# 第六讲　线性规划

* 线性规划标准型
* 多面集和多面体
* 极点和极方向
* 多面集表示定理
* 线性规划的基本性质
* 最优化条件
* 单纯形法
* 对偶单纯形法

前面我们已经学习了线性规划的最优化条件和对偶理论，本讲我们将考虑线性规划的基本性质、单纯形法和对偶单纯形法。由于线性规划的历史地位，我们简要介绍一下其发展。

## 一、线性规划的历史发展

法国数学家J.- B.- J.傅里叶和C.瓦莱－普森分别于1832和1911年独立地提出线性规划的想法，但未引起注意。1939年苏联数学家Л.В.康托罗维奇在《生产组织与计划中的数学方法》一书中提出线性规划问题，也未引起重视。

1947年美国数学家G.B.Dantzing提出求解线性规划的[单纯形法](https://baike.baidu.com/item/%E5%8D%95%E7%BA%AF%E5%BD%A2%E6%B3%95" \t "_blank)，为这门学科奠定了基础。1947年美国数学家J.von诺伊曼提出[对偶](https://baike.baidu.com/item/%E5%AF%B9%E5%81%B6" \t "_blank)理论,开创了线性规划的许多新的研究领域，扩大了它的应用范围和解题能力。1951年美国经济学家T.C.库普曼斯把线性规划应用到经济领域，为此与康托罗维奇一起获1975年[诺贝尔经济学奖](https://baike.baidu.com/item/%E8%AF%BA%E8%B4%9D%E5%B0%94%E7%BB%8F%E6%B5%8E%E5%AD%A6%E5%A5%96" \t "_blank)。50年代后对线性规划进行大量的理论研究，并涌现出一大批新的算法。例如，1954年C.莱姆基提出对偶单纯形法，1954年S.加斯和T.萨迪等人解决了线性规划的[灵敏度分析](https://baike.baidu.com/item/%E7%81%B5%E6%95%8F%E5%BA%A6%E5%88%86%E6%9E%90" \t "_blank)和参数规划问题，1956年A.塔克提出互补松弛定理，1960年G.B.丹齐克和P.沃尔夫提出分解算法等。线性规划的研究成果还直接推动了其他[数学规划](https://baike.baidu.com/item/%E6%95%B0%E5%AD%A6%E8%A7%84%E5%88%92" \t "_blank)问题包括[整数规划](https://baike.baidu.com/item/%E6%95%B4%E6%95%B0%E8%A7%84%E5%88%92" \t "_blank)、随机规划和[非线性规划](https://baike.baidu.com/item/%E9%9D%9E%E7%BA%BF%E6%80%A7%E8%A7%84%E5%88%92" \t "_blank)的算法研究。由于[数字电子计算机](https://baike.baidu.com/item/%E6%95%B0%E5%AD%97%E7%94%B5%E5%AD%90%E8%AE%A1%E7%AE%97%E6%9C%BA" \t "_blank)的发展，出现了许多线性规划软件，如MPSX，OPHEIE，UMPIRE等，可以很方便地求解几千个变量的线性规划问题。1979年苏联数学家L. G. Khachian提出解线性规划问题的椭球算法，并证明它是多项式时间算法。

1984年美国贝尔电话实验室的印度数学家N.卡马卡提出解线性规划问题的新的多项式时间算法。用这种方法求解线性规划问题在变量个数为5000时只要单纯形法所用时间的1/50。现已形成线性规划多项式算法理论。50年代后线性规划的应用范围不断扩大。 建立线性规划模型的方法

