



面向 21 世 纪 课 程 教 材
Textbook Series for 21st Century

数值逼近

第二版

王仁宏



高等
教育
出版
社
HIGHER EDUCATION PRESS

面向 21 世 纪 课 程 教 材
Textbook Series for 21st Century

数 值 逼 近

S h u z h i B i j i n

第二版

王 仁 宏



高等 教育 出 版 社 · 北京

HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容提要

本书讲述各种数值逼近的理论和方法。除介绍传统的数值逼近内容外,还介绍了多元插值、多元直交多项式、高维数值积分、多元样条以及曲线、曲面的生成与逼近等方面的一些新理论和新方法,其中也包括了编者的一些研究成果。

本书可作为高等学校信息与计算科学专业的专业基础课教材,也可作为其他理工科硕士、博士研究生的教材或参考书。本书还可供科学研究及工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

数值逼近 / 王仁宏编著. -- 2 版. -- 北京 : 高等教育出版社, 2012.5

ISBN 978 - 7 - 04 - 034832 - 3

I . ①数… II . ①王… III . ①数值逼近 - 高等学校 - 教材 IV . ①O241.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 051555 号

策划编辑 张长虹 责任编辑 张长虹 封面设计 张楠 版式设计 马敬茹
插图绘制 黄建英 责任校对 殷然 责任印制 田甜

出版发行	高等教育出版社	网 址	http://www.hep.edu.cn
社 址	北京市西城区德外大街 4 号		http://www.hep.com.cn
邮 政 编 码	100120	网上订购	http://www.landraco.com
印 刷	北京市联华印刷厂		http://www.landraco.com.cn
开 本	787mm×960mm 1/16		
印 张	20.5	版 次	1999 年 6 月第 1 版
字 数	370 千字		2012 年 5 月第 2 版
购书热线	010 - 58581118	印 次	2012 年 5 月第 1 次印刷
咨询电话	400 - 810 - 0598	定 价	32.10 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换

版 权 所 有 侵 权 必 究

物 料 号 34832 - 00



面向21世纪课程教材



普通高等教育“九五”
国家教委重点教材

第二版前言

本书自 1999 年出版至今已有十多年了。十多年来,承蒙许多兄弟院校将本书选作本科生和研究生的教材和参考书,并提出了许多很好的意见和建议。现根据十年来的使用经验,并根据学科发展的需要,对本书进行了修订。

本次修订增添了径向基函数插值和高维单纯形区域上具有代数精确度的求积公式等新内容。它们在科学研究与工程计算中已显现出重要的意义。

本书的内容基本上涵盖了各种类型的高等学校、各有侧重的学科专业以及不同层次的本科生、硕士和博士研究生对数值逼近课程的基本需求。正因为如此,教师在选用本书作为教材时,要“因地制宜”地对书中的内容进行选择。

借本书修订再版的机会,编者再一次感谢国家自然科学基金委员会近 30 年来的一贯资助;感谢高等教育出版社卓有成效的支持与帮助;感谢一贯关心本书的同仁的支持与帮助。希望读者能一如既往地对本书提出宝贵的意见。谢谢。

大连理工大学数学科学学院

王仁宏

2012 年 1 月于大连

第一版序言

逼近(近似)的思想和方法渗透于几乎所有的学科,其中包括自然科学和人文科学中的学科。从数学学科的角度来看,逼近论既属于函数论的范畴,又属于计算数学的范畴。事实上,逼近论是一门研究函数的各类逼近性质的学科方向,因而它应属函数论的范畴。另一方面,逼近论又是计算数学、科学工程计算诸多数值方法(包括函数计算,数值微分、数值积分,微分、积分方程数值解,曲线、曲面生成以及数据处理等)的理论基础和方法的依据。正因为如此,作为一部涉及逼近论的教材,必须首先确定这样一个问题:偏向于函数论,抑或偏向于数值计算?

本书作为一部教材,偏向于后者——科学计算。从本书的书名《数值逼近》也可看出这点。当今时代是科学技术日新月异地飞速发展的时代。层出不穷的新问题要求人们提出相应的新理论、新方法来加以解决。所以本书除着力讲述数值方法的理论与技巧外,还有重点地介绍了一些偏重于函数论方面的基本理论和方法,以便本书的读者能从中学到扎实的基本理论与方法,为将来能够独立地提出新理论与新方法提供必要的前提。这就是编写本书的基本思路。

如所知,1983年我曾与徐利治、周蕴时两位教授合作出版了《函数逼近的理论与方法》一书。那本书是我们当年在吉林大学教学工作的总结基础上写成的。十多年来,随着科学技术的飞速发展,特别是计算机技术的发展,使得科学技术各个领域中原本不可能解决的许多问题,已可以借助计算机来解决。就数值逼近学科领域来讲,涉及的新课题主要有以下三个方面:多元问题(高维、多因素),非线性问题和几何形象化(同各科学工程学科中的计算机辅助设计与制造密切相关)。因此,本书在讲述一些经典的理论方法的同时,还着重介绍了许多多元数值逼近的理论与方法,包括多元多项式插值、多元直交多项式、高维数值积分以及多元样条等方面的基本理论和最新方法,其中有的成果还是最近十多年来才研究出来的。由于计算机的发展,计算几何已悄然兴起。如果说,解析几何是在笛卡儿引入坐标以后,人们可以用解析(代数)的方法来研究几何问题的话,那么计算几何就是在计算机出现后,人们可以用计算机来研究几何问题,显示和修改几何实体等。曲线、曲面的生成与逼近,正是几何形体的逼近问题。本书第八章对此作了专门的介绍,特别着重介绍了 Bézier 方法, B - 样条方法和非均匀有

理 B -样条(NURBS)方法等。为介绍非线性逼近方法,本书除在第六章专门介绍外,还就奇异积分的计算等作了讨论。

本书上述几方面的新内容,作者曾多次在大连理工大学为全校博士研究生开设的“数值逼近选讲”课程中讲述过。

本书的选材或内容可能会有不当、甚至错误之处,敬请专家、读者不吝指教,编者将不胜感谢。

本书的写作和出版,得到了国家教育委员会“九五”重点教材立项的资助,使本书得以顺利出版。作者在此深表感谢。作者还要感谢国家自然科学基金委员会的资助。感谢徐利治教授和周蕴时教授对编者撰写本书的大力支持。审稿人对本书原稿提出了许多宝贵的意见,高等教育出版社郭思旭先生为本书出版做了大量细致的工作。对他们的支持与帮助谨致衷心的感谢。

大连理工大学数学科学研究所

王仁宏

1998年11月于大连

目 录

第一章 Weierstrass 定理与线性算子逼近	1
§ 1 Weierstrass 第一定理	1
§ 2 Weierstrass 第二定理	4
§ 3 线性正算子与 Korovkin 定理	6
第一章习题	14
第二章 一致逼近	18
§ 1 Borel 存在定理	19
§ 2 最佳逼近定理	21
§ 3 Tchebyshev 最小零偏差多项式及其应用	27
§ 4 最佳一致逼近的收敛速度估计	35
§ 5 函数的构造性理论	45
§ 6 代数多项式逼近理论中的有关结果	51
第二章习题	56
第三章 插值方法	60
§ 1 Lagrange 插值多项式	61
§ 2 Newton 插值多项式	64
§ 3 插值多项式余项	69
§ 4 有限差分计算	74
§ 5 等距结点上的插值公式	79
§ 6 Hermite 插值多项式	82
§ 7 多元插值方法	86
§ 8 径向基函数插值	94
第三章习题	100
第四章 平方逼近	103
§ 1 最小二乘法	103
§ 2 空间 $L^2_{\rho(x)}$	108
§ 3 直交函数系与广义 Fourier 级数	111
§ 4 直交函数结构公式	117
§ 5 直交多项式的一般性质	120
§ 6 直交多项式级数的收敛性	127
§ 7 几种特殊的直交多项式	129

§ 8 多元直交多项式	139
第四章习题	145
第五章 数值积分	147
§ 1 数值积分的一般概念	147
§ 2 Newton-Cotes 公式	150
§ 3 Romberg 方法	155
§ 4 Euler-Maclaurin 公式	159
§ 5 Gauss 型求积公式	163
§ 6 Gauss 公式和 Mehler 公式	167
§ 7 三角精度与周期函数的求积公式	171
§ 8 奇异积分的计算	173
§ 9 高维求积公式	176
§ 10 n 维单纯形上的求积公式	190
第五章习题	191
第六章 非线性逼近	194
§ 1 非线性一致逼近	195
§ 2 有理函数插值	204
§ 3 Padé 逼近	215
§ 4 有理逼近的一些算法	226
§ 5 Prony 指数型函数逼近方法	238
第六章习题	242
第七章 样条逼近方法	244
§ 1 样条函数及其基本性质	244
§ 2 B - 样条及其性质	254
§ 3 三次样条插值	262
§ 4 多元样条	269
第七章习题	278
第八章 曲线、曲面生成与逼近	279
§ 1 简单的数据预处理方法	279
§ 2 累加弦长法	283
§ 3 Bézier 方法	286
§ 4 B - 样条方法	297
§ 5 非均匀有理 B - 样条(NURBS)	307
第八章习题	314
主要参考书目	316

第一章 Weierstrass 定理与线性 算子逼近

如所知, 函数逼近的目的, 是用较简单的函数来逼近较复杂的函数. 本章讲述用多项式序列逼近有界闭区间上连续函数的可行性.

§ 1 Weierstrass 第一定理

在实变数函数的数学分析中, 最重要的函数类是连续函数类 $C[a, b]$ 与连续的周期函数类 $C_{2\pi}$.

$C[a, b]$ 是由定义在某一闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数全体所构成的集合, $C_{2\pi}$ 是由定义在整个实轴 $(-\infty, +\infty)$ 上的以 2π 为周期的连续实函数全体所构成的集合.

现在我们来叙述逼近论中第一条基本定理.

定理 1(Weierstrass) 设 $f(x) \in C[a, b]$, 那么对于任意给定的 $\epsilon > 0$, 都存在多项式 $P(x)$, 使得

$$\max_{a \leq x \leq b} |P(x) - f(x)| < \epsilon.$$

关于这个著名定理, 现在已有好多个不同的证法, 下面介绍 Bernstein 的构造性证法.

Bernstein 证法: 不妨假定函数的定义区间是 $[a, b] \equiv [0, 1]$. 事实上, 通过如下的线性代换:

$$t = (b - a)x + a,$$

就能将 x 的区间 $0 \leq x \leq 1$ 变换成 t 的区间 $a \leq t \leq b$. 同时, 显而易见, x 的多项式将变成 t 的多项式, x 的连续函数将变成 t 的连续函数. 因此只需就连续函数类 $C[0, 1]$ 来证明 Weierstrass 第一定理成立.

对于给定的 $f(x) \in C[0, 1]$, 作如下的一串多项式 ($n = 1, 2, \dots$):

$$B_n^f(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \quad (1.1)$$

显然 $B_n^f(x)$ 是一个 n 次多项式.

下面我们要证明极限关系式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n^f(x) = f(x)$$

在区间 $[0,1]$ 上是一致成立的. 显然这个命题隐含着 Weierstrass 第一定理. 因为对于任意指定的 $\epsilon > 0$, 根据所要证明的命题, 总可找到一个充分大的 N , 使得当 $n \geq N$ 时恒有

$$\max_x |B_n^f(x) - f(x)| < \epsilon.$$

换句话说, Weierstrass 第一定理中所提及的 $P(x)$, 只要取 $B_n^f(x)$ (其中 $n \geq N$) 就可以了.

为了证明上述命题, 需要用到一个初等恒等式:

$$\sum_{k=0}^n (nx - k)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x). \quad (1.2)$$

这个恒等式是容易验证的. 事实上, 由于

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = [x + (1-x)]^n \equiv 1,$$

可知

$$\begin{aligned} \text{左端} &= \sum_{k=0}^n (n^2 x^2 + k^2 - 2nkx) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= n^2 x^2 + \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} - 2nx \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= n^2 x^2 + \sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &\quad + (1-2nx) \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= n^2 x^2 + n(n-1)x^2 \sum_{k=2}^n \binom{n-2}{k-2} x^{k-2} (1-x)^{n-k} + (1-2nx)nx \\ &= n^2 x^2 + n(n-1)x^2 + (1-2nx)nx = \text{右端}. \end{aligned}$$

对于 $[0,1]$ 中的每一固定 x 及任一固定正整数 n , 令

$$\epsilon_n(x) = \max \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right|,$$

上式的右端代表当 k 取所有合乎条件

$$\left| \frac{k}{n} - x \right| < \left(\frac{1}{n} \right)^{1/4}$$

的正整数时所得的最大差数. 根据 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的一致连续性, 存在一串 $\varepsilon_n > 0$, 使得

$$\varepsilon_n(x) < \varepsilon_n \downarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

记

$$\begin{aligned} f(x) - B_n^f(x) &= \sum' \left[f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right] \lambda_{n,k}(x) \\ &\quad + \sum'' \left[f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right] \lambda_{n,k}(x), \end{aligned}$$

其中 \sum' 与 \sum'' 分别表示对满足如下条件的一切 k 所取的和:

$$|k - nx| < n^{3/4}, |k - nx| \geq n^{3/4},$$

而

$$\lambda_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

令 $M = \max |f(x)|$, 则显然有

$$\begin{aligned} |f(x) - B_n^f(x)| &< \sum' \varepsilon_n \lambda_{n,k}(x) + 2M \sum'' \lambda_{n,k}(x) \\ &< \varepsilon_n + 2M \sum'' \lambda_{n,k}(x), \end{aligned}$$

而且利用已经验证过的恒等式(1.2)可知

$$n^{3/2} \sum'' \lambda_{n,k}(x) \leq \sum_{k=0}^n (k - nx)^2 \lambda_{n,k}(x) = nx(1-x) \leq \frac{n}{4}.$$

因此

$$\begin{aligned} \sum'' \lambda_{n,k}(x) &\leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{n} \right)^{1/2}, \\ |f(x) - B_n^f(x)| &< \varepsilon_n + \frac{M}{2} \left(\frac{1}{n} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

注意上列不等式的右端与 x 无关, 而且随着 n 的无限增大而趋于 0. 这就证明了多项式序列 $B_n^f(x)$ 对于 $f(x)$ 的一致收敛性.

Weierstrass 第一定理实际上也解决了如何利用多项式构成的函数项级数来表示连续函数的问题. 因为, 任意取定一个单调下降于 0 的数列 δ_n , 则对每个 δ_n 都可找到一个多项式 $P_n(x)$ 使得 $|P_n(x) - f(x)| < \delta_n$. 于是令

$$Q_1(x) = P_1(x), \quad Q_n(x) = P_n(x) - P_{n-1}(x), \quad n > 1,$$

可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} Q_n(x)$ 的前 n 项之和恰好与 $P_n(x)$ 相同, 因而该级数也就一致地收敛于 $f(x)$.

在 Bernstein 的证法中, 不仅证明了近似多项式序列 $P_n(x)$ 的存在性, 而且还给出了构造 $P_n(x)$ 的一个具体方法. 事实上, $B_n^f(x) (n=1, 2, \dots)$ 便是连续函数 $f(x) (0 \leq x \leq 1)$ 的一个近似多项式序列. 这样的证法通常称为构造性的证明方法, 它比只证明存在性的非构造性证明方法更有价值.

§ 2 Weierstrass 第二定理

周期连续函数(不妨假定其周期为 2π)的最简单逼近工具是如下三角多项式:

$$T(x) = A + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

如果其中的系数 a_n 和 b_n 不全为 0, 则称 $T(x)$ 为 n 阶三角多项式.

相应于 Weierstrass 第一定理, 有如下的

定理 2(Weierstrass 第二定理) 设 $f(x) \in C_{2\pi}$, 则对任意给定的 $\epsilon > 0$, 都有三角多项式 $T(x)$ 存在, 使得

$$\max_{-\pi \leq x \leq \pi} |f(x) - T(x)| < \epsilon. \quad (2.1)$$

这个定理可以从 Weierstrass 第一定理, 通过诱导函数来证明. 此处直接采用 Vallée-Poussin 算子

$$V_n[f; x] = \frac{1}{2\pi} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos^{2n} \frac{t-x}{2} dt$$

来证明, 其中

$$(2n)!! = (2n)(2n-2)\cdots 4 \cdot 2, (2n-1)!! = (2n-1)(2n-3)\cdots 3 \cdot 1.$$

作平移, 显然有

$$I_n = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2n} \frac{t-x}{2} dt = 2 \int_0^{\pi} \cos^{2n} \frac{t}{2} dt.$$

再作变换 $v = \sin^2 t / 2$, 可算得上述积分为

$$I_n = 2 \int_0^1 (1-v)^n \frac{1}{\sqrt{v(1-v)}} dv = 2 \int_0^1 v^{-1/2} (1-v)^{n-1/2} dv$$

$$= \frac{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)} = \frac{2\pi(2n-1)!!}{(2n)!!},$$

从而

$$f(x) - V_n[f; x] = \frac{1}{I_n} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - f(t)] \cos^{2n} \frac{t-x}{2} dt.$$

因为 $f(x) \in C_{2\pi}$, 所以 $f(x)$ 一致连续, 即对任意给定的 $\epsilon > 0$, 有 $\delta > 0$ 存在, 使得当 $|x' - x''| < \delta$ 时,

$$|f(x') - f(x'')| < \epsilon/2.$$

今将 $f(x) - V_n[f; x]$ 分成两部分

$$\begin{aligned} f(x) - V_n[f; x] &= \frac{1}{I_n} \int_{|t-x|<\delta} [f(x) - f(t)] \cos^{2n} \frac{t-x}{2} dt \\ &\quad + \frac{1}{I_n} \int_{|t-x|\geq\delta} [f(x) - f(t)] \cos^{2n} \frac{t-x}{2} dt \quad (2.2) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} C_1 + C_2. \end{aligned}$$

以下估计 C_1 和 C_2 .

$$\begin{aligned} |C_1| &\leq \frac{1}{I_n} \int_{|t-x|<\delta} |f(x) - f(t)| \cos^{2n} \frac{t-x}{2} dt \\ &< \frac{\epsilon}{2} \cdot 1 = \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

记 $M = \max_{-\pi \leq x \leq \pi} |f(x)|$, $q = \cos \frac{\delta}{2} < 1$, 则

$$\begin{aligned} |C_2| &\leq \frac{1}{I_n} \int_{|t-x|\geq\delta} |f(x) - f(t)| \cos^{2n} \frac{t-x}{2} dt \\ &\leq 2M \cdot \frac{1}{I_n} \cdot \cos^{2n} \frac{\delta}{2} \cdot 2\pi \\ &= 2M \cdot \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} q^{2n} \\ &< 4M \cdot n \cdot q^{2n}. \end{aligned}$$

因此存在自然数 N , 使当 $n > N$ 时

$$|C_2| < \epsilon/2. \quad (2.4)$$

综合(2.2)、(2.3)和(2.4), 即可知 Weierstrass 第二定理成立.

§ 3 线性正算子与 Korovkin 定理

设 $\varphi(x, t)$ 对集 E 中每一个 x , 在区间 $a \leq t \leq b$ 上关于 t 都连续, 则积分

$$L(f; x) = L(f(t); x) = \int_a^b \varphi(x, t) f(t) dt = g(x) \quad (3.1)$$

对于每一在区间 $[a, b]$ 上连续的函数 $f(t)$ 都确定了一个函数 $g(x) = L(f; x)$. 此处 $L(f; x)$ 与微积分中的函数相似, 所差的只是变元与值的含义不同. 函数的存在域与变化域为数集, 而 $L(f; x)$ 的存在域与变化域均为函数集.

定义 1 设已知函数集 F , 如果对于集 F 中的每一函数 $f(t)$, 均有一个函数 $\varphi(x) = H(f(t); x)$ 与之对应, 则说在函数集 F 上定义了算子 $H(f; x) = H(f(t); x)$.

定义 2 称算子 $H(f; x)$ 是线性的, 如果随着 $f(t)$ 与 $\varphi(t)$ 属于它的存在域, $af(t) + b\varphi(t)$ (其中 a 与 b 为任意的实数) 也属于它的存在域且成立如下等式:

$$H(af + b\varphi; x) = aH(f; x) + bH(\varphi; x).$$

例 1 由(3.1)式定义的算子 $L(f; x)$ 是线性的.

事实上, 由下列等式即可推出算子 $L(f; x)$ 的线性性质:

$$\begin{aligned} L(\alpha f_1 + \beta f_2; x) &= \int_a^b \varphi(x, t) (\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)) dt \\ &= \alpha \int_a^b \varphi(x, t) f_1(t) dt + \beta \int_a^b \varphi(x, t) f_2(t) dt \\ &= \alpha L(f_1; x) + \beta L(f_2; x). \end{aligned}$$

例 2 设 $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$ 为定义于集 E 上的函数. 令

$$H(f; x) = \sum_{k=1}^n f(t_k) u_k(x),$$

其中 $f(t)$ 为在实数集 t_1, t_2, \dots, t_n 上有定义的函数. 可以证明算子 $H(f; x)$ 是线性的.

