# 第四讲　对偶理论

1.鞍点定理

2.对偶原理

* 强对偶原理
* 弱对偶原理
* 线性规划对偶原理

3. Lagrange乘子的经济学解释

本章主要介绍约束优化问题的鞍点定理和对偶定理等。

上一讲借助Lagrange函数介绍了约束优化问题对偶形式。我们知道，对于标准的约束优化问题的标准模型：



Lagrange函数为：

若为（4.1）的最优解，且存在Lagrange乘子，则根据互补条件可得：

即为的稳定点，我们考虑到，该稳定点是否和的极值点有关系？

这需要引入下面Lagrange函数的鞍点。

## 鞍点定理

**定义4.1（鞍点）**对于优化问题（4.1），若存在和和满足

则成为该优化问题的Lagrange函数的鞍点。也将称为优化问题（4.1）的鞍点。

由定义可得，为在时的极小值点，为在时的极大值点，即为在时的极小值点。

Lagrange函数的鞍点和优化问题（4.1）的KKT点紧密相关，我们有下列结果。

**定理4.1** 设为优化问题（4.1）的Lagrange函数的鞍点，则满足该优化问题的KKT条件。

**证明**：由鞍点的定义可得为优化问题min 的最优解，由KKT条件可得。

又有为下面优化问题的解：

（4.2）

对于此优化问题，约束只包括不等式约束，且不等式约束的梯度集合线性无关，即该问题满足LICQ,根据一阶必要性条件可得，存在满足该问题（4.1）的KKT条件.首先定义问题（4.2）的Lagrange函数为：

)=

KKT条件为：

即满足优化问题（4.1）的KKT条件中的后面的条件。 □

**定理4.2** 设为优化问题（4.1）的Lagrange函数的鞍点，则为优化问题（4.1）的全局最优解。

**证明**：由定理3.1知，为优化问题（4.1）的KKT点，利用鞍点的定义可得，，有

由KKT条件的互补条件可得:

从而为优化问题（4.1）的全局最优解。 □

## 二、对偶定理

**定理4.3（弱对偶定理）**记问题（P）和（D）的可行域为和，设 和（） 分别是原问题（P）和对偶问题（D）的可行解，则

.

**证明**：

**推论4.1** 对于原问题（PNLP）和对偶问题（DNLP），下面三个结论成立：

1. 若，，则

|（）

1. 若存在和，使得，则和分别是问题（PNLP）和（DNLP）的最优解。
2. 若，则，。若，则问题（PNLP）

没有可行解。

非线性规划问题（PNLP）的对偶间隙是指。

**定理4.4（强对偶定理）**对约束优化问题（4.1），其Lagrange函数存在鞍点，记为，当且仅当和分别是原问题、对偶问题的最优解且对偶间隙为零。

**证明：**必要性证明：设为优化问题（4.1）的Lagrange函数的鞍点，由定理4.2可得是原问题的最优解。由定理4.1可得满足优化问题（4.1）的KKT条件。即

因此为对偶问题的可行点。

第一个等式是由得到的，第二个等式是由Lagrange函数的定义得到的，第三个等式是由鞍点的定义得到的，第四个等式是由KKT条件得到的。

因而对偶间隙，再由推论4.1可得，是对偶问题的最优解。

充分性证明：设是原问题的最优解，则

根据为对偶问题的可行点可得

由于对偶间隙为0，所以

。

由的定义可得

在由

可得

所以为优化问题（4.1）的Lagrange函数的鞍点。 □

## 三、线性规划的对偶定理

首先给出线性规划问题为 

由第二章的结论可轻易得到问题（4.3）的最优性条件。首先我们给出（4.3）的Lagrange

函数：

根据定理4.1的结论可得：

**定理4.2（线性规划的一阶最优性条件）**为问题（4.3）的最优解的充要条件为存在满足以下KKT条件：

(1)

证明：必要性可由定理4.1得到。

充分性证明：令为满足KKT条件（1）的向量，则

通过第三部分的讨论可知，为问题（4.3）的对偶问题的目标函数，所以若满足KKT条件（1），则。由第三章的定理3.4可得为问题（4.3）的最优解。

显然为问题（4.3）的全局最优解，若为问题（4.3）的可行点，则

所以为问题（4.3）的全局最优解。 □

接下来考虑问题（4.3）的对偶问题，根据关于对偶形式的讨论可知对偶问题为

所以（4.3）的对偶问题为：

（4.4）

将（4.4）化为极小化问题可得

则该问题的Lagrange函数为：

.

