TRƯỜNG ĐẠI HỌC ĐÀ LẠT

GIÁO TRÌNH

# TOÁN CAO CẤP B2

ĐẶNG TUẤN HIỆP

ĐÀ LẠT, 2022

# Mục lục


**1 Ma trận và định thức** **2**

1.1 Khái niệm ma trận . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 2

1.2 Một số loại ma trận đặc biệt . . . . . . . . . . . . . . . . . . 3

1.3 Các phép toán trên ma trận . . . . . . . . . . . . . . . . . . 4

1.4 Ma trận bậc thang và hạng của ma trận . . . . . . . . . . . . 9

1.5 Khái niệm định thức . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 10

1.6 Các tính chất của định thức . . . . . . . . . . . . . . . . . . 12

1.7 Ma trận khả nghịch . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 14

Bài tập Chương 1 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 18

**2 Hệ phương trình tuyến tính** **21**

2.1 Khái niệm về hệ phương trình tuyến tính . . . . . . . . . . . 21

2.2 Công thức Cramer . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 23

2.3 Phương pháp khử Gauss . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 27

**3 Chéo hóa ma trận** **31**

3.1 Ma trận đồng dạng . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 31

3.2 Giá trị riêng và vectơ riêng . . . . . . . . . . . . . . . . . . 32

3.3 Chéo hóa ma trận . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 36

**Tài liệu tham khảo** **40**

# Chương 1

# Ma trận và định thức

## 1.1 Khái niệm ma trận

**Định nghĩa 1.1.** Một *ma trận* cấp $m \times n$ ($m, n$ là các số nguyên dương) là một bảng gồm $mn$ số $a_{ij}$ được sắp xếp thành $m$ dòng và $n$ cột dưới dạng

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Ký hiệu $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ hoặc $A = (a_{ij})_{m\times n}$. Số $a_{ij}$ đại diện cho phần tử nằm ở vị trí dòng thứ $i$ và cột thứ $j$ của ma trận $A$. Ký hiệu $M_{m,n}$ là tập hợp các ma trận cấp $m \times n$. Hai ma trận được gọi là *bằng nhau* nếu chúng có cùng cấp và mọi số hạng tương ứng đều bằng nhau, tức là nếu $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ và $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ thì

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}; \forall i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n.$$

**Ví dụ 1.1.** Ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

là một ma trận cấp $2 \times 3$, trong đó

$$a_{11} = 1 \quad , \quad a_{12} = 2 \quad , \quad a_{13} = 3,$$

$$a_{21} = 4 \quad , \quad a_{22} = 5 \quad , \quad a_{23} = 6.$$

## 1.2 Một số loại ma trận đặc biệt

- *Ma trận vuông* cấp $n$ là ma trận cấp $n \times n$, tức là ma trận có số dòng và số cột cùng bằng với $n$. Trong một ma trận vuông $A = [a_{ij}]_{n\times n}$, người ta gọi các số hạng $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ là các số hạng thuộc đường chéo chính của ma trận. Ký hiệu $M_n$ là tập hợp các ma trận vuông cấp $n$.

  **Ví dụ 1.2.** Ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ là ma trận vuông cấp 3.

- *Ma trận đơn vị* cấp $n$ là ma trận vuông cấp $n$ trong đó các số hạng thuộc đường chéo chính đều bằng 1 và các số hạng khác đều bằng 0. Ký hiệu $I_n$ là ma trận đơn vị cấp $n$.

  **Ví dụ 1.3.** Ma trận $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ là ma trận đơn vị cấp 3.

- *Ma trận tam giác* là ma trận vuông có tất cả các số hạng nằm phía dưới hoặc phía trên đường chéo chính đều bằng 0.

  **Ví dụ 1.4.** Các ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ và $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ là các ma trận tam giác.

- *Ma trận chéo* là ma trận vuông có tất cả các số hạng nằm ngoài đường chéo chính bằng 0.

**Ví dụ 1.5.** Ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ là ma trận chéo.

- *Ma trận không* là ma trận có tất cả các số hạng đều bằng 0. Ký hiệu $\mathbb{O}_{m\times n}$ là ma trận không cấp $m \times n$.

  **Ví dụ 1.6.** Ma trận $\mathbb{O}_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ là ma trận không cấp $2 \times 3$.

- *Ma trận dòng* là ma trận chỉ có một dòng. *Ma trận cột* là ma trận chỉ có một cột.

  **Ví dụ 1.7.** $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ và $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ lần lượt là ma trận dòng và ma trận cột.

## 1.3 Các phép toán trên ma trận

- **Phép cộng ma trận:** Cho $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ và $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ là hai ma trận cùng cấp $m \times n$. Tổng của $A$ và $B$ là một ma trận cấp $m \times n$, ký hiệu $A + B$, được xác định bởi

$$A + B = [c_{ij}]_{m\times n},$$

  trong đó

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}; \forall i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n.$$

  Phép cộng ma trận có các tính chất sau đây:

  – Tính giao hoán, tức là với mọi $A, B \in M_{m,n}$ ta có

$$A + B = B + A.$$

– Tính kết hợp, tức là với mọi $A, B, C \in M_{m\times n}$ ta có

$$(A+B)+C = A+(B+C).$$

– Phần tử trung hòa là ma trận không $\mathbb{O}_{m\times n}$, tức là với mọi $A \in M_{m,n}$ ta có

$$A + \mathbb{O}_{m\times n} = \mathbb{O}_{m\times n} + A = A.$$

– Phần tử đối của ma trận $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ là ma trận $-A = [-a_{ij}]_{m\times n}$, tức là

$$A + (-A) = (-A) + A = \mathbb{O}_{m\times n}.$$

- **Phép nhân vô hướng:** Cho $k$ là một số bất kỳ và $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ là một ma trận cấp $m \times n$. Tích của số $k$ với ma trận $A$ là một ma trận cấp $m \times n$, ký hiệu $kA$, được xác định bởi

$$kA = [c_{ij}]_{m\times n},$$

trong đó

$$c_{ij} = ka_{ij}; \forall i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n.$$