事实上

$$H(af + b\varphi; x) = \sum_{k=1}^n (af(t_k) + b\varphi(t_k)) u_k(x)$$

$$\begin{aligned}
 &= a \sum_{k=1}^n f(t_k) u_k(x) + b \sum_{k=1}^n \varphi(t_k) u_k(x) \\
 &= aH(f; x) + bH(\varphi; x).
 \end{aligned}$$

定义 3 如果对于每一正函数 $f(t)$ 及 $x \in E$, 线性算子 $L(f; x)$ 满足条件: $L(f; x) \geq 0$, 则称 $L(f; x)$ 为集 E 上的线性正算子.

显然, 对于每一固定的值 x , 线性算子 $L(f; x)$ 成为线性泛函数. 因此, 如果对于集 E 中每一固定的值 x , 线性泛函数均是正的, 则线性算子 $L(f; x)$ 在集 E 上是正的. 例如, 当 $u_k(x) (k = 1, 2, \dots, n)$ 在 E 上为正函数时, 算子

$$L(f; x) = \sum_{k=1}^n f(t_k) u_k(x)$$

为集 E 上的线性正算子. 又如, 若 $\varphi(x, t)$ 对集 E 中每一固定的 x 在区间 $[a, b]$ 上关于 t 为连续的正函数, 则算子

$$L(f; x) = \int_a^b \varphi(x, t) f(t) dt$$

在集 E 上是正的.

还需指出的是, 在线性算子 $L(f; x)$ 中, 变元 f 的变元与 x 不同, $L(f; x) = L(f(t); x)$. 在计算算子 $L(f; x)$ 的值时, 我们将 x 当做常数(但为集 E 中任意的), 因此等式

$$L(f(x); x) = f(x) L(1; x)$$

成立, 这是由于 $f(x)$ 为常数(与 t 无关).

现在我们来研究线性正算子序列 $L_n(f; x)$ 在区间 $[a, b]$ 上一致收敛于函数 $f(x)$ 的条件. 这里的 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的连续函数, 并且在整个实轴上有界. 如在泛函数情形一样, 我们将证明, 序列 $L_n(f_k; x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于 $f_k(x) = x^k (k = 0, 1, 2)$ 蕴含序列 $L_n(f; x)$ 一致收敛于 $f(x)$ (如果 $f(x)$ 满足上面指出的条件).

引理 1 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 在点 b 为右连续, 在点 a 为左连续, 则对 $\epsilon > 0$, 有 $\delta > 0$, 使得当 $|y - x| < \delta, a \leq x \leq b$ 时, 恒成立不等式

$$|f(y) - f(x)| < \epsilon.$$

证明 令 $\epsilon' = \frac{\epsilon}{2} > 0$. 根据函数 $f(x)$ 在区间 $a \leq x \leq b$ 上的一致连续性可以求出这样的 $\delta_1 > 0$, 使得当 $|y - x| < \delta_1, a \leq x, y \leq b$ 时, 有不等式

$$|f(y) - f(x)| < \epsilon'. \quad (3.2)$$

由于函数 $f(x)$ 在点 a 连续(左连续是假定的,而右连续则是依函数在闭区间 $[a, b]$ 上的连续性得知),所以对 $\epsilon' > 0$ 有 $\delta_2 > 0$,使得当 $|y - a| < \delta_2$ 时

$$|f(y) - f(a)| < \epsilon'. \quad (3.3)$$

同理有 $\delta_3 > 0$,使得当 $|y - b| < \delta_3$ 时

$$|f(y) - f(b)| < \epsilon'. \quad (3.4)$$

今取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$,并证明当 $|y - x| < \delta, a \leq x \leq b$ 时,有

$$|f(y) - f(x)| < 2\epsilon' = \epsilon.$$

事实上,若 x 与 y 均属于区间 $[a, b]$,则后面的不等式由(3.2)推得.若 $y < a$ (当然 x 必须属于区间 $[a, b]$),则 $|y - x| = |y - a| + |x - a|$,且由于 $|y - x| < \delta$,所以 $|y - a| < \delta, |x - a| < \delta$.现在得到

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &= |f(y) - f(a) + f(a) - f(x)| \\ &\leq |f(y) - f(a)| + |f(x) - f(a)|. \end{aligned}$$

依(3.3)式不等式右边第一项小于 ϵ' ,而依(3.2)式第二项也小于 ϵ' ,从而

$$|f(y) - f(x)| < 2\epsilon' = \epsilon.$$

如此已证明当 $y < a$ 时引理为真,对于 $y > b$ 的情况可以同样地证明.

现在我们给出线性正算子序列的收敛性定理.

定理 3(Korovkin) 设线性正算子序列 $L_n(f; x)$ 满足条件:

- (1) $L_n(1; x) = 1 + \alpha_n(x)$,
- (2) $L_n(t; x) = x + \beta_n(x)$,
- (3) $L_n(t^2; x) = x^2 + \gamma_n(x)$,

其中 $\alpha_n(x), \beta_n(x), \gamma_n(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上一致收敛于零;又设函数 $f(t)$ 有界且在区间 $[a, b]$ 上连续,于点 b 为右连续,于点 a 为左连续.则在区间 $[a, b]$ 上序列 $L_n(f; x)$ 一致收敛于函数 $f(x)$.

证明 由于函数 $f(t)$ 有界($-M < f(t) < M$),所以对一切 x 与 t 均成立不等式

$$-2M < f(t) - f(x) < 2M. \quad (3.5)$$

其次,依引理 1,对于 $\epsilon > 0$ 有 $\delta > 0$ 使得,当 $a \leq x \leq b, |t - x| < \delta$ 时,成立不等式

$$-\epsilon < f(t) - f(x) < \epsilon. \quad (3.6)$$

假定 $\psi(t) = (t - x)^2$ (x 为区间 $[a, b]$ 上的任意一点, 且一经取好就固定了), 由(3.5)、(3.6)式不难得到

$$-\epsilon - \frac{2M}{\delta^2} \psi(t) < f(t) - f(x) < \epsilon + \frac{2M}{\delta^2} \psi(t). \quad (3.7)$$

由此再依算子 $L_n(f; x)$ 的线性性质与单调性得到(其中 x 为固定的, 因而 $f(x)$ 为常数)

$$\begin{aligned} -\epsilon L_n(1; x) - \frac{2M}{\delta^2} L_n(\psi; x) &\leq L_n(f; x) - L_n(f(x); x) \\ &= L_n(f; x) - f(x)L_n(1; x) \\ &\leq \epsilon L_n(1; x) + \frac{2M}{\delta^2} L_n(\psi; x). \end{aligned} \quad (3.8)$$

现在我们可以断定, $L_n(\psi; x)$ 在区间 $[a, b]$ 上一致收敛于零. 事实上, 由定理的条件与算子 $L_n(f; x)$ 的线性性质推出

$$\begin{aligned} L_n(\psi; x) &= L_n(t^2 - 2tx + x^2; x) \\ &= L_n(t^2; x) - 2xL_n(t; x) + x^2L_n(1; x) \\ &= x^2 + \gamma_n(x) - 2x(x + \beta_n(x)) + x^2(1 + \alpha_n(x)) \\ &= \gamma_n(x) - 2x\beta_n(x) + x^2\alpha_n(x) \\ &= \delta_n(x), \end{aligned}$$

其中 $\delta_n(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上一致收敛于零.

考虑到这一点及定理中第一个条件, 便可断言不等式(3.8)右边在区间 $[a, b]$ 上一致收敛于 ϵ , 而左边一致收敛于 $-\epsilon$.

据此可以求出这样的序标 N_ϵ , 使得当 $n > N_\epsilon$, $a \leq x \leq b$ 时, 成立不等式

$$-2\epsilon < L_n(f; x) - f(x)L_n(1; x) < 2\epsilon.$$

最后, 依 ϵ 的任意性, 序列

$$L_n(f; x) - f(x)L_n(1; x)$$

在区间 $[a, b]$ 上一致收敛于零, 从而由定理中第一个条件便可断言序列 $L_n(f; x)$ 在区间 $[a, b]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

定理 4(Korovkin) 设线性正算子序列 $L_n(f; x)$ 满足条件:

(1) $L_n(1; x) = 1 + \alpha_n(x)$,

$$(2) L_n(\cos t; x) = \cos x + \beta_n(x),$$

$$(3) L_n(\sin t; x) = \sin x + \gamma_n(x),$$

其中 $\alpha_n(x), \beta_n(x)$ 与 $\gamma_n(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上一致收敛于零; 又设函数 $f(t)$ 有界且具有周期 2π , 在区间 $[a, b]$ 上连续, 于点 b 右连续, 于点 a 左连续. 在上述条件下, 序列 $L_n(f; x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

证明 对于函数 $f(x)$, 定理 3 的条件满足, 因此不等式(3.5)与(3.6)成立, 其中第一个适于一切 x 与 t 的值, 而第二个为以下条件所约束:

$$a \leq x \leq b, \quad |t - x| < \delta.$$

对固定的 $x (a \leq x \leq b)$, 依这些不等式, 类似定理 3 中(3.7)式的证明, 可得

$$-\varepsilon - \frac{2M}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} \psi(t) < f(t) - f(x) < \varepsilon + \frac{2M}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} \psi(t), \quad (3.9)$$

其中 $\psi(t) = \sin^2 \frac{t-x}{2}, a \leq x \leq b, -\infty < t < +\infty$.

由不等式(3.9)得到

$$\begin{aligned} -\varepsilon L_n(1; x) - \frac{2M}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} L_n(\psi; x) &\leq L_n(f; x) - f(x) L_n(1; x) \\ &\leq \varepsilon L_n(1; x) + \frac{2M}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} L_n(\psi; x). \end{aligned} \quad (3.10)$$

但是 $\psi(t) = \frac{1}{2}(1 - \cos x \cos t - \sin x \sin t)$. 于是

$$\begin{aligned} L_n(\psi; x) &= \frac{1}{2}[L_n(1; x) - \cos x L_n(\cos t; x) - \sin x L_n(\sin t; x)] \\ &= \frac{1}{2}[1 + \alpha_n(x) - \cos^2 x - \cos x \beta_n(x) - \sin^2 x - \sin x \gamma_n^2(x)] \\ &= \frac{1}{2}[\alpha_n(x) - \beta_n(x) \cos x - \gamma_n^2(x) \sin x] = \delta_n(x), \end{aligned}$$

其中 $\delta_n(x)$ 于区间 $[a, b]$ 上一致收敛于零. 依上述等式及定理条件可以推出, 不等式(3.10)右边在区间 $[a, b]$ 上一致收敛于 ε , 而左边一致收敛于 $-\varepsilon$. 因此有 N_ε , 使得当 $n > N_\varepsilon, a \leq x \leq b$ 时, 有不等式

$$-2\varepsilon < L_n(f; x) - f(x) L_n(1; x) < 2\varepsilon.$$

由此可以推出

$$L_n(f; x) - f(x)L_n(1; x) = \lambda_n(x),$$

其中 $\lambda_n(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上一致收敛于零. 从而依据定理条件, 得到

$$\begin{aligned} L_n(f; x) - f(x) &= \lambda_n(x) + f(x)[L_n(1; x) - 1] \\ &= \lambda_n(x) + f(x)\alpha_n(x) = \nu_n(x), \end{aligned}$$

其中 $\nu_n(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上一致收敛于零, 于是序列 $L_n(f; x)$ 在这个区间上一致收敛于函数 $f(x)$.

注记 请注意, 在定理 3 与定理 4 的证明过程中我们已经指明, 如果序列 $L_n(1; x)$ 在区间 $[a, b]$ 上一致收敛于 1, 而序列 $L_n(\psi; x)$ (在定理 3 中, $\psi(t) = (t - x)^2$; 在定理 4 中, $\psi(t) = \sin^2 \frac{t-x}{2}$) 在这区间上一致收敛于零, 那么这些定理是正确的.

验证在所述诸定理中指出的这两个条件, 而非三个条件, 在多数情形下是较易实现的.

下面研究特殊的算子序列的一致收敛性.

引理 2 设函数 $\varphi(x)$ 满足条件:

- (1) $\varphi(x)$ 在区间 $[-c, c]$, $c > 0$ 上连续,
- (2) $\varphi(0) = 1$; 当 $x \neq 0, x \in [-c, c]$ 时, $0 \leq \varphi(x) < 1$.

若令 $0 < \delta \leq c$ 固定,

$$I_n = \int_{-c}^c \varphi^n(x) dx \quad \text{及} \quad I_n(\delta) = \int_{-\delta}^{\delta} \varphi^n(x) dx,$$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_n(\delta)}{I_n} = 1.$$

证明 我们有

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{-c}^c \varphi^n(x) dx = \int_{-c}^{-\delta} \varphi^n(x) dx + \int_{-\delta}^{\delta} \varphi^n(x) dx + \int_{\delta}^c \varphi^n(x) dx \\ &= \int_{-c}^{-\delta} \varphi^n(x) dx + \int_{\delta}^c \varphi^n(x) dx + I_n(\delta). \end{aligned} \tag{3.11}$$

由于函数 $\varphi(x)$ 在区间上 $[-c, -\delta]$ 上连续, 可设 $q_1 = \max_{-c \leq x \leq -\delta} \varphi(x)$. 由引理条件(2)推出 $0 < q_1 < 1$, 同理 $q_2 = \max_{\delta \leq x \leq c} \varphi(x) < 1$.

令 $q = q(\delta) = \max\{q_1, q_2\}$, 则在集 $[-c, -\delta]$ 和 $[\delta, c]$ 上函数 $\varphi(x)$ 满足不等式

$$0 \leq \varphi(x) \leq q = q(\delta) < 1.$$

据此有

$$0 \leq \int_{-\delta}^{-\delta} \varphi^n(x) dx + \int_{\delta}^c \varphi^n(x) dx < q^n(c - \delta) + q^n(c - \delta) < 2cq^n. \quad (3.12)$$

现在来估计 $I_n(\delta)$. 依 $\varphi(x)$ 在点 $x=0$ 处的连续性及 $\varphi(0)=1$, 对于 $\epsilon = \frac{1-q}{2} > 0$ 有 $\delta_1 > 0 (\delta_1 < \delta)$, 使得当 $|x| < \delta_1$ 时, 有

$$\varphi(x) > 1 - \epsilon = \frac{1+q}{2} = \bar{q} > q.$$

由此再依函数 $\varphi(x)$ 的正性, 得到

$$I_n(\delta) = \int_{-\delta}^{\delta} \varphi^n(x) dx \geq \int_{-\delta_1}^{\delta_1} \varphi^n(x) dx > 2\delta_1 \bar{q}^n. \quad (3.13)$$

由(3.11)与(3.12)推出

$$I_n(\delta) \leq I_n < I_n(\delta) + 2cq^n.$$

把这些不等式各部分除以 $I_n(\delta)$ 并注意到不等式(3.13), 得到

$$1 \leq \frac{I_n}{I_n(\delta)} < 1 + \frac{2cq^n}{I_n(\delta)} < 1 + \frac{2cq^n}{2\delta_1 \bar{q}^n} = 1 + \frac{c}{\delta_1} \left(\frac{q}{\bar{q}} \right)^n. \quad (3.14)$$

由于 $\bar{q} > q$, 所以上面的不等式的右边趋于 1, 如此便证明了引理.

定理 5 设函数 $\varphi(x)$ 满足引理 2 的条件且

$$I_n = \int_{-c}^c \varphi^n(x) dx,$$

又设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 则算子序列

$$L_n(f; x) = \frac{1}{I_n} \int_a^b f(t) \varphi^n(t-x) dt \quad (0 < b-a \leq c)$$

在区间 $[a+\delta, b-\delta]$ ($\delta > 0$) 上一致收敛于函数 $f(x)$.

证明 依定理 4 的注记, 要证明定理只需证明: 在区间 $[a+\delta, b-\delta]$ 上序列 $L_n(1; x)$ 一致收敛于 1, 且序列 $L_n(\psi; x)$ 一致收敛于零, 此处 $\psi(t) = (t-x)^2$. 我们有

$$L_n(1; x) = \frac{1}{I_n} \int_a^b \varphi^n(t-x) dt.$$

令 $z = t - x$, 则得

$$L_n(1; x) = \frac{1}{I_n} \int_{a-x}^{b-x} \varphi^n(z) dz.$$

由于 $a + \delta \leq x \leq b - \delta$, 故

$$\begin{aligned} a - x &\geq a - (b - \delta) = \delta - (b - a) \geq \delta - c > -c, \\ a - x &\leq a - (a + \delta) = -\delta, \\ b - x &\geq b - (b - \delta) = \delta, \\ b - x &\leq b - (a + \delta) = (b - a) - \delta \leq c - \delta < c. \end{aligned}$$

再依函数 $\varphi(x)$ 的正性有

$$\begin{aligned} I_n(\delta) &= \int_{-\delta}^{\delta} \varphi^n(z) dz \leq \int_{a-x}^{b-x} \varphi^n(z) dz \leq \int_{-c}^c \varphi^n(z) dz = I_n, \\ \frac{I_n(\delta)}{I_n} &\leq \frac{1}{I_n} \int_{a-x}^{b-x} \varphi^n(z) dz = L_n(1; x) \leq 1. \end{aligned}$$

又依引理 2, 上述最后的不等式的左边趋于 1, 因此若 $n > N_\epsilon, \epsilon > 0, a + \delta \leq x \leq b - \delta$, 则有不等式

$$1 - \epsilon < L_n(1; x) \leq 1, \quad -\epsilon \leq L_n(1; x) - 1 \leq 0.$$

这就验明了序列 $L_n(1; x)$ 在区间 $[a + \delta, b - \delta]$ 上的一致收敛性. 剩下的是要验明序列 $L_n(\psi; x)$ 在这一区间上一致收敛于零, 其中 $\psi(t) = (t - x)^2$. 我们有

$$\begin{aligned} 0 < L_n(\psi; x) &= \frac{1}{I_n} \int_a^b (t - x)^2 \varphi^n(t - x) dt \\ &= \frac{1}{I_n} \int_{a-x}^{b-x} z^2 \varphi^n(z) dz. \end{aligned}$$

由于 $a - x \geq -c$, 而 $b - x \leq c$ 且函数 $\varphi(x)$ 在区间 $[-c, c]$ 上是正的, 所以

$$\begin{aligned} 0 < L_n(\psi; x) &\leq \frac{1}{I_n} \int_{-c}^c z^2 \varphi^n(z) dz \\ &= \frac{1}{I_n} \left[\int_{-c}^{-a} z^2 \varphi^n(z) dz + \int_a^c z^2 \varphi^n(z) dz \right] \\ &\quad + \frac{1}{I_n} \int_{-a}^a z^2 \varphi^n(z) dz. \end{aligned}$$

在第一与第二积分号下 $z^2 \leq c^2$, 而在第三积分号下 $z^2 \leq a^2$. 因而

$$0 < L_n(\psi; x) < \frac{c^2}{I_n} \left\{ \int_{-c}^{-a} \varphi^n(z) dz + \int_a^c \varphi^n(z) dz \right\} + \frac{a^2}{I_n} \int_{-a}^a \varphi^n(z) dz.$$

依不等式(3.12)得到

$$0 < L_n(\psi; x) < \frac{c^2 \cdot 2cq^n}{I_n} + \frac{\alpha^2}{I_n} I_n(\alpha). \quad (3.15)$$

现在设 $\epsilon > 0$ 及 $\alpha^2 = \frac{\epsilon}{2}$. 依引理 2, 不等式(3.15)右边第二项有极限数 $\alpha^2 = \frac{\epsilon}{2}$, 而依不等式(3.14), 第一项趋于零. 因而成立不等式

$$0 < L_n(\psi; x) < \epsilon,$$

如果 $n > N_\epsilon$, $a \leq x \leq b$. 从而推得序列 $L_n(\psi; x)$ 在区间 $a \leq x \leq b$ 上一致收敛于零, 定理得证.

采用 Korovkin 定理和上述定理, 可以证明许多算子的收敛性质. 例如 Bernstein 算子, Landau 算子, Weierstrass 算子, Jackson 算子以及 Kontrovitch 算子等的相应收敛性均可由它们验证.

第一章习题

1. 试证, 若 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上有界可积并在点 $x = 1$ 连续, 则泛函数序列

$$I_n(f) = n \int_0^1 f(x) x^n dx$$

收敛于 $f(1)$.

2. 第 1 题中的泛函数序列将收敛于 $f(1 - 0) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上有界可积, 并且函数在点 $x = 1$ 的左极限存在.

3. 试证, 泛函数序列

$$I_n^{(1)}(f) = \frac{n}{2} \int_0^2 f(x) \varphi_1^n(x) dx,$$

其中

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1, \\ 2 - x, & x \geq 1 \end{cases}$$

收敛于 $f(1)$, 如果函数 $f(x)$ 在点 $x = 1$ 连续且是一致有界的话.

