{kj}(t)-q_{ii}p_{ij}(t)$ $\boxed{P'(t)=QP(t)}$.

Kolmogrov 向前方程，设 $p_{ij}(t)$ 满足连续性条件: $p'_{ij}(t)=\sum_{k\neq j} p_{ik}(t)q_{kj}-p_{ij}(t)q_{jj}$ $P'(t)=P(t)Q$.

齐次马尔可夫过程在t时刻处于~~绝对~~状态j的绝对概率 $p_j(t)$ 满足: $\begin{cases} p'_j(t)=\sum_{k\neq j} p_k(t)q_{kj}-q_{jj}p_j(t)\\ p'(t)=p(t)Q.\end{cases}$

第6章 平稳一

1. 强平稳过程：$P\{\xi(t_1)\le x_1,\cdots\xi(t_n)\le x_n\}=P\{\xi(t_1+\tau)\le x_1,\cdots,\xi(t_n+\tau)\le x_n\}$

2. $\underbrace{E\xi^2(t)<+\infty}_{}$ 二阶矩过程 $\Rightarrow |E\xi(t)|<+\infty$ $\quad |E[\xi(t)\cdot 1]|\le\sqrt{E[\xi(t)]^2E(1^2)}<+\infty$

强平稳 $\Rightarrow E[\xi(t)]=E[\xi(t+\tau)]$.

$\Rightarrow R(t_1,t_2)=R(\tau)$ 强平稳的相关函数与起点无关，只与时间间隔 t_2-t_1 有关.

3. 弱平稳 $\Leftarrow$ 强平稳 + 二阶矩过程.

$\{\xi(t)\}$ 为二阶矩过程，且满足：(1) 对一切 $t\in T$, $\mu_\xi(t)=E[\xi(t)]=$ 常数 C.

(2) $R_\xi(t+\tau,t)=\boxed{E[\xi(t+\tau)\overline{\xi(t)}]=R_\xi(\tau)}$

强平稳 $\not\Leftrightarrow$ 弱平稳.

4. 考察平稳性：离散 $\begin{cases}EX_n\ 常数 \\ R_X(n,n-\tau)\end{cases}$ 连续 $\begin{cases}E[X(t)] \\ R_X(s,t)=E[X(s)X(t)]\end{cases}$

5. $R_\xi(0)=R_\xi(t,t)=E|\xi(t)|^2$.

$R_\xi(\tau)$ 在 $R_\xi(0)$ 处取得最大值. $|R_\xi(\tau)|\le R_\xi(0)$

$R_\xi(0)\ge 0$ $\quad R_\xi(-\tau)=\overline{R_\xi(\tau)}$

6. 联合平稳：$R_{XY}(t+\tau,t)$. $R_{YX}(t+\tau,t)$ 仅与 τ 有关.

$|R_{XY}(\tau)|^2\le R_X(0)R_Y(0)$ $\quad R_{XY}(-\tau)=\overline{R_{YX}(\tau)}$

$R_{XY}(\tau)=E[X(t)Y(t-\tau)]$

7. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}E[|X_n-X|^2]=0$ 则称 $\{X_n(e)\}$ 均方收敛于 $X(e)$. 记 $\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\,X_n=X$

8. 二阶矩 $\{X_n\}$ 收敛于二阶矩随机变量 $X \Leftrightarrow \lim\limits_{n,m\to\infty}E[|X_n-X_m|^2]=0$.

9. $\lim\limits_{n\to\infty}E[X_n]=EX=E[\mathrm{l.i.m}\,X_n]$

$\lim\limits_{n,m\to\infty}E[X_n\overline{Y_m}]=EX\overline{Y}=E[\mathrm{l.i.m}\,X_n\ \mathrm{l.i.m}\,\overline{Y_m}]$.

10. 二阶矩随机过程 $\{X_n\}$ 均方收敛 $\Leftrightarrow \lim\limits_{n,m\to\infty}E[X_n\overline{X_m}]$ 存在.

