

# 用时滞和阶跃序列组合生成网格 多涡卷蔡氏混沌吸引子<sup>\*</sup>

张朝霞 禹思敏<sup>†</sup>

(广东工业大学自动化学院, 广州 510006)

(2008 年 6 月 9 日收到, 2008 年 7 月 13 日收到修改稿)

提出了在规范型蔡氏电路中生成两种不同类型网格多涡卷混沌吸引子的新方法. 与现有文献报道仅构造同一类型非线性函数产生多涡卷混沌吸引子的主要差别在于, 这种方法能在一个蔡氏电路中同时构造时滞序列和阶跃序列, 并通过其不同的组合方式来扩展相空间中指标 2 的鞍焦平衡点, 从而生成两种不同类型的网格多涡卷混沌吸引子. 理论分析、数值模拟和电路实验结果证实了该方法的可行性.

关键词: 规范型蔡氏电路, 网格多涡卷混沌吸引子, 时滞序列和阶跃序列, 电路实现

PACC: 0545

## 1. 引言

网格多涡卷混沌吸引子是单方向多涡卷混沌吸引子的进一步延伸与扩展, 其主要特征是混沌吸引子中的涡卷在相空间中呈现出两个或多个方向分布的平面、立体或多维网格状图案, 具有更复杂的混沌动力学行为, 国际上对其研究始于 2002 年<sup>[1]</sup>. 近年来, 人们相继报道了许多新型网格多涡卷系统, 如网格多环面系统、网格多涡卷蔡氏系统、多方向分布多涡卷混沌系统、环状多涡卷广义 Lorenz 系统族等<sup>[2-13]</sup>.

另一方面, 在蔡氏电路和某些混沌电路中生成单方向多涡卷混沌吸引子的研究由来已久, 并有大量文献报道了相关结果<sup>[14-23]</sup>, Suykens 等人是开展这方面工作的先驱<sup>[14]</sup>. 但有关网格多涡卷蔡氏混沌吸引子的文献报道却很少<sup>[11]</sup>, 主要原因是用于生成单方向多涡卷混沌吸引子的非线性函数, 如多分段线性函数、正弦函数、多项式等, 不能推广到蔡氏电路中生成网格多涡卷混沌吸引子<sup>[14-23]</sup>. 此外, Cafagna 等报道了在蔡氏电路中生成  $n \times m$  涡卷和三维涡卷混沌吸引子<sup>[24, 25]</sup>, 但其不足之处是采用了多个蔡氏电路相耦合的方法, 这种方法显然无法用

于单个蔡氏电路中生成网格多涡卷混沌吸引子. 最近, Xu 等提出了解决这一问题的新方法, 报道了在单个蔡氏电路中生成网格多涡卷混沌吸引子的最新结果<sup>[11]</sup>.

需要强调的是, 现有文献中报道生成网格多涡卷或多方向多涡卷混沌吸引子的方法主要局限于所研究的混沌系统中构造相同类型的非线性函数<sup>[1-23]</sup>. 能否在同一个系统中构造两个甚至多个不同类型的非线性函数生成网格多涡卷混沌吸引子? 我们对此进行了研究. 以蔡氏电路为例, 通过构造时滞序列和阶跃序列两类不同的非线性函数, 在相空间的  $x$  方向和  $y$  方向上扩展指标 2 的鞍焦平衡点, 从而能生成两类不同的网格多涡卷混沌吸引子. 分析了网格多涡卷混沌系统的基本动力学特性, 包括平衡点、分岔和最大李氏指数. 在理论分析与数值模拟的基础上, 进行了混沌电路的设计和实验, 给出了硬件实验结果, 证实了数值模拟与电路实验结果的一致性.

## 2. 用时滞序列和阶跃序列的组合生成 第一类网格多涡卷混沌吸引子

根据文献 [11] 的研究结果, 用相同形式的非线性

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金(批准号: 60572073, 60871205)和广东省自然科学基金(批准号: 8151009001000060, 8351009001000002)资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: siminyu@163.com

性函数  $f_1(x)$  和  $f_2(y)$  在规范型蔡氏电路中生成网格多涡卷混沌吸引子的无量纲状态方程为

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha[y - f_2(y) - f_1(x)], \\ \dot{y} &= x - y + z, \\ \dot{z} &= -\beta[y - f_2(y)],\end{aligned}\quad (1)$$

式中  $f_1(x)$  和  $f_2(y)$  均为阶跃函数序列。

进一步的研究结果表明,当  $f_1(x)$  和  $f_2(y)$  为不同类型的非线性函数时,也能在蔡氏电路生成网格多涡卷混沌吸引子。例如,当  $f_1(x)$  为阶跃序列而  $f_2(y)$  为时滞序列时,可生成第一类网格多涡卷混沌吸引子,当  $f_1(x)$  为时滞序列而  $f_2(y)$  为阶跃序列时,能生成第二类网格多涡卷混沌吸引子。为便于用不同类型的非线性函数生成这两类混沌吸引子,需对(1)式作形式上的变换,得变换后的无量纲状态方程为

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha[y - f_2(y) - 0.5\xi x + f_1(x, \xi)], \\ \dot{y} &= x - y + z, \\ \dot{z} &= -\beta[y - f_2(y)],\end{aligned}\quad (2)$$

式中  $\alpha = 10$ ,  $\beta = 15$ ,  $\xi = 0.3 \sim 1$  为控制参数。注意到(1)式中的  $f_1(x)$  和  $f_2(y)$  为同一类型的非线性函数,而(2)式中的  $f_1(x, \xi)$  和  $f_2(y)$  为两类完全不同的非线性函数。

若在(2)式中生成两类不同的网格多涡卷混沌吸引子,关键要解决  $f_1(x, \xi)$  和  $f_2(y)$  的最佳函数构造问题,当用它们来扩展相平面中指标 2 的鞍焦平衡点时,使得相轨迹能跑遍包括所有平衡点在内的相空间,并在每一个指标 2 的鞍焦平衡点附近生成一个涡卷。