4. 试证, 若函数 $f(x)$ 在区间 $[0, a]$, $a > 0$, 上连续, 在 $x = a$ 为右连续且在实轴上有界, 则 Baskakov 算子序列

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) C_{-n}^k (-x)^k (1+x)^{-n-k},$$

$$C_{-n}^k = \frac{(-n)(-n-1)\cdots(-n-k+1)}{k!}$$

在这个区间上一致收敛于 $f(x)$.

5. 试证, Mirakyan 算子序列

$$M_n(f; x) = \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{n^k}{k!} x^k e^{-nx}$$

在区间 $[0, a]$ 上一致收敛于满足前题条件的函数 $f(x)$.

6. 试证, Bernstein 多项式及其有关收敛性定理可由上题得出.

7. 设正算子序列

$$L_n(f; x) = \sum_{k=0}^n \left\{ f\left(\sqrt{\frac{k}{n}}\right) \right\}^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \quad (0 \leq x \leq 1)$$

满足下列条件:

$$\begin{aligned} L_n(t^s; x) &= \sum_{k=0}^n \left\{ \left(\sqrt{\frac{k}{n}}\right)^s \right\}^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} \right)^s C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = B_n(t^s; x) \rightarrow x^s \quad (s=0, 1, 2), \end{aligned}$$

其中 $B_n(f; x)$ 为 Bernstein 算子. 依定理 3, 只要 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续, 就有

$$L_n(f; x) \rightarrow f(x) \quad (0 \leq x \leq 1).$$

但是

$$\begin{aligned} L_n(2t; x) &= \sum_{k=0}^n \left\{ 2\sqrt{\frac{k}{n}} \right\}^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n 4 \frac{k}{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = B_n(4t; x) \\ &= 4x \neq 2x. \end{aligned}$$

问错误何在?

8. 读者容易验证, 对于线性算子序列

$$L_n(f; x) = \frac{f(-1)}{2}(x^2 - x) + \frac{f(1)}{2}(x^2 + x) - f(0)(x^2 - 1) + \frac{1}{n},$$

下列条件满足:

$$L_n(1; x) = 1 + \frac{1}{n} \rightarrow 1;$$

$$L_n(t; x) = x + \frac{1}{n} \rightarrow x;$$

$$L_n(t^2; x) = x^2 + \frac{1}{n} \rightarrow x^2.$$

若函数 $f(x)$ 连续, 依定理 3, 序列 $L_n(f; x)$ 在任何区间上一致收敛于 $f(x)$. 可是,

$$L_n\left(\sin \frac{\pi}{2} t; x\right) = x + \frac{1}{n} \rightarrow x \neq \sin \frac{\pi}{2} x. \text{ 问错误何在?}$$

9. 试作适当的线性变换,使得 Bernstein 多项式序列能用来逼近区间 $[-1, 1]$ 上的连续函数.

10. 试将 Bernstein 多项式推广到二元情形,并证明能用它来一致逼近二元连续函数 $f(x, y)$ ($0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$).

11. 试根据三角函数可展为幂级数的事实,验证 Weierstrass 第一定理也可从 Weierstrass 第二定理推导出来.

12. 根据 Weierstrass 逼近定理, $C[a, b]$ 中的连续函数 $f(x)$ 恒能表成一致收敛的多项式级数

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i(x), \quad \text{其中 } q_i \text{ 为多项式.}$$

试问能否将右端级数中的各个乘幂项重新排列,使它变成一个幂级数?

[提示]:采用反证法.

13. 设 $K_n(t, x)$ ($n=1, 2, \dots$)定义于方形区域 $a \leq t \leq b, a \leq x \leq b$ 上,对于任一固定的 x 值,它是 t 的可积函数,且当 $a \leq x \leq \beta \leq b$ 时,恒有

$$\int_a^{\beta} K_n(t, x) dt \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\longrightarrow} 1, \quad (*)$$

$\left(\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\longrightarrow} 1 \right)$ 表示一致收敛,则 $K_n(t, x)$ 称为一个核. 具有形式

$$\phi_n(x) = \int_a^b K_n(t, x) f(t) dt$$

的积分称为奇异积分. 试证当 $K_n(t, x) > 0$, 并且(*)对 (a, b) 内任意闭子区间 $[\alpha, \beta]$ 上的一切 x 一致成立时, 则任一连续函数 $f(x)$ ($a \leq x \leq b$) 的奇异积分 $\phi_n(x)$ 必在 $[\alpha, \beta]$ 上一致收敛到 $f(x)$.

14. 试验证下列积分算子都是奇异积分算子:

Weierstrass 积分

$$W_n(x) = \left(\frac{n}{\pi} \right)^{1/2} \int_a^b e^{-n(t-x)^2} f(t) dt,$$

Fejér 积分

$$F_n(x) = \frac{1}{2n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{\sin \frac{1}{2}n(t-x)}{\sin \frac{1}{2}(t-x)} \right]^2 f(t) dt,$$

Vallée-Poussin 积分

$$V_n(x) = \frac{\sqrt{n\pi}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2n} \left(\frac{t-x}{2} \right) f(t) dt,$$

Landau 积分

$$L_n(x) = \left(\frac{n}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^1 [1 - (t-x)^2]^n f(t) dt.$$

15. 试证明作为奇异和的 Kantorovich 多项式

$$K_n(x) = (n+1) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} f(t) dt$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时收敛于连续函数 $f(x)$ ($0 < x < 1$).

16. 试证明作为奇异和的 Landau 和式算子

$$L_n^*(x) = \left(\frac{1}{n\pi}\right)^{1/2} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \left[1 - \left(\frac{k}{n} - x\right)^2\right]^n$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时收敛于连续函数 $f(x)$ ($0 < x < 1$), 且在 $(0, 1)$ 的任一闭子区间上一致收敛于 $f(x)$.

17. 试证对 $[0, \infty)$ 上的有界连续函数 $f(x)$, 奇异级数

$$S_n(x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(nx)^k}{k!}$$

在任何有限区间 $[0, \alpha]$ 上皆收敛于 $f(x)$.

第二章 一致逼近

第一章所讲述的 Weierstrass 逼近定理,指出了有界闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数均可用多项式序列一致逼近. 换句话说实系数多项式所构成的集合,在连续函数空间 $C[a, b]$ 中是处处稠密的. 即设 $f(x)$ 是 $C[a, b]$ 中任意给定的连续函数,则对任意指定的 $\epsilon > 0$, 恒存在实系数多项式 $p(x)$, 使得

$$|f(x) - p(x)| < \epsilon, \quad a \leq x \leq b.$$

大量的理论问题和实际问题要求人们研究如下的问题: 对于指定的非负整数 n , 在次数不超过 n 的实系数多项式集合

$$P_n \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \sum_{i=0}^n a_i x^i; a_i \text{ 为实数}, i = 0, 1, \dots, n \right\}$$

中寻求多项式 $p \in P_n$, 使得它与给定函数 $f(x) \in C[a, b]$ 的偏差

$$\Delta(p) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - p(x)| \quad (0.1)$$

尽可能地小.

称 $\Delta(p)$ 为 $p(x)$ 与 $f(x)$ 的偏差. 显然 $\Delta(p)$ 非负, 因而当 p 取遍 P_n 中所有多项式时, 相应 $\Delta(p)$ 的集合必有下确界:

$$\begin{aligned} E_n = E_n(f) &\stackrel{\text{def}}{=} \inf_{p \in P_n} \Delta(p) \\ &= \inf_{p \in P_n} \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - p(x)|. \end{aligned} \quad (0.2)$$

称 $E_n(f)$ 为 P_n 对给定函数 $f(x)$ 的最小偏差或最佳逼近. 按 E_n 的定义, 显然有

$$E_n \geq E_{n+1} \geq \dots$$

再由 Weierstrass 逼近定理, $E_n \downarrow 0 (n \rightarrow \infty)$.

现在的问题是: 是否存在 $p^* \in P_n$, 使得

$$\Delta(p^*) = E_n(f)? \quad (0.3)$$

如果这样的 p^* 存在, 它是否唯一?

满足(0.3)式的多项式 $p^*(x)$, 称为 $f(x)$ 于 P_n 中的最佳逼近多项式.

§ 1 Borel 存在定理

Borel 存在定理 对任何给定的 $f(x) \in C[a, b]$, 总存在 $p(x) \in P_n$, 使得

$$\Delta(p) = E_n(f).$$

证明 因为 E_n 是 $\Delta(p)$ 的下确界, 所以对任何给定的 $\epsilon > 0$, 必有 $p_\epsilon(x) \in P_n$, 使

$$E_n \leq \Delta(p_\epsilon) < E_n + \epsilon.$$

特别取 $\epsilon = \frac{1}{m}$, 存在 $p_m(x) \in P_n$, 使

$$E_n \leq \Delta(p_m) < E_n + \frac{1}{m}. \quad (1.1)$$

因此, 如果能证明 $\{p_m\}$ 或它的某一子序列一致收敛于某 $p^* \in P_n$, 则于上式中令 $m \rightarrow \infty$, 即可证明

$$\Delta(p^*) = E_n.$$

以下首先从 $\{p_m(x)\}$ 中选取收敛的子序列.

按 $p_m(x)$ 的选取方法可知 $p_m(x)$ 有界:

$$|p_m(x)| \leq |p_m(x) - f(x)| + |f(x)| \leq (E_n + 1) + \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|.$$

进而可证

$$p_m(x) = a_{0,m} + a_{1,m}x + a_{2,m}x^2 + \cdots + a_{n,m}x^n$$

中的各系数

$$a_{0,m}, a_{1,m}, \dots, a_{n,m}$$

皆有界. 为此, 在 $[a, b]$ 中任意取定 $n+1$ 个互异点

$$x_0 < x_1 < \cdots < x_n.$$

由

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{0,m} + a_{1,m}x_0 + \cdots + a_{n,m}x_0^n = p_m(x_0), \\ \cdots \cdots \cdots \\ a_{0,m} + a_{1,m}x_n + \cdots + a_{n,m}x_n^n = p_m(x_n), \end{array} \right.$$

可推出

$$a_{i,m} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \cdots & p_m(x_0) & \cdots & x_0^n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & p_m(x_n) & \cdots & x_n^n \\ \hline 1 & \cdots & x_0^i & \cdots & x_0^n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & x_n^i & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}}{\prod_{t>s} (x_t - x_s)} = \frac{1}{\prod_{t>s} (x_t - x_s)} \sum_{j=0}^n p_m(x_j) Q_j,$$

其中 Q_j 为多项式在确定点上的值, 从而得 $a_{i,m}$ 有界:

$$|a_{i,m}| \leq A \quad (i=0, \dots, n).$$

由 Bolzano-Weierstrass 定理, 可逐次选出 $n+1$ 个同时收敛的子序列 $\{a_{i,m_j}\}$, $i=0, \dots, n$, 使得

$$\lim_{j \rightarrow \infty} a_{i,m_j} = a_i, \quad i=0, \dots, n.$$

作多项式

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n. \quad (1.2)$$

显然当 $j \rightarrow \infty$ 时, 多项式 $p_{m_j}(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛到 $p(x)$.

下面证明

$$\Delta(p) = E_n = \inf_{p_n \in P_n} \Delta(p_n). \quad (1.3)$$

由于 $p(x) \in P_n$, 按定义

$$\Delta(p) \geq E_n.$$

以下只需证

$$\Delta(p) \leq E_n.$$

由 $p_{m_j}(x)$ 的取法可知

$$\Delta(p_{m_j}) = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - p_{m_j}(x)| < E_n + \frac{1}{m_j},$$

但

$$\begin{aligned}\Delta(p) &= \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - p(x)| \leq \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - p_{m_j}(x)| \\ &\quad + \max_{a \leq x \leq b} |p_{m_j}(x) - p(x)| < E_n + \frac{1}{m_j} + \epsilon_j.\end{aligned}$$

令 $j \rightarrow \infty$, 得到

$$\Delta(p) \leq E_n,$$

从而

$$\Delta(p) = E_n.$$

证毕.

§ 2 最佳逼近定理

由 Borel 存在性定理, 对任给 $f(x) \in C[a, b]$, 均存在多项式 $p(x) \in P_n$, 使得

$$\begin{aligned}\Delta(p) &= \max_{a \leq x \leq b} |p(x) - f(x)| \\ &= E_n = \inf_{q \in P_n} \max_{a \leq x \leq b} |q(x) - f(x)|.\end{aligned}\tag{2.1}$$

这样的多项式 $p(x)$ 称为 $f(x)$ 在 P_n 中的最佳逼近多项式.

显然, $E_n = 0$ 等价于 $f(x) \in P_n$, 即除 $f(x) \in P_n$ 外, E_n 均取正值.

以下探讨最佳逼近多项式的本质特征. 记

$$\epsilon(x) = p(x) - f(x).$$

由于 $\epsilon(x) \in C[a, b]$, 于是存在 $x_0 \in [a, b]$, 使得

$$|\epsilon(x_0)| = \max_{a \leq x \leq b} |\epsilon(x)| = \Delta(p).$$

称这样的 x_0 为 $p(x)$ 关于 $f(x)$ 的偏离点. 特别地, 如果 $\epsilon(x_0) = \Delta(p)$ (或 $-\Delta(p)$), 则称 x_0 为 $p(x)$ 关于 $f(x)$ 的正(或负)偏离点.

如果 $p(x)$ 不是 $f(x)$ 的最佳逼近多项式, 则 $p(x)$ 关于 $f(x)$ 的正、负偏离点未必同时存在.(试举例说明!)但如果 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的最佳逼近多项式, 则它关于 $f(x)$ 的正、负偏离点必然都存在. 事实上, 不妨假定最佳逼近多项式 $p(x)$ 无负偏离点存在, 则可证明 $p(x)$ 不是 $f(x)$ 的最佳逼近多项式. 按以上反证法假定, 必存在一个足够小的正数 h , 使得

$$-E_n + h \leq p(x) - f(x) \leq E_n, \quad a \leq x \leq b.$$

于是在 $[a, b]$ 区间上,有

$$-E_n + h/2 \leq (p(x) - h/2) - f(x) \leq E_n - h/2,$$

即 $\Delta(p - h/2) < \Delta(p)$. 矛盾.

Vallée-Poussin 定理(最佳逼近误差下界的估计) 设 $p \in P_n$, 且 $\varepsilon(x) = p(x) - f(x)$ 于 $[a, b]$ 中的点列

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_N$$

上取异于零的正负相间值

$$\lambda_1, -\lambda_2, \dots, (-1)^{N-1} \lambda_N \text{(不妨设诸 } \lambda_j > 0\text{),}$$

且 $N \geq n+2$, 则对任一 $q(x) \in P_n$, 均有

$$\Delta(q) \geq \min(\lambda_1, \dots, \lambda_N). \quad (2.2)$$

证明 假若不然, 设有某 $q(x) \in P_n$, 使

$$\Delta(q) < \min(\lambda_1, \dots, \lambda_N). \quad (2.3)$$

考虑

$$\eta(x) = p(x) - q(x) = [p(x) - f(x)] - [q(x) - f(x)].$$

因为

$$\Delta(q) = \max_{a \leq x \leq b} |q(x) - f(x)| < \min(\lambda_1, \dots, \lambda_N).$$

从而

$$\operatorname{sign} \eta(x_j) = \operatorname{sign}(p(x_j) - f(x_j)),$$

即 $\eta(x)$ 于点列 x_1, x_2, \dots, x_N 上交错变号, 由连续函数的介值定理, $\eta(x)$ 于 $[a, b]$ 内至少有 $N-1 \geq n+1$ 个零点, 但 $\eta(x) \in P_n$, 所以 $\eta(x) \equiv 0$ 即 $p(x) \equiv q(x)$. 此与(2.3)的反证法假设矛盾. 定理得证.

Tchebyshev 定理 $f(x)$ 于 P_n 中的最佳逼近多项式是唯一存在的, 且 $p(x)$ 是 $f(x)$ 于 P_n 中的最佳逼近多项式, 必须且只需 $p(x) - f(x)$ 在 $[a, b]$ 上一个点数不少于 $n+2$ 的点列

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_N \quad (N \geq n+2)$$

上以正负交错的符号取到 $\Delta(p)$ 的值.

证明 充分性. 假定 $p(x) - f(x)$ 于 $[a, b]$ 中点列 $x_1 < \cdots < x_N (N \geq n+2)$ 上以正负交错的符号取到 $\Delta(p)$.

由 Vallée-Poussin 定理, 对任一 $q(x) \in P_n$, 均有

$$\Delta(q) \geq \Delta(p),$$

所以 $p(x)$ 是 $f(x)$ 于 P_n 中的最佳逼近多项式.

必要性. 假定 $p(x)$ 的正负交错的偏离点数 $N' \leq n+1$, 下面来证 $p(x)$ 不是 $f(x)$ 的最佳逼近多项式. 显然

$$q(x) - f(x) = p(x) - f(x) + [q(x) - p(x)].$$

今将 $[a, b]$ 分成 N' 个子区间

$$[a, \xi_1], [\xi_1, \xi_2], \dots, [\xi_{N'-1}, b],$$

使在上述区间上轮流满足下面两个不等式中的一个

$$\begin{aligned} -\Delta(p) &\leq p(x) - f(x) < \Delta(p) - \alpha, \\ -\Delta(p) + \alpha &< p(x) - f(x) \leq \Delta(p), \end{aligned}$$

其中 α 是某一充分小的正数. 引入 P_n 中的多项式

$$\phi(x) = (x - \xi_1)(x - \xi_2) \cdots (x - \xi_{N'-1}),$$

并作

$$q(x) = p(x) + \omega \phi(x),$$

则

$$q(x) - f(x) = p(x) - f(x) + \omega \phi(x).$$

取足够小的 ω , 并选择 ω 的正负号, 即可使下式成立

$$\Delta(q) < \Delta(p).$$

此与 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的最佳逼近多项式的假设相矛盾.

下面证唯一性.

设除 $p(x)$ 外, 尚有 $q(x) \in P_n$, 亦使

$$\Delta(p) = \Delta(q) = E_n.$$

它们相应的正负交错偏离点组中点数

$$N_p \geq n+2, \quad N_q \geq n+2.$$

不妨假定 $N_q \geq N_p$, 并设 $q(x)$ 的正负交错偏离点组为

$$\beta_1 < \beta_2 < \cdots < \beta_{N_q}. \quad (2.4)$$

考虑

$$\eta(x) = q(x) - p(x) = (q(x) - f(x)) - (p(x) - f(x)),$$

并考察 $\eta(x)$ 于点列 (2.4) 上的符号. 注意 $\eta(\beta_j)$ 可能为 0, 也可能不为 0. 但若 $\eta(\beta_j) \neq 0$, 则必有

$$\operatorname{sign} \eta(\beta_j) = \operatorname{sign}[q(\beta_j) - f(\beta_j)]. \quad (2.5)$$

倘若

$$\eta(\beta_{i-1}) \neq 0, \quad \eta(\beta_i) = \cdots = \eta(\beta_{i+k}) = 0, \quad \eta(\beta_{i+k+1}) \neq 0, \quad (2.6)$$

因

$$\operatorname{sign} \eta(\beta_{i-1}) = \operatorname{sign}[q(\beta_{i-1}) - f(\beta_{i-1})],$$

且

$$\operatorname{sign} \eta(\beta_{i+k+1}) = \operatorname{sign}[q(\beta_{i+k+1}) - f(\beta_{i+k+1})],$$

而 $q(x) - f(x)$ 于 $\beta_1 < \beta_2 < \cdots < \beta_{N_q}$ 上正负交错变号, 即

$(-1)^{i-1} \operatorname{sign}[q(\beta_{i-1}) - f(\beta_{i-1})]$ 与 $(-1)^{i+k+1} \operatorname{sign}[q(\beta_{i+k+1}) - f(\beta_{i+k+1})]$

同号, 亦即

$(-1)^{i-1} \eta(\beta_{i-1})$ 与 $(-1)^{i+k+1} \eta(\beta_{i+k+1})$ 同号,

从而

$$\eta(\beta_{i-1}) \text{ 与 } (-1)^k \eta(\beta_{i+k+1})$$

同号.

若 k 为偶数, 则 $\eta(\beta_{i-1})$ 与 $\eta(\beta_{i+k+1})$ 同号, 所以其间 $\eta(x)$ 必有偶数个根, 但 (2.6) 中已有 $k+1$ (奇数) 个根, 所以必定还有一个根, 即至少有 $k+2$ 个根.

若 k 为奇数, 则 $\eta(\beta_{i-1})$ 与 $\eta(\beta_{i+k+1})$ 异号, 所以其间必有奇数个根, 但 (2.6) 中已有 $k+1$ (偶数) 个根, 所以必定还有一个根, 即至少有 $k+2$ 个根.

总之, $\eta(x)$ 于 $[\beta_1, \beta_{N_q}]$ 中根的个数 $\geq N_q - 1 \geq n + 1$, 从而 $\eta(x) \equiv 0$, 此与假设矛盾. 证毕.