11. $\lim\limits_{h\to\infty}E[|X(t+h)-X(t)|^2]=0$ 则称 $X(t)$ 在 t 处均方连续. 记 $\underset{h\to 0}{\mathrm{l.i.m}}\,X(t+h)=X(t)$.

12. $\left.\begin{aligned}&\langle X(t)\rangle=E[X(t)]\\&\langle X(t)X(t-\tau)\rangle=E[X(t)X(t-\tau)]\end{aligned}\right\}\Rightarrow$ 各态历经.

$\begin{cases}\langle X(t)\rangle=\underset{T\to+\infty}{\mathrm{l.i.m}}\dfrac{1}{2T}\displaystyle\int_{-T}^{T}X(t)\,dt \\ \langle X(t)X(t-\tau)\rangle=\underset{T\to+\infty}{\mathrm{l.i.m}}\dfrac{1}{2T}\displaystyle\int_{-T}^{T}X(t)X(t-\tau)\,dt.\end{cases}$

证各态历经 $\Rightarrow$ $\begin{cases}① \langle\xi(t)\rangle\ 等于\ E[\xi(t)] \\ ② \langle\xi(t)\xi(t-\tau)\rangle\ 等于\ R_\xi(\tau)\end{cases}$

第七章.

1. $x(t) \longleftrightarrow F(\omega)$ $\quad F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$ $\quad |F(\omega)|^2$ 为能谱密度.

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega.$$

2. $F_x(\omega,T)=\int_{-T}^{T}x(t)e^{-j\omega t}dt$

$\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{2T}|F_x(\omega,T)|^2$ 为功率密度.

3. 平均功率: $\varphi^2=\lim\limits_{T\to\infty}E\left[\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|X(t)|^2dt\right]=\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}E[|X(t)|^2]dt$. (均方连续)

功率谱密度: $S_x(\omega)=\lim\limits_{T\to\infty}E\left[\frac{1}{2T}|F_x(\omega,T)|^2\right]$.

$\lim\limits_{T\to\infty}E\left[\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|X(t)|^2dt\right]=\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\lim\limits_{T\to\infty}E\left[\frac{1}{2T}|F_x(\omega,T)|^2\right]d\omega.$ $\quad \varphi^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_x(\omega)d\omega.$

$X(t)$ 均方连续且平稳过程 $\Rightarrow \varphi^2=R_X(0)$.

4. $R_x(n)\longleftrightarrow S_x(\omega)$ 离散 $\quad S_x(\omega)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}R_x(n)e^{-j\omega n}\ \ -\pi\le\omega\le\pi$ $\quad R_x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}S_x(\omega)e^{j\omega n}d\omega$

$R_x(\tau)\longleftrightarrow S_x(\omega)$ 连续. $\quad S_x(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}R_x(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \stackrel{平稳}{\Rightarrow} S_x(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}R_x(\tau)\cos\omega\tau\, d\tau$

5. $S_x(\omega)$ 实的.非负偶函数.

6. 留数定理求 $\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)e^{iax}dx$ $\begin{cases} ①\ 因式分解. \\ ②\ Res[f(z),z_k] \\ ③\ 2\pi i\sum Res. \end{cases}$

$f(z)=R(x)e^{iax}$

$(z-3)^2$ 二阶

$(z-3i)$ 一阶

一阶: $Res(f,z_0)=\lim\limits_{z\to z_0}\boxed{(z-z_0)f(z)}$ —— 去分母零点.

二阶: $Res(f,z_0)=\lim\limits_{z\to z_0}\frac{d[(z-z_0)^2f(z)]}{dz}$

$Res(f,z_0)=\frac{1}{(k-1)!}\lim\limits_{z\to z_0}\frac{d^{k-1}[去零点]}{dz^{k-1}}$

7. $\delta(t)\longleftrightarrow 1$ $\quad 2\pi\delta(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\pm j\omega\tau}d\omega$

8. 互谱密度: $S_{XY}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}R_{XY}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$

$S_{XY}(\omega)=\overline{S_{YX}(\omega)}$

9. 线性系统: $L[\alpha x_1(t)+\beta x_2(t)]=\alpha L[x_1(t)]+\beta L[x_2(t)]$ $\quad \mu_Y=\mu_X\int_{-\infty}^{+\infty}h(t)dt.$