## 二、线性规划标准型

若约束优化问题中目标函数和约束条件都是线性的，则为线性规划问题。线性规划问题的标准形式为：

（4.1）

其中

若线性规划问题不是标准形式（4.1），则可以通过以下方法转换为标准模型：

（1）

（2）

（3）

其中，,。

（4）

**为了深入研究线性规划， 我们首先分析与其约束有关的多面集理论。**

**定义4.1（多面体）**

若可以表示为如下形式：

则为一个多面体。

显然多面体为凸集，且线性规划规划问题的可行域非空时，为一个多面体。对于多面体，我们给出其中两个重要的定义。

**定义4.2（极点）**

设为一个非空凸集，若不能表示为两个不同点的凸组合，即不存在两个不同的点和实数，使得.则称为的一个极点。

如：线段的极点为两个端点，三角形的极点为端点，多面体的极点为顶点。

**定义4.3（极方向）**

设为一个非空凸集，若向量满足：，射线

R()={+}

则称向量是的一个方向，当不能表示成的两个不同的方向的凸锥组合，即不存在两个不同的方向 使得。则方向称为的一个极方向。

对于标准的线性规划问题（4.1），若可行域非空，则的方向满足：且满足该条件的为的方向。

因为为的方向，有R()={+}

++

考虑标准形式：

设可行域。

极点：

极方向：

由表示定理，对任意





多面集表示定理

## 三、线性规划的基本性质

可行解：满足LP模型的约束条件且满足非负条件的解。

定理1: 线性规划(LP)的可行域是凸集。

显然，线性规划是凸规划的特例。

**定理4.1（线性规划基本定理）**

假设标准形式（4.1）的可行域非空，则有：

（1）问题（4.1）存在有限最优解，当且仅当对于可行域的任意极方向，的极方向的下标集合，有

（2）若问题（4.1）存在有限最优解，则其最优值可以在的某个极点上取到。

最优极点

考虑标准形式 ：

设可行域

极点：

极方向：

由表示定理，对任意



 

代入标准形式

1. 若存在j，使得则，即该问题无界。
2. 对任意j，令得



令，则当时，最小

对任意，由于



所以，极点是原问题得最优解。

**基和基本解**



设按列分块=

等价于

基矩阵得个数最多为

（1）系数矩阵A中任意m列所组成的m阶可逆子方阵B，称为（LP）的一个基（矩阵），变量，若它所对应的列包含在基B中，则称为基变量，否则称为非基变量。基变量的全体称为一组基变量，记。

（2）设，其中设.

由得，



令，得称x为（LP）的基（本）解。

1. 若，则称为（LP）的基本可行解，B称为可行基矩阵，为一组可行基。
2. 若，则称基本可行解是非退化的，否则称为退化的。

**线性规划问题解的关系**

可行解、基本解核基本可行解举例



|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 非基变量 | 基变量 | | | 图中的点解 |
|  | =10 | =8 | =7 | O基本可行解 |
|  | =10 | =-2 | =-3 | F基本解 |
|  | =8 | =2 | =-1 | E基本解 |
|  | =7 | =3 | =1 | A基本可行解 |
|  | =5 | =3 | =7 | D基本可行解 |
|  | =8 | =-6 | =7 | H基本解 |
|  | =2 | =6 | =1 | C基本可行解  最优解 |
|  | =1.5 | =7 | =-0.5 | G基本解 |
|  | =1 | =7 | =1 | B基本可行解 |
|  | | | | K可行解 |

引理：可行解是基本可行解的非零分量所对应的A的列向量线性无关。

证明 不妨设的前k个分量为正分量

，

“”是基本可行解，则取正值的变量必为基变量，它们对应的列向量为基向量，所以线性无关。

“”设线性无关，则。因为是可行解，所以有

若k=m，则就是基。

若k<m，则一定可以从其余的n-k个列向量中再挑出m-k个列向量，设为，使线性无关。令则B是基，且 。

所以，是相应于B的基本可行解。

定理：设S是（LP）的可行域，，则是 S的极点是（LP）的基本可行解。

证明：

“”设是S的极点，其中，.设对应的列向量为，则线性无关。

否则，存在不全为0的数使得

令 

因为，所以，当充分小时，有。

由于，因此，即。

则



同理可证

所以，，且，但与是极点矛盾，所以线性无关，由引理，是基本可行解。

“”已知是， 的基本可行解，即



假设存在及使得。

设，则有





，又因为，所以。

，

即且因此有，

所以，即是极点。

基可行解的存在性

定理1.如果（LP）有可行解，则一定存在基本可行解。

证明：设是一个可行解且。若线性无关，则由引理，x为基本可行解；

设线性相关，则存在不全为0的、而且其中至少有一个为正的数使得。

定义 其中

则当时，有

且。



是可行解，且的正分量至少比少1。若的正分量所对应的A的列线性无关，则为基本可行解，否则，从出发，重复以上步骤，直至获得一个基本可行解。

定理2.如果（LP）有最优解，则存在一个基本可行解是最优解。

结论：若LP问题有最优解，则要么最优解唯一，要么有无穷多最优解。

证明:



不妨设是LP问题的最优解，

则有，，



作

则

又，且

则是最优解。

## 三、线性规划的图解法

两变量线性规划问题的图解法

1. 线性不等式的几何意义——半平面
2. 图解法步骤
3. 作出LP问题的可行域
4. 作出目标函数的等值线
5. 移动等值线到可行域边界得到最优点

例：



最优解：





结论：若LP问题存在最优解，则必在可行域的某个极点上找到。

一般地，当等值线沿目标函数法向量(梯度)方向平行移动时，目标函数值逐步增加；当等值线沿目标函数法向量反方向平行移动时，目标函数值逐步减少。

几种特殊情况

* LP存在多个最优解



结论：以z为参数的直线族与可行域某一条边平行，最终重合，则该LP存在多个解。



* LP问题无可行解

例：

结论:若LP的可行域为空集，则该LP问题无可行解。



* LP问题存在无界解

例：



判断：若LP的可行域无界，则该LP可能存在无界解。



**图解法的意义**

* 能解决少量问题
* 揭示了线性规划问题的若干规律

规律1:

LP问题

无可行解（无解）

有可行解

有最优解

无最优解（可行域为无界）

唯一解

无穷多解

## 四、单纯形法

LP基本定理：\*可行域的极点对应LP问题的基（本）可行解

\*LP的最优解一定可以在基（本）可行解中找到

1.单纯形法的步骤

初始基可行解

最优性条件

最优解

换基迭代

新的基可行解

**N**

**Y**

1. **初等线性变换**

本部分主要为线性规划的单纯形法做准备，线性变换等价为线性变换的系数矩阵进行相

应的变换。此处介绍初等行变换的矩阵表示形式**，**初等列变换可相应得到，因此不花过多的篇幅介绍。

初等行变换可表示为线性变换的系数矩阵左乘相应变换的初等矩阵。

初等列变换可表示为线性变换的系数矩阵右乘相应变换的初等矩阵。

首先引入几种常用的初等行变换对应的初等矩阵：

表示将单位矩阵的第行元素加到第行。

表示将单位矩阵的第行元素乘。

表示将单位矩阵的第行元素乘然后加到第行。

以二阶矩阵为例，设为二阶矩阵，=

，，即为将矩阵的第一行元素加到第二行上。

，即为将矩阵的第一行元素乘。

，，即为将矩阵的第一行元素乘然后加到第二行上。

**定义4.4（基本可行解）**

对于问题（4.1），通过单纯形法得到的任一点都称为（4.1）的基本可行解，基本可行解需要满足以下条件：

1. 可行；

存在满足：

1. 包含m个指标；
2. ，;
3. 是非奇异的，表示的第行。

满足（2）、（3）、（4）的称为（4.1）的基指标集，相应的变量称为基变量，矩阵称为基矩阵。

单纯形法的基本思想就是从多面体的某个顶点出发，移动到使得目标函数有所改进的相邻的顶点；然后再从相邻的顶点出发，移动到一个更好的顶点，直到达到最优的顶点或者判定该线性规划问题无下界。

假设已知基指标集，定义非基指标集, 非基指标集对应的矩阵为由2可知线性规划问题（4.1）的KKT条件，将KKT条件按指标集划分可得：

（1）；

（2）；

（3）；

（4）。

根据（1）—（4）可得，

根据KKT条件，我们得到线性规划问题算法的转轴法则。

**转轴法则：（由当前可行解转到相邻的顶点）**

显然，若，则当前点为最优解。若存在使得则入基。

令为新的基向量，表示原来的基向量在时新的取值，则

，

所以

若增加，之中有一个分量减少为0，则出基；

若增加，，则问题无界。因为此时得到的目标函数取值为

，，则

**由此可得单纯形法的算法步骤如下：**

1. 给定，，；
2. ，。若，则当前点为最优解，否则转（3）。
3. 选择满足 则入基，令，若，则问题无界，此时停止算法。否则转（4）
4. 选择为出基变量，其中p为下面优化问题的最优解：

即为在中的下标为p.