作为例子, 讨论 $n=0$ 和 $n=1$ 两种情况.

例 1 设 $f(x) \in C[a, b]$, 则 $f(x)$ 于 P_0 中的最佳逼近多项式为

$$p(x) = \frac{1}{2} \left\{ \min_{a \leq x \leq b} f(x) + \max_{a \leq x \leq b} f(x) \right\} = \frac{m + M}{2}.$$

例 2 设 $f(x) \in C^2[a, b]$, 且 $f''(x) > 0 (a \leq x \leq b)$, 求 $f(x)$ 于 P_1 中的最佳逼近多项式.

由 Tchebyshev 定理, 交错点组点数 ≥ 3 , 设最佳逼近多项式为 $p^*(x) = Ax + B$. 因有 3 个交错点, 所以于开区间 (a, b) 内至少有一个 $p^* - f$ 的交错点 c , 且其必为稳定点

$$p^{**}(c) - f'(c) = A - f'(c) = 0,$$

所以 $A = f'(c)$. 由于 $f''(x) > 0$, 所以 $f'(x)$ 严格单调递增, 从而

$$(f(x) - p^*(x))' = f'(x) - A$$

在 (a, b) 内不能再有其他零点, 即其他两个交错点必为 $[a, b]$ 的两个端点. 所以 $p^*(x)$ 的 3 个交错点为:

$$a < c < b,$$

从而

$$p^*(a) - f(a) = -[p^*(c) - f(c)] = p^*(b) - f(b). \quad (2.7)$$

求解由(2.7)所确定的方程组, 可得

$$A = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, B = \frac{f(a) + f(c)}{2} - \frac{a + c}{2} \cdot \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

即所求的最佳逼近多项式为

$$p^*(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x + \frac{f(a) + f(c)}{2} - \frac{a + c}{2} \cdot \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

其中 c 由下式所决定:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

它有明显的几何意义, 即 $y = f(x)$ 在 $x = c$ 点处的切线, 平行于由 $(a, f(a))$ 和 $(b, f(b))$ 两点所决定的直线.

Kolmogorov 最佳逼近定理

1948 年, Kolmogorov 给出了另一种形式的最佳逼近定理. 以下仅就实多项式情况来叙述这条定理.

Kolmogorov 定理 $p(x) \in P_n$ 是 $f(x) \in C[a, b]$ 在 P_n 中的最佳逼近多项式, 必须且只需对所有的 $q(x) \in P_n$, 均有

$$\max_{x \in A_0} \{ [f(x) - p(x)] q(x) \} \geq 0, \quad (2.8)$$

其中

$$A_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in [a, b] ; |f(x) - p(x)| = \Delta(p)\}.$$

条件(2.8)表明,关系式

$$[f(x) - p(x)] q(x) < 0$$

不能对一切 $x \in A_0$ 都成立,即 $f(x) - p(x)$ 与 $q(x)$ 不能对一切 $x \in A_0$ 都取相反的符号.

证明 假定 $p(x)$ 是 $f(x)$ 在 P_n 中的最佳逼近多项式. 如果(2.8)不成立,则有多项式 $q(x) \in P_n$ 存在,使得对某个 $\epsilon > 0$,有

$$\max_{x \in A_0} \{ [f(x) - p(x)] q(x) \} = -2\epsilon.$$

根据 $f(x)$ 的连续性,存在 $[a, b]$ 的一个开子集 $G, A_0 \subset G$,使得对一切 $x \in G$ 均有

$$[f(x) - p(x)] q(x) < -\epsilon.$$

对于充分小的 $\lambda > 0$,构造一个新的多项式 $p_1(x) = p(x) - \lambda q(x)$. 若 $x \in G$,则

$$\begin{aligned} |f(x) - p_1(x)|^2 &= |[f(x) - p(x)] + \lambda q(x)|^2 \\ &= |f(x) - p(x)|^2 + 2\lambda[f(x) - p(x)] \cdot q(x) \\ &\quad + \lambda^2[q(x)]^2 \\ &< [\Delta(p)]^2 - 2\lambda\epsilon + \lambda^2 M^2, \end{aligned}$$

其中 $M = \max_{a \leq x \leq b} |q(x)|$. 若取 $\lambda < M^{-2}\epsilon$, 则

$$|f(x) - p_1(x)|^2 < [\Delta(p)]^2 - \lambda\epsilon, \quad x \in G. \quad (2.9)$$

注意到 G 的余集是闭集 $H \subset [a, b]$,且

$$|f(x) - p(x)| < \Delta(p), \quad x \in H,$$

因而存在 $\delta > 0$,使得

$$|f(x) - p(x)| < \Delta(p) - \delta, \quad x \in H.$$

若 λ 取得也使 $\lambda < (2M)^{-1}\delta$ 成立,则

$$|f(x) - p_1(x)| \leq |f(x) - p(x)| + \lambda |q(x)|$$

$$\begin{aligned} &\leq \Delta(p) - \delta + \frac{1}{2}\delta \\ &= \Delta(p) - \frac{\delta}{2}, \quad x \in H. \end{aligned} \quad (2.10)$$

由(2.9)和(2.10)可知,对充分小的正数 λ , $p_1(x)$ 比 $p(x)$ 更好地逼近 $f(x)$. 从而(2.8)是必要的.

以下证明(2.8)也是充分的. 假定(2.8)对任何 $q(x) \in P_n$ 皆成立. 于是对任意指定的 $p_1(x) \in P_n$, 构造 $q(x) = p(x) - p_1(x) \in P_n$, 必存在点 $x_0 \in A_0$, 使得

$$[f(x_0) - p(x_0)]q(x_0) \geq 0.$$

注意到点集 A_0 的定义, 可知

$$\begin{aligned} |f(x_0) - p_1(x_0)|^2 &= |f(x_0) - p(x_0)|^2 \\ &\quad + 2[f(x_0) - p(x_0)]q(x_0) + [q(x_0)]^2 \\ &\geq |f(x_0) - p(x_0)|^2 = [\Delta(p)]^2, \end{aligned}$$

从而 $\Delta(p_1) \geq \Delta(p)$. 证毕.

注 Kolmogorov 定理的原始形式是就更广的复函数和复系数多项式来叙述的. 这时条件(2.8)应相应地改变为

$$\max_{x \in A} \operatorname{Re}\{[f(x) - p(x)]\bar{q}(x)\} \geq 0,$$

此处 A 是紧致 Hausdorff 空间, $f \in C(A)$ 是在 A 上连续的复函数空间, $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ 是给定的 A 上复连续函数组, P_n 是所有形如 $a_1\varphi_1 + \dots + a_n\varphi_n$ (a_1, \dots, a_n 为复数) 的“多项式”类, 而 A_0 表示使

$$|f(x) - p(x)| = \max_{x \in A} |f(x) - p(x)|$$

成立的一切点 $x \in A$ 的集合.

虽然迄今已有一些最佳一致逼近多项式的近似计算方法, 其中最著名的是 Remez 方法, Stiefel 方法等, 但由于这些方法比较复杂, 所以实际上人们并不怎么采用它们. 从当今的潮流来看, 人们更趋向于利用各种方法来获得在某种意义上的最佳逼近多项式, 甚至只是具有一定精确度的多项式. 在本章 § 3 中, 我们将会论及它们. 在第六章中, 我们还将在更广意义上介绍 Remez 方法的梗概.

§ 3 Tchebyshev 最小零偏差多项式及其应用

在 n 次多项式类 P_n 中, 寻求如此的多项式 p_n , 使其在给定的有界闭区间上

与零的偏差尽可能地小. 这是一个具有重要理论和实际意义的问题, 它被称为最小零偏差多项式问题.

不失一般性, 假定 $p_n(x)$ 的 x^n 系数为 1, 即 $p_n(x)$ 可表示为

$$p_n(x) = x^n + C_{n-1}x^{n-1} + \cdots + C_1x + C_0,$$

且所讨论的有界闭区间为 $[-1, 1]$.

不难看出, 寻求最小零偏差多项式 $p_n(x)$ 的问题, 等价于寻求函数 $f(x) = x^n$ 的 $n-1$ 次最佳一致逼近多项式 $(C_{n-1}x^{n-1} + \cdots + C_1x + C_0)$ 的问题.

当 $n=1$ 时, $f(x)=x$ 在 $[-1, 1]$ 上最佳零次逼近多项式(即常数)显然为 0, 即 1 次最小零偏差多项式为

$$T_1(x) = x.$$

当 $n=2$ 时, 按 Tchebyshev 定理, 2 次最小零偏差多项式为(留作习题)

$$\widetilde{T}_2(x) = x^2 - \frac{1}{2}.$$

Tchebyshev 发现, 此类问题同以下多项式有关:

$$T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos x). \quad (3.1)$$

如此定义的 $T_n(x)$ 果真是 x 的多项式吗? 试看 $n=0$ 和 $n=1$ 的情形:

$$T_0(x) = 1,$$

$$T_1(x) = \cos(\arccos x) = x.$$

注意到如下的三角恒等式

$$\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos n\theta \cos \theta,$$

从而有

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n=1, 2, \dots, \quad (3.2)$$

所以 $T_n(x)$ 确实是 x 的 n 次多项式.

不难看出 $T_n(x)$ 与 n 的奇偶性相同, 即 $T_n(x)$ 随 n 为奇数或偶数而成为 $[-1, 1]$ 上的奇函数或偶函数.

显然, $T_n(x)$ 的最高次项 x^n 的系数为 2^{n-1} , 即

$$T_n(x) = 2^{n-1}x^n + (x \text{ 的低于 } n \text{ 次的多项式}). \quad (3.3)$$

$T_n(x)$ 称为 n 次 Tchebyshev 多项式.

今将前六个 Tchebyshev 多项式在 $[-1, 1]$ 上的图形罗列于图 3.1.

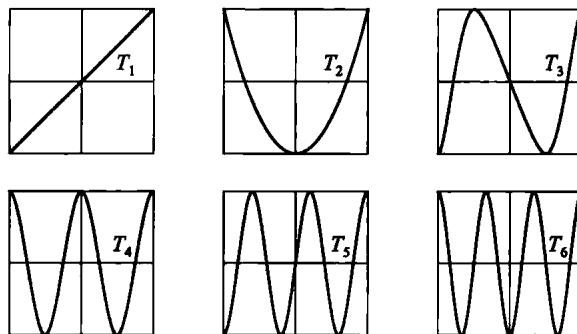


图 3.1

显然

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |T_n(x)| = 1, \quad (3.4)$$

并且在点列

$$\tilde{x}_k = \cos \frac{k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (3.5)$$

上, $T_n(x)$ 以正负交错的符号取到它的绝对值的最大值 1:

$$T_n(\tilde{x}_k) = (-1)^k. \quad (3.6)$$

根据 Tchebyshev 最佳逼近定理, 首项(x^n)系数为 1 的多项式

$$\tilde{T}_n(x) = 2^{1-n} \cdot T_n(x)$$

为所有 x^n 系数为 1 的 n 次多项式类中唯一的、在 $[-1, 1]$ 上与零偏差最小的多项式. 详细证明留给读者去完成.

$T_n(x)$ 有一条十分重要的性质, 即它的零点全部是落在 $(-1, 1)$ 内部的实单根:

$$x_k = \cos \frac{2k-1}{2n}\pi, \quad k = 1, \dots, n. \quad (3.7)$$

从几何上看, 如果将以原点为圆心, 以 1 为半径的上半圆周分成 $2n$ 等份, 再把圆周上所有奇分点往 x 轴上投影, 则恰好得到点列(3.7). 细心的读者不难从此发现, Tchebyshev 多项式的零点, 特别是当 n 较大时, 它们总是在开区间 $(-1, 1)$ 的两端比较密集, 而在该区间中部比较稀疏.

试问: $T_n(x)$ 与 $T_{n-1}(x)$ 能否有公共的实根? 此问题的答案留给读者自行给出(留作习题).

Tchebyshev 多项式具有所谓的“离散”直交性质

1° 设 $x_k, k = 1, 2, \dots, n$ 是 Tchebyshev 多项式的零点, 且非负整数 p 和 q 满足 $p + q < 2n$, 则

$$\sum_{k=1}^n T_p(x_k) T_q(x_k) = \begin{cases} n, & \text{若 } p = q = 0, \\ \frac{1}{2}n, & \text{若 } p = q \neq 0, \\ 0, & \text{若 } p \neq q. \end{cases} \quad (3.8)$$

2° 设 $\xi_k, k = 0, 1, \dots, n$ 是 Tchebyshev 多项式 $T_n(x)$ 的极值点, 且整数 p 和 q 满足 $0 \leq p \leq n, 0 \leq q \leq n$, 则

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} T_p(\xi_0) T_q(\xi_0) + \sum_{k=1}^{n-1} T_p(\xi_k) T_q(\xi_k) + \frac{1}{2} T_p(\xi_n) T_q(\xi_n) \\ &= \begin{cases} n, & \text{若 } p = q = 0 \text{ 或 } n, \\ \frac{1}{2}n, & \text{若 } p = q \neq 0 \text{ 或 } n, \\ 0, & \text{若 } p \neq q. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.9)$$

以上离散直交性质的证明留作习题.[提示: 注意 Tchebyshev 多项式的零点及极值点的公式, 并利用三角恒等式.]

下面介绍移位 Tchebyshev 多项式 $T_n^*(x)$. 该多项式实质上是通过线性变换, 将通常的 Tchebyshev 多项式变换到 $[0, 1]$ 区间上. n 次移位 Tchebyshev 多项式 $T_n^*(x)$ 定义为

$$T_n^*(x) \stackrel{\text{def}}{=} T_n(2x - 1), \quad n = 0, 1, 2, \dots. \quad (3.10)$$

该多项式在 $[0, 1]$ 区间上具有通常 Tchebyshev 多项式 $T_n(x)$ 在 $[-1, 1]$ 区间上的类似性质. 正因为如此, $T_n^*(x)$ 经常被应用于 $[0, 1]$ 区间上的逼近问题.

移位 Tchebyshev 多项式 $T_n^*(x)$ 与通常 Tchebyshev 多项式 $T_n(x)$ 有如下的关系:

$$T_n^*(x^2) = T_{2n}(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots. \quad (3.11)$$

事实上, $T_2(x) = \cos(2 \cdot \arccos x) = 2x^2 - 1$, 所以 $2\arccos x = \arccos(2x^2 - 1)$, 且 $\cos(2n \cdot \arccos x) = \cos[n \cdot \arccos(2x^2 - 1)]$, 从而

$$T_{2n}(x) = T_n(2x^2 - 1) = T_n^*(x^2).$$

移位 Tchebyshev 多项式与幂函数相互表示关系如下：

$$T_0^* = 1$$

$$T_1^* = 2x - 1$$

$$T_2^* = 8x^2 - 8x + 1$$

$$T_3^* = 32x^3 - 48x^2 + 18x - 1$$

$$T_4^* = 128x^4 - 256x^3 + 160x^2 - 32x + 1$$

$$T_5^* = 512x^5 - 1\,280x^4 + 1\,120x^3 - 400x^2 + 50x - 1$$

$$T_6^* = 2\,048x^6 - 6\,144x^5 + 6\,912x^4 - 3\,584x^3 + 840x^2 - 72x + 1$$

$$T_7^* = 8\,192x^7 - 28\,672x^6 + 39\,424x^5 - 26\,880x^4 + 9\,408x^3 - 1\,568x^2 + 98x - 1$$

$$T_8^* = 32\,768x^8 - 131\,072x^7 + 212\,992x^6 - 180\,224x^5 + 84\,480x^4 - 21\,504x^3 \\ + 2\,688x^2 - 128x + 1$$

$$1 = T_0^*$$

$$x = \frac{1}{2}(T_0^* + T_1^*)$$

$$x^2 = \frac{1}{8}(3T_0^* + 4T_1^* + T_2^*)$$

$$x^3 = \frac{1}{32}(10T_0^* + 15T_1^* + 6T_2^* + T_3^*)$$

$$x^4 = \frac{1}{128}(35T_0^* + 56T_1^* + 28T_2^* + 8T_3^* + T_4^*)$$

$$x^5 = \frac{1}{512}(126T_0^* + 210T_1^* + 120T_2^* + 45T_3^* + 10T_4^* + T_5^*)$$

$$x^6 = \frac{1}{2\,048}(462T_0^* + 792T_1^* + 495T_2^* + 220T_3^* + 66T_4^* + 12T_5^* + T_6^*)$$

$$x^7 = \frac{1}{8\,192}(1\,716T_0^* + 3\,003T_1^* + 2\,002T_2^* + 1\,001T_3^* + 364T_4^* + 91T_5^* \\ + 14T_6^* + T_7^*)$$

$$x^8 = \frac{1}{32\,768}(6\,435T_0^* + 11\,440T_1^* + 8\,008T_2^* + 4\,368T_3^* + 1\,820T_4^* + 560T_5^* \\ + 120T_6^* + 16T_7^* + T_8^*)$$

Tchebyshev 多项式除在多项式插值结点选取方面的应用外,还有许多重要的应用.例如:

一、Tchebyshev 级数展开

设函数 $F(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 内有连续的 1 阶导数, 则它有一个在 $[-1, 1]$ 内绝对一致收敛的 Tchebyshev 级数展开式

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k T_k(x) = \frac{1}{2} a_0 T_0(x) + a_1 T_1(x) + a_2 T_2(x) + \cdots, \quad (3.12)$$

其中

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 F(x) T_k(x) (1 - x^2)^{-1/2} dx. \quad (3.13)$$

展开式(3.12)的截断多项式很接近 $F(x)$ 的最佳逼近多项式.

例1 求 $f(x) = \arctan x$ 于 $[-1, 1]$ 的逼近多项式.

$f(x)$ 的 5 次最佳逼近多项式为

$$p_5^*(x) = 0.995\ 358\ 0x - 0.288\ 690\ 2x^3 + 0.079\ 339\ 0x^5,$$

相应偏差为

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |\arctan x - p_5^*(x)| = 0.000\ 608\ 6.$$

另一方面, $f(x) = \arctan x$ 的 Tchebyshev 展开的前 3 项部分和 $\sigma_2(x)$ 为 ($\tau = \sqrt{2} - 1$)

$$\begin{aligned} \sigma_2(x) &= 2 \sum_{m=0}^2 (-1)^m \cdot \tau^{2m+1} \cdot T_{2m+1}(x) / (2m+1) \\ &= 0.994\ 949x - 0.287\ 060\ 5x^3 + 0.078\ 037\ 2x^5, \end{aligned}$$

相应偏差为

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |\arctan x - \sigma_2(x)| \leq 0.000\ 7.$$

这表明 $p_5^*(x)$ 与 $\sigma_2(x)$ 是相差无几的.

应该指出的是, Tchebyshev 级数的收敛性理论是与通常 Fourier 级数的收敛性理论相关联的.事实上,若记 $F(x)$ 的 Tchebyshev 级数为

$$F(x) = \sum' a_k T_k(x),$$

只要作变量替换 $x = \cos t$, 即可得到

$$F(\cos t) = \sum' a_k \cos kt, \quad (3.14)$$

其中

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi F(\cos t) \cos kt dt.$$

所以本质上 $F(x)$ 的 Tchebyshev 级数正是 $F(\cos t)$ 函数的 Fourier 余弦级数. 正因为如此, 人们可以通过计算函数 $F(\cos t)$ 的余弦级数系数的各种可行方法来获得 Tchebyshev 级数展开的系数, 从而获得 $F(x)$ 的很好的逼近多项式.

二、逼近多项式的经济化

不妨设所讨论区间为 $[-1, 1]$, 假定我们已通过某种途径, 例如 Taylor 展开式, 获得了 $f(x) \in C[-1, 1]$ 的一个近似多项式 $p_n(x) \in P_n$, 它使得

$$|f(x) - p_n(x)| < \epsilon_1, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

我们希望寻求一个次数低于 n 的多项式 $p(x)$, 使得 $p(x)$ 与 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上的误差仍不超过事先指定的允许误差 ϵ :

$$|f(x) - p(x)| < \epsilon, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

如何来选取这样的 $p(x) \in P_{n-1}$?

设

$$p_n(x) = a_n x^n + p_{n-1}(x), \quad a_n \neq 0, \quad (3.15)$$

于是

$$\begin{aligned} p_n(x) - p(x) &= a_n x^n + p_{n-1}(x) - p(x) \\ &= a_n \left[x^n + \frac{p_{n-1}(x) - p(x)}{a_n} \right]. \end{aligned}$$

根据 Tchebyshev 多项式的最小零偏差性质, 人们应该选取 $p(x) \in P_{n-1}$, 使得

$$x^n + \frac{p_{n-1}(x) - p(x)}{a_n} = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot T_n(x),$$

其中 $T_n(x)$ 为 n 次 Tchebyshev 多项式, 即取

$$p(x) = p_n(x) - \frac{a_n}{2^{n-1}} T_n(x), \quad (3.16)$$

则 $p(x)$ 恰为 $p_n(x)$ 在 P_{n-1} 中的最佳逼近多项式. (为什么? 请补证之.) 由 (3.15), 如用 $p_{n-1}(x)$ 来近似 $p_n(x)$, 则在 $[-1, 1]$ 上的误差为 $|a_n|$. 但若用 (3.16) 中的 $p(x)$ 来近似 $p_n(x)$, 则相应误差项为 $2^{1-n} a_n T_n(x)$, 即其误差不超过 $2^{1-n} |a_n|$. 再用较低次多项式替代余项中的最高次项 $a_r^* x^r, \dots$, 直到误差 $2^{1-r} |a_r^*|$ 不可忽略时为止.