线性时不变: $y(t+\tau)=L[x(t+\tau)]$ $\quad R_Y(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau_1)\overline{h(\tau_2)}R_X(\tau-\tau_1+\tau_2)d\tau_1d\tau_2$

$R_{YX}(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(\lambda)h(\tau-\lambda)d\lambda$

$Y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}X(\tau)h(t-\tau)d\tau$ $\quad S_Y(\omega)=|H(\omega)|^2S_X(\omega)$

$S_{YX}(\omega)=H(\omega)S_X(\omega)$

第一章

1. σ-代数(事件域)：(1) $\Omega \in \mathcal{F}$，(2) 若 $A \in \mathcal{F}$，则有 $\bar{A} \in \mathcal{F}$，(3) 若 $A_k \in \mathcal{F}$，有 $\bigcup_{k=1} A_k \in \mathcal{F}$ (可列并运算封闭)
(余运算封闭)

2. ~~四~~ $A-B=A\bar{B}=A-AB$.

$(A\cup B)\cap C = AC\cup BC$

$(A\cap B)\cup C = (A\cup C)\cap(B\cup C)$

3. 可列可加性：$A_1, A_2 \cdots$ 两两互不相容 $\Rightarrow P(A_1+A_2+\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots$

4. 任意事件A.B：$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).$$

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum P(A_iA_j)+\sum P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).$$

5. $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$ $\quad P(AB)=P(B|A)P(A)$. $\quad P(ABC)=P(A)P(B|A)\cdot P(C|AB)$.

$P(A_1+A_2|B)=P(A_1|B)+P(A_2|B)-P(A_1A_2|B)$

$P(A|B)=1-P(\bar{A}|B)$

$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i|A)=\sum_{i=1}^{\infty}P(B_i|A)$ $\quad B_i$ 两两互不相容

6. 全概率公式：$P(A)=P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+\cdots+P(A|B_n)P(B_n)$

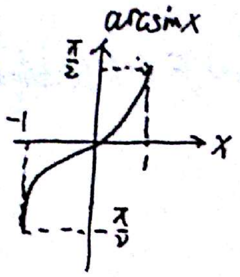
贝叶斯公式：$P(B_i|A)=\dfrac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(A|B_j)P(B_j)}$

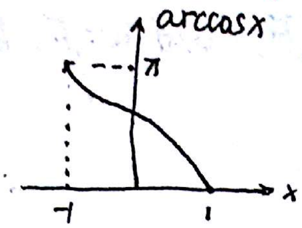
7. 独立 $\Leftrightarrow P(AB)=P(A)P(B)$

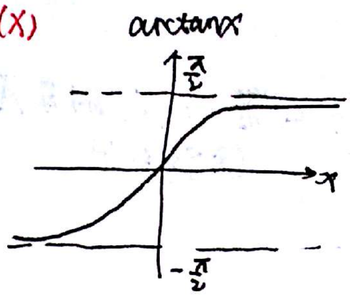
互斥 $\Leftrightarrow AB=\phi$

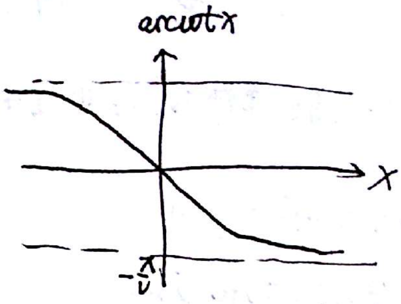
对立 $\Leftrightarrow P(A)=1-P(\bar{A})$

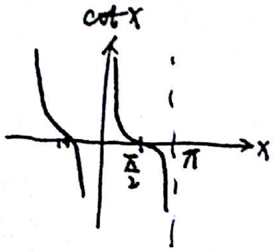
第2章 分布 F(x)