1. 令，则中必然有一个分量为0，。
2. 重复（1）—（5）直到 或者得到问题无界。

例4.1 考虑如下优化问题：

显然该问题为线性规划问题，利用上述单纯形法的算法步骤可得

第一步：选择，，此时，

选择，选择 为出基变量。 ；

第二步：令，，此时，

，

选择，选择。

；

第三步：令，，此时，

，,

因此可得最优解为，最优值为。 □

为了简单直观，我们可以把单纯形法的计算过程简化为单纯形表的形式。



等价于







基变量取值

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  | 右端 |
|  | 0 |  |  |  |
|  | 1 | 0 |  |  |

目标函数值

可省略

检验数

（判别数）



**用单纯性表求解问题**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | 右端 |
|  |  |  |  |
|  | 0 |  |  |

假设，有一基本可行解



1. 若（极小化问题），则现行基本可行解为最优解。
2. 若存在，用主元消去法求改进的基本可行解。
3. 选进基变量：在表的最后一行有，则为进基变量，它所对应的列作为主列；
4. 若主列中所有元素，则原问题无最优解（无界）；
5. 若主列中存在元素>0，令，则为离基变量，第r行为主行。

主列和主行交叉处的元素称为主元。

主元消去法：把主列化为单位向量。

在此，我们以例4.1为例对单纯形表进行说明：

**例4.1的单纯形表解法：**

下表为初始单纯形表（1）：

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | | -4 | -2 | 0 | 0 |  |
|  | 基 |  |  |  |  | b |
| 0 |  | 1 | 1 | 1 | 0 | 5 |
| 0 |  | 2 | 1/2 | 0 | 1 | 8 |
|  |  | -4 | -2 | 0 | 0 |  |

其中*A=*为系数矩阵，，根据此表选择为入基变量，为出基变量。

因而可得单纯形表（2）：

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | | -4 | -2 | 0 | 0 |  |
|  | 基 |  |  |  |  | b |
| 0 |  | 0 | 3/4 | 1 | -1/2 | 1 |
| -4 |  | 1 | 1/4 | 0 | 1/2 | 4 |
|  |  | 0 | -1 | 0 | 2 |  |

其中新的系数矩阵为，即首先将的第二行元素乘以1/2得到新的矩阵，然后将新矩阵的第二行的-1倍加到第一行上。此过程的目的是使得基矩阵始终保持为单位矩阵，此时b。用同样的方法可得。

根据此表选择为入基变量，。

因而可得单纯形表（3）：

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | | -4 | -2 | 0 | 0 |  |
|  | 基 |  |  |  |  | b |
| -2 |  | 0 | 1 | 4/3 | -2/3 | 4/3 |
| -4 |  | 1 | 0 | -1/3 | 2/3 | 11/3 |
|  |  | 0 | 4/3 | 0 | 4/3 |  |

其中新的系数矩阵为，即首先将的第一行元素乘以4/3得到新的矩阵，然后将新矩阵的第一行的-1/4倍加到第二行上。此过程的目的是使得基矩阵始终保持为单位矩阵，此时b。用同样的方法可得。此时，因此可得最优解为最优值为。 □

例：

解：化为标准型



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | 右端 |
|  |  |  |  |
|  | 0 |  |  |



|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  | **1** | **-2** | **1** | **0** | **0** | **2** |
|  | **0** | **1** | **-3** | **1** | **0** | **1** |
|  | **0** | **1** | **-1** | **0** | **1** | **2** |
|  | **0** | **1** | **-2** | **0** | **0** | **0** |
|  | **1** | **0** | **-5** | **2** | **0** | **4** |
|  | **0** | **1** | **-3** | **1** | **0** | **1** |
|  | **0** | **0** | **2** | **-1** | **1** | **1** |
|  | **0** | **0** | **1** | **-1** | **0** | **-1** |
|  | **1** | **0** | **0** | **-1/2** | **5/2** | **13/2** |
|  | **0** | **1** | **0** | **-1/2** | **3/2** | **5/2** |
|  | **0** | **0** | **1** | **-1/2** | **1/2** | **1/2** |
|  | **0** | **0** | **0** | **-1/2** | **-1/2** | **-3/2** |



**单纯形法的进一步讨论**

* 无界解

例：





|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  | **1** | **-1** | **1** | **0** | **2** |
|  | **-3** | **1** | **0** | **1** | **4** |
|  | **2** | **3** | **0** | **0** | **0** |
|  | **-2** | **0** | **1** | **1** | **6** |
|  | **-3** | **1** | **0** | **1** | **4** |
|  | **11** | **0** | **0** | **-3** | **12** |