首先,在(2)式中构造第一个新的阶跃序列  $f_1(x, \xi) \in \{f_{11}(x, \xi), f_{12}(x, \xi)\}$ 。其中  $f_{11}(x, \xi)$  的数学表达式为

$$f_{11}(x, \xi) = A_1 \xi \left\{ \sum_{n=1}^{N_{11}} \operatorname{sgn}[x + (4n - 2)A_1] + \sum_{n=1}^{N_{11}} \operatorname{sgn}[x - (4n - 2)A_1] \right\}, \quad (3)$$

式中  $A_1 = 0.25$ ,  $\xi = 0.5$ ,  $N_{11} \geq 1$ 。  $f_{12}(x, \xi)$  的数学表达式为

$$f_{12}(x, \xi) = A_1 \xi \left[ -\operatorname{sgn}(x) + \sum_{n=0}^{N_{12}} \operatorname{sgn}(x + 4nA_1) + \sum_{n=0}^{N_{12}} \operatorname{sgn}(x - 4nA_1) \right], \quad (4)$$

式中  $A_1 = 0.25$ ,  $\xi = 0.5$ ,  $N_{12} \geq 0$ 。

其次,在(2)式中构造第二个新的时滞序列  $f_2(y)$ ,其数学表达式为

$$f_2(y) = A_2 \left[ \sum_{m=0}^{M_{21}} h_{-ym}(y + mA_2) + \sum_{m=0}^{M_{22}} h_{+ym}(y - mA_2) \right], \quad (5)$$

式中  $A_2 = 0.25$ ,  $M_{21} \geq 0$ 。  $h_{+vm}(v - mA)$  和  $h_{-vm}(v + mA)$  为基本时滞函数,其定义为<sup>[7]</sup>

$$\begin{aligned}h_{+vm}(v - mA) &= \begin{cases} 0, & v - mA < A, \\ 1, & v - mA > 0, \end{cases} \\ h_{-vm}(v + mA) &= \begin{cases} 0, & v + mA > -A, \\ -1, & v + mA < 0, \end{cases}\end{aligned}\quad (6)$$

式中  $v \in [x, y]$ ,  $m \geq 0$ , 如图 1 所示。

注意到用(2)~(5)式在蔡氏电路中生成第一类网格多涡卷混沌吸引子,网格涡卷的数量由  $f_1(x, \xi)$  和  $f_2(y)$  的具体形式及参数来确定。根据(2)式、(3)式和(5)式,能生成的网格涡卷数量为  $(2N_{11} + 1) \times (M_{21} + M_{22} + 3)$ 。根据(2)式、(4)式和(5)式,能生成的网格涡卷数量为  $(2N_{12} + 2) \times (M_{21} + M_{22} + 3)$ 。

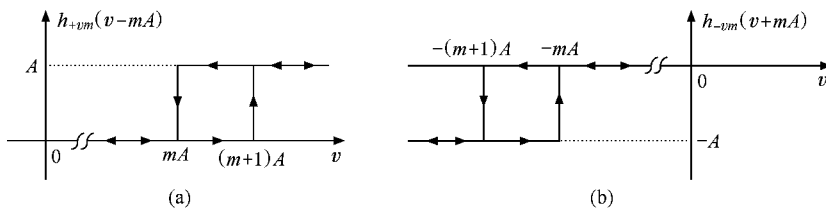


图 1  $h_{+vm}(v - mA)$  和  $h_{-vm}(v + mA)$  的函数图形 (a)  $h_{+vm}(v - mA)$  的函数图形 (b)  $h_{-vm}(v + mA)$  的函数图形

3. 用时滞序列和阶跃序列的组合生成  
第二类网格多涡卷混沌吸引子

若用时滞序列和阶跃序列的组合在蔡氏电路中生成第二类网格多涡卷混沌吸引子,同样需要在(2)式中构造两个新的最佳非线性函数.

首先,在(2)式中构造第一个新的时滞序列  $f_1(x, \xi)$ ,其数学表达式为

$$f_1(x, \xi) = A_1 \xi \left[ \sum_{m=0}^{M_{11}} h_{-xm}(x + 2mA_1) + \sum_{m=0}^{M_{12}} h_{+xm}(x - 2mA_1) \right], \quad (7)$$

式中  $A_1 = 0.25, \xi = 0.5, M_{11} \geq 0$ .

其次,在(2)式中构造第二个新的阶跃序列  $f_2(y) \in \{f_{21}(y), f_{22}(y)\}$ . 其中  $f_{21}(y)$  的数学形式为

$$f_{21}(y) = A_2 \left\{ \sum_{n=1}^{N_{21}} \text{sgn}[y + (2n - 1)A_2] + \sum_{n=1}^{N_{21}} \text{sgn}[y - (2n - 1)A_2] \right\}, \quad (8)$$

式中  $A_2 = 0.25, N_{21} \geq 1, f_{22}(y)$  的数学表达式为

$$f_{22}(y) = A_2 \left[ -\text{sgn}(y) + \sum_{n=0}^{N_{22}} \text{sgn}(y + 2nA_2) \right]$$

$$+ \sum_{n=0}^{N_{22}} \text{sgn}(y - 2nA_2) \Big], \quad (9)$$

式中  $A_2 = 0.25, N_{22} \geq 0$ .

注意到用(2)式、(7)–(9)式生成第二类网格多涡卷蔡氏混沌吸引子,网格涡卷数量由  $f_1(x, \xi)$  和  $f_2(y)$  的具体形式及参数确定. 根据(2)式、(7)式和(8)式,能生成的网格涡卷数量为  $(M_{11} + M_{12} + 3) \times (2N_{21} + 1)$ . 根据(2)式、(7)式和(9)式,网格涡卷数量为  $(M_{11} + M_{12} + 3) \times (2N_{22} + 2)$ .