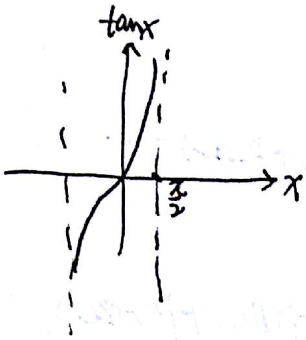












和差化积: $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

积化和差 $\sin\alpha\sin\beta=\frac{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)}{2}$

$\cos\alpha\cos\beta=\frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}$

$\sin\alpha\cos\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}$

~~Cos~~

$\boxed{\text{离散型}}$

	概率	E(X)	方差 σ^2
两点分布	$\begin{array}{c|cc} X & 0 & 1 \\ \hline P & 1-p & p \end{array}$	p	pq
等可能分布	–	–	–
$X\sim B(n,p)$ 二项分布	$P\{X=k\}=C_n^k p^k q^{n-k}$	np	npq
$X\sim\pi(\lambda)$ 泊松分布	$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$	λ	λ

$F(x)=P\{X\leq x\}$ F(x)就是概率. 离散型 无$f(x)$

- $F(-\infty)=0$ $F(\infty)=1$
- F(x)右连续, 但x取值范围一般 ( ) $\leq x<$ ( )
- 离散型的F(x)图呈阶梯状, 间断点处跳跃值为该点概率.

$\boxed{\text{连续型}}$

$$F(x)=P\{X\le x\}=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

$$f(x)=F'(x)$$

$$\begin{cases}\text{连续型的 } F(x) \text{ 为连续函数.} \\ F(-\infty)=0 \quad F(+\infty)=1 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1\end{cases}$$

连续型随机变量确定点处概率为0：$P\{X=a\}=0$

$$\begin{cases}\text{连续型：} P\{X=a\}=0 \not\Rightarrow \{X=a\} \text{是不可能事件} \\ \text{离散型：} P\{X=a\}=0 \Longleftrightarrow X=a \text{ 是不可能事件.}\end{cases}$$

常见分布：

	$f(x)$	$E(X)$	方差 σ^2
均匀分布	$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}\end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
指数分布	$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}} & x>0 \\ 0 & x<0\end{cases}$	θ	θ^2
正态分布	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2

求 $f(x)$ 方法：①分布函数法：$\begin{cases}\text{求 } F(x) \\ f(x)=F'(x)\end{cases}$ $Y=g(X)$ 转化成 $X=h(Y)$ 代入 $F(x)$ 求 $F(y) \Rightarrow f_Y(y)=F'(y)$

② $Y=g(X)$ 单调区间.

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X[h(y)]\,|h'(y)| & \alpha<y<\beta \\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

α: $\min g(x)$　　β: $\max g(x)$

若有多个单调区间则 $f_Y(y)=\begin{cases}\sum f_X[h_i(y)]\,|h_i'(y)| \\ 0 & \text{其他.}\end{cases}$

第3章 二维随机变量

1. $F(x,y)=P\{X\le x, Y\le y\}$.

■ 离散型：$P\{X=x_i, Y=y_j\}=P_{ij}$ 为 (X,Y) 分布律. $P\{X=i,Y=j\}=P\{Y=j|X=i\}\cdot P\{X=i\}$

■ 连续型：$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv$ $\qquad f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}$

性质：① $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy=1$

② 点 (x,y) 落在G内的概率为：$P\{(x,y)\in G\}=\iint_G f(x,y)\,dx\,dy$

如 $P\{Y\le X\}$.

二维正态：$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$ $\quad (X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$

2. $\boxed{\text{边缘分布}}$ $F(x,y)$

$F_X(x)=F(x,\infty)$ $\qquad F_Y(y)=F(\infty,y)$

■ 离散型：$P_{i\cdot}=P\{X=x_i\}=\sum_{j=1}^{\infty}P_{ij}$

$P_{\cdot j}=P\{Y=y_j\}=\sum_{i=1}^{\infty}P_{ij}$

■ 连续型：~~$F_X(x)=F(x,\infty)$~~ =

$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,dy$ $\qquad f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,dx$ $\qquad$ 积分运一次就行