对无约束，

结论：若，对应的系数列向量，则该LP存在无界解。

* 无限多个解

例：





|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  | **2** | **7** | **1** | **0** | **21** |
|  | **7** | **2** | **0** | **1** | **21** |
|  | **4** | **14** | **0** | **0** | **0** |
|  | **2/7** | **1** | **1/7** | **0** | **3** |
|  | **45/7** | **0** | **-2/7** | **1** | **15** |
|  | **0** | **0** | **-2** | **0** | **-42** |
|  | **0** | **1** | **7/45** | **-2/45** | **7/3** |
|  | **1** | **0** | **-2/45** | **7/45** | **7/3** |
|  | **0** | **0** | **-2** | **0** | **-42** |



结论：若某个非基变量的检验数为零，则该LP存在多个最优解。

为了方便求出原问题的一个基可行解，可以用大M法和两阶段法。另外，解决退化的方法有：“摄动法”、“字典序法”、 Bland规则等。读者可以查阅相关文献，在此省略。

下面介绍对偶单纯形法。

推论 在用单纯形法求解LP问题（P）的最优单纯形表中松弛变量的检验数的相反数（单纯形乘子）就是其对偶问题（D）的最优解。

由于（P）化成标准形式时，松弛变量对应的列为，它在目标函数中的加个系数=0，所以，判别数为，则松弛变量对应的判别数均乘以（-1），便得到单纯形乘子。

当原问题达最优时，单纯形乘子即为对偶问题的最优解。

## 五、对偶单纯形法

定义：设是（P）的一个基本解（不一定是可行解），它对应的矩阵为B，记，若w是（P）的对偶问题的可行解，即对任意的j，，则称为原问题的对偶可行的基解。

结论：当对偶可行的基解是原问题的可行解时，由于判别数，因此，它就是原问题的最优解。

**基本思想：**

从原问题的一个对偶可行的基解出发；

求改进的对偶可行的基解：每个对偶可行的基解对应一个对偶问题的可行解，相应的对偶问题的目标函数，所谓改进的对偶可行的基解，是指对于原问题的这个基解，相应的对偶问题的目标函数值wb有改进（选择离基变量和进基变量，进行主元消去）；

当得到的对偶可行的基解是原问题的可行解时，就达到最优解。

与原单纯形法的区别：

原单纯形法保持原问题的可行性，对偶单纯形法保持所有检验数，即保持对偶问题的可行性。

特点：先选择出基变量，再选择进基变量。

步骤：

1. 化标准型，建立初始单纯形表
2. 判断，若，则已得到最优解
3. 换基迭代
4. 确定换出变量，为换出变量。
5. 确定换入变量，为换入变量。

（若所有，则该LP无可行解）

1. 换基迭代，为主元。

4、回到第2步

例：



解：引入松弛变量，化为标准型

 



|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  | **-3** | **-1** | **-1** | **1** | **0** | **-1** |
|  | **1** | **-4** | **-1** | **0** | **1** | **-2** |
|  | **-1** | **-1** | **-1** | **0** | **0** | **0** |
|  | **-13/4** | **0** | **-3/4** | **1** | **-1/4** | **-1/2** |
|  | **-1/4** | **1** | **1/4** | **0** | **-1/4** | **1/2** |
|  | **-5/4** | **0** | **-3/4** | **0** | **-1/4** | **1/2** |
|  | **1** | **0** | **3/13** | **-4/13** | **1/13** | **2/13** |
|  | **0** | **1** | **4/13** | **-1/13** | **-3/13** | **7/13** |
|  | **0** | **0** | **-6/13** | **-5/13** | **-2/13** | **9/13** |

为最优解，，对偶问题的最优解为

**习题：**

例：用对偶单纯形法求解下列LP问题



补充

参考文献

1. 《Convex Optimization Algorithm》 Dimitri P. Bertsekas, 2015
2. 《Convex Optimization Theory》Dimitri P. Bertsekas， 2009
3. 《Numerical Optimization》Jorge Nocedal, Stephen Wright， 1999(2006)
4. 《Convex Optimization》 Stephen Boyd, Lieven Vandenberghe， 2004
5. 《最优化理论与算法》陈宝林，1989(2005)编著
6. J.P. Hiriart-Urruty and C. Lemarechal (1993), \Fundamentals of convex analysis"
7. R. T. Rockafellar (1970), \Convex analysis"