4. 两类网格多涡卷混沌吸引子的数值模拟结果

根据(2)式、(3)式和(5)式,令  $N_{11} = 2, M_{21} = M_{22} = 0$ ,得第一类  $5 \times 3$  网格多涡卷混沌吸引子的数值模拟结果如图 2(a)所示. 根据(2)式、(4)式和(5)式,令  $N_{12} = 2, M_{21} = M_{22} = 0$ ,得第一类  $6 \times 3$  网格多涡卷混沌吸引子的数值模拟结果如图 2(b)所示.

根据(2)式、(7)式和(8)式,令  $M_{11} = M_{12} = 2, N_{21} = 1$ ,得第二类  $7 \times 3$  网格多涡卷混沌吸引子的数值模拟结果如图 3(a)所示. 根据(2)式、(7)式和(9)式,令  $M_{11} = M_{12} = 2, N_{22} = 1$ ,得第二类  $7 \times 4$  网格多涡卷混沌吸引子的数值模拟结果如图 3(b)所示.

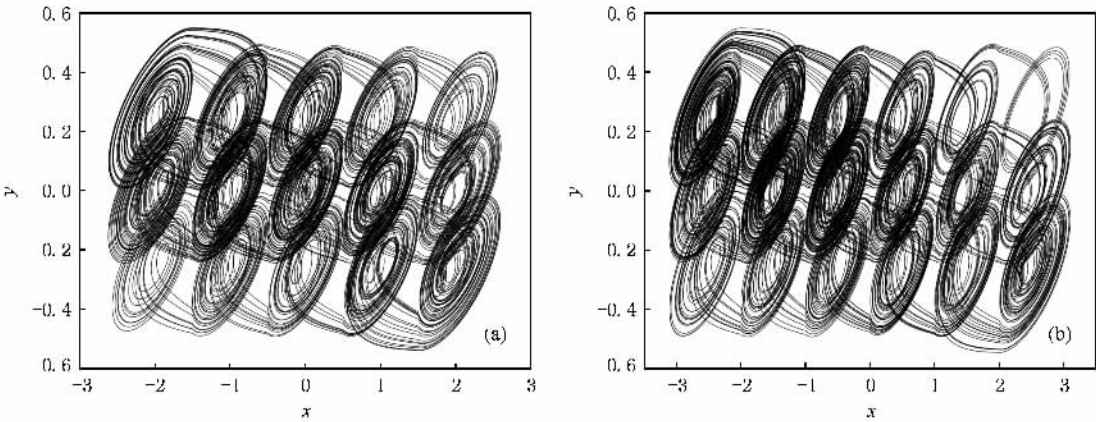


图 2 蔡氏电路中的第一类网格多涡卷混沌吸引子 (a)  $5 \times 3$  网格多涡卷混沌吸引子 (b)  $6 \times 3$  网格多涡卷混沌吸引子

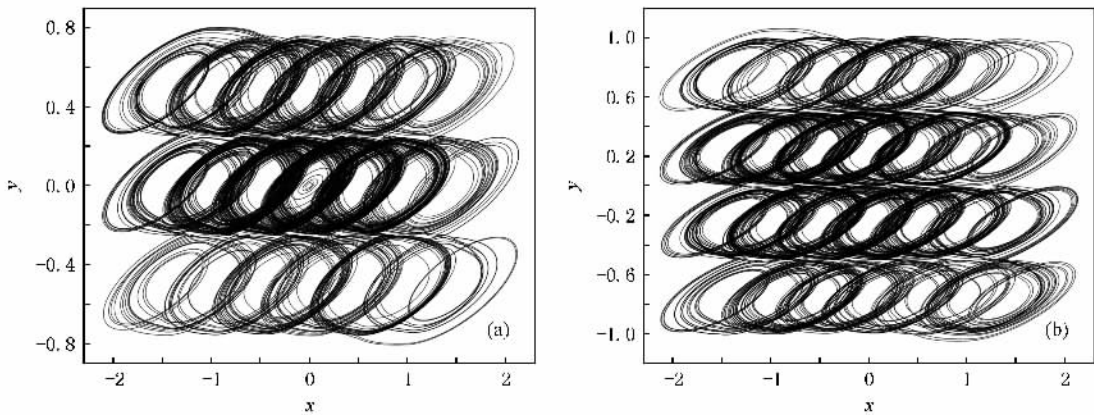


图 3 蔡氏电路中的第二类网格多涡卷混沌吸引子 (a)  $7 \times 3$  网格多涡卷混沌吸引子 (b)  $7 \times 4$  网格多涡卷混沌吸引子

5. 系统的基本动力学特性

现分析第一、二类网格多涡卷混沌吸引子的基本动力学特性,包括平衡点分布以及随着控制参数  $\xi$  改变时的分岔图与最大李氏指数,并阐述控制参数  $A_1, A_2, \xi$  的物理意义.

为求得系统的平衡点,令(2)式中的  $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$ ,得平衡点方程为

$$\begin{aligned} f_1(x, \xi) - 0.5\xi x &= 0, \\ y - f_2(y) &= 0, \\ x - y + z &= 0. \end{aligned} \tag{10}$$

根据(10)式,以第一类  $6 \times 3$  网格多涡卷混沌吸引子的平衡点为例,得  $x$ - $y$  相平面上的平衡点分布如图 4 所示.图中用符号“ $\bigcirc$ ”表示指标 2 的鞍焦平衡点.注意到指标 2 的鞍焦平衡点共有  $6 \times 3$  个,每个对应的平衡点产生一个涡卷,故网格涡卷的数量也为  $6 \times 3$  个,如图 4 所示.

同理,根据(10)式,以第二类  $7 \times 4$  网格多涡卷混沌吸引子的平衡点为例,得  $x$ - $y$  相平面上的平衡点分布如图 5 所示,图中用符号“ $\bigcirc$ ”表示指标 2 的鞍焦平衡点,网格涡卷的数量为  $7 \times 4$  个,如图 5 所示.