$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\sqrt{2\pi}$

3. $\boxed{\text{条件分布}}$

■ 离散型：$P\{X=x_i|Y=y_j\}=\frac{P\{X=x_i, Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}=\frac{P_{ij}}{P_{\cdot j}}$

■ 连续型：$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f(y)}$

$F_{X|Y}(x|y)=P\{X\le x|Y=y\}=\int_{-\infty}^{x}\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}dx$

$F_{X|Y}(x_0|y_0)=P\{x\le x_0|Y=y_0\}=\int_{-\infty}^{x_0}f_{X|Y}(x|y_0)\,dx$

4. $\boxed{\text{求 } Z=g(X,Y) \text{ 分布}}$ ~~连续~~.离散的列举就行.

连续：$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{g(x,y)\le z\}=\iint_G f(x,y)\,dx\,dy$

$Z=X+Y$ $\qquad f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(z-y)f_Y(y)\,dy$

$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)\,dx$

$M=\max(X,Y)$ $\quad F_{max}(z)=F_X(z)F_Y(z)$

$N=\min(X,Y)$ $\quad F_{min}(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$

5. $\begin{cases} u=g_1(x,y) \\ v=g_2(x,y) \end{cases}$ 求 (U,V) 的联合概率密度 $\varphi(u,v)$

① 解出 $\begin{cases} x=h_1(u,v) \\ y=h_2(u,v) \end{cases}$

② 求 $J_1=\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$

③ $J=\frac{1}{J_1}$

用 u,v 代入 $f(x,y)$

$$\varphi(u,v)=\begin{cases} f[\underline{h_1(u,v)},\underline{h_2(u,v)}]\cdot|J| & (u,v)\in G \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$f_U(u)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(u,v)\,dv$

$f_V(v)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(u,v)\,du$

期望、方差.

1. $\begin{cases} E(X)=\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k & \text{离散} \\ E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF(x) & \text{连续} \end{cases}$

不相关 $\Leftrightarrow$ $E(XY)=E(X)E(Y)$

独立 $\Leftrightarrow$ $P(AB)=P(A)P(B)$　　独立 $\Rightarrow$ 不相关.

互不相容 $\Leftrightarrow$ $AB=\phi$

$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$ 无条件成立.

若 $EX^2<\infty$, $EY^2<\infty$, 则 $(EXY)^2 \le EX^2 EY^2$

一维 $Y=g(X)$ $\begin{cases} \text{离散}: E[g(X)]=\sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k \\ \text{连续}: E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx \end{cases}$

二维 $\begin{cases} \text{离散}: E[g(X,Y)]=\sum_i\sum_j g(x_i,y_j)p_{ij} \\ \text{连续}: E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)f(x,y)dxdy \end{cases}$

2. 方差 $\sigma^2=D(X)=E\{[X-E(X)]^2\}=E(X^2)-E^2(X)$

$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2cov(X,Y)$　　$cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$ 协方差

独立或不相关 $\Leftrightarrow$ $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$　　$\rho_{XY}=\dfrac{cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$ 相关系数.

$P\{X=E(X)\}=1 \Leftrightarrow D(X)=0$.

3. 契比雪夫不等式: $P\{|X-\mu|\le\varepsilon\}\ge 1-\dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$

§ 随机过程.

1. 随机过程的定义：如果对任一 $t\in T$，有一定义在 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的随机变量 $X(t,e)$ 与之对应，则称 $\{X(t,e), t\in T\}$ 为 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的随机过程，记为 $X(t)$

- 状态空间：固定 t，随机过程取值状态.
- 样本函数：固定 e，自变量是 t.

2. 分布：$F(t,x) = P\{X(t)\le x\}$.

3. 数字特征：$m_X(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,dF(t,x)$ 均值函数.

协方差函数 $C_X(s,t) = E[X(s)-m_X(s)][X(t)-m_X(t)] = E[X(s)X(t)] - m_X(s)m_X(t) = R_X(s,t) - m_X(s)m_X(t)$

方差函数 $D[X(t)] = E[X(t)-m_X(t)]^2 = E[X^2(t)] - m_X^2(t) = R_X(t,t) - m_X^2(t)$.