Phép nhân vô hướng có các tính chất sau đây: Cho các số $k, h$ và $A, B \in M_{m,n}$. Khi đó, ta có

$$(kh)A = k(hA);$$

$$(k+h)A = kA + hA;$$

$$k(A+B) = kA + kB.$$

- **Phép nhân ma trận:** Cho $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ và $B = [b_{ij}]_{n\times p}$. Tích của $A$ và $B$, ký hiệu $AB$, là ma trận cấp $m \times p$ được xác định bởi

$$AB = [c_{ij}]_{m\times p},$$

trong đó

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}.$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}; \forall i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, p.$$

Chú ý rằng phép nhân ma trận không có tính chất giao hoán, tức là có thể tích $AB$ tồn tại nhưng tích $BA$ chưa chắc tồn tại, nếu tồn tại $BA$ thì $AB \neq BA$.

**Ví dụ 1.8.** Cho hai ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ và $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Khi đó, chúng ta thực hiện tính toán ma trận $AB$ như sau:

$$AB = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix},$$

trong đó

$$c_{11} = 1.2 + (-2).1 + 3.3 = 9,$$

$$c_{12} = 1.3 + (-2).(-1) + 3.4 = 17,$$

$$c_{21} = 4.2 + 0.1 + 2.3 = 14,$$

$$c_{22} = 4.3 + 0.(-1) + 2.4 = 20.$$

Do đó

$$AB = \begin{bmatrix} 9 & 17 \\ 14 & 20 \end{bmatrix}.$$

Mặt khác, chúng ta cũng có thể thực hiện tính toán ma trận $BA$ như sau:

$$BA = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix},$$

trong đó

$$d_{11} = 2.1 + 3.4 = 14, d_{12} = 2.(-2) + 3.0 = -4, d_{13} = 2.3 + 3.2 = 12,$$

$$d_{21} = 1.1 + (-1).4 = -3, d_{22} = 1.(-2) + (-1).0 = -2, d_{23} = 1.3 + (-1).2 = 1,$$

$d_{31} = 3.1 + 4.4 = 19, d_{32} = 3.(-2) + 4.0 = -6, d_{33} = 3.3 + 4.2 = 17.$

Do đó

$$BA = \begin{bmatrix} 14 & -4 & 12 \\ -3 & -2 & 1 \\ 19 & -6 & 17 \end{bmatrix}.$$

Để thực hành tính toán trên ma trận, chúng ta có thể sử dụng nhiều phần mềm toán học khác nhau. Trong toàn bộ giáo trình này, các ví dụ tính toán được thực hiện trên phần mềm SageMath[1]. Đây là một phần mềm toán học phổ biến nhất hiện nay, có mã nguồn mở và được phát triển dựa theo ngôn ngữ lập trình Python.

Chúng ta khai báo các ma trận trong Ví dụ 1.8 và thực hiện tính toán các ma trận $AB$ và $BA$ trên phần mềm SageMath như sau:

```
sage: A = matrix([[1,-2,3],[4,0,2]])
sage: B = matrix([[2,3],[1,-1],[3,4]])
sage: A*B
[ 9 17]
[14 20]
sage: B*A
[14 -4 12]
[-3 -2  1]
[19 -6 17]
```

**Ví dụ 1.9** (Tích vô hướng). Cho hai vectơ $u = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix}$ và $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$.

Khi đó, tích vô hướng của $u$ và $v$ là tích của hai ma trận dòng $u$ và ma

[1] www.sagemath.org

trận cột $v$, tức là

$$uv = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3.$$

**Chú ý 1.1.** Phép nhân ma trận chỉ thực hiện được khi số cột của ma trận thứ nhất bằng với số dòng của ma trận thứ hai.

- **Phép chuyển vị:** Cho ma trận $A = [a_{ij}]_{m\times n}$. *Ma trận chuyển vị* của $A$, ký hiệu $A^t$, là ma trận nhận được bằng cách lấy các dòng của $A$ lần lượt làm các cột của $A^t$, tức là

$$A^t = [a^t_{ij}]_{n\times m},$$

trong đó

$$a^t_{ij} = a_{ji}, i = 1, 2, \ldots, m, j = 1, 2, \ldots, n.$$

**Ví dụ 1.10.** Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Khi đó, ma trận chuyển vị của $A$ là

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Các phép toán trên ma trận có các tính chất sau đây: Giả sử $A, B, C$ là các ma trận sao cho các phép toán trong các hệ thức sau thực hiện được. Khi đó, ta có

1. $IA = AI = A$, trong đó $I$ là ma trận đơn vị;
2. $(AB)C = A(BC)$;
3. $A(B + C) = AB + AC$; $(B + C)A = BA + CA$;
4. $k(AB) = (kA)B = A(kB)$, trong đó $k$ là một số bất kỳ;
5. $(AB)^t = B^tA^t$.

## 1.4 Ma trận bậc thang và hạng của ma trận

**Định nghĩa 1.2.** *Ma trận bậc thang* là ma trận thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau đây:

- Dòng có tất cả các phần tử bằng 0 (nếu có) luôn nằm phía dưới dòng có phần tử khác 0 (nếu có).
- Đối với hai dòng bất kỳ, nếu tính từ trái qua phải, phần tử khác 0 đầu tiên (nếu có) của dòng dưới luôn ở bên phải so với phần tử khác 0 đầu tiên (nếu có) của dòng trên.

**Ví dụ 1.11.** Ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ là một ma trận bậc thang.

**Định nghĩa 1.3.** Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng của một ma trận là một trong ba phép biến đổi sau đây:

- Đổi chỗ hai dòng cho nhau.
- Nhân một dòng với một số khác 0.
- Thêm (bớt) vào một dòng một tổ hợp tuyến tính của các dòng khác.