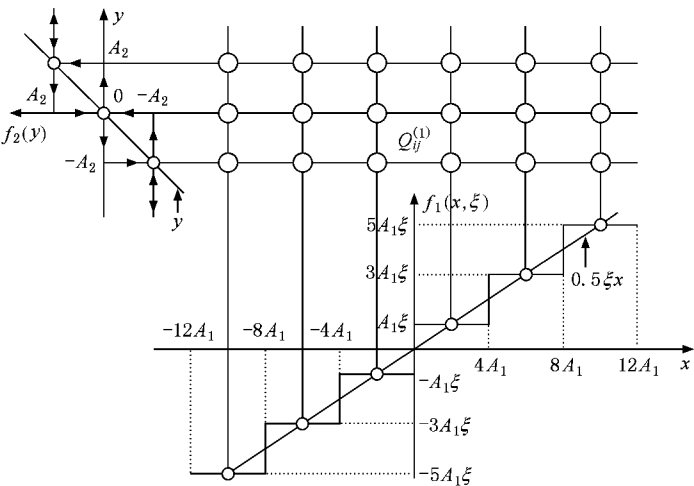


图 4 第一类  $6 \times 3$  网格多涡卷混沌吸引子  $x$ - $y$  相平面上的鞍焦平衡点

根据图 4 和图 5 以及(2)–(10)式,得第一类网格多涡卷混沌吸引子指标 2 的鞍焦平衡点  $Q_{ij}^{(1)}$  的计算公式为

$$\begin{aligned} Q_{ij}^{(1)} &= (4iA_1, jA_2, jA_2 - 4iA_1), \\ &\quad (i, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \\ Q_{ij}^{(1)} &= ((4|i|-2)iA_1, |i|jA_2, jA_2) \end{aligned}$$

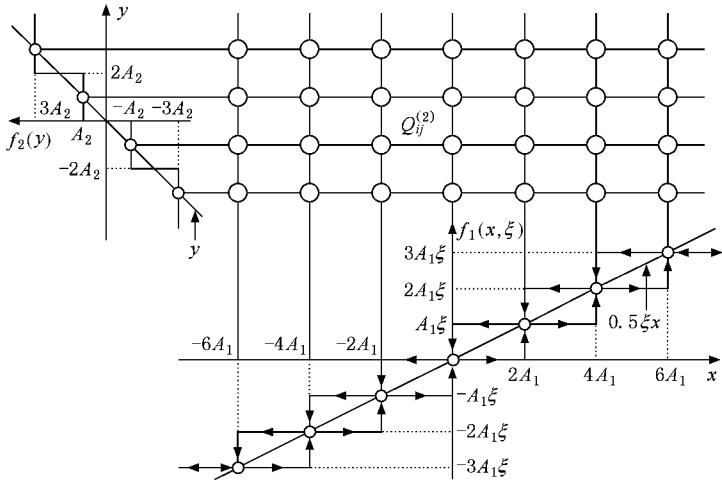


图5 第二类  $7 \times 4$  网格多涡卷混沌吸引子  $x$ - $y$  相平面上的鞍焦平衡点

$$-(4|i|-2)iA_1/|i|), \\ (i, j = \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (11)$$

注意到(11)式中第1式表示的平衡点对应生成涡卷数量为  $(2N_{11}+1) \times (M_{21}+M_{22}+3)$  的混沌吸引子, (11)式中第2式表示的平衡点对应生成涡卷数量为  $(2N_{12}+2) \times (M_{21}+M_{22}+3)$  的混沌吸引子.

同理得第二类网格多涡卷混沌吸引子指标2的鞍焦平衡点  $Q_{ij}^{(2)}$  的计算公式为

$$Q_{ij}^{(2)}(2iA_1, 2jA_2, 2jA_2 - 2iA_1), \\ (i, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \\ Q_{ij}^{(2)}(2iA_1, (2|j|-1)jA_2/|j|, \\ (2|j|-1)jA_2/|j| - 2iA_1), \\ (i, j = \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (12)$$

注意到(12)式中第1式表示的平衡点对应生成涡卷数量为  $(M_{11}+M_{12}+3) \times (2N_{21}+1)$  的混沌吸引子, (12)式中第2式表示的平衡点对应生成涡卷数量为  $(M_{11}+M_{12}+3) \times (2N_{22}+2)$  的混沌吸引子.

下面分析控制参数  $A_1, A_2, \xi$  的物理意义. 根据(3)–(9)式以及图4和图5, 参数  $A_1$  和  $A_2$  可分别控制  $f_1(x, \xi)$  和  $f_2(y)$  的宽度和高度, 从而可控制平衡点之间的相对位置以及涡卷的形状与大小, 这对于实际电路的设计与实验是很有价值的. 实验结果表明, 随着涡卷数量增加, 状态变量会超出有源器件(如运算放大器等)的动态范围, 可通过减小  $A_1$  和  $A_2$  解决这一问题. 另一方面, 当  $A_1$  和  $A_2$  固定不变时, 参数  $\xi$  可控制  $f_1(x, \xi)$  的高度以及线性函数  $0.5\xi x$  的斜率. 随着参数  $\xi$  的变化, 系统从倍周期分

岔进入混沌状态. 因此,  $\xi$  是生成网格多涡卷混沌吸引子的重要参数. 一般参数选取范围为  $A_1 = A_2 > 0, \xi = 0.3-1$ , 为了便于生成网格多涡卷混沌吸引子以及电路实现, 选取典型参数为  $A_1 = A_2 = 0.25, \xi = 0.5$ .

根据(2)–(9)式, 得指标2的鞍焦平衡点的 Jacobian 矩阵为

$$J = \begin{bmatrix} -0.5\alpha\xi & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

对应的特征多项式为

$$\lambda^3 + (1 + 0.5\alpha\xi)\lambda^2 + (\beta + 0.5\alpha\xi - \alpha)\lambda - 0.5\alpha\beta\xi = 0. \quad (14)$$

令  $\alpha = 10, \beta = 15, \xi = 0.5$ , 得特征值为  $\gamma = -3.9283, \sigma \pm j\omega = 0.2142 \pm j3.1838$ , 说明图4和图5中的平衡点为指标2的鞍焦点.