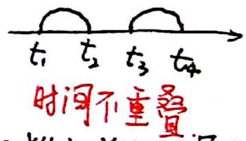
相关函数 $R_X(s,t) = E[X(s)X(t)]$

$E(\bar{z}) = \overline{E(z)}$

4. ~~正交增量~~

二阶矩过程：若对任意 $t\in T$，$E[X(t)]^2$ 存在，则称 $X(t)$ 为二阶矩过程.

5. 正交增量过程：设 $X(t)$ 是零均值的二阶矩过程，若对任意的 $t_1 < t_2 \le t_3 < t_4$，有 $\boxed{E[X(t_2)-X(t_1)][\overline{X(t_4)-X(t_3)}]=0}$ 则称 $X(t)$ 为 正交增量过程.

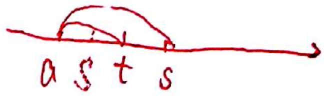


6. 独立增量过程：$t_1<t_2<\cdots<t_n$，随机变量 $X(t_2)-X(t_1)$，$X(t_3)-X(t_2)\cdots X(t_n)-X(t_{n-1})$ 是相互独立的，则称 $X(t)$ 是独立增量过程.

7. 平稳增量过程：$X(t)$ 是随机过程，若对任意的 $s<t$，随机变量 $X(t)-X(s)$ 的分布仅依赖于 $t-s$ 则 $X(t)$ 是平稳增量过程.

8. 维纳过程：若一个随机过程 $\{X(t), t\ge 0\}$，(1) $X(t)$ 是独立增量过程. (2) $X(t)-X(s)$ 是期望为 0，方差为 $\sigma^2|t-s|$ 的正态分布 $N(0, \sigma^2|t-s|)$. (3) $X(t)$ 是关于 t 的连续函数.

$$E[X(s)-X(a)][X(t)-X(a)] = \sigma^2 \min(t-a, s-a).$$



§泊松过程

1. 泊松过程$\{X(t),t\geq 0\}$：(1) $X(0)=0$

(2) $X(t)$是独立增量过程.

(3) $P\{X(t+s)-X(s)=n\}=\frac{(\lambda n)^n}{n!}e^{-\lambda n}$

注：①泊松过程是$\boxed{\text{平稳增量过程}}$且$E[X(t)]=\lambda t$.

② 令$s=0 \Rightarrow P\{\underset{\text{间隔}}{X(t)}=n\}=\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}$

③ $P\{X(t+h)-X(t)=0\}=1-\lambda h+o(h)$

$P\{X(t+h)-X(t)=1\}=\lambda h+o(h)$

$P\{X(t+h)-X(t)\geq 2\}=o(h)$ 在充分小的时间间隔内，最多有一个事件发生，而不能有两个或两个以上事件同时发生.

④ $P\{X(t)=0\}=e^{-\lambda t}$.

2. 泊松过程性质：

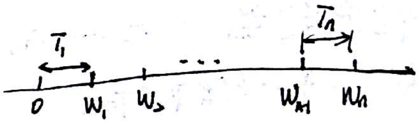
① $m_X(t)=E[X(t)]=\lambda t$

② $\sigma_X^2(t)=D[X(t)]=\lambda t$.

③ $R_X(s,t)=(\lambda t+1)\lambda\min(s,t)$. $C_X(s,t)=R_X(s,t)-m_X(s)m_X(t)$.

④ 协方差：$C_X(s,t)=\lambda\min(s,t)$

⑤ 特征函数：$g_X(u)=E[e^{iuX(t)}]=\sum_{n=0}^{\infty}e^{iun}\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}$



④ 时间间隔T_n：泊松过程的T_n是独立同分布的均值为$\frac{1}{\lambda}$的指数分布. $F_{T_n}(t)=P(T_n\leq t)=1-e^{-\lambda t}$

等待时间W_n：泊松过程的W_n服从参数为n与λ的Γ分布：$f_{W_n}(t)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} & t\geq 0\\ 0 & t<0\end{cases}$ 爱尔兰分布

3. 非齐次泊松过程：$\{X(t),t\geq 0\}$为具有跳跃强度$\lambda(t)$的非齐次泊松过程.