Mọi ma trận khác không sau một số hữu hạn các phép biến đổi sơ cấp trên dòng đều đưa được về một ma trận bậc thang, ma trận này được gọi là dạng bậc thang của ma trận ban đầu. Chú ý rằng dạng bậc thang của một ma trận là không duy nhất và thường có nhiều cách biến đổi sơ cấp trên dòng để đưa một ma trận về dạng bậc thang.

**Định nghĩa 1.4.** Cho $A \in M_{m,n}$ là một ma trận khác không. Số dòng khác không của dạng bậc thang của $A$ không phụ thuộc vào các phép biến đổi sơ cấp trên dòng, số này được gọi là *hạng* của $A$, ký hiệu $\operatorname{rank}(A)$. Nếu $A$ là ma trận không, thì ta quy ước $\operatorname{rank}(A) = 0$. Ta luôn có

$$0 \leq \operatorname{rank}(A) \leq \min(m, n).$$

## 1.5 Khái niệm định thức

Nếu $A = \begin{bmatrix} a_{11} \end{bmatrix}$ là một ma trận vuông cấp 1, thì định thức của $A$, ký hiệu $\det(A)$, được xác định bởi

$$\det(A) = a_{11}.$$

Nếu $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ là một ma trận vuông cấp 2, thì định thức của $A$ được xác định bởi

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Nếu $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ là một ma trận vuông cấp 3, thì định thức của $A$ được xác định bởi

$$\det(A) = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Tổng quát hơn, nếu $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ là một ma trận vuông cấp $n$, thì định thức của $A$ được xác định bởi *công thức Laplace* sau đây

$$\det(A) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}, \tag{1.1}$$

trong đó $A_{1j}$ là tích của $(-1)^{1+j}$ với định thức của ma trận vuông cấp $n-1$ nhận được từ $A$ bằng cách xóa đi dòng 1 và cột $j$ với mọi $j = 1, 2, \ldots, n$.

**Ví dụ 1.12.** Nếu $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ là một ma trận vuông cấp 3, thì định thức của $A$ được xác định bởi công thức sau đây

$$\det(A) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13},$$

trong đó

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32},$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{31}a_{23} - a_{21}a_{33},$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}.$$

Do đó, ta có

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}a_{13} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{33}a_{12}a_{21}.$$

**Ví dụ 1.13.** Tính định thức của ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Theo công thức Laplace, ta có

$$\det(A) = 2A_{11} + 3A_{13} + A_{14},$$

trong đó

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 31,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -25,$$

$$A_{14} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 11.$$

Do đó

$$\det(A) = -2.$$

Thực hiện tính toán trên SageMath như sau:

```
sage: A = matrix([[2,0,3,-1],[1,-2,0,3],[2,1,2,1],[0,-3,1,-2]])
sage: A.det()
-2
```

## 1.6 Các tính chất của định thức

- Định thức của ma trận không thay đổi qua phép chuyển vị, tức là, với mọi $A \in M_n$, ta có
$$\det(A^t) = \det(A).$$

- Với mọi $A, B \in M_n$, ta có
$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

- Định thức của một ma trận bằng 0 nếu nó có một dòng (hoặc cột) bằng 0.

- Định thức của một ma trận bằng 0 nếu nó có hai dòng (hoặc hai cột) tỉ lệ với nhau.

- Định thức của ma trận tam giác hay ma trận chéo bằng tích các phần tử thuộc đường chéo chính.

- Nếu đổi chỗ hai dòng (hoặc hai cột) bất kỳ thì định thức đổi dấu.

- Định thức không thay đổi khi thêm vào một dòng (hoặc một cột) một tổ hợp tuyến tính của các dòng (cột) khác.

- Công thức Laplace tính định thức có thể được khai triển theo một dòng (hoặc một cột) bất kỳ, tức là nếu

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

là một ma trận vuông cấp $n$, thì định thức của $A$ được xác định bởi các công thức sau đây

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} (\text{khai triển theo dòng } i) \\ &= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} (\text{khai triển theo cột } j), \end{aligned}$$

trong đó $A_{ij}$ là tích của $(-1)^{i+j}$ với định thức của ma trận nhận được từ $A$ bằng cách xóa đi dòng $i$ và cột $j$, được gọi là *phần bù đại số* của phần tử $a_{ij}$.

**Ví dụ 1.14.** Cho số phức

$$z = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$$

và ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & z \\ 1 & 1 & z^2 \\ z^2 & z & 1 \end{bmatrix}.$$

Để tính định thức của ma trận $A$, ta có thể biến đổi như sau:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & z \\ 0 & 0 & z^2 - z \\ z^2 & z & 1 \end{vmatrix}.$$

Áp dụng công thức Laplace cho dòng thứ 2, ta được

$$\det(A) = (-1)^{2+3}(z^2 - z)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ z^2 & z \end{vmatrix} = -(z^2 - z)(z - z^2).$$

Do đó

$$\det(A) = z^4 - 2z^3 + z^2.$$

Theo công thức Moivre, ta có

$$z^3 = 1,$$

tức là

$$(z-1)(z^2+z+1) = 0,$$

và $z \neq 1$, nên

$$z^2 + z + 1 = 0.$$

Do đó

$$\det(A) = z - 2 + z^2 = -3.$$

## 1.7 Ma trận khả nghịch

**Định nghĩa 1.5.** Ma trận $A \in M_n$ được gọi là *khả nghịch* nếu và chỉ nếu có tồn tại ma trận $B \in M_n$ sao cho

$$AB = BA = I_n, \tag{1.2}$$

trong đó $I_n$ là ma trận đơn vị cấp $n$. Khi đó, ma trận $B$ được gọi là *ma trận nghịch đảo* của $A$, ký hiệu $A^{-1}$.