根据(2)式, 计算随控制参数  $\xi$  变化时网格多涡卷混沌吸引子的分岔图与最大李氏指数分别如图6和图7所示, 证实了网格多涡卷蔡氏系统处于混沌状态.

## 6. 网格多涡卷蔡氏混沌电路设计

根据(5)–(7)式, 对时滞序列产生器电路进行设计. 根据(3)和(4)式以及(7)和(8)式, 对阶跃序列产生器进行设计. 根据(2)式, 利用无量纲状态方程和模块化设计方法, 对网格多涡卷蔡氏电路进行设计. 最后, 以第一类  $6 \times 3$  和第二类  $7 \times 4$  网格多涡卷

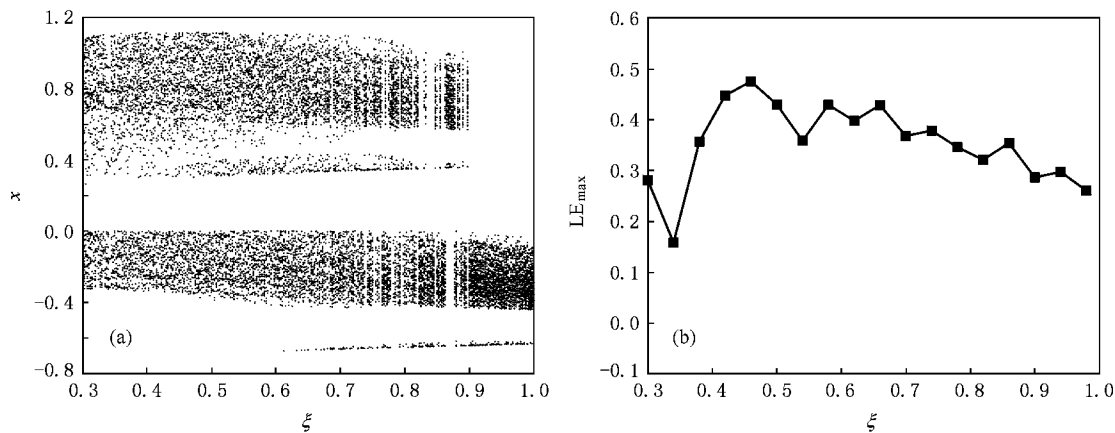


图6 第一类网格多涡卷混沌吸引子随  $\xi$  变化的分岔图与最大李氏指数 (a) 随  $\xi$  变化的分岔图 (b) 随  $\xi$  变化的最大李氏指数谱

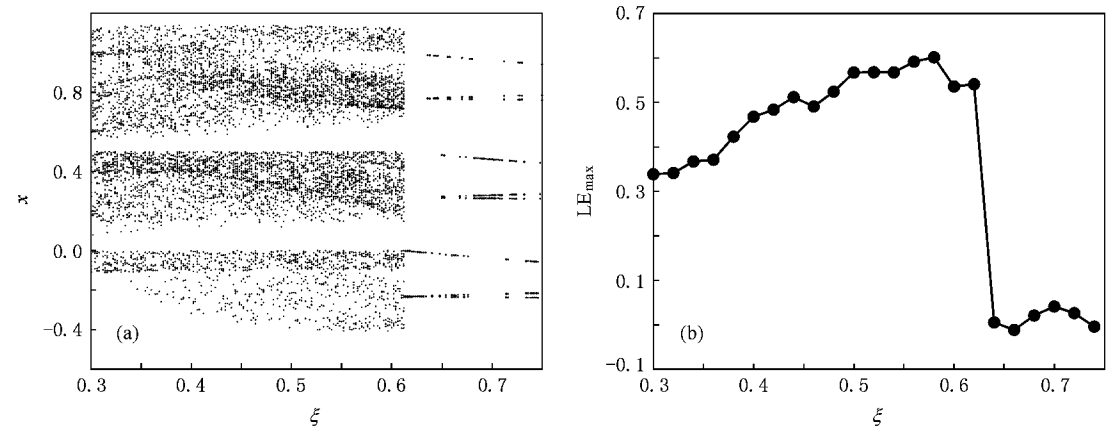


图7 第二类网格多涡卷混沌吸引子随  $\xi$  变化的分岔图与最大李氏指数 (a) 随  $\xi$  变化的分岔图 (b) 随  $\xi$  变化的最大李氏指数谱

混沌电路为例,给出了这两种网格多涡卷蔡氏电路的设计结果.

6.1. 时滞序列产生器的电路设计

根据(6)式和图1,得基本时滞序列产生器的电路设计如图8所示.

在图8中,  $v \in \{x, y\}$  为输入信号,  $R_4$  为稳压二极管的限流电阻,  $R_5$  为正反馈电阻,能使电路产生时滞效应.  $E_{vm}$  为比较电压,  $V_S$  为稳压二极管的稳压值,  $A$  为时滞函数两个移位电压值(又称跃变点)  $nA$  与  $(n+1)A$  之间的移位幅度,如图1所示.若运算放大器的电源电压为  $E$ ,其输出电压饱和值为  $\pm |V_{sat}|$ .根据图1和图8,可求得比较电压  $E_{vm}$  与移位幅度  $A$  以及电路参数之间的关系.由于图8(a)和图8(b)具有对称性,只需分析图8(a)即可.