一般可采用以下公式来替换由 Taylor 展开所得幂级数的 x^k :

$$x^k = \frac{1}{2^{k-1}} \left[T_k(x) + \binom{k}{1} T_{k-2}(x) + \binom{k}{2} T_{k-4}(x) + \dots \right],$$

其中方括号中的最后一项依赖于 k 的奇偶性, 它为

$$\dots + \binom{k}{(k-1)/2} T_1(x), \quad \text{当 } k \text{ 为奇数},$$

$$\dots + \frac{1}{2} \binom{k}{k/2} T_0(x), \quad \text{当 } k \text{ 为偶数}.$$

常用的低次幂表达式为

$$1 = T_0(x),$$

$$x = T_1(x),$$

$$x^2 = \frac{1}{2}(T_0(x) + T_2(x)),$$

$$x^3 = \frac{1}{4}(3T_1(x) + T_3(x)),$$

$$x^4 = \frac{1}{8}(3T_0(x) + 4T_2(x) + T_4(x)),$$

$$x^5 = \frac{1}{16}(10T_1(x) + 5T_3(x) + T_5(x)),$$

$$x^6 = \frac{1}{32}(10T_0(x) + 15T_2(x) + 6T_4(x) + T_6(x)),$$

$$x^7 = \frac{1}{64}(35T_1(x) + 21T_3(x) + 7T_5(x) + T_7(x)),$$

$$x^8 = \frac{1}{128}(35T_0(x) + 56T_2(x) + 28T_4(x) + 8T_6(x) + T_8(x)).$$

例2 用 6 次多项式在区间 $[-1, 1]$ 上逼近 $f(x) = \cos x$.

$f(x) = \cos x$ 的 Taylor 级数部分和

$$q_6(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}$$

的逼近误差界为

$$\begin{aligned} 0.000\,025 &> \frac{1}{8!} > \max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x) - q_6(x)| \geq |f(1) - q_6(1)| \\ &> \frac{1}{8!} - \frac{1}{10!} > 0.000\,024. \end{aligned}$$

但若用 $f(x) = \cos x$ 的 Taylor 展开部分和 $q_8(x)$ 作逼近, 并同时用 Tchebyshev 多项式组来替代 $q_8(x)$ 中的 x^8 , 则得到一个新的 6 次多项式 $p_6(x)$, 它仍是一

个偶多项式,其误差为

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x) - p_6(x)| < \frac{1}{10!} + \frac{1}{2^7 \cdot 8!} < 0.000\,000\,47.$$

由此看来,一个如此简单的替换,竟使逼近的精确度提高了 50 倍之多!

§ 4 最佳一致逼近的收敛速度估计

Weierstrass 定理指出了,对任意给定的 $f(x) \in C[a, b]$, 存在多项式 $p_n(x) \in P_n$, 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - p_n(x)| = 0.$$

显然

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x) - p_n(x)| \geq E_n \geq 0,$$

并且 $E_n \geq E_{n+1}$, 所以 E_n 单调下降地趋于零.

本节讨论 E_n 收敛于 0 的速度(即 Jackson 定理), 其逆问题(即 Bernstein 函数构造论)及相关问题.

先看例子.

例 1 设 $f(x) = e^x$, 研究在 $[-1, 1]$ 上, E_n 收敛于 0 的速度.

按第三章所述多项式插值理论, 在 $[-1, 1]$ 上如以 $n+1$ 次 Tchebyshev 多项式 $T_{n+1}(x)$ 的零点作为 n 次插值多项式的结点, 则该插值多项式 $p_n(x)$ 与 $f(x)$ 的误差为

$$f(x) - p_n(x) = \frac{e^\xi}{(n+1)!} \frac{T_{n+1}(x)}{2^n}, \quad -1 < \xi < 1,$$

所以

$$E_n \leq \max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x) - p_n(x)| \leq \frac{e}{(n+1)! 2^n},$$

即 $E_n \downarrow 0$ 的速度很快.

例 2 说明 $E_n \downarrow 0$ 的速度可以很慢. 特别地, 可以证明不论 $a_n \downarrow 0$ 的收敛速度如何缓慢, 总可以找到如此的 $f(x) \in C[-1, 1]$, 使 $E_n \geq a_n$ ($n = 1, 2, \dots$).

证明 取 $c_n = a_{n-1} - a_n$, $n = 2, 3, \dots$,

$$c_1 = a_1.$$

作函数级数

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k T_{3^k}(x). \quad (4.1)$$

因为 $|T_n(x)| \leq 1 (-1 \leq x \leq 1), c_k \geq 0 (k=1, 2, \dots)$, 所以

$$|c_k T_{3^k}(x)| \leq c_k, \quad -1 \leq x \leq 1,$$

即 $\sum_1^{\infty} c_k$ 是 $f(x) = \sum_1^{\infty} c_k T_{3^k}(x)$ 的控制级数. 因为

$$\begin{aligned} \sum_1^n c_k &= a_1 + (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \cdots + (a_{n-1} - a_n) \\ &= 2a_1 - a_n, \end{aligned}$$

利用 M 判别法, 可知 $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k T_{3^k}(x)$ 于 $[-1, 1]$ 上一致收敛. 又 $T_{3^k}(x)$ 显然在 $[-1, 1]$ 连续, 所以按(4.1)定义的函数 $f(x) \in C[-1, 1]$.

下面指出如此找到的 $f(x)$ 即满足

$$E_n \geq a_n \downarrow 0.$$

考虑 $f(x)$ 的部分和

$$p(x) = \sum_{k=1}^n c_k T_{3^k}(x) \in P_{3^n}.$$

它与 $f(x)$ 的误差为

$$f(x) - p(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k T_{3^k}(x), \quad (4.2)$$

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x) - p(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k = (a_n - a_{n+1}) + (a_{n+1} - a_{n+2}) + \cdots = a_n.$$

(4.2) 右端第 1 项中 $T_{3^{n+1}}(x)$ 的极值点为

$$x_i = \cos \frac{i\pi}{3^{n+1}}, \quad i = 0, 1, \dots, 3^{n+1} \quad (4.3)$$

在这些点处, 当 $k \geq n+1$ 时,

$$\begin{aligned} T_{3^k}(x_i) &= \cos \left(3^k \arccos \left(\cos \frac{i\pi}{3^{n+1}} \right) \right) \\ &= \cos \left(3^k \cdot \frac{i\pi}{3^{n+1}} \right) \\ &= \cos(3^{k-n-1} i\pi) = \cos i\pi = (-1)^i. \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} f(x_i) - p(x_i) &= \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k T_{3^k}(x_i) \\ &= (-1)^i \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k = (-1)^i a_n, \quad i=0, 1, \dots, 3^n + 1. \end{aligned}$$

注意到交错点组(4.3)的点数 $3^{n+1} + 1 \geq 3^n + 2$, 由 Tchebyshev 定理, $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 3^n 次最佳逼近多项式, 所以

$$E_{3^n} = a_n,$$

从而

$$E_n \geq E_{3^n} = a_n.$$

从上述例子不难看出, E_n 单调下降趋于零的速度可以相差很大. 实际上, E_n 趋于零的速度与函数 $f(x)$ 的性质密切相关. 本节中我们将集中讨论此类问题.

(一) 连续模数及其性质

“连续模数”是一种用来表示函数连续性状态的基本数量. 在分析函数的结构性质与多项式逼近速度之间的关系时, 它起着很重要的作用.

今后我们用 $\langle a, b \rangle$ 来表示以 a, b 为端点的一般区间(可以是开的、闭的、半开半闭的区间, 也可以是 $(-\infty, +\infty)$). 假设 $f(x)$ 是定义在 $\langle a, b \rangle$ 上的一个实函数, 数量

$$\omega(\delta) = \sup_{|x-y| \leq \delta} \{ |f(x) - f(y)| \}$$

称作函数 $f(x)$ 的连续模数, 其中 δ 是一个任意正数.

连续模数 $\omega(\delta)$ 实际是刻画了当自变数的两个值之差不大于 δ 时, 函数值之间相差的最大可能值. 对于固定的 δ , $\omega(\delta)$ 是函数振荡特性的度量. 下面我们列出有关连续模数的一系列简单性质, 它们的验证都是十分容易的(其中一部分留给读者作为习题).

1° 函数 $\omega(\delta)$ 是单调递增的, 亦即当 $\delta_1 < \delta_2$ 时, 有

$$\omega(\delta_1) \leq \omega(\delta_2).$$

2° 函数 $f(x)$ 在 $\langle a, b \rangle$ 上一致连续的充分必要条件, 是

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(\delta) = 0.$$

这只需根据一致连续的定义即可看出.

3° 若 n 是一个正整数, 则

$$\omega(n\delta) \leq n\omega(\delta).$$

事实上, 这相当于下列不等式成立

$$\sup_{|x-y|\leq n\delta} |f(x) - f(y)| \leq \sum_{i=1}^n \sup_{|x_i - y_i| \leq \delta} |f(x_i) - f(y_i)|.$$

4° 对于任意正数 λ 都有不等式

$$\omega(\lambda\delta) \leq (\lambda + 1)\omega(\delta).$$

事实上,令 $[\lambda]$ 表示 λ 的整数部分,则易见

$$\omega(\lambda\delta) \leq \omega(([\lambda] + 1)\delta) \leq ([\lambda] + 1)\omega(\delta) \leq (\lambda + 1)\omega(\delta).$$

性质 4° 在我们今后的讨论中经常会用到.

5° 设 $f(x) \in \text{Lip}_{M^\alpha}$ 表示函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上恒适合如下的 Lipschitz 条件:

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^\alpha,$$

其中正常数 α ($0 < \alpha < 1$) 和 M 分别称为指数和系数. 亦可把满足此种条件的所有函数的集合称为 Lipschitz 函数类 Lip_{M^α} . 这样,下列两个关系式

$$f(x) \in \text{Lip}_{M^\alpha}, \quad \omega(\delta) \leq M\delta^\alpha$$

便是完全等价的.

事实上,如果 $f(x) \in \text{Lip}_{M^\alpha}$, 则

$$\omega(\delta) = \sup_{|x-y|\leq\delta} |f(x) - f(y)| \leq M \sup_{|x-y|\leq\delta} |x - y|^\alpha = M\delta^\alpha.$$

反之,若 $\omega(\delta) \leq M\delta^\alpha$, 则

$$|f(x) - f(y)| \leq \omega(|x - y|) \leq M|x - y|^\alpha.$$

(二) Jackson 定理

函数的结构性质(如连续性, 可微性, 满足 Lipschitz 条件等属性)究竟对最小偏差 E_n 趋于 0 的速度会发生怎样的影响呢? 下面我们就来论述 D. Jackson 所得到的一些主要结果.

Jackson 定理 1 设 $f(x) \in \text{Lip}_M 1$, 并且具有周期 2π , 则一定存在一绝对常数 K , 使得

$$E_n^* \leq \frac{KM}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \tag{4.4}$$

其中 $E_n^* = \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} E_m^*(f)$ 为 n 阶三角多项式对 $f(x)$ 的最佳逼近(或最小偏差).

这是一个很重要的结果, 以后我们就会看到, 利用此结果可以完全解决关于函数类 $C[a, b]$ 与 $C_{2\pi}$ 的 E_n 与 E_n^* 究竟以何种速度下降到零的问题.

为证 Jackson 定理 1, 先证下面的引理.

引理 若 m 为正整数, 则分式

$$\left[\frac{\sin \frac{mx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right]^4 \quad (4.5)$$

必是 x 的一个 $2m - 2$ 阶的偶性三角多项式.

证明 事实上, 只需验证分式

$$\left[\frac{\sin \frac{mx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right]^2 = \frac{1 - \cos mx}{1 - \cos x}$$

是一个 $m - 1$ 阶三角多项式即可. 比较等式

$$\cos mx + i \sin mx = (\cos x + i \sin x)^m$$

的两边可得知

$$1 - \cos mx = 1 - \sum_{k \geq 0} (-1)^k \binom{m}{2k} \cos^{m-2k} x \sin^{2k} x,$$

于是

$$\frac{1 - \cos mx}{1 - \cos x} = \frac{1 - \cos^m x}{1 - \cos x} - \sum_{k \geq 1} (-1)^k \binom{m}{2k} \cos^{m-2k} x \frac{(1 - \cos^2 x)^k}{1 - \cos x}.$$

注意上式右端各项中的分式都可化为 $\cos x$ 的 $m - 1$ 次多项式. 因此最后可以肯定(4.5)中的分式能够表示为

$$\left[\frac{\sin \frac{mx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right]^4 = A + \sum_{k=1}^{2m-2} a_k \cos kx.$$

引理证毕.

Jackson 定理 1 的证明 记

$$\lambda_m = \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\sin mu}{m \sin u} \right]^4 du \right)^{-1},$$

$$I_m(x) = \lambda_m \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x + 2u) \left[\frac{\sin mu}{m \sin u} \right]^4 du.$$

如果令 $x + 2u = y$, 并注意到 $f(y)$ 与整个被积函数的周期性(即可将积分区间任意平移), 即可将 $I_m(x)$ 改写为

$$I_m(x) = \frac{1}{2} \lambda_m \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left[\frac{\sin \frac{m(y-x)}{2}}{m \sin \frac{y-x}{2}} \right]^4 dy.$$

依引理, 上式右端为 x 的 $2m-2$ 阶三角多项式. 下面证明三角多项式 $I_m(x)$ 能以极快的速度收敛于给定的函数 $f(x)$.

我们来估计差数 $|I_m(x) - f(x)|$. 注意 $f(x) \in \text{Lip}_M 1$, 亦即有

$$|f(x+2u) - f(x)| \leq 2M|u|.$$

因此易导出

$$\begin{aligned} |I_m(x) - f(x)| &= \left| \lambda_m \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (f(x+2u) - f(x)) \left[\frac{\sin mu}{m \sin u} \right]^4 du \right| \\ &\leq 2M\lambda_m \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |u| \left[\frac{\sin mu}{m \sin u} \right]^4 du \\ &= 4M\lambda_m \int_0^{\frac{\pi}{2}} u \left[\frac{\sin mu}{m \sin u} \right]^4 du \\ &= 2M \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} u [\dots]^4 du}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} [\dots]^4 du}. \end{aligned}$$

进一步再来分别估计最后一式中的分子与分母. 令 c_1 与 c_2 为由下列两积分所定义的常数:

$$c_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 t}{t^4} dt, \quad c_2 = \int_0^\infty \frac{\sin^4 t}{t^3} dt.$$

注意 $0 < \sin u < u$ ($0 < u \leq \frac{\pi}{2}$), 且 $\frac{\sin u}{u}$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内为单调下降函数, 从而

$$\frac{\sin u}{u} > \frac{\sin(\frac{\pi}{2})}{\pi/2} = \frac{2}{\pi}, \quad \frac{1}{\sin u} < \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{u}.$$

因此分母、分子各有如下估计式:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\dots]^4 du &> \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\sin mu}{mu} \right]^4 du = \frac{1}{m} \int_0^{\frac{m\pi}{2}} \frac{\sin^4 t}{t^4} dt \\ &\geq \frac{1}{m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 t}{t^4} dt = \frac{c_1}{m}, \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} u [\dots]^4 du &\leq \left(\frac{\pi}{2} \right)^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} u \left[\frac{\sin mu}{mu} \right]^4 du \end{aligned}$$

$$< \frac{1}{m^2} \left(\frac{\pi}{2} \right)^4 \int_0^\infty \frac{\sin^4 t}{t^3} dt = \left(\frac{\pi}{2} \right)^4 \frac{c_2}{m^2}.$$

分别以所得出的下界与上界代入原来分式中,便得到

$$|I_m(x) - f(x)| \leq \frac{\pi^4 c_2 M}{8c_1 m} \quad (m=1,2,3,\dots). \quad (4.6)$$

最后,令 n 为任意正整数;又令 m 取为整数部分: $m = \left[\frac{n+2}{2} \right]$ (如是,自然有 $2m-2 < n \leq 2m$). 又令 $I_m(x)$ 改记作 $T_n(x)$, 则 $T_n(x)$ 便是一个阶数不大于 n 的三角多项式. 注意 $\frac{1}{m} < \frac{2}{n}$, 因此当 $K = \frac{\pi^4 c_2}{4c_1}$ 时, 由(4.6)式便导出不等式(4.4). 这就证明了 Jackson 定理 1.

Jackson 基本定理 设 $f(x) \in C_{2\pi}$. 则对于一切正整数 n 都成立着如下的估计式:

$$E_n^* \leq K \omega \left(\frac{1}{n} \right), \quad (4.7)$$

其中 K 为绝对常数, $\omega \left(\frac{1}{n} \right)$ 表 $f(x)$ 的连续模数.

证明 只需证明有 n 阶三角多项式 $T_n(x)$ 存在, 使得不等式 $|T_n(x) - f(x)| \leq K \omega \left(\frac{1}{n} \right)$ 成立即可.

显然总能够作出如此的折线函数 $g(x)$, 使其在下列点组

$$-\pi, -\pi + \frac{2\pi}{n}, -\pi + \frac{4\pi}{n}, \dots, \pi - \frac{2\pi}{n}, \pi$$

上和函数 $f(x)$ 的值一致. 自然, 它本身也一定是一个具有 2π 周期的连续函数. 又由于它的图形是由各段直线连成的, 各段端点的纵坐标之差显然不会大于 $\omega \left(\frac{2\pi}{n} \right)$. 因此各段直线的斜率的绝对值均不超过

$$M = \frac{\omega(2\pi/n)}{2\pi/n}. \quad (4.8)$$

如此, 可见对于上述 M 而言, 定理 1 的条件恰好能被函数 $g(x)$ 所满足. 依定理 1 和(4.8)式, 自然存在有三角多项式 $T_n(x)$, 使得

$$|T_n(x) - g(x)| \leq \frac{K'M}{n} = \frac{K'}{2\pi} \omega \left(\frac{2\pi}{n} \right),$$

其中 K' 为绝对常数. 另一方面, 由于具有同一横坐标 x 的曲线上的点 $(x, f(x))$ 与折线上的点 $(x, g(x))$ 同它们附近的公共交点的纵坐标值比较起来, 其

差都不会过大 $\omega\left(\frac{2\pi}{n}\right)$, 因此

$$|g(x) - f(x)| \leq 2\omega\left(\frac{2\pi}{n}\right).$$

于是合并起来, 并注意 $\omega(\lambda\delta) \leq (\lambda+1)\omega(\delta)$, 便得到了不等式

$$|T_n(x) - f(x)| \leq \left(\frac{K'}{2\pi} + 2\right)\omega\left(\frac{2\pi}{n}\right) \leq K\omega\left(\frac{1}{n}\right),$$

其中取 $K = (2\pi+1)\left(\frac{K'}{2\pi} + 2\right)$, 因而定理得证.

由本定理显然易得如下的几条推论:

推论 1 Weierstrass 第二定理恒成立.

推论 2 若 $f(x) \in \text{Lip}_M^\alpha (0 < \alpha \leq 1)$, 则

$$E_n^* \leq KM \frac{1}{n^\alpha}. \quad (4.9)$$

推论 3 若 $f(x) \in C_{2\pi}$ 且存在着有界的导数 $f'(x)$, 而 $|f'(x)| \leq M$, 则

$$E_n^* \leq KM \frac{1}{n}.$$

事实上, 由于 $\omega\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 故推论 1 显然成立. 又由所述连续模数的性质 5°, 可知推论 2 也显然成立. 其次若设 $|f'(x)| \leq M$, 则由 Lagrange 中值定理,

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |f'(\xi)(x_1 - x_2)| \leq M|x_1 - x_2|,$$

可知 $f(x) \in \text{Lip}_M 1$. 因此推论 3 又是推论 2 的推论.

注记 Jackson 定理 1 中出现的积分 $I_m(x)$ 叫做 Jackson 奇异积分, 它可写作

$$I_m(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \Psi_m(y-x) dy,$$

其中 $\Psi_m(u)$ 叫做 Jackson 核, 它可以表成

$$\Psi_m(u) = \frac{3}{2m\pi(2m^2+1)} \left(\frac{\sin \frac{mu}{2}}{\sin \frac{u}{2}} \right)^4.$$

事实上, 把三角恒等式

$$\left(\frac{\sin \frac{mu}{2}}{\sin \frac{u}{2}} \right)^2 = m + 2 \sum_{k=1}^{m-1} (m-k) \cos ku$$

代入原 $I_m(x)$ 的因子 λ_m 中, 可以将 λ_m 的数值精确地算出来:

$$\lambda_m = \frac{3m^3}{\pi(2m^2+1)}.$$

具体算法并不困难, 此处从略.

