# 第三讲 约束优化理论（II）

* 约束优化的最优性二阶条件
* Lagrange函数
* 临界锥
* 约束优化问题的对偶形式
* 线性规划及其对偶

约束优化的二阶最优性条件：二阶条件、约束规范、

## 一、临界锥

目前为止，我们主要用一阶最优性条件（即KKT条件）来判断和的一阶梯度和局部极小解的关系。当KKT条件满足时，由Farkas引理可得，。若，在方向的增减不能通过一阶性质判断，此时二阶梯度在最优性条件方面就很重要。

因为本节主要讨论二阶条件，所以假设，和是二阶连续可微的。

**定义3.1（临界锥 critical cone）**

若为优化问题（2.1）的可行点，存在在处满足KKT条件，则临界锥定义如下：

临界锥的等价定义为：

**临界锥的性质：**

由KKT条件可知，。可知：

则有

即对有

。

根据定义可得：

**命题3.1** 设是问题（2.1）的局部最优解，并设在处

（约束品性）

则有。

## 二、约束优化的二阶最优性条

**约束问题的二阶最优性条件**

**定理3.1（二阶必要条件）**

设二次连续可微，是问题（2.1）的一个局部最优解且在该点处LICQ成立。设满足（3.1），则

**定理3.2（二阶充分条件）**

设满足（3.1）。若

则是问题（2.1）的一个严格局部最优解。

注：用于判断KKT点是否是局部最优解。

**定理3.3（二阶必要性条件）**

假设为优化问题（2.1）的一个局部最优解，并且在处LICQ成立，令为，则

证明：利用引理2.1及Taylor近似就可得结论。

因为为局部最优解，则对任意趋向的可行序列，当充分大时，

。

根据定义知，再由在处LICQ成立可得

。

所以对，存在可行集序列和正数集序列满足，且

，。

在处的Taylor近似为

若**，**则

。

从而有

其中第一个等式是因为KKT条件中的互补条件：**，**。第二个等式是因为临界锥的性质。

由Taylor近似得

由KKT条件可知：

。

所以

即

若则。与为局部极小点矛盾。 □

**例3.1** 对于优化问题

解：根据优化问题的标准模型可得，

，，，。

由图可知，可行域为以（1，0）为圆心，1为半径的圆上半部及其内点。不难发现为问题的最优解，此时积极约束集。



则Lagrange乘子应满足：，即

+

所以。在处，

，

则在处满足LICQ,因而唯一。

所以

□

**定理3.4（二阶充分性条件）**

假设为优化问题（2.1）的一个可行解，且存在一个，使得在处KKT条件满足，并且有

则为优化问题（2.1）的严格局部最优解。

**例3.2**对于优化问题

解：

根据标准形式（2.1）可知

，，，。

Lagrange函数为

KKT条件为：

则满足KKT条件，此时。该点处的Hessian矩阵为

此矩阵为正定矩阵（各阶行列式都是正数），所以一定满足定理3.1的条件，因此为此优化问题的严格局部最优解。 □

**例3.3**考虑如下优化问题

解：

根据标准形式（2.1）可得

，，，。

显然目标函数无下界，因为可以取为充分大的正数，，此时目标函数趋向。因此该优化问题无全局最优解。

Lagrange函数为

KKT条件为：

()=0，

显然满足KKT条件，此时，积极约束集。

下面考虑二阶充分性条件是否成立。

任意的，且，

因此在处，二阶充分性条件满足，所以为优化问题的局部极小点。 □

练习题：

验证最优解。

解：

Lagrange函数为

计算得

直接计算求得KKT点（０，０，－３），　临界锥的点ｄ＝（１，０）。由二阶充分条件易得最优解为０。

## 三、对偶形式

我们讨论如下形式的有约束优化问题的对偶形式。

（P）

其中和分别是不等式和等式约束的指标集。D作为问题的集合约束，可以由一定的约束等式或者不等式来定义。通常我们把上述模型称为非线性规划的原始形式（原问题），其对偶形式（对偶问题）定义如下：

（D）

其中目标函数

称为问题（P）的Lagrange对偶函数。其中。此外，常常记问题（P）和（D）的可行域分别为。

**例3.4** 求非线性规划问题

Lagrange对偶函数为

于是，该问题的对偶问题为

**例3.5** 考虑线性规划问题

集合约束，则线性规划问题的Lagrange对偶函数为

}

}

=

于是，线性规划的对偶问题为：

我们知道，对于标准的约束优化问题的标准模型（2.1），Lagrange函数为：

若为（2.1）的最优解，且存在Lagrange乘子。则根据互补条件可得：

即为的稳定点，但是该稳定点是的怎么样的极值点？

我们接下来考虑与这个问题相关的鞍点定理和对偶定理。

参考文献

1. 《Convex Optimization Algotithm》Dimitri P. Bertsekas, 2015
2. 《Convex Optimization Theory》Dimitri P. Bertsekas, 2009
3. 《Numerical Optimization》Jorge Nocedal, Stephen Wright, 1999(2006)
4. 《Convex Optimization》 Stephen Boyd, Lieven Vandenberghe, 2004
5. 《最优化理论与算法》陈宝林，1989(2005)编著