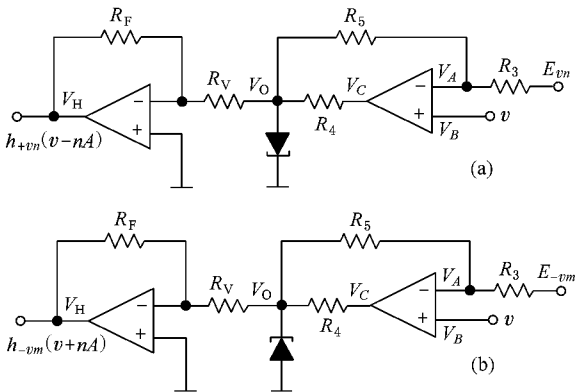
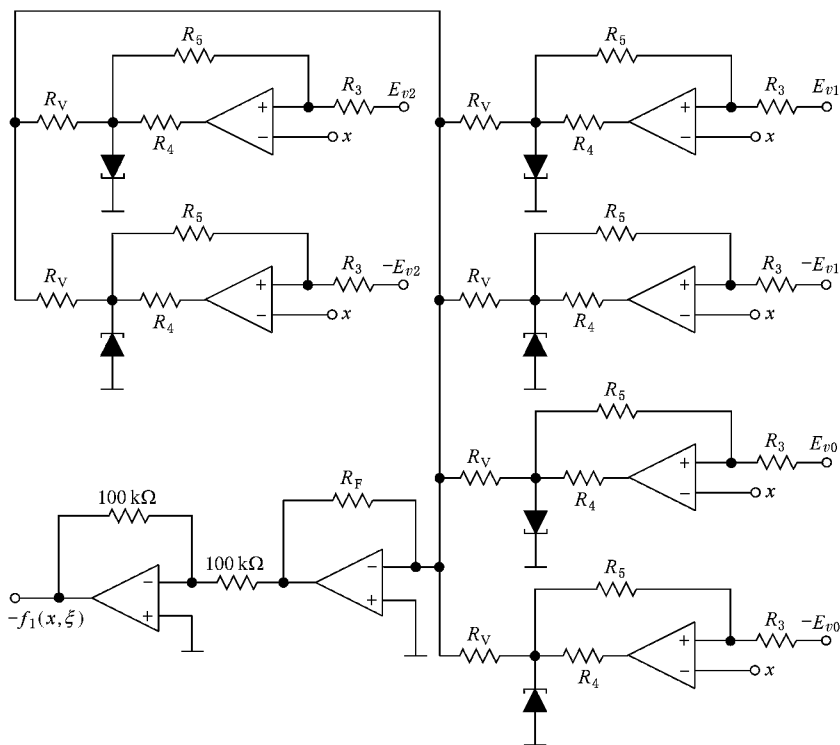


图8  $h_{+vm}(v - nA)$  和  $h_{-vm}(v + nA)$  产生器电路设计 (a)  $h_{+vm}(v - nA)$  产生器 (b)  $h_{-vm}(v + nA)$  产生器

当  $v = V_B = (n+1)A < V_A$  时,  $V_C = +|V_{sat}|$ ,

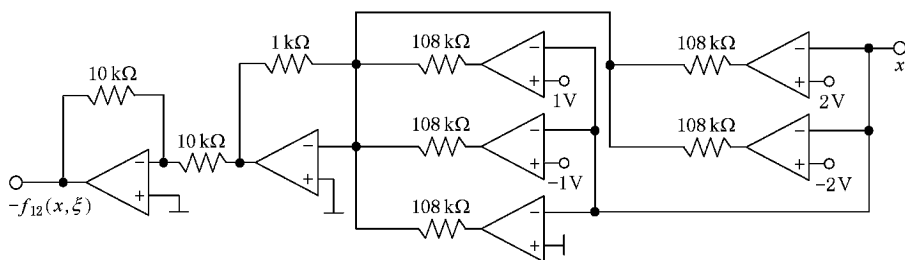


图 10 第二类  $7 \times 4$  网格多涡卷混沌电路的时滞函数  $f_1(x, \xi)$  产生器

## 6.2. 阶跃序列产生器的电路设计

混沌电路为例,设计阶跃序列  $f_{12}(x, \xi)$  产生器,如图 11 所示.

根据(3)式和(4)式,以第一类  $6 \times 3$  网格多涡卷

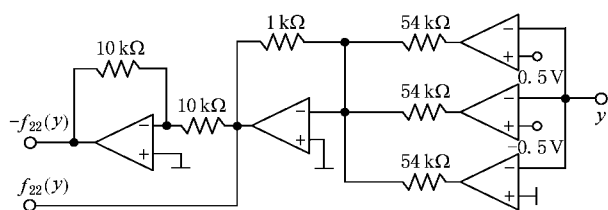
图 11 第一类  $6 \times 3$  网格多涡卷混沌电路的阶跃序列  $f_{12}(x, \xi)$  产生器

根据(8)式和(9)式,以第二类  $7 \times 4$  网格多涡卷混沌电路为例,设计阶跃序列  $f_{22}(y)$  产生器的电路,如图 12 所示.

## 6.3. 基于无量纲状态方程与模块化方法的网格多涡卷蔡氏电路设计

对(2)式进行微分—积分转换和时间尺度变换后,得

$$\dot{x} = \frac{1}{R_0 C_0} \int \{ -a_{11}x - a_{12}(-y) - a_{13}[-f_1(x, \xi)] - a_{14}f_2(y) \} dt,$$

图 12 第二类  $7 \times 4$  网格多涡卷混沌电路的阶跃序列  $f_{22}(y)$  产生器



$$y = \frac{1}{R_0 C_0} \int \{ -a_{21}(-x) - a_{22}y - a_{23}(-z) \} dt ,$$

$$z = \frac{1}{R_0 C_0} \int \{ -a_{31}y - a_{32}[-f_2(y)] \} dt , \quad (24)$$

式中  $a_{ij}$  为参数,  $\tau = t/\tau_0$ ,  $\tau_0 = R_0 C_0$  为时间尺度变换因子.