Chú ý rằng

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Từ định nghĩa, nếu $A \in M_n$ là ma trận khả nghịch thì $\det(A) \neq 0$. Ngược lại, nếu $\det(A) \neq 0$ thì ta cũng xây dựng được ma trận nghịch đảo của $A$ như sau:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} P_A^t, \tag{1.3}$$

trong đó $P_A$ là *ma trận phụ hợp* của $A$, được tạo thành từ các phần bù đại số của các phần tử của $A$, tức là

$$P_A = [A_{ij}]_{n\times n}. \tag{1.4}$$

Trường hợp đặc biệt, nếu $A$ là một ma trận vuông cấp 2 có dạng

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Định thức của $A$ là

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Phần bù đại số của $a_{11}$ là

$$A_{11} = (-1)^{1+1}a_{22} = a_{22}.$$

Phần bù đại số của $a_{12}$ là

$$A_{12} = (-1)^{1+2}a_{21} = -a_{21}.$$

Phần bù đại số của $a_{21}$ là

$$A_{21} = (-1)^{2+1}a_{12} = -a_{12}.$$

Phần bù đại số của $a_{22}$ là

$$A_{22} = (-1)^{2+2}a_{11} = a_{11}.$$

Ma trận phụ hợp của $A$ là

$$P_A = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}.$$

Do đó, ma trận nghịch đảo của $A$ là

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}.$$

**Ví dụ 1.15.** Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Theo công thức trên, ma trận nghịch đảo của $A$ là

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{13} & \frac{3}{13} \\ \frac{5}{13} & -\frac{1}{13} \end{bmatrix}$$

**Ví dụ 1.16.** Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. Tính định thức của $A$, ta được

$$\det(A) = -6 \neq 0.$$

Thực hiện tính toán trên SageMath như sau:

```
sage: A = matrix([[1,2,-1],[2,3,-2],[3,1,3]])
sage: A.det()
-6
```

Ta lần lượt tính các phần bù đại số như sau:

$$A_{11} = 11 \quad , \quad A_{12} = -12 \quad , \quad A_{13} = -7,$$

$$A_{21} = -7 \quad , \quad A_{22} = 6 \quad , \quad A_{23} = 5,$$

$$A_{31} = -1 \quad , \quad A_{32} = 0 \quad , \quad A_{33} = -1.$$

Do đó, ma trận phụ hợp của $A$ là

$$P_A = \begin{bmatrix} 11 & -12 & -7 \\ -7 & 6 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Chuyển vị của $P_A$ là

$$P_A^t = \begin{bmatrix} 11 & -7 & -1 \\ -12 & 6 & 0 \\ -7 & 5 & -1 \end{bmatrix}.$$

Thực hiện tính toán trên SageMath như sau:

```
sage: A = matrix([[1,2,-1],[2,3,-2],[3,1,3]])
sage: A.adjugate()
[ 11  -7  -1]
[-12   6   0]
[ -7   5  -1]
```

Ma trận nghịch đảo của $A$ là

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} P_A^t = \begin{bmatrix} \frac{11}{6} & \frac{7}{6} & \frac{1}{6} \\ 2 & -1 & 0 \\ \frac{7}{6} & \frac{-5}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}.$$

Thực hiện tính toán trên SageMath như sau:

```
sage: A = matrix([[1,2,-1],[2,3,-2],[3,1,3]])
sage: A.inverse()
[-11/6   7/6   1/6]
[    2    -1     0]
[  7/6  -5/6   1/6]
```

# Bài tập Chương 1

**Bài tập 1.1.** Một học sinh có bảng điểm các môn Toán, Vật lý và Hóa học thể hiện trong các ma trận sau đây:

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 9 & 7 \\ 7 & 8 & 9 \\ 9 & 6 & 8 \end{bmatrix},$$

trong đó dòng thứ nhất là điểm môn Toán, dòng thứ hai là điểm môn Vật lý và dòng thứ ba là điểm môn Hóa học. Hơn nữa, cột thứ nhất là điểm kiểm tra với hệ số 1, cột thứ hai là điểm kiểm tra hệ số 2 và cột thứ ba là điểm kiểm tra hệ số 3. Hãy tính toán điểm trung bình của học sinh đó và thể hiện các tính toán theo các phép toán trên ma trận.

**Bài tập 1.2.** Cho các ma trận sau đây

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad , \quad v = \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \\ 8 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 6 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Hãy tính các ma trận sau đây

$$2A - 3B, AB, CD, DC, uv, vu, Bu, CB, (AB)u,$$

$$A(Bu), (A+B)^t, (CD)^t.$$

**Bài tập 1.3.** Tìm ma trận $X$ sao cho

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + 2X = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

**Bài tập 1.4.** Cho $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$
Chứng minh rằng $A^4 = I, B^3 = I$.

**Bài tập 1.5.** Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{bmatrix}.$$

Tính các ma trận $A^2, A^3$. Từ đó, hãy dự đoán công thức tổng quát cho ma trận $A^n$ với $n$ là một số nguyên dương tuỳ ý.

**Bài tập 1.6.** Cho các ma trận

$$A = [a_{ij}]_{m\times n} \quad , \quad B = [b_{ij}]_{n\times p}.$$

Chứng minh rằng $(AB)^t = B^t A^t$.

**Bài tập 1.7.** Chứng minh rằng không tồn tại các ma trận vuông cấp 2 sao cho

$$AB - BA = I_2.$$

**Bài tập 1.8.** Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 2 & -3 & 2 \\ 4 & 9 & -4 & 2 & -5 \\ 5 & 11 & -7 & 4 & -6 \end{bmatrix}.$$

Hãy sử dụng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng để đưa ma trận $A$ về dạng bậc thang, từ đó suy ra hạng của ma trận $A$.

**Bài tập 1.9.** Tìm hạng của các ma trận sau đây theo tham số $m$.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & m & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 7 & 2 \\ 1 & 10 & 17 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ m & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & m & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Bài tập 1.10.** Tính định thức của các ma trận sau đây:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, d) $\begin{bmatrix} 2 & 9 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 5 & 1 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$, f) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -m \\ -2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

**Bài tập 1.11.** Tìm ma trận nghịch đảo của các ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 8 \end{bmatrix} \quad , \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -m & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -m & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -m \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Bài tập 1.12.** Tìm ma trận $X$ sao cho

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 13 & 11 \\ 19 & 13 \\ 12 & 11 \end{bmatrix}.$$

**Bài tập 1.13.** Tìm tất cả các giá trị của $m$ sao cho ma trận sau khả nghịch

$$A = \begin{bmatrix} m & -3 & 1 \\ 2 & 4 & m \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

**Bài tập 1.14.** Cho $A, B \in M_n$ là các ma trận khả nghịch. Chứng minh rằng $AB$ là ma trận khả nghịch và $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

# Chương 2

# Hệ phương trình tuyến tính

Nhiều bài toán thực tế trong nhiều lĩnh vực khác nhau như Vật lý, Hóa học, Sinh học, Khoa học máy tính và cả các Khoa học xã hội dẫn đến việc giải hệ phương trình tuyến tính.