(1) $X(0)=0$

(2) $X(t)$是独立增量过程.

(3) $P\{X(t+h)-X(t)=1\}=\lambda(t)h+o(h)$

$P\{X(t+h)-X(t)\geq 2\}=o(h)$

性质：① $E[X(t)]=m_X(t)=\int_0^t\lambda(s)ds$

② $P\{X(t+s)-X(t)=n\}=\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$ $\lambda=m_X(t+s)-m_X(t)=\int_t^{t+s}\lambda(h)dh$

$t\geq 0$ $X(t+s)-X(t)=n\sim\pi(m_X(t+s)-m_X(t))$

4. 复合泊松过程：$\{N(t),t\geq 0\}$是强度为λ的泊松过程. $\{Y_k\}$是一列独立同分布随机变量，且与$N(t)$独立.

$X(t)=\sum_{k=1}^{N(t)}Y_k$ $t\geq 0$ 称为复合泊松过程.

② 若$EY_1^2<\infty$ 则 $EX(t)=\lambda tEY_1$

$D[X(t)]=\lambda tEY_1^2$

① $X(t)$特征函数：$g_{X(t)}(u)=e^{\lambda t[g_Y(u)-1]}$

分　布	参数	数学期望	方差
两点分布	$0<p<1$	p	$p(1-p)$
二项分布	$n\ge 1$, $0<p<1$	np	$np(1-p)$
泊松分布	$\lambda>0$	λ	λ
均匀分布	$a<b$	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$
指数分布	$\theta>0$	θ	θ^2
正态分布	$\mu,\sigma>0$	μ	σ^2

特征函数

定义：设 X 为一维随机变量，称 e^{itX} 的数学期望 $\boxed{E\left(e^{itX}\right)}$ 为 X 的特征函数，记为 $\phi_X(t)$.

$\varphi(t)$ 或 $g(t)$ 特征函数.

若 X 为离散型随机变量:

$$g(t)=E\left(e^{itX}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}e^{ita_k}p_k$$

若 X 为连续型随机变量：

$$g(t)=E\left(e^{itX}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}f(x)dx$$

类型	特征函数
两点分布	$\varphi(t)=q+pe^{it}$
泊松分布	$\varphi(t)=e^{\lambda(e^{it}-1)}$
二项分布	$\varphi(t)=(q+pe^{it})^n$
均匀分布	$\varphi(t)=$
正太分布	$\varphi(t)=e^{it\mu-\frac{(\sigma t)^2}{2}}$
标准正太分布	$\varphi(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}$

性质：

$$g(0)=1,|g(t)|\le 1,g(-t)=\overline{g(t)}$$

（5）若随机变量 $X_1,\cdots X_n$ 相互独立，其特征函数分别为 $g_1(t),\cdots$，$g_n(t)$，令 $X=\sum_{k=1}^{n}X_k$，则 X 的特征函数为

$$g_X(t)=\prod_{k=1}^{n}g_k(t)$$

设 X 的特征函数为 $\phi_X(t)$，则 $Y=aX+b$ 的特征函数为：$\phi_Y(t)=e^{itb}\phi_X(at)$

随机变量的分布函数由其特征函数唯一确定：

$$F'(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)e^{-itx}dt$$

协方差矩阵

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

协方差矩阵可用来表示多维随机变量的概率密度，从而可通过协方差矩阵达到对多维随机变量的研究

条件数学期望

离散型： $E(X|Y=y_j)=\sum_{i=1}^{\infty}x_i p_{i|j}$

连续型： $E(X|Y=y_j)=\int_{-\infty}^{+\infty}x f_{X|Y}(x|y_j)dx$

性质：

$$E[E(X|Y)]=E(X)$$

若Y是离散型随机变量，则上式为： $E(X)=\sum_{y}E(X|Y=y)P(Y=y)$

若Y是连续型随机变量，则变为： $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}E(X|Y=y)f_Y(y)dy$