根据(24)式,得网络多涡卷蔡氏混沌电路如图13所示.令  $\alpha = 10$ ,  $\beta = 16$ ,  $\xi = 0.5$ , 得  $a_{11} = 0.5\xi\alpha = 2.5$ ,  $a_{12} = \alpha = 10$ ,  $a_{13} = \alpha = 10$ ,  $a_{14} = \alpha = 10$ ,

$a_{21} = 1$ ,  $a_{22} = 1$ ,  $a_{23} = 1$ ,  $a_{31} = \beta = 16$ ,  $a_{32} = \beta = 16$ .  $a_{11} = R_F/R_{11}$ ,  $a_{12} = R_F/R_{12}$ ,  $a_{13} = R_F/R_{13}$ ,  $a_{14} = R_F/R_{14}$ ,  $a_{21} = R_F/R_{21}$ ,  $a_{22} = R_F/R_{22}$ ,  $a_{23} = R_F/R_{23}$ ,  $a_{31} = R_F/R_{31}$ ,  $a_{32} = R_F/R_{32}$ . 令  $R_F = 100 \text{ k}\Omega$ , 得图13中的各个参数值为  $R_{11} = 40 \text{ k}\Omega$ ,  $R_{12} = 10 \text{ k}\Omega$ ,  $R_{13} = 10 \text{ k}\Omega$ ,  $R_{14} = 10 \text{ k}\Omega$ ,  $R_{21} = 100 \text{ k}\Omega$ ,  $R_{22} = 100 \text{ k}\Omega$ ,  $R_{23} = 100 \text{ k}\Omega$ ,  $R_{31} = 6.25 \text{ k}\Omega$ ,  $R_{32} = 6.25 \text{ k}\Omega$ .

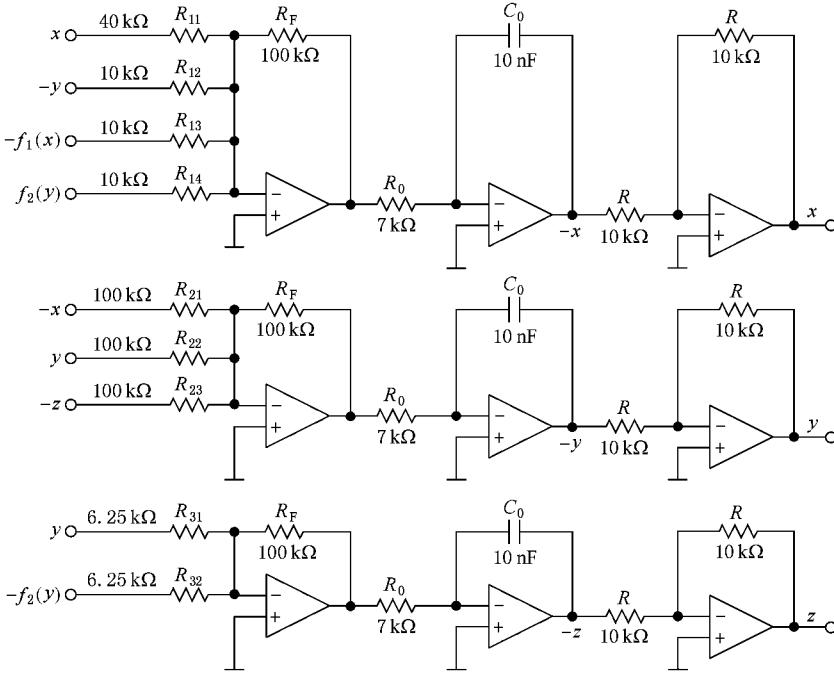


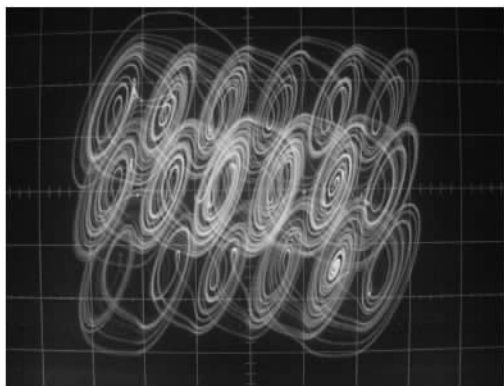
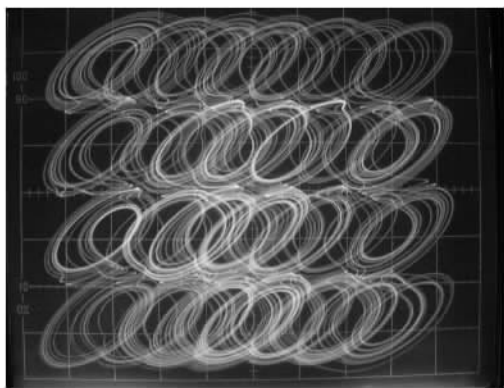
图 13 基于无量纲状态方程与模块化设计的网络多涡卷蔡氏电路

### 6.4 第一类和第二类网络多涡卷蔡氏电路的设计

根据上述设计结果,得图9、图11和图13这三个模块构成了第一类  $6 \times 3$  网络多涡卷蔡氏混沌电路,其中图9中输出信号  $f_2(y)$  和  $-f_2(y)$  分别与图13中的输入信号  $f_2(y)$  和  $-f_2(y)$  相连,图11中的输出信号  $-f_{12}(x, \xi)$  与图13中的输入信号  $-f_1(x)$  相连.同理,得图10、图12和图13这三个模块构成了第二类  $7 \times 4$  网络多涡卷蔡氏混沌电路,其中图10中的输出信号  $-f_1(x, \xi)$  与图13中的输入信号  $-f_1(x)$  相连,图12中的输出信号  $f_2(y)$  和  $-f_2(y)$  分别与图13中的输入信号  $f_2(y)$  和  $-f_2(y)$  相连.