## 2.1 Khái niệm về hệ phương trình tuyến tính

**Định nghĩa 2.1.** *Hệ phương trình tuyến tính* $m$ phương trình, $n$ ẩn số là hệ phương trình có dạng

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{2.1}$$

trong đó $a_{ij}$ là các *hệ số* cho trước, $b_i$ là các *hệ số tự do* và $x_i$ là các *ẩn số*. *Nghiệm* của hệ phương trình tuyến tính (2.1) là một bộ gồm $n$ số được sắp thứ tự $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ sao cho khi ta thay $x_i = a_i$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, n$ vào tất cả các phương trình trong hệ, ta thu được các đẳng thức đúng. Một hệ phương trình có thể vô nghiệm, có thể có nghiệm duy nhất hoặc có thể có vô số nghiệm. Giải một hệ phương trình tuyến tính chính là việc đi tìm tất cả các nghiệm của hệ đó.

Hệ phương trình tuyến tính (2.1) có thể được viết dưới dạng ma trận như sau:

$$Ax = b, \tag{2.2}$$

trong đó các ma trận

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}_{m\times 1}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1},$$

được gọi là *ma trận hệ số*, *cột hệ số tự do*, *cột ẩn số*. Chú ý rằng tích $Ax$ được hiểu là tích của hai ma trận $A$ và $x$. Ma trận $[A \mid b]$ nhận được bằng cách ghép thêm cột tự do $b$ vào ma trận hệ số $A$ được gọi là *ma trận hệ số mở rộng* của hệ (2.1).

**Ví dụ 2.1.** Xét hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 + \phantom{3}x_3 = 11 \end{cases}. \tag{2.3}$$

Ma trận hệ số của hệ (2.3) là

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Cột hệ số tự do và cột ẩn số của hệ (2.3) lần lượt là

$$b = \begin{bmatrix} -1 \\ 11 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Thay $x_1 = 3, x_2 = 1, x_3 = 2$ vào hệ phương trình, ta thu được các đẳng thức đúng. Do đó $(3, 1, 2)$ là một nghiệm của hệ phương trình (2.3). Ta kiểm tra dưới dạng ma trận $X = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, ta có

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

Thực hiện bằng SageMath như sau:

```
sage: A = matrix([[1,2,-3],[2,3,1]])
sage: B = matrix([[3],[1],[2]])
sage: A*B
[-1]
[11]
```

## 2.2 Công thức Cramer

**Định nghĩa 2.2.** Hệ phương trình tuyến tính $Ax = b$ được gọi là *hệ Cramer* nếu ma trận hệ số $A$ là một ma trận vuông và $\det(A) \neq 0$.

**Định lý 2.1.** *Hệ Cramer có nghiệm duy nhất được cho bởi công thức Cramer*

$$x = A^{-1}b,$$

*tức là*

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}, \forall i = 1, 2, \ldots, n$$

*trong đó $A_i$ là ma trận nhận được từ ma trận $A$ bằng cách thay cột thứ i bằng cột hệ số tự do $b$.*

*Chứng minh.* Do $\det(A) \neq 0$ nên $A$ là ma trận khả nghịch. Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} Ax = b &\Leftrightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}b \\ &\Leftrightarrow x = A^{-1}b. \end{aligned}$$

Theo (1.3), ta có

$$x = \frac{1}{\det(A)} P_A^t b,$$

Do đó, với mọi $i = 1, 2, \ldots, n$, ta có

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{1}{\det(A)}(A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \cdots + A_{ni}b_n) \\ &= \frac{\det(A_i)}{\det(A)}. \end{aligned}$$

Đẳng thức cuối nhận được bằng cách sử dụng công thức Laplace cho định thức của ma trận $A_i$ khai triển theo cột thứ $i$. □

**Ví dụ 2.2.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + \phantom{2}x_2 = 1 \\ x_1 - 2x_2 = 1 \end{cases}.$$

Ta có

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Tính toán định thức của $A$, ta được

$$\det(A) = -3 \neq 0.$$

Thực hiện tính toán bằng SageMath như sau:

```
sage: A = matrix([[1,1],[1,-2]])
sage: A.det()
-3
```

Ta cũng có các ma trận

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tính toán định thức, ta nhận được

$$\det(A_1) = -3, \det(A_2) = 0.$$

Thực hiện bằng SageMath như sau:

```
sage: A1 = matrix([[1,1],[1,-2]])
sage: A1.det()
-3
sage: A2 = matrix([[1,1],[1,1]])
sage: A2.det()
0
```

Theo Định lý 2.1, hệ phương trình có nghiệm duy nhất

$$x_1 = 1, x_2 = 0.$$

**Ví dụ 2.3.** Xét hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 - \ \ x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 21 \\ 7x_1 - \ \ x_2 - 3x_3 = 6 \end{cases}.$$

Ta có

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 7 & -1 & -3 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 6 \\ 21 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Tính toán định thức của $A$, ta được

$$\det(A) = -12 \neq 0.$$

Thực hiện tính toán bằng SageMath như sau:

```
sage: A = matrix([[1,1,-1],[2,3,-4],[7,-1,-3]])
sage: A.det()
-12
```