在函数结构性质的研究中, 起着极重要作用的工具是以下两个 Bernstein 不等式.

(三) Bernstein 不等式

设

$$T(x) = A + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

是一个 n 阶的三角多项式, 则它的导数 $T'(x)$ 有估计式:

$$|T'(x)| \leq n \cdot \max |T(x)|. \quad (4.10)$$

这个命题可以改述为如下的等价形式: 若 $\max |T'(x)| = 1$, 则

$$\max |T(x)| \geq \frac{1}{n}. \quad (4.11)$$

事实上, 只要在原来的估计式的两边, 除以常数 $K = \max |T'(x)|$, 并将多项式 $\frac{1}{K}T(x)$ 仍记为 $T(x)$, 便可看出它们之间的等价性. 至于 $K > 0$ 这一事实, 那是由 $T(x) \not\equiv 0$ 所保证的.

我们来证不等式(4.11). 这里所给出的证法是由 M. Riesz 和 Vallée-Poussin 彼此独立地提出的.

利用反证法, 假定 $\max |T(x)| < \frac{1}{n}$. 于是对于任意常数 c , 可知函数

$$F(x) = \frac{1}{n} \cos(nx - c) - T(x)$$

在各点 $\frac{c}{n}, \frac{\pi+c}{n}, \frac{2\pi+c}{n}, \dots, \frac{2n\pi+c}{n}$ 上都和函数 $\cos(nx - c)$ 有相同的符号; 而 $\cos(nx - c)$ 在这组点上将依次取值 1 和 -1. 因此 $F(x)$ 也就在该点组所划分出来的 $2n$ 个区间的每一个区间内都至少有一个零点 x_k . 总之, 我们至少有这样一批零点: $x_1 < x_2 < \dots < x_{2n}$, 而 $(x_{2n} - x_1) < 2\pi$. 应用 Rolle 定理, 可知 $F'(x)$ 在 $2n$ 个区间 $(x_1, x_2), (x_2, x_3), \dots, (x_{2n-1}, x_{2n}), (x_{2n}, (x_1 + 2\pi))$ 内都有零点存

在,亦即在 $(x_1, x_1 + 2\pi)$ 内有 $F'(x) = 0$ 的 $2n$ 个相异根. 注意

$$F'(x) = -\sin(nx - c) - T'(x).$$

据假设 $\max|T'(x)| = 1$,由连续性知必有一点 x_0 使得 $T'(x_0) = \pm 1$. 另一方面,总可以选择常数 c ,使得 $\sin(nx_0 - c)$ 取数值 ∓ 1 (其符号恰与 $T'(x_0)$ 的符号相反),从而保证 $F'(x_0) = 0$. 再注意到 x_0 是 $T'(x)$ 与 $\sin(nx - c)$ 的极值位置,因此自然还有 $T''(x_0) = (\sin nx_0 - c)' = 0$,亦即还有 $F''(x_0) = 0$. 由此可见, x_0 还是 $F'(x)$ 的重根. 于是连根的重数一并计算在内时, $F'(x)$ 便至少将有 $2n+1$ 个零点. 然而 $F'(x)$ 是 n 阶三角多项式,当零点个数在一个周期内超过 $2n$ 时便只能是 $F'(x) \equiv 0$. 但这是一个矛盾,因为 $F(x)$ 是一个时取正值时取负值的函数.

总之,由反证法可知 $\max|T(x)| \geq \frac{1}{n}$. 命题得证.

必须指出,估计式中的系数 n 实际是最佳的. 例如,对 $T(x) = \sin nx$ 而言,就有

$$\max|T'(x)| = n \cdot \max|T(x)|.$$

Bernstein 第二不等式 设 $p(x)$ 是 x 的 n 次代数多项式,则下列不等式成立:

$$|p'(x)| \leq \frac{n}{\sqrt{1-x^2}} \max_{-1 \leq x \leq 1} |p(x)|, \quad -1 < x < 1. \quad (4.12)$$

事实上,令 $x = \cos \theta$,则应用第一不等式于 n 阶三角多项式 $T(\theta) \equiv p(\cos \theta)$ 上,可得

$$\left| \frac{d}{d\theta} p(\cos \theta) \right| = |\sin \theta \cdot p'(\cos \theta)| = \left| \sqrt{1-x^2} p'(x) \right| \leq n \cdot \max_{-1 \leq x \leq 1} |p(x)|.$$

因此第二不等式可作为第一不等式的推论导出.

推论 设 $p(x)$ 是 x 的 n 次代数多项式,那么如下的估计式成立:

$$|p'(x)| \leq \frac{n}{\sqrt{(b-x)(x-a)}} \max_{a \leq x \leq b} |p(x)|, \quad a < x < b. \quad (4.13)$$

为得到这个结论,只需作线性代换:

$$x = \frac{1}{2}[(b-a)y + a + b] \quad (-1 \leq y \leq 1),$$

并将第二不等式应用于 y 的 n 次多项式 $Q(y) \equiv p(x)$ 即可. 事实上,

$$\left| \frac{d}{dy} Q(y) \right| = \left| p'(x) \frac{dx}{dy} \right| = \frac{b-a}{2} |p'(x)|$$

$$\leq \frac{n \max_{-1 \leq y \leq 1} |Q(y)|}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

而此处不等式的右端恒可以化为 x 的函数形式,从而即可得出推论中的不等式.

§ 5 函数的构造性理论

前节已经讨论了函数的结构性质,诸如连续性、可微性等是怎样影响着最佳逼近(或最小偏差) E_n^* 的递减速度.这一节将讨论该问题的反问题,即怎样根据 E_n^* 的递减速度去判定函数的结构特性.关于这方面所得到的最重要结果是属于 Bernstein 的.

我们已经知道什么叫 Lipschitz 函数类 Lip_{M^α} ,特别是在系数 M 无关紧要的情形,可以用记号 Lip^α 来表示这种函数类.此外,我们再引进这样一个函数类 W ,它是由满足条件

$$\omega(\delta) \leq A\delta(1 + |\ln \delta|)$$

的一切函数所组成的函数类,其中 \ln 表示自然对数,而 A 与可变正数 δ 无关.可以证明,若函数的定义范围限于有限区间,则有下面的包含关系(留给读者验证):

$$\text{Lip}^1 \subset W \subset \text{Lip}^\alpha \quad (0 < \alpha < 1).$$

Bernstein 定理 设 $f(x) \in C_{2\pi}$, 并设 E_n^* 表示用 n 阶三角多项式类逼近 $f(x)$ 所得的最小偏差. 又设当 $n = 1, 2, 3, \dots$ 时恒有

$$E_n^* \leq \frac{K}{n^\alpha}, \quad (0 < \alpha \leq 1). \quad (5.1)$$

那么当 $\alpha < 1$ 时可以断定 $f(x) \in \text{Lip}^\alpha$; 而当 $\alpha = 1$ 时则可断言 $f(x) \in W$.

证明 在证明中,为了叙述和记号的简化,我们约定用记号 A 表示那种与函数变量无关的常数,而它在各次出现时未必代表同一数值(在此种约定下,例如可以写 $2A = A$, 等等).

证明的主要内容无非就是设法寻求关于 $\omega(\delta)$ 的估计式. 从而再根据 $\omega(\delta)$ 与 Lipschitz 条件的联系以及与 W 的条件的联系作出关于 $f(x)$ 所属函数类的结论. 在估计 $|f(x) - f(y)|$ ($|x - y| \leq \delta$) 的过程中需要用到微分中值定理和 Bernstein 不等式.

对于每个 n , 由假设可知都有不高于 n 阶的三角多项式 $T_n(x)$ 使得 $|T_n(x) - f(x)| \leq \frac{K}{n^\alpha}$. 这表明当 $n \rightarrow \infty$ 时 $T_n(x)$ 是一致地趋于 $f(x)$ 的. 若令

$$u_0(x) = T_1(x), \quad u_n(x) = T_{2^n}(x) - T_{2^{n-1}}(x) \quad (n = 1, 2, \dots),$$

则 $\sum u_n(x)$ 便一致收敛于 $f(x)$, 亦即

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x).$$

下面来估计 $|f(x) - f(y)|$ ($|x - y| \leq \delta$), 其中 $0 < \delta \leq \frac{1}{2}$ 为任意正数. 令 m 选得如此大, 使得 $2^{m-1} \leq \frac{1}{\delta} < 2^m$, 于是

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} |u_n(x) - u_n(y)| \\ &\leq \sum_{n=0}^{m-1} |u_n(x) - u_n(y)| \\ &\quad + \sum_{n=m}^{\infty} |u_n(x)| + \sum_{n=m}^{\infty} |u_n(y)|. \end{aligned}$$

显然关于 $|u_n(x)|$ 有如下的估计:

$$\begin{aligned} |u_n(x)| &\leq |T_{2^n}(x) - f(x)| + |f(x) - T_{2^{n-1}}(x)| \\ &\leq \frac{K}{2^{n\alpha}} + \frac{K}{2^{(n-1)\alpha}} \\ &= K \frac{(1+2^\alpha)}{2^{n\alpha}}. \end{aligned}$$

从而(注意公式(4.10))

$$\begin{aligned} \sum_{n=m}^{\infty} |u_n(x)| &\leq A \sum_{n=m}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n\alpha} = A \left(\frac{1}{2}\right)^{m\alpha}, \\ |f(x) - f(y)| &\leq \sum_{n=0}^{m-1} |u_n(x) - u_n(y)| + A \left(\frac{1}{2}\right)^{m\alpha} \\ &= \sum_{n=0}^{m-1} u'_n(\xi) |x - y| + A \left(\frac{1}{2}\right)^{m\alpha} \\ &\leq \sum_{n=0}^{m-1} 2^n \max |u_n(x)| \delta + A \left(\frac{1}{2}\right)^{m\alpha} \\ &\leq A \delta \sum_{n=0}^{m-1} 2^n \frac{1}{2^{n\alpha}} + A \left(\frac{1}{2}\right)^{m\alpha} \end{aligned}$$

注意 $\delta > 2^{-m}$, 因此由上述估计可知

$$\omega(\delta) \leq A\delta \sum_{n=0}^{m-1} 2^{n(1-\alpha)} + A\delta^\alpha. \quad (5.2)$$

以下分别讨论 $\alpha < 1$ 与 $\alpha = 1$ 的情形. 先设 $\alpha < 1$. 此时由于 $2^m < \frac{2}{\delta}$, 故得

$$\sum_{n=0}^{m-1} 2^{n(1-\alpha)} < \frac{2^{m(1-\alpha)}}{2^{1-\alpha} - 1} < A \left(\frac{1}{\delta} \right)^{1-\alpha},$$

从而

$$\omega(\delta) \leq A \left(\frac{1}{\delta} \right)^{1-\alpha} \delta + A\delta^\alpha = A\delta^\alpha.$$

这表明 $f(x) \in \text{Lip}\alpha$.

又若 $\alpha = 1$, 则(5.2)变为

$$\omega(\delta) \leq A\delta m + A\delta.$$

既然 $2^{m-1} \leq \frac{1}{\delta}$, 因此 $m-1 \leq |\ln \delta| / \ln 2$, $m \leq 2(m-1) \leq A|\ln \delta|$, 从而

$$\omega(\delta) \leq A\delta|\ln \delta| + A\delta \leq A\delta(|\ln \delta| + 1).$$

这表明 $f(x) \in W$. 证毕.

将此处所论证的定理和Jackson基本定理的推论2作一比较, 即可看出, 为使函数 $f(x) \in \text{Lip}\alpha$ ($0 < \alpha < 1$), 充分且必要条件是 $E_n^* \leq \frac{K}{n^\alpha}$. 但当 $\alpha = 1$ 时, 该条件却只是必要而未必充分. 事实上, 存在这样的函数 $f(x)$ (例如可取 $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^2} \in C_{2\pi}$), 它虽然满足条件 $E_n^* \leq \frac{K}{n}$, 却未必有 $f(x) \in \text{Lip}1$.

Bernstein 还建立了如下的定理:

定理2 设 $f(x) \in C_{2\pi}$, 又设

$$E_n^* \leq \frac{K}{n^{p+\alpha}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

其中 p 为正整数, 而 $0 < \alpha \leq 1$, 那么 $f(x)$ 必有连续的 p 阶导数 $f^{(p)}(x)$, 并且当 $\alpha < 1$ 时, $f^{(p)}(x) \in \text{Lip}\alpha$; 而当 $\alpha = 1$ 时, $f^{(p)}(x) \in W$.

定理3 为使 $C_{2\pi}$ 中的函数 $f(x)$ 有任意阶导数的充分必要条件是对于任意 p 都有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n^p E_n^*) = 0.$$

定理2的证明和前面定理的证法十分相似. 令 $u_n(x)$ 的定义同前, 则由

$|T_n(x) - f(x)| \leq \frac{K}{n^{p+\alpha}}$ 出发, 同样可得(常数记号 A 的用法仍按以前的约定):

$$|u_n(x)| \leq \frac{K}{2^{n(p+\alpha)}} + \frac{K}{2^{(n-1)(p+\alpha)}} = \frac{A}{2^{np+n\alpha}}.$$

对 2^n 阶多项式 $u_n(x)$ 连续利用 p 次 Bernstein 不等式, 可得

$$|u_n^{(p)}(x)| \leq (2^n)^p \frac{A}{2^{np+n\alpha}} = \frac{A}{2^{n\alpha}}.$$

于是依 Weierstrass 的 M 检验法, 可知导数级数 $\sum u_n^{(p)}(x)$ 一致收敛到和函数 $f(x)$ 的 p 级导数:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n^{(p)}(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^p \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = f^{(p)}(x).$$

最后只需判定 $f^{(p)}(x)$ 所属的函数类. 显然

$$\left|f^{(p)}(x) - \sum_{n=0}^m u_n^{(p)}(x)\right| \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{A}{2^{n\alpha}} = \frac{A}{2^{m\alpha}}.$$

既然其中 $\sum_{n=0}^m u_n^{(p)}(x)$ 是一个阶数不大于 2^m 的三角多项式, 故用 $E_n^{(p)}$ 表示 $f^{(p)}(x)$ 的最佳逼近时, 将有

$$E_{2^m}^{(p)} \leq \frac{A}{2^{m\alpha}} \quad (m=1, 2, \dots).$$

对于每一个正整数 $n > 2$, 总可选 m , 使得 $2^m \leq n < 2^{m+1}$, 因而总有

$$E_n^{(p)} \leq E_{2^m}^{(p)} \leq \frac{A}{2^{m\alpha}} < \frac{A}{2^{(m+1)\alpha}} < \frac{A}{n^\alpha}.$$

于是根据 Bernstein 定理便可作出关于 $f^{(p)}(x)$ 所属函数类的结论.

对于定理 3, 我们在这里不准备给出它的全部证明, 只就定理中所述条件的充分性予以验证. 在定理条件之下, 可知对一切足够大的 n (例如 $n > N_p$), 总有

$$n^{p+1} E_n^* < 1.$$

因 N_p 为有限数, 故在诸数

$$E_1^*, 2^{p+1} E_2^*, \dots, N_p^{p+1} E_{N_p}^*, 1$$

中必可选一最大者, 例如记最大数为 K_p , 于是

$$E_n^* \leq K_p \cdot \frac{1}{n^{p+1}}$$

便对一切 n 都成立. 如此, 根据定理 2 便得知 $f(x)$ 具有连续的 p 阶导数. 又由于 p 的任意性便得知定理为真.

我们知道, 满足条件 $E_n^* < \frac{K}{n}$ 的以 2π 为周期的函数未必属于 Lip1 类. 因此, 自然产生这样的问题: 由条件 $E_n^* < \frac{K}{n}$ 所界定的类究竟是怎样的函数类? 这个问题是被 A.Zygmund 解决的. 他发现要寻找的函数类正是下面要讲的 Z 类.

Z 类 类中的元素 $f(x)$ 是以 2π 为周期的连续函数, 并且有这样的常数 K 使得对一切 x 及一切 $h > 0$, 都满足如下的条件:

$$|f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)| \leq K|h|. \quad (5.3)$$

Zygmund 定理 函数 $f(x)$ 属于 Z 类的充分必要条件是 $E_n^* < \frac{A_0}{n}$ ($n = 1, 2, \dots$), A_0 为某一常数.

证明 所用的工具主要是 Bernstein 不等式和如下的 Jackson 奇异积分

$$I_n(x) = \frac{3}{2n\pi(2n^2+1)} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{\sin \frac{n(t-x)}{2}}{\sin \frac{t-x}{2}} \right]^4 dt.$$

仿 Jackson 定理 1 的证法, 利用核函数的偶性, 可得

$$\begin{aligned} I_n(x) - f(x) &= \frac{3}{n\pi(2n^2+1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x+2t) - 2f(x) \\ &\quad + f(x-2t)] \left[\frac{\sin nt}{\sin t} \right]^4 dt. \end{aligned}$$

先证条件的必要性. 假设 $f(x) \in Z$, 则

$$|I_n(x) - f(x)| \leq \frac{6K}{n\pi(2n^2+1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \left[\frac{\sin nt}{\sin t} \right]^4 dt.$$

因而仿 Jackson 定理 1 的证法, 可得估计式 (A 表示如前约定的常数):

$$|I_n(x) - f(x)| \leq A \cdot \frac{1}{n}.$$

既然 $I_n(x)$ 是一个阶数不高于 $2n-2$ 的三角多项式, 因此上式表明

$$E_{2n-2}^* \leq A \cdot \frac{1}{n}.$$

注意到

$$E_{2n-1}^* \leq E_{2n-2}^* \leq A \frac{1}{n} \leq 3A \frac{1}{2n},$$

因此可知不论 n 为奇数还是偶数, 都存在常数 A , 使 $E_n^* < A \frac{1}{n}$, 故必要性得证.

再证条件的充分性. 假设 $f(x)$ 满足定理中的条件, 仿 Bernstein 定理的证法, 引进 2^n 阶的三角多项式 $u_n(x)$, 于是

$$|u_n(x)| \leq A \frac{1}{2^{na}} = A \cdot \frac{1}{2^n}, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x).$$

对于任意正整数 m , 显然有

$$\sum_{n=m}^{\infty} |u_n(x)| \leq A \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{2^n} = A \frac{1}{2^m}.$$

这表明, 对于任意 $h > 0$, 都有

$$\begin{aligned} & |f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)| \\ & \leq \sum_{n=0}^{m-1} [u_n(x+h) - 2u_n(x) + u_n(x-h)] + \frac{A}{2^m}. \end{aligned}$$

利用两次微分中值公式可得

$$\begin{aligned} u_n(x+h) - 2u_n(x) + u_n(x-h) &= hu'_n(\xi) - hu'_n(\eta) \\ &= h(\xi - \eta)u''_n(\zeta), \end{aligned}$$

其中 $x-h < \eta < \zeta < \xi < x+h$. 再连用两次 Bernstein 不等式便得出如下的估计式:

$$\begin{aligned} & |u_n(x+h) - 2u_n(x) + u_n(x-h)| \\ & \leq 2h^2 \max |u''_n(x)| \leq 2h^2 (2^n)^2 \max |u_n(x)| \\ & \leq Ah^2 2^n, \end{aligned}$$

通过逐项相加得

$$|f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)| \leq Ah^2 2^m + \frac{A}{2^m}.$$

到此为止 m 都是任意的, 而且上式左端与 m 无关. 因此我们总可适当选择 m 使得 $2^{-m} \leq h \leq 2^{1-m}$, 从而

$$|f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)| \leq 2Ah + Ah \leq 3Ah.$$

这表明 $f(x) \in Z$. 充分性得证.

注记 Zygmund 定理实质上可以看做是对 Bernstein 定理的补充, 或者看做是关于 $\alpha = 1$ 的那个情况的精确化. 事实上, 函数类 Z 是介于 $\text{Lip}1$ 和交集 $WC_{2\pi}$ 之间的, 即

$$\text{Lip}1 \subset Z \subset WC_{2\pi}.$$

还可以举例说明 Z 是交集 $WC_{2\pi}$ 的一个真子集. 进一步讨论留给读者.

§ 6 代数多项式逼近理论中的有关结果

本节转而讨论代数多项式情形的 Jackson 和 Bernstein 型理论.

(一) 函数的最佳逼近与诱导函数的最佳逼近之间的关系

要研究非周期函数的结构性质与函数的代数多项式逼近阶之间的联系, 最简单的方法就是先通过变数代换法把被逼近的函数转变成三角函数, 然后用三角多项式来进行逼近(这时即可应用 § 4, § 5 中的理论), 最后再把三角多项式变回到代数多项式.