问题（4.4）的KKT条件为：

(2)

令，则。

显然KKT条件(2)和KKT条件(1)相同。所以（4.3）的Lagrange乘子为对偶问题（4.4）的最优解，（4.4）的Lagrange乘子为原问题（4.3）的最优解。

根据以上讨论，可得到下面的推论：

推论4.2：问题若是该问题的最优解，

存在，使得



**定理4.3（线性规划的弱对偶定理）**任意的为问题（4.3）的可行点，为问题（4.4）的可行点，则有

.

**定理4.4（线性规划的强对偶定理）**

1. 若问题（4.3）或（4.4）中有一个有最优解，则另一个也有最优解；
2. 若问题（4.3）或（4.4）中有一个无界，则另一个不可行。

证明：（1）若问题（4.3）有最优解，根据定理4.2，存在满足KKT条件（1），

所以为问题（4.4）的最优解。同理可证另一种情况。

（3）若问题（4.3）无下界，即存在为可行点，使得。假设（4.4）可行，由弱对偶定理可得，任意为问题（4.2）的可行点，则有，所以

矛盾！所以问题（4.4）不可行。同理可证另一种情况。

**推论4.3**：对于原问题和对偶问题，必有

。

推论4.3说明若问题（P）或（D）有无界解，则其对偶问题（D）或（P）无可行解；若问题（P）或（D）无可行解，则其对偶问题（D）或（P）或者无可行解，或目标函数值趋于无穷。

**推论4.4**：若，其中为原问题的可行解，，则和分别是原问题、对偶问题的最优解。

推论4.4说明极大化问题的任何一个可行解所对应的目标函数值都是其对偶问题的目标函数值的下界。

**推论4.5**：若，则，有。

推论4.5 说明极小化问题的任何一个可行解所对应的目标函数值都是其对偶问题的目标函数值的上界。

**推论4.6**：如果，则原问题没有可行解。

## 四、Lagrange乘子的经济学解释



设（NP）的局部最优解为，相应的Lagrange乘子为

对约束的右端项进行扰动,

****

，设扰动问题的局部最优解为，相应的Lagrange乘子为,当时,有

定理：设具有连续的二阶偏导数，是（NP）的局部最优解，是相应的Lagrange乘子向量，假设是扰动问题的局部最优解，是相应的乘子向量，则有

下面我们通过一个例子来解释上述的扰动思想。

例：某企业预算以2千元作为广告费，根据以往的经验，若以千元作广播广告，千元作报纸广告，销售金额为：

试问：（1）如何分配2千元的广告费？

（2）广告费预算作微小改变的影响如何？

解：最优问题为

相应的KKT条件为

，

解之得，KKT点为，，。

广告费作微小改动，考虑扰动问题,

有

当增加时，，即上升，即当广告费增加后，销售金额也随着增加，而且销售金额的增加大约是广告费的6倍，可见适当增加广告费的预算时有利的。

**总结**：前面对一般优化问题的最优化理论给出了介绍，特别是最优性条件和对偶理论。有些结果并不完美，例如最优性条件需要约束规范，而且鲜有充要条件，对偶间隙一般不为零。

为了得到更好的优化结论，同时能够有应用价值，我们后面将重点介绍两类特殊优化问题，即线性规划、凸规划（包括半定规划和凸锥规划）等。在运筹学历史发展初期，线性规划是最优化的重要研究焦点。当时，人们认为重要的区别在于线性和非线性优化问题，非线性问题比其他问题要困难得多。从1970之后，特别是国际优化大师Rockafellar教授出版《凸分析》之后，人们逐渐认识到，最优化问题比较恰当的区别是凸和非凸问题之间的区别。正如Rockafellar在1993年所言：目前优化问题的分水岭不是线性和非线性，而是凸和非凸。

接下来，我们将引入凸规划问题，而线性规划是其特例。为此，我们接下来先学习凸集和凸函数的基本概念和性质。

**五、习题**

参考文献：

1. 《Convex Optimization Algorithm》，Dimitri P. Bertsekas 2015.
2. 《Convex Optimization Theory》Dimitri P. Bertsekas， 2009
3. 《Numerical Optimization》Jorge Nocedal, Stephen Wright， 1999(2006)
4. 《Convex Optimization》 Stephen Boyd, Lieven Vandenberghe， 2004
5. 《最优化理论与算法》陈宝林，1989(2005)编著