Ta cũng có các ma trận

$$A_1 = \begin{bmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 21 & 3 & -4 \\ 6 & -1 & -3 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 2 & 21 & -4 \\ 7 & 6 & -3 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 21 \\ 7 & -1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Tính toán định thức, ta nhận được

$$\det(A_1) = 0, \det(A_2) = -36, \det(A_3) = 36.$$

Thực hiện bằng SageMath như sau:

```
sage: A1 = matrix([[6,1,-1],[21,3,-4],[6,-1,-3]])
sage: A1.det()
0
sage: A2 = matrix([[1,6,-1],[2,21,-4],[7,6,-3]])
sage: A2.det()
-36
sage: A3 = matrix([[1,1,6],[2,3,21],[7,-1,6]])
sage: A3.det()
36
```

Theo Định lý 2.1, hệ phương trình có nghiệm duy nhất

$$x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = -3.$$

**Bài tập 2.1.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 + \ \ 3x_3 + 4x_4 = -3 \\ x_1 + \ \ x_2 + \ \ 5x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + \ \ x_2 + \ \ 3x_3 + 2x_4 = -3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2 \end{cases}.$$

## 2.3 Phương pháp khử Gauss

Công thức Cramer chỉ áp dụng được cho các hệ Cramer, tức là các hệ phương trình có ma trận hệ số là ma trận vuông và có định thức khác 0. Phương pháp khử Gauss mà ta sẽ trình bày trong phần này có thể áp dụng cho một hệ phương trình tuyến tính bất kỳ. Ý tưởng cơ bản của phương pháp khử Gauss là biến đổi tương đương để khử dần ẩn số ở các phương trình từ trên xuống dưới. Theo ngôn ngữ ma trận, điều này tương đương với các phép biến đổi sơ cấp trên dòng để đưa ma trận hệ số mở rộng về dạng bậc thang. Sau đó, giải các phương trình ngược từ dưới lên trên bằng cách thay dần các ẩn từ phải qua trái.

**Bài toán 2.1.** Giải hệ phương trình tuyến tính (tổng quát)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{2.4}$$

**Thuật toán 2.1** (Phương pháp khử Gauss)**.**

1. Lập ma trận hệ số mở rộng $(A \mid b)$ của hệ (2.4).

2. Dùng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng để đưa ma trận $(A \mid b)$ về dạng bậc thang. Từ đó tính được hạng của $A$ và $(A \mid b)$.

- Nếu $\operatorname{rank}(A) < \operatorname{rank}(A \mid b)$ thì hệ (2.4) vô nghiệm. Thuật toán dừng lại.
- Nếu $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A \mid b) = r$ thì hệ (2.4) có nghiệm. Chuyển qua bước tiếp theo.

3. Từ ma trận bậc thang, viết lại hệ phương trình mới tương đương với hệ phương trình đã cho nhưng đơn giản hơn. Giữ lại vế trái $r$ ẩn tương ứng với các hệ số đầu tiên khác không trên mỗi dòng khác không của ma trận bậc thang và gọi chúng là các *ẩn chính*. Các ẩn còn lại gọi là *ẩn tự do* được chuyển sang vế phải. Sau đó xem các ẩn tự do như tham số và gán cho chúng các giá trị tuỳ ý rồi giải hệ phương trình ngược từ dưới lên trên bằng cách thay thế dần các ẩn từ phải sang trái và từ dưới lên trên.

4. Tóm tắt kết quả và kết luận về nghiệm của hệ phương trình đã cho.

**Ví dụ 2.4.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + \ 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 3 \\ x_1 + \ 5x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 1 \\ 2x_1 + \ 7x_2 + 3x_3 + \ x_4 = 5 \\ 5x_1 + 18x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 12 \end{cases}.$$

Ma trận hệ số

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 \\ 1 & 5 & -9 & 8 \\ 2 & 7 & 3 & 1 \\ 5 & 18 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Tính toán định thức, ta có

$$\det(A) = 0.$$

Thực hiện bằng SageMath như sau:

```
sage: A = matrix([[1,3,5,-2],[1,5,-9,8],[2,7,3,1],[5,18,4,5]])
```

```
sage: A.det()
0
```

Do đó, chúng ta không thể áp dụng công thức Cramer trong trường hợp này được. Chúng ta sẽ giải hệ phương trình trên bằng phương pháp khử Gauss.

1. Lập ma trận hệ số mở rộng của hệ phương trình

$$(A \mid b) = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & -9 & 8 & 1 \\ 2 & 7 & 3 & 1 & 5 \\ 5 & 18 & 4 & 5 & 12 \end{array}\right].$$

2. Dùng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng để đưa ma trận $(A \mid b)$ về dạng bậc thang, thực hiện bằng SageMath như sau:

```
sage: A = matrix([[1,3,5,-2,3],[1,5,-9,8,1],
                  [2,7,3,1,5],[5,18,4,5,12]])
sage: A.echelon_form()
[  1   0  26 -17   6]
[  0   1  -7   5  -1]
[  0   0   0   0   0]
[  0   0   0   0   0]
```

   Ta có

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A \mid b) = 2,$$

   tức là hệ phương trình có nghiệm.

3. Hệ phương trình đã cho tương đương với hệ phương trình sau

$$\begin{cases} x_1 \qquad + 26x_3 - 17x_4 = 6 \\ \qquad x_2 - \ \ 7x_3 + \ \ 5x_4 = -1 \end{cases},$$

4. Nghiệm của hệ phương trình đã cho được cho bởi công thức

$$\begin{cases} x_1 = 6 - 26a + 17b \\ x_2 = -1 + 7a - 5b \\ x_3 = \qquad a \\ x_4 = \qquad b \end{cases},$$

trong đó $a, b$ là các giá trị tuỳ ý.

**Bài tập 2.2.** Giải và biện luận hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 - x_5 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 8 \\ 4x_1 + 9x_2 - 4x_3 + 2x_4 - 5x_5 = 6 \\ 5x_1 + 11x_2 - 7x_3 + 4x_4 - 6x_5 = m \end{cases}.$$

# Chương 3

# Chéo hóa ma trận

## 3.1 Ma trận đồng dạng

Trong tập hợp các ma trận vuông cấp $n$, người ta sẽ quan tâm đến những ma trận có tính chất tương tự nhau theo một nghĩa nào đó. Trong phần này, chúng ta sẽ giới thiệu khái niệm ma trận đồng dạng.