现在我们就根据上述想法来进行具体分析. 假设 $f(x)$ 是定义在闭区间 $[a, b]$ 上的一个连续函数. 通过变数代换

$$x = \frac{1}{2}[(b-a)t + (b+a)],$$

显然就将 x 的区间 $a \leq x \leq b$ 变换成 t 的区间 $-1 \leq t \leq 1$, 同时得到 t 的函数

$$\varphi(t) \stackrel{\text{def}}{=} f\left(\frac{(b-a)t + (b+a)}{2}\right).$$

既然 $-1 \leq t \leq 1$, 故又可作变数代换 $t = \cos \theta$ 而 θ 满足 $0 \leq \theta \leq \pi$, 这样便得到一个三角函数

$$\psi(\theta) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(\cos \theta).$$

由于 $\cos \theta$ 是 θ 的偶性周期函数, 故可将 $\psi(\theta)$ 按照 $\psi(\theta) = \psi(-\theta)$ 与 $\psi(\theta) = \psi(\theta + 2\pi)$ 而延拓成为 $(-\infty, \infty)$ 上的偶性周期函数.

如上得出的 $\psi(\theta)$ 称为原始函数 $f(x)$ 的诱导函数. 利用此种诱导函数即可讨论代数多项式的最佳逼近和三角多项式的最佳逼近之间的关系.

命题 1 设 E_n 是函数 $f(x) \in C[a, b]$ 的用不高于 n 次的代数多项式的最佳逼近, 而 E_n^* 是它的诱导函数 $\psi(\theta)$ 用阶数不高于 n 的三角多项式的最佳逼近, 那么 $E_n = E_n^*$.

证明 对 $f(x)$ 而言恒有最小偏差多项式 $p(x) = \sum_0^n a_k x^k$, 使得

$$|f(x) - p(x)| \leq E_n. \quad (6.1)$$

易见 $p(x)$ 的诱导函数 $T(\theta)$ 必定是阶数不高于 n 的三角多项式. 因此不等式 (6.1) 转变为

$$|\psi(\theta) - T(\theta)| \leq E_n.$$

由此推出 $E_n^* \leq E_n$.

反之, 对偶函数 $\psi(\theta)$ 而言将有最小偏差多项式(偶性三角多项式)

$T(\theta) = \sum_{k=0}^n a_k \cos k\theta = \sum_{k=0}^n c_k \cos^k \theta$, 使得

$$|\psi(\theta) - T(\theta)| \leq E_n^*. \quad (6.2)$$

显然由 $\psi(\theta) \equiv \varphi(\cos \theta) = \varphi(t)$ 可知 (6.2) 式相当于

$$\left| \varphi(t) - \sum_0^n c_k t^k \right| \leq E_n^*.$$

最后再根据变数代换 $x = \frac{1}{2}[(b-a)t + (b+a)]$, 上式变成

$$|f(x) - p(x)| \leq E_n^*,$$

其中 $p(x)$ 的次数自然不高于 n , 由此又推出 $E_n \leq E_n^*$.

命题 2 设 $\omega_f(\delta), \omega_\psi(\delta)$ 分别表示函数 $f(x)$ 与诱导函数 $\psi(\theta)$ 的连续模数, 则

$$\omega_\psi(\delta) \leq \omega_f\left(\frac{1}{2}(b-a)\delta\right).$$

证明 由微分中值公式易知 $|\cos \theta_1 - \cos \theta_2| \leq |\theta_1 - \theta_2|$. 因此当 $|\theta_1 - \theta_2| \leq \delta$ 时, 可得估值式

$$\begin{aligned} |\psi(\theta_1) - \psi(\theta_2)| &= |\varphi(\cos \theta_1) - \varphi(\cos \theta_2)| \leq \omega_\varphi(|\cos \theta_1 - \cos \theta_2|) \\ &\leq \omega_\varphi(|\theta_1 - \theta_2|) \leq \omega_\varphi(\delta) \\ &= \max_{|\epsilon_1 - \epsilon_2| \leq \delta} \left| f\left(\frac{(b-a)\epsilon_1 + (b+a)}{2}\right) - f\left(\frac{(b-a)\epsilon_2 + (b+a)}{2}\right) \right| \end{aligned}$$

$$\leq \omega_f\left(\frac{1}{2}(b-a)\delta\right).$$

命题3 设 $[\alpha, \beta]$ 是整个包含在 (a, b) 内的闭区间, 而 $\tilde{\omega}_f(\delta)$ 表示 $f(x)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上的连续模数, 则存在一个只依赖于区间 (a, b) 以及 $[\alpha, \beta]$ 的正常数 k , 使得

$$\tilde{\omega}_f(\delta) \leq \omega_\psi(k\delta).$$

证明 注意变数代换 $x = \frac{1}{2}[(b-a)t + (b+a)]$ 等价于

$$t = \frac{2x - (b+a)}{b-a}.$$

在此变换下 $\alpha \leq x \leq \beta$ 被变换为 $\tau_1 \leq t \leq \tau_2$, 而

$$\tau_1 = \frac{2\alpha - (b+a)}{b-a}, \quad \tau_2 = \frac{2\beta - (b+a)}{b-a}.$$

显然 $[\tau_1, \tau_2]$ 整个含于 $(-1, 1)$ 内, 亦即

$$\lambda = \min\{\tau_1 + 1, 1 - \tau_2\} > 0.$$

记

$$x_i = \frac{1}{2}[(b-a)t_i + (b+a)] = \frac{1}{2}[(b-a)\cos \theta_i + (b+a)], i=1,2,$$

于是不等式 $|x_1 - x_2| \leq \delta$ 相当于

$$|t_1 - t_2| \leq \frac{2}{b-a}\delta.$$

因 $\theta = \arccos t$, 故由微分中值定理可得

$$|\theta_1 - \theta_2| = |\arccos t_1 - \arccos t_2| = \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} |t_1 - t_2|,$$

其中 t_1, t_2 均在 $[\tau_1, \tau_2]$ 内, 而 ξ 介于 t_1 与 t_2 之间, 从而 $(1 - \xi^2) = (1 - \xi)(1 + \xi) \geq \lambda^2$. 因而

$$|\theta_1 - \theta_2| \leq \frac{1}{\lambda} |t_1 - t_2| \leq \frac{2}{\lambda(b-a)} \delta.$$

我们有

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |\psi(\theta_1) - \psi(\theta_2)| \leq \omega_\psi(|\theta_1 - \theta_2|) \leq \omega_\psi\left(\frac{2}{\lambda(b-a)}\delta\right).$$

这就证明了 $\omega_f(\delta) \leq \omega_\psi(k\delta)$, 其中 $k = \frac{2}{\lambda(b-a)}$.

(二) Jackson 定理与 Bernstein 定理

有了以上内容作准备, 我们便不难根据三角多项式逼近论中的 Jackson 定理与 Bernstein 定理去导出代数多项式逼近论中的相应命题. 例如我们有

Jackson 定理 1 设 E_n 是函数 $f(x) \in C[a, b]$ 用 P_n 中的多项式所得的最佳逼近, 那么

$$E_n \leq K\omega_f\left(\frac{1}{n}\right),$$

其中 K 为一正常数, 仅与 a, b 有关.

证明 令 $\psi(\theta)$ 表示 $f(x)$ 的诱导函数, 根据本节命题 1 及 2 并利用周期情形的 Jackson 定理易知

$$E_n = E_n^* \leq A\omega_\psi\left(\frac{1}{n}\right) \leq A\omega_f\left(\frac{b-a}{2n}\right) \leq K\omega_f\left(\frac{1}{n}\right).$$

定理得证.

推论 1 设 $f(x) \in \text{Lip}_M^\alpha$ ($0 < \alpha \leq 1$), 则

$$E_n \leq K \cdot M \left(\frac{1}{n}\right)^\alpha.$$

推论 2 设 $f(x)$ 有导函数 $f'(x)$, 且 $|f'(x)| \leq M$, 则

$$E_n \leq KM \frac{1}{n}.$$

如果用 $\omega^{(p)}(\delta)$ 表示 p 阶导函数 $f^{(p)}(x)$ 的连续模数, 那么还有如下一个更一般的结果:

Jackson 定理 2 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上具有 p 阶连续导函数, 那么当 $n > p$ 时, 恒有估计式

$$E_n \leq A_p \left(\frac{1}{n}\right)^p \omega^{(p)}\left(\frac{b-a}{2(n-p)}\right),$$

其中 A_p 是一个只依赖于 a, b 与 p 的正常数.

为证上述定理, 先证下面的引理.

引理 2 若 $f(x)$ 具有连续导数 $f'(x)$, 则 $f(x)$ 的最佳逼近 $E_n \equiv E_n(f)$ 与其导数的最佳逼近 $E'_{n-1} \equiv E'_{n-1}(f)$ 之间必存在如下的关系式

$$E_n \leq A \left(\frac{1}{n} \right) E'_{n-1}.$$

证明 令 $p(x)$ 是 $f'(x)$ 的 $n-1$ 次最佳逼近多项式, 那么 $|f'(x) - p(x)| \leq E'_{n-1}$. 令 $\varphi(x) = f(x) - \int_0^x p(t) dt$, 则 $\varphi'(x) = f'(x) - p(x)$, 从而有不等式

$$|\varphi'(x)| \leq E'_{n-1}.$$

如是, 利用 Jackson 定理 1 的推论 2 便推出

$$E_n(\varphi) \leq A \left(\frac{1}{n} \right) E'_{n-1}.$$

因此, 若 $Q(x) \in P_n$ 是 $\varphi(x)$ 的最佳逼近多项式, 则

$$|\varphi(x) - Q(x)| = \left| f(x) - \int_0^x p(t) dt - Q(x) \right| \leq \frac{A}{n} E'_{n-1}.$$

注意 $\int_0^x p(t) dt + Q(x)$ 为 P_n 中的多项式, 故由上式可知引理成立.

定理 2 的证明 相继引用引理中的不等式, 得出(常数 A 在各次出现时, 不必代表同一值)

$$\begin{aligned} E_n &\leq A \left(\frac{1}{n} \right) E'_{n-1} \leq A \left(\frac{1}{n} \right) \left(\frac{1}{n-1} \right) E''_{n-2} \leq \cdots \\ &\leq A \left(\frac{1}{n} \right) \left(\frac{1}{n-1} \right) \cdots \left(\frac{1}{n-p+1} \right) E^{(p)}_{n-p} \\ &\leq A \left(\frac{1}{n} \right)^p E^{(p)}_{n-p}. \end{aligned} \tag{6.3}$$

再根据上述 Jackson 第一定理的证明可知有

$$E^{(p)}_{n-p} \leq A \omega^{(p)} \left(\frac{b-a}{2(n-p)} \right).$$

以此代入不等式(6.3)的最后一项, 便证明了定理 2 中的估计式.

进一步, 来建立

Bernstein 定理 1 设函数 $f(x) \in C[a, b]$ 的最佳逼近 E_n 满足不等式

$$E_n \leq \frac{A}{n^\alpha} \quad (0 < \alpha \leq 1).$$

令 $[a_1, b_1]$ 为整个含于 (a, b) 内的一个闭区间, 那么当 $\alpha < 1$ 时, $f(x)$ 在该闭区间上恒属于 Lip^α 类; 当 $\alpha = 1$ 时 $f(x)$ 在该闭区间上属于 W 类.

证明 令 $\psi(\theta)$ 表 $f(x)$ 的诱导函数, 则

$$E_n(f) = E_n^*(\psi) \leq \frac{A}{n^\alpha}.$$

因而由 § 5 中的定理 2 知道, 当 $\alpha < 1$ 时 $\psi(\theta) \in \text{Lip}_M^\alpha$; 而当 $\alpha = 1$ 时 $\psi(\theta) \in W$.

由本节命题 3 知道, 在区间 $[a_1, b_1]$ 上恒有 $\tilde{\omega}_f(\delta) \leq \omega_\psi(k\delta)$. 根据连续模数的性质以及 W 类的定义, 可知当 $\alpha < 1$ 时, 有

$$\tilde{\omega}_f(\delta) \leq \omega_\psi(k\delta) \leq Mk^\alpha \delta^\alpha.$$

这表明 $f(x)$ 属于具有系数 Mk^α 的 Lip^α 类; 当 $\alpha = 1$ 时,

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_f(\delta) &\leq \omega_\psi(k\delta) \leq Mk\delta(1 + |\ln k\delta|) \\ &\leq Mk(1 + |\ln k|)\delta(1 + |\ln \delta|). \end{aligned}$$

故 $f(x)$ 属于函数类 W .

Bernstein 定理 2 设 p 为正整数而 $f(x) \in C[a, b]$, 并且

$$E_n \leq \frac{A}{n^{p+\alpha}} \quad (0 < \alpha \leq 1),$$

那么 p 阶导数 $f^{(p)}(x)$ 在开区间 (a, b) 内处处存在. 并且当 $\alpha < 1$ 时, $f^{(p)}(x)$ 在包含于 (a, b) 内的任何闭区间 $[a_1, b_1]$ 上恒属于 Lip^α 类; 而当 $\alpha = 1$ 时属于 W 类.

这个定理可用 Bernstein 第二不等式的那条推论来证明.

最后要着重指出, 将 Bernstein 的一系列定理和 Jackson 的定理联系起来(包括 Zygmund 定理), 可以看出 $C_{2\pi}$ 与 $C[a, b]$ 中的函数正好能够按照它们的最佳逼近的递减速度来进行分类. 例如分成 Lip^α ($0 < \alpha < 1$) 类, Z 类, 高阶可微函数类等. 这部分的内容也常被称为函数构造论.

第二章习题

1. 设 N 是大于 $n+1$ 的任意自然数. 试证 $C[0, 1]$ 中恒存在一函数 $f(x)$, 使得 P_n 中关于 $f(x)$ 的最佳逼近多项式恰具有 N 个正负交错的偏离点.

[提示] 考虑 $f(x) = x^n + \sin(N\pi x)$, $0 \leq x \leq 1$.

2. 试证明对于任何连续函数来说, 它的最佳逼近多项式所具有的交错点组中偏离点的个数不可能无穷多.

[提示]采用反证法,并利用 Bolzano-Weierstrass 聚点原则.

3. 试证明 $C[a, b]$ 中还有这样的函数, 它在 P_n 中的最佳逼近多项式具有无穷多个偏离点(虽然它们不成为交错组).
4. 试在一切具有最高次项系数为 a 的 n 次多项式 $f(x) = ax^n + \dots$ 中, 找出在 $[-1, 1]$ 区间上与零偏差最小的多项式.
5. 在 $x = \xi$ 处取 η 值的所有 n 次多项式中, 求出在 $[-1, 1]$ 上的最小零偏差多项式.

[提示]注意这种多项式可表为

$$p(x) = (x - \xi)q(x) + \eta, \quad q(x) \in P_{n-1}.$$

6. 证明

$$T_m(T_n(x)) = T_n(T_m(x)) = T_{mn}(x),$$

特别地,

$$T_n(2x^2 - 1) = 2T_n^2(x) - 1.$$

7. 证明

$$T_m(x)T_n(x) = \frac{1}{2}(T_{m+n}(x) + T_{|m-n|}(x)).$$

8. 试求 n 次多项式 $p_n(x)$ 以及尽可能大的 β_n , 使得在区间 $[0, \beta_n]$ 上满足

$$|p_n(x)| \leq 1, \quad 0 \leq x \leq \beta_n.$$

9. 证明

$$\begin{aligned} \int T_0(x)dx &= T_1(x), \quad \int T_1(x)dx = \frac{1}{4}T_2(x) \\ \int T_n(x)dx &= \frac{1}{2} \left(\frac{T_{n+1}(x)}{n+1} - \frac{T_{n-1}(x)}{n-1} \right). \end{aligned}$$

10. 证明

$$(1 - xy)(1 - 2xy + y^2)^{-1} = 1 + T_1(x)y + T_2(x)y^2 + \dots.$$

11. 求解下述问题:

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq x \leq 1} |e^x - ax - b| &= \min, \\ \max_{0 \leq x \leq 1} |x^4 - ax| &= \min. \end{aligned}$$

其中第二个问题的解是否唯一?

12. 设 $f(x) \in C[a, b]$, $p(x) \in P_n$, 则

$$\Delta(p) = \max_{a \leq x \leq b} \rho(x) |p(x) - f(x)|$$

称为 p 对 f 的带权 ρ 的偏差, 此处 $\rho(x)$ 是一个正值的连续函数. 试证明就这样的偏差而言, 照样有 Tchebyshev 最佳逼近问题和相应的基本定理.

13. 两个函数的最佳逼近多项式之和,是否一定是这两个函数之和的最佳逼近?

[提示]试考察下述两函数

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1/4, \\ 3 - 8x, & 1/4 \leq x \leq 1/2, \\ -5 + 8x, & 1/2 \leq x \leq 3/4, \\ 1, & 3/4 \leq x \leq 1, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} -1 + 4x, & 0 \leq x \leq 1/2, \\ 3 - 4x, & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

在 P_1 的逼近情况.

14. 给定平面内的 n 个点 $p_i(x_i, y_i)$, $i = 1, \dots, n$. p_0 是另外一点. 试指出, 存在一条过 p_0 的直线: $y = a_0x + a_1$, 使得 $\max_{1 \leq i \leq n} |y_i - (a_0x_i + a_1)| = \min$. 并请进一步推广此性质.

15. 设 F 是如下的一个函数类

$$F = \left\{ f \in C[-1, 1] \mid \int_{-1}^1 f(x) dx = 0 \right\}.$$

试讨论在 F 类上的极小化问题

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |1 - f(x)| = \min.$$

16. 设 $w(x), f(x) \in C[-1, 1]$. 试证明存在唯一的 $p^* \in P_n$, 使得

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} w(x) |f(x) - p(x)| = \min.$$

17. 设 f 的各阶导数都存在, 且在 $[a, b]$ 中不变号. 试证

$$E_0(f) > E_1(f) > \dots$$

[提示]若 $E_n(f) = E_{n+1}(f)$, 设 p_n 为 f 在 P_n 中的最佳逼近多项式, 则 $f - p_n$ 交错变号 $n + 3$ 次.

18. 设 p 和 q 是满足 $0 \leq p \leq n$ 和 $0 \leq q \leq n$ 的两个整数. 试证

$$\sum_{k=0}^{2n-1} \left(\cos \frac{\pi k p}{n} \cdot \cos \frac{\pi k q}{n} \right) = \begin{cases} 2n, & \text{若 } p = q = 0 \text{ 或 } n, \\ n, & \text{若 } p = q \neq 0 \text{ 或 } n, \\ 0, & \text{若 } p \neq q. \end{cases}$$

[提示: 利用三角恒等式指出上式等于

$$\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2n-1} \left[\cos \frac{\pi k(p+q)}{n} + \cos \frac{\pi k(p-q)}{n} \right].$$

然后利用 $e^{iz} = \cos z + i \sin z$, 指出上式恰好是

$$\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2n-1} \left([e^{(p+q)\pi i/n}]^k + [e^{(p-q)\pi i/n}]^k \right)$$

的实数部分. 再分别求上述两个几何级数的和, 即可证明此题.]

19. 设 $F(x) = \sum' a_k T_k^*(x)$ 是 $F(x)$ 的移位 Tchebyshev 级数, $F\left[\frac{1}{2}(z+1)\right] = \sum' b_k T_k(x)$ 是 $F\left[\frac{1}{2}(z+1)\right]$ 的通常 Tchebyshev 级数. 试证明

$$a_k = b_k, k = 0, 1, 2, \dots.$$

20. 试证明定义在 $[-1, 1]$ 区间上的函数

$$Q_n(x) = \frac{\sin[(n+1)\arccos x]}{2^n \sqrt{1-x^2}}$$

是一个首项(x^n 项)系数为 1 的 n 次多项式, 且它是 L_1 空间中唯一的最小零偏差多项式, 即

$$\int_{-1}^1 |Q_n(x)| dx \leq \int_{-1}^1 |P_n(x)| dx,$$

其中 $P_n(x)$ 取遍所有首项系数为 1 的 n 次多项式。

第三章 插值方法

插值方法是数值分析中很古老的一个分支,它有着悠久的历史.等距结点内插公式是由我国隋朝数学家刘焯(公元544—610年)首先提出的,而不等距结点内插公式是由唐朝数学家张遂(公元673—727年)提出的.这比西欧学者发表相应结果早一千多年.

插值方法在数值分析的许多分支(例如数值积分、数值微分、微分方程数值解、曲线曲面拟合、函数值近似计算等)均有应用.下面仅以近似计算函数值为例来说明.

设已知某个函数关系 $y=f(x)$ 的列表函数值:

x	x_0	x_1	...	x_n
y	y_0	y_1	...	y_n

而 $\bar{x} \neq x_i$ ($i = 0, 1, \dots, n$), 问应该如何估值 $\bar{y} = f(\bar{x})$? 对于函数关系 $y=f(x)$, 我们所知道的仅仅是上述的表列值, 它们常常是间接求得的, 例如是由实验(观测)得来的, 或者是从级数或微分方程求得的.