### 7. 电路实验结果

将图9中的输出信号  $f_2(y)$  和  $-f_2(y)$  与图13中的输入信号  $f_2(y)$  和  $-f_2(y)$  相连,并且将图11中的输出信号  $-f_{12}(x, \xi)$  与图13中的输入信号  $-f_1(x)$  相连,得第一类  $6 \times 3$  网络多涡卷蔡氏混沌吸引子的电路实验结果如图14所示.将图10中的输出信号  $-f_1(x, \xi)$  与图13中的输入信号  $-f_1(x)$  相连,并且将图12中的输出信号  $f_2(y)$  和  $-f_2(y)$  与图13中的输入信号  $f_2(y)$  和  $-f_2(y)$  相连,得第二类  $7 \times 4$  网络多涡卷蔡氏混沌吸引子的电路实验结果如图15所示.

图 14 第一类  $6 \times 3$  网格多涡卷混沌吸引子实验结果图 15 第二类  $7 \times 4$  网格多涡卷混沌吸引子实验结果

## 8. 结 论

提出了在蔡氏电路中生成两种不同类型网格多涡卷混沌吸引子的新方法,该方法突破了以往仅采用相同类型非线性函数产生多涡卷混沌吸引子局限性.以规范型蔡氏电路为例,通过构造时滞序列和阶跃序列这两类不同的非线性函数,分别在相空间的  $x$  方向和  $y$  方向上扩展指标 2 的鞍焦平衡点,从而能生成两类不同的网格多涡卷混沌吸引子.分析了该系统的基本动力学特性,包括平衡点、分岔和最大李氏指数.在理论分析与数值模拟的基础上,进行了混沌电路设计和实验,给出了网格多涡卷混沌吸引子的电路实验结果,证实了数值模拟与电路实验结果的一致性.需要强调的是,这一方法还可用于其他某些多方向分布网格状多涡卷混沌系统的设计而不失其一般性.

- [1] Yalcin M E, Suykens J A K, Vandewalle J 2002 *Int. J. Bifurc. Chaos* **12** 23
- [2] Lü J H, Zhou T S, Chen G R, Yang X 2002 *Chaos* **12** 344
- [3] Lü J H, Yu X, Chen G R 2003 *IEEE Trans. Circuits Syst.* **50** 198
- [4] Lü J H, Han F, Yu X, Chen G R 2004 *Automatica* **40** 1677
- [5] Lü J H, Chen G R, Yu X, Leung H 2004 *IEEE Trans. Circuits Syst.* **51** 2476
- [6] Yu S M, Lü J H, Leung H, Chen G R 2005 *IEEE Trans. Circuits Syst.* **52** 1459
- [7] Lü J H, Yu S M, Leung H, Chen G R 2006 *IEEE Trans. Circuits Syst.* **53** 149
- [8] Yu S M, Lü J H, Chen G R 2007 *IEEE Trans. Circuits Syst.* **54** 2087
- [9] Yu S M, Lü J H, Tang K S, Chen G R 2006 *Chaos* **16** 033126
- [10] Yu S M, Lü J H, Chen G R 2007 *Chaos* **17** 013118
- [11] Yu S M, Tang K S, Chen G R 2007 *Int. J. Bifurc. Chaos* **17** 3951
- [12] Liu F, Liu S D, Liu G, Liu S K 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5629 (in Chinese) [刘峰、刘式达、刘刚、刘式适 2007 物理学报 **56** 5629]
- [13] Yu S M 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1500 (in Chinese) [禹思敏 2005 物理学报 **54** 1500]
- [14] Suykens J A K, Vandewalle J 1993 *IEEE Trans. Circuits Syst.* **40** 861
- [15] Lü J H, Chen G R 2006 *Int. J. Bifurc. Chaos* **16** 775
- [16] Yalcin M E, Suykens J A K, Vandewalle J 2000 *IEEE Trans. Circuits Syst.* **47** 425
- [17] Tang K S, Zhong G Q, Chen G R 2001 *IEEE Trans. Circuits Syst.* **48** 1369
- [18] Zhong G Q, Man K F, Chen G R 2002 *Int. J. Bifurc. Chaos* **12** 2907
- [19] Yu S M, Qiu S S, Lin Q H 2003 *Sci. Chin. F* **46** 104
- [20] Yu S M, Ma Z G, Qiu S S, Lin Q H 2004 *Chin. Phys.* **13** 317
- [21] Yu S M, Lin Q H, Qiu S S 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2084 (in Chinese) [禹思敏、林清华、丘水生 2004 物理学报 **53** 2084]
- [22] Yu S M 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 4111 (in Chinese) [禹思敏 2004 物理学报 **53** 4111]
- [23] Chen L, Peng H J, Wang D S 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 3337 (in Chinese) [谌龙、彭海军、王德石 2008 物理学报 **57** 3337]
- [24] Cafagna D, Grassi G 2003 *Int. J. Bifurc. Chaos* **13** 2537
- [25] Cafagna D, Grassi G 2003 *Int. J. Bifurc. Chaos* **13** 2889

# Generation of grid multi-scroll Chua 's chaotic attractors with combination of hysteresis and step series<sup>\*</sup>

Zhang Chao-Xia Yu Si-Min<sup>†</sup>

( College of Automation , Guangdong University of Technology , Guangzhou 510006 , China )

( Received 9 June 2008 ; revised manuscript received 13 July 2008 )

## Abstract

In this paper , a new approach to generating two types of grid multi-scroll chaotic attractors from canonical Chua 's circuit is reported . Different from the techniques reported in current literature for generating multi-scroll chaotic attractors by constructing only the same type of non-linear function , the present approach constructs both hysteresis series and step series in the same Chua 's circuit , and extends the saddle-focus equilibrium points with index-2 in phase space by combining both series in different ways , which makes it possible to create two kinds of grid multi-scroll chaotic attractors . The effectiveness of this method has been verified by theoretical analysis , numerical simulation and circuit implementation .

**Keywords :** canonical Chua 's circuit , grid multi-scroll chaotic attractors , hysteresis and step series , circuit implementation

**PACC :** 0545

---

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant Nos. 60572073 , 60871205 ) and the Natural Science Foundation of Guangdong Province ( Grant Nos. 8151009001000060 , 8351009001000002 ) .

<sup>†</sup> E-mail : siminyu@163 . com