**Định nghĩa 3.1.** Cho $A, B$ là hai ma trận vuông cấp $n$. Ta nói rằng $A$ đồng dạng với $B$, ký hiệu $A \sim B$, nếu và chỉ nếu có tồn tại một ma trận vuông cấp $n$ khả nghịch $P$ sao cho

$$B = P^{-1}AP.$$

Quan hệ đồng dạng là một quan hệ tương đương trên $M_n$, tức là

- $A \sim A, \forall A \in M_n$;
- Nếu $A \sim B$ thì $B \sim A$;
- Nếu $A \sim B$ và $B \sim C$ thì $A \sim C$.

**Mệnh đề 3.1.** *Nếu* $A \sim B$ *thì* $\det(A) = \det(B)$.

*Chứng minh.* Theo định nghĩa, nếu $A \sim B$ thì có tồn tại ma trận khả nghịch

$P$ sao cho $B = P^{-1}AP$. Khi đó, ta có

$$\begin{aligned}\det(B) &= \det(P^{-1}AP)\\ &= \det(P^{-1})\det(A)\det(P)\\ &= \frac{1}{\det(P)}\det(A)\det(P)\\ &= \det(A).\end{aligned}$$

□

## 3.2 Giá trị riêng và vectơ riêng

**Định nghĩa 3.2.** Cho $A$ là một ma trận vuông cấp $n$. Một số $\lambda \in \mathbb{R}$ được gọi là một *giá trị riêng* của $A$ nếu và chỉ nếu có tồn tại một ma trận cột $X \neq 0$ sao cho

$$AX = \lambda X.$$

Khi đó $X$ được gọi là *vectơ riêng* của $A$ tương ứng với $\lambda$.

**Ví dụ 3.1.** Cho các ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \quad , \quad X = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Khi đó, ta có

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

tức là

$$AX = 2X.$$

Do đó, $\lambda = 2$ là một giá trị riêng của $A$ và $X$ là một vectơ riêng của $A$ tương ứng với $\lambda$.

Theo định nghĩa, số $\lambda$ là một giá trị riêng của ma trận $A \in M_n$ nếu và chỉ nếu có tồn tại ma trận cột $X \neq 0$ sao cho

$$AX = \lambda X.$$

Điều này tương đương với hệ phương trình

$$(A - \lambda I_n)X = 0 \tag{3.1}$$

có nghiệm $X \neq 0$. Phương trình (3.1) là dạng ma trận của một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất $n$ ẩn số với ma trận hệ số là $A - \lambda I_n$. Bởi vì hệ phương trình này có nghiệm không tầm thường nên ta phải có

$$\det(A - \lambda I_n) = 0.$$

**Định nghĩa 3.3.** Cho $A \in M_n$. Đa thức

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$$

được gọi là *đa thức đặc trưng* của ma trận $A$.

Chú ý rằng nếu $A$ là ma trận vuông cấp $n$ thì đa thức $P_A(\lambda)$ là đa thức bậc $n$ theo biến $\lambda$. Hơn nữa, ta có kết quả sau đây.

**Mệnh đề 3.2.** *Cho $A, B \in M_n$ là hai ma trận vuông cấp $n$. Khi đó, nếu $A \sim B$ thì $P_A(\lambda) = P_B(\lambda)$.*

*Chứng minh.* Nếu $A \sim B$ thì có tồn tại ma trận khả nghịch $P$ sao cho

$$B = P^{-1}AP.$$

Khi đó, ta có

$$\begin{aligned}
P_B(\lambda) &= \det(B - \lambda I_n) \\
&= \det(P^{-1}AP - \lambda I_n) \\
&= \det(P^{-1}(A - \lambda I_n)P) \\
&= \det(P^{-1}) \det(A - \lambda I_n) \det(P) \\
&= \det(A - \lambda I_n) \\
&= P_A(\lambda).
\end{aligned}$$

□

Để tìm giá trị riêng và vectơ riêng của một trận $A \in M_n$, chúng ta thực hiện các bước sau đây:

1. Tính đa thức đặc trưng $P_A(\lambda)$ của $A$.
2. Giải phương trình
$$P_A(\lambda) = 0$$
để tìm các giá trị riêng $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.
3. Với mỗi giá trị riêng $\lambda_i$, giải hệ phương trình
$$(A - \lambda_i I_n)X = 0$$
để tìm các vectơ riêng $X \neq 0$ tương ứng với $\lambda_i$.

**Ví dụ 3.2.** Cho ma trận
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}.$$
Khi đó, đa thức đặc trưng của $A$ là
$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I_2) \\ &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (3-\lambda)(6-\lambda) - 4 \\ &= \lambda^2 - 9\lambda + 14. \end{aligned}$$
Giá trị riêng của $A$ là nghiệm của đa thức đặc trưng $P_A(\lambda)$, tức là
$$\lambda^2 - 9\lambda + 14 = 0.$$
Phương trình này có hai nghiệm $\lambda_1 = 2$ và $\lambda_2 = 7$. Do đó ma trận $A$ có hai giá trị riêng $\lambda_1 = 2$ và $\lambda_2 = 7$.

- Với $\lambda_1 = 2$, xét hệ phương trình
$$(A - 2I_2)X = 0,$$

tức là

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 0 \\ 2 & 4 & | & 0 \end{bmatrix}.$$

Dùng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng, chúng ta đưa ma trận trên về dạng bậc thang

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}.$$

Các nghiệm của hệ phương trình trên là

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2t \\ t \end{bmatrix}, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Do đó các vectơ riêng của $A$ tương ứng với $\lambda_1 = 2$ là

$$\begin{bmatrix} -2t \\ t \end{bmatrix}, \forall t \in \mathbb{R}, t \neq 0.$$

- Với $\lambda_2 = 7$, xét hệ phương trình

$$(A - 7I_2)X = 0,$$

tức là

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & | & 0 \\ 2 & -1 & | & 0 \end{bmatrix}.$$

Dùng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng, chúng ta đưa ma trận trên về dạng bậc thang

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}.$$

Các nghiệm của hệ phương trình trên là

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 2t \end{bmatrix}, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Do đó các vectơ riêng của $A$ tương ứng với $\lambda_1 = 7$ là

$$\begin{bmatrix} t \\ 2t \end{bmatrix}, \forall t \in \mathbb{R}, t \neq 0.$$

Để tìm đa thức đặc trưng, giá trị riêng và vectơ riêng của một trận vuông, chúng ta cũng có thể sử dụng phần mềm SageMath. Sau đây là những tính toán được làm trên SageMath cho ví dụ ở trên.

```
sage: A = matrix([[3,2],[2,6]])
sage: A.charpoly()
x^2 - 9*x + 14
sage: A.eigenvalues()
[7, 2]
sage: A.eigenvectors_right()
[(7, [(1, 2)], 1), (2, [(1, -1/2)], 1)]
```

**Bài tập 3.1.** Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Tìm các giá trị riêng và vectơ riêng của $A$.

## 3.3 Chéo hóa ma trận

Để cho gọn, với ma trận chéo chúng ta sẽ sử dụng ký hiệu

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n].$$

**Định nghĩa 3.4.** Cho $A \in M_n$ là một ma trận vuông cấp $n$. Ta nói $A$ là *chéo hóa được* nếu và chỉ nếu có tồn tại ma trận khả nghịch $P$ và ma trận chéo $D$ sao cho

$$P^{-1}AP = D.$$

Điều này có nghĩa là $A$ là đồng dạng với ma trận chéo $D$.

**Bài toán 3.1.** Cho $A$ là một ma trận vuông cấp $n$. Hãy tìm ma trận khả nghịch $P$ và ma trận chéo $D$ sao cho $P^{-1}AP = D$.

Để giải bài toán này, chúng ta phải tìm hiểu xem khi nào $A$ là chéo hóa được và nếu chéo hóa được thì ma trận khả nghịch $P$ và ma trận chéo $D$ được tìm như thế nào.

**Định lý 3.1.** *Ma trận $A$ vuông cấp $n$ là chéo hóa được khi và chỉ khi $A$ có $n$ vectơ riêng tạo thành một ma trận có định thức khác không.*

**Ví dụ 3.3.** Xét ma trận $A$ như trong Ví dụ 3.2. Ta thấy rằng ma trận $A$ có hai vectơ riêng

$$v_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Định thức của ma trận có các cột $v_1, v_2$ là

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0.$$

Do đó $A$ là chéo hóa được.

Thuật toán chéo hóa ma trận:

Bước 1: Tìm các giá trị riêng của ma trận $A$ bằng cách tìm nghiệm của đa thức đặc trưng, nhận được các giá trị riêng $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Bước 2: Với mỗi giá trị riêng $\lambda_i$, tìm được các vectơ riêng độc lập tuyến tính.

Bước 3: Lấy tất cả các vectơ thu được ở bước 2. Nếu có đủ $n$ vectơ thì $A$ là chéo hóa được. Ngược lại, $A$ là không chéo hóa được.

Bước 4: Nếu $A$ là chéo hóa được thì $P$ là ma trận gồm các cột là các vectơ riêng thu được ở bước 2 và ma trận chéo $D$ là

$$D = [\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n].$$

**Ví dụ 3.4.** Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Chúng ta muốn tìm ma trận khả nghịch $P$ và ma trận chéo $D$ sao cho

$$P^{-1}AP = D.$$

- Đa thức đặc trưng của $A$ là

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 8\lambda^2 + 19\lambda - 12.$$

  Các giá trị riêng của $A$ là nghiệm của đa thức $P_A(\lambda)$, tức là

$$\lambda_1 = 4 \quad , \quad \lambda_2 = 3 \quad , \quad \lambda_3 = 1.$$

- Với $\lambda_1 = 4$, xét hệ phương trình

$$(A - 4I_3)X = 0.$$

  Ta chọn được 1 vectơ riêng

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Với $\lambda_2 = 3$, xét hệ phương trình

$$(A - 3I_3)X = 0.$$

  Ta chọn được 1 vectơ riêng

$$X_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- Với $\lambda_3 = 1$, xét hệ phương trình

$$(A - I_3)X = 0.$$

Ta chọn được 1 vectơ riêng

$$X_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Ta nhận được ma trận

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

và ma trận chéo

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Bây giờ chúng ta sử dụng phần mềm SageMath để kiểm tra ma trận $P$ là khả nghịch và $P^{-1}AP = D$.

```
sage: A = matrix([[4,1,2],[0,2,1],[0,1,2]])
sage: P = matrix([[1,-3,-1],[0,1,-3],[0,1,3]])
sage: P.det()
6
sage: P.inverse()*A*P
[4 0 0]
[0 3 0]
[0 0 1]
```

# Tài liệu tham khảo


[H] Nguyễn Hữu Việt Hưng, *Đại số tuyến tính*, Nhà Xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội, 2019.

[T] Nguyễn Đình Trí (chủ biên), *Toán học cao cấp* Tập 1, 2 và 3, Nhà xuất bản Giáo dục, tái bản lần hai, 2019.

# Chỉ mục

Công thức Cramer, 23

Hạng của ma trận, 9

Hệ phương trình tuyến tính, 21

Ma trận, 2

Ma trận bậc thang, 9

Ma trận chéo, 3

Ma trận khả nghịch, 14

Ma trận nghịch đảo, 14

Ma trận phụ hợp, 14

Ma trận tam giác, 3

Ma trận vuông, 3

Ma trận đơn vị, 3

Phép biến đổi sơ cấp trên dòng, 9

Phép cộng ma trận, 4

Phép nhân ma trận, 5

Phép nhân vô hướng, 5

Phương pháp khử Gauss, 27

Tích vô hướng, 7

Định thức, 10