我们可以使用插值方法估值 \bar{y} . 插值方法的目的是寻求简单的连续函数 $\varphi(x)$, 使它在 $n+1$ 个点 x_0, x_1, \dots, x_n 处取给定值 $\varphi(x_i) = y_i = f(x_i)$ ($i = 0, 1, \dots, n$), 而在别处希望它也能近似地代表函数 $f(x)$. 因为 $\varphi(x)$ 已是有解析表达式的简单函数, 所以它在 $x = \bar{x}$ 处的值可以按表达式精确地计算出来. 这样, 我们就可以将 $\varphi(\bar{x})$ 看成 $\bar{y} = f(\bar{x})$ 的近似值了.

称给定点 x_0, x_1, \dots, x_n 为插值结点. 称函数 $\varphi(x)$ 为函数 $f(x)$ 的关于结点 x_0, x_1, \dots, x_n 的插值函数. 称 $y = f(x)$ 为被插函数.

严格地说, 插值方法一词只用于 \bar{x} 落在给定点 x_0, x_1, \dots, x_n 之间的情形, 所以也称为内插法. 如果 \bar{x} 落在 x_0, x_1, \dots, x_n 之外, 并且仍以插值函数 $\varphi(x)$ 在 \bar{x} 处的值近似地代替 $f(\bar{x})$, 则一般称这种近似计算函数值的方法为外插法.

本章我们只研究多项式插值, 亦即 $\varphi(x)$ 是 x 的多项式的情形. 这不仅仅因为多项式是最简单的函数, 而且因为在许多场合, 函数 $f(x)$ 容易用多项式近似地表示出来. 此外, 用多项式作插值函数可满意地解决一系列有应用价值的重要

问题,特别是数值积分与数值微分的问题.

本章将不论及三角多项式插值法.其实,只要理解了代数多项式插值方法的实质,读者就不难自行导出关于三角多项式插值方法的一系列相应于代数多项式插值方法的理论结果.

§1 Lagrange 插值多项式

设 $y = f(x)$ 是实变量 x 的单值函数,且已知 $f(x)$ 在给定的 $n+1$ 个互异点 x_0, x_1, \dots, x_n 处的值 y_0, y_1, \dots, y_n , 即

$$y_i = f(x_i), \quad i = 0, \dots, n.$$

插值的基本问题是,寻求多项式 $p(x)$,使得

$$p(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, n. \quad (1.1)$$

设 $p(x)$ 是一个 m 次多项式

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_m x^m, \quad a_m \neq 0,$$

则插值问题变为如何确定 $p(x)$ 中的系数 a_0, a_1, \dots, a_m , 使得(1.1)式得以满足. 所以该问题等价于去求解下述线性方程组:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \dots + a_m x_0^m = y_0, \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \dots + a_m x_1^m = y_1, \\ \cdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \dots + a_m x_n^m = y_n. \end{cases} \quad (1.2)$$

上述线性方程组的系数矩阵为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^m \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^m \end{bmatrix}.$$

它是一个 $(n+1) \times (m+1)$ 矩阵.

当 $m > n$ 时, \mathbf{A} 的列数大于行数. 不难证明矩阵 \mathbf{A} 的秩数为 $n+1$. 因为 \mathbf{A} 的前 $n+1$ 列所组成的行列式为(称为 Vandermonde 行列式)

$$W(x_0, \dots, x_{n-1}, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

我们有

$$W(x_0, \dots, x_{n-1}, x_n) = \prod_{j>i} (x_j - x_i). \quad (1.3)$$

为证(1.3), 考虑 n 次多项式

$$W(x_0, \dots, x_{n-1}, x) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^n \\ 1 & x & x^2 & \cdots & x^n \end{vmatrix}.$$

显然 x_0, \dots, x_{n-1} 均为它的零点, 且它的 x^n 系数恰为 $W(x_0, \dots, x_{n-1})$, 即

$$W(x_0, \dots, x_{n-1}, x) = W(x_0, \dots, x_{n-1})(x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}).$$

从而有下述递推关系式

$$W(x_0, \dots, x_{n-1}, x_n) = (x_n - x_0) \cdots (x_n - x_{n-1}) W(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}).$$

运用它即可证明(1.3)式.

根据(1.3)式, 并注意到诸 x_0, \dots, x_n 互异, 从而线性方程组(1.2)系数矩阵的秩为 $n+1$. 它表明(1.2)的解是不唯一的, 即插值问题(1.1)的解不唯一.

当 $m < n$ 时, 矩阵 A 的行数大于列数. 按照(1.3)式, 线性方程组(1.2)的每 $m+1$ 个方程组成的方程组均有唯一一组解 a_0, a_1, \dots, a_m . 但一般说来, 如此求出的各组 a_0, a_1, \dots, a_m 未必相同, 即此时(1.2)可能是矛盾方程组.

鉴于以上情形, 看来取 $m = n$ 是最适宜的. 现在我们重提多项式插值问题: 给定 $n+1$ 个互异点 x_0, x_1, \dots, x_n , 对任意给定的一组数 y_0, y_1, \dots, y_n , 是否恒存在唯一的 $p(x) \in P_n$, 使得如下插值条件被满足

$$p(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n? \quad (1.4)$$

该问题的答案是肯定的. 今采用构造性方法把所要求的多项式 $p(x)$ 求出来.

试设想, 如果可求出具有如下性质的特殊的插值多项式 $l_i(x) \in P_n$ ($i = 0,$

$1, \dots, n)$

$$l_i(x_j) = \begin{cases} 0, & j \neq i, j = 0, \dots, n, \\ 1, & j = i, \end{cases} \quad (1.5)$$

则多项式

$$p(x) = \sum_{i=0}^n y_i l_i(x) \quad (1.6)$$

必为满足(1.4)的多项式.但(1.5)中上面的等式指出 x_0, \dots, x_n 中除 x_i 外,均为 $l_i(x)$ 的零点.因此

$$l_i(x) = c(x - x_0) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n),$$

其中 c 为常数.但(1.5)中下面的等式指出

$$c = \frac{1}{(x_i - x_0) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)},$$

所以

$$l_i(x) = \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)}.$$

记 $\omega(x) = (x - x_0) \cdots (x - x_n)$, 则 $l_i(x)$ 又可表示为更简洁的形式:

$$l_i(x) = \frac{\omega(x)}{(x - x_i)\omega'(x_i)}.$$

总之 n 次多项式

$$p(x) = \sum_{i=0}^n y_i \frac{\omega(x)}{(x - x_i)\omega'(x_i)} \quad (1.7)$$

满足插值条件(1.4).

若 $q(x) \in P_n$ 也满足插值条件(1.4), 则 $\eta(x) = q(x) - p(x) \in P_n$ 必以 x_0, \dots, x_n 为零点, 即 $\eta(x_i) = 0, i = 0, \dots, n$. 这样一来, n 次多项式 $\eta(x)$ 竟然有 $n+1$ 个不同的零点. 是故 $q(x) \equiv p(x)$. 所以由(1.7)表示的 n 次多项式(严格地说, 是次数不超过 n 的多项式)是 P_n 中满足插值条件的唯一的多项式. 它常称作 Lagrange 插值多项式, 并记为

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \frac{\omega(x)}{(x - x_i)\omega'(x_i)}. \quad (1.8)$$

按前述推理可知 Lagrange 插值多项式 $L_n(x)$ 也可视为是从下面的行列式

方程中解出来的：

$$\begin{vmatrix} L_n(x) & 1 & x & x^2 & \cdots & x^n \\ y_0 & 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ y_1 & 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_n & 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = 0 \quad (1.9)$$

(请读者自行补证). 由(1.9)式表示的公式最便于推广到一般形式的插值问题. 由于篇幅所限, 此处不能详述.

由(1.1)所示的条件称为插值条件, 点组 x_0, x_1, \dots, x_n 称为插值结点. 上面所得到的结果可以从几何上解释为, 有且仅有一条 n 次代数曲线, 通过平面上事先给定的 $n+1$ 个点 (x_i, y_i) , $i=0, 1, \dots, n$, 其中 $x_i \neq x_j$ ($i \neq j$).

Lagrange 插值公式(1.8)具有结构清晰、紧凑的特点, 因而适合于作理论分析和应用.

例 1 已知 $f(-1)=2, f(1)=1, f(2)=1$. 求 $f(x)$ 的 Lagrange 插值多项式.

解 依公式, 有($x_0=-1, x_1=1, x_2=2$)

$$l_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{1}{6}(x^2 - 3x + 2),$$

$$l_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = -\frac{1}{2}(x^2 - x - 2),$$

$$l_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{1}{3}(x^2 - 1).$$

从而,

$$p_2(x) = \frac{1}{6}[2(x^2 - 3x + 2) - 3(x^2 - x - 2) + 2(x^2 - 1)] = \frac{1}{6}(x^2 - 3x + 8).$$

例 2 设 $f(x) = e^x$ 则 $f(-1) = 0.36787, f(1) = 2.71828, f(2) = 7.38906$. 依 Lagrange 插值公式, 有

$$e^x \approx p_2(x) = 1.16519x^2 + 1.17520x + 0.37788.$$

§ 2 Newton 插值多项式

Lagrange 插值多项式的缺点是, 当插值结点的个数有所变动时(例如, 为了

提高精度,有时需要增加插值结点的个数),Lagrange 因子 $l_i(x)(i=0,1,\cdots,n)$ 就会随之发生变化,从而整个公式的结构也会发生变化,这在计算中是不方便的.为了克服它的上述缺点,在这一节中我们引进 Newton 型的插值多项式.

显然, $n+1$ 个结点 x_0, x_1, \cdots, x_n 上的 n 次 Lagrange 插值多项式也可以唯一地写成下列形式:

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}).$$

下面,来确定上式中的 a_0, a_1, \cdots, a_n .

令 $p_{n-1}(x)$ 表示 n 个结点 $x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}$ 上的 $n-1$ 次 Lagrange 插值多项式,由于

$$p_n(x_i) = p_{n-1}(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, \cdots, n-1),$$

所以

$$p_n(x) - p_{n-1}(x) = c(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}),$$

此处 c 为常数.由条件 $p_n(x_n) = y_n$ 可以定出

$$c = \frac{y_n - p_{n-1}(x_n)}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)\cdots(x_n - x_{n-1})}.$$

又因

$$p_{n-1}(x_n) = \sum_{i=0}^{n-1} y_i l_i(x_n),$$

故又有

$$\begin{aligned} c &= \frac{y_n}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)\cdots(x_n - x_{n-1})} \\ &\quad + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{y_i}{(x_i - x_0)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)} \\ &= \sum_{i=0}^n y_i \left\{ \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq i}}^n (x_i - x_l) \right\}^{-1} \end{aligned}$$

引进记号

$$f(x_0, x_1, \cdots, x_n) = c = \sum_{i=0}^n y_i \left\{ \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq i}}^n (x_i - x_l) \right\}^{-1}, \quad (2.1)$$

得 $p_n(x)$ 与 $p_{n-1}(x)$ 之间的关系式:

$$p_n(x) = p_{n-1}(x) + f(x_0, x_1, \dots, x_n)(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}).$$

同理

$$p_{n-1}(x) = p_{n-2}(x) + f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-2}).$$

继续下去, 最终得到

$$\begin{aligned} p_n(x) &= f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + \cdots \\ &\quad + f(x_0, x_1, \dots, x_n)(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}). \end{aligned} \quad (2.2)$$

公式(2.2)就是 Newton 型插值多项式. 系数 $f(x_0), f(x_0, x_1), \dots, f(x_0, x_1, \dots, x_n)$ 由(2.1)式确定^①.

Newton 插值多项式的系数很不好记, 因此有必要另寻方法确定它们. 为此, 我们引进差商的概念, 并指出 Newton 插值多项式中各系数 $f(x_0, x_1, \dots, x_i)$ ($i = 1, \dots, n$) 即是 $f(x)$ 的 i 阶差商. 设已知不同的自变量 x_0, x_1, \dots, x_n 上的函数值 $f(x_i)$ ($i = 0, 1, \dots, n$), 称

$$f(x_i, x_j) = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j} \quad (i \neq j)$$

为 $f(x)$ 的一阶差商(或均差). 称一阶差商的一阶差商

$$f(x_i, x_j, x_k) = \frac{f(x_i, x_j) - f(x_j, x_k)}{x_i - x_k} \quad (i \neq k)$$

为 $f(x)$ 的二阶差商. 一般说来, 我们称 $n-1$ 阶差商的一阶差商

$$f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_0) = \frac{f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_1) - f(x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_0)}{x_n - x_0}$$

为函数 $f(x)$ 的 n 阶差商.

差商有以下诸性质:

- 若 $F(x) = cf(x)$, c 为常数, 则

$$F(x_n, x_{n-1}, \dots, x_0) = cf(x_n, x_{n-1}, \dots, x_0).$$

- 若 $F(x) = f(x) + g(x)$, 则

$$F(x_n, x_{n-1}, \dots, x_0) = f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_0) + g(x_n, x_{n-1}, \dots, x_0).$$

^① 当 $n=0$ 时, 规定 $\left\{ \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq i}}^n (x_i - x_l) \right\}^{-1} = 1$.

3. 若 $f(x) = x^m$, m 为自然数, 则

$$f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_0) = \begin{cases} 0, & n > m, \\ 1, & n = m, \\ \text{诸 } x_i \text{ 的 } m-n \text{ 次的齐次函数,} & n < m. \end{cases}$$

4. 差商 $f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_0)$ 是 x_0, x_1, \dots, x_n 的对称函数, 亦即当任意调换 x_0, x_1, \dots, x_n 的位置时, 差商的值不变. 例如

$$f(x_0, x_1, \dots, x_n) = f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_0) = f(x_n, x_0, \dots, x_{n-1}).$$

5. 差商可以表示成两行列式之商:

$$f(x_0, x_1, \dots, x_n) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^{n-1} & x_1^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \\ f(x_0) & f(x_1) & \cdots & f(x_n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}}.$$

性质 1 和性质 2 由定义可以直接推出. 现在我们证明性质 3. x^m 的一阶差商可根据定义直接计算出来:

$$f(x_1, x_0) = \frac{x_1^m - x_0^m}{x_1 - x_0} = x_1^{m-1} + x_1^{m-2}x_0 + \cdots + x_0^{m-1}.$$

如所见, 它是 x_1, x_0 的 $m-1$ 次齐次函数.

相继作出各阶差商并依完全归纳法, 可证实下列公式:

$$\begin{aligned} f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_0) &= \sum x_0^{r_0} x_1^{r_1} \cdots x_n^{r_n}, \\ r_n + r_{n-1} + \cdots + r_0 &= m - n. \end{aligned}$$

此处求和运算遍及所有可能的形如 $x_n^{r_n} x_{n-1}^{r_{n-1}} \cdots x_0^{r_0}$ 的 x_n, x_{n-1}, \dots, x_0 的 $m-n$ 次齐次项. 这样便证明了性质 3.

再来证明性质 4. 作出相继的各阶差商之后, 读者不难看出它们是由形如 $f(x_i) / \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq i}}^n (x_i - x_l)$ 的 $(n+1)$ 个项的和表示出来的. 由完全归纳法, 易求得 $f(x_0, x_1, \dots, x_n)$ 可由(2.1)式的右端表出. 使用前面的记号 $\omega(x) = (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdots (x - x_n)$, 也可将它写成

$$f(x_0, x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^n \frac{f(x_i)}{\omega'(x_i)}.$$

如此便证明了性质 4.

最后,用完全归纳法同样可以证明性质 5.

为了作数值计算,常利用形式如下的差商表:

x	$f(x)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商
x_0	$f(x_0)$			
x_1	$f(x_1)$	$\frac{f(x_0, x_1)}{f(x_1)}$		
x_2	$f(x_2)$	$\frac{f(x_1, x_2)}{f(x_2)}$	$\frac{f(x_0, x_1, x_2)}{f(x_1, x_2, x_3)}$	
x_3	$f(x_3)$	$f(x_2, x_3)$		$f(x_0, x_1, x_2, x_3)$

由性质 4 得知 Newton 插值多项式(2.2)中的系数 $f(x_0), f(x_0, x_1), \dots, f(x_0, x_1, \dots, x_n)$ 恰好就是已知函数 $f(x)$ 的 0 阶,1 阶,\dots,n 阶差商的值(在差商表中已分别用横线将它们标出).因此,当已知 $y_i = f(x_i)$ ($i = 0, 1, \dots, n$) 时,利用差商表可以很容易地算出 $f(x)$ 的各阶差商的值,而不必去记忆公式(2.1).

因为在 $(n+1)$ 个不同的点 x_0, x_1, \dots, x_n 上取给定值的次数不超过 n 的多项式是唯一的,所以次数相同的 Newton 插值多项式与 Lagrange 插值多项式是恒等的,它们的差异仅是书写形式不同而已.但是,这种差异却为计算带来了很大的方便.实际上,对于 Newton 插值多项式来说,当需要增加一个插值结点时,只需在原插值多项式的后面再添加一个新项就可以了.

例 1 已知列表函数:

x	2	3	5	6
y	5	2	3	4

求这个函数的插值多项式.

解 先造好下列的差商表:

x	y	一阶差商	二阶差商	三阶差商
2	$\frac{5}{2}$	$\frac{-3}{1}$	$\frac{7}{6}$	
3	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{4}$
5	3	1		
6	4			

然后从上表顶部对角线上取得的值 $f(x_0), f(x_0, x_1), f(x_0, x_1, x_2), f(x_0, x_1, x_2, x_3)$ 代入公式(2.2),便可得到要求的多项式:

$$p_3(x) = 5 - 3(x-2) + \frac{7}{6}(x-2)(x-3) - \frac{1}{4}(x-2)(x-3)(x-5).$$

§ 3 插值多项式余项

设 $p_n(x)$ 是在点 x_0, x_1, \dots, x_n 处关于 $f(x)$ 的插值多项式. 我们希望知道, 当 $x \neq x_k$ ($k=0, 1, \dots, n$) 时, $f(x)$ 与 $p_n(x)$ 的偏差. 所谓偏差, 意指此方法所固有的误差, 而忽略在计算 $p_n(x)$ 时造成的舍入误差. 通常, 舍入误差与在逼近中的固有误差相比是小的. 按习惯, 称

$$E(f; x) = f(x) - p_n(x)$$

为插值误差(或插值余项). 下面的定理给出了 $E(f; x)$ 的表达式.

定理 1 若 $f(x)$ 于包含着插值结点 x_0, x_1, \dots, x_n 的区间 $[a, b]$ 上 $n+1$ 次可微, 则对任意 $x \in [a, b]$, 存在与 x 有关的 ξ ($a < \xi < b$), 使得

$$E(f; x) = f(x) - p_n(x) = \frac{\omega(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \quad (3.1)$$

其中 $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$.

证明 今取一点 $x \in [a, b]$, 显然当 $x = x_0, x_1, \dots, x_n$ 时, (3.1) 式是自然满足的. 以下设 x 不是插值结点 x_0, x_1, \dots, x_n , 作辅助函数

$$F(z) = f(z) - p_n(z) - \frac{\omega(z)}{\omega(x)} (f(x) - p_n(x)). \quad (3.2)$$

显然 $F(z)$ 于 $[a, b]$ 上 $n+1$ 次可微, 并且 $F(x) = 0, F(x_j) = 0$ ($j=0, 1, \dots, n$). 因为 x, x_0, x_1, \dots, x_n 各不相同, 由 Rolle 定理知 $F'(z)$ 于 (a, b) 内至少有 $n+1$ 个不同的根. 同理, 再依 Rolle 定理, $F''(z)$ 于 (a, b) 内至少有 n 个不同的根. 依次类推, 最后知 $F^{(n+1)}(z)$ 于 (a, b) 内至少有一个根 ξ , 亦即由(3.2)式应有

$$F^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - \frac{(n+1)!}{\omega(x)} (f(x) - p_n(x)) = 0.$$

由此, 便得到了公式(3.1). 证毕.

通常我们并不知道(3.1)式中的 ξ (一旦知道了 ξ , 就知道了精确的误差), 尽管如此, 我们还是能从(3.1)式得到有用的信息. 例如, 若 $f^{(n+1)}(x)$ 在 $[a, b]$ 上有上界 M_{n+1} , 亦即

$$M_{n+1} = \sup_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)|,$$

则由(3.1)式立刻得到

$$|E(f; x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)|, a \leq x \leq b. \quad (3.3)$$

设已知 $\bar{y}_j = f(\bar{x}_j)$ ($j=0, 1, \dots, m$), 并且 $m \gg n+1$. 如所知, 为了构造一个 n 次插值多项式, 只需要 $n+1$ 个插值结点. 因此自然提出这样的问题: 在所有的已知点 (\bar{x}_j, \bar{y}_j) ($j=0, 1, \dots, m$) 的横坐标 $\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m$ ($\bar{x}_i \neq \bar{x}_j, i \neq j$) 中, 如何选取插值结点 x_0, x_1, \dots, x_n , 方能使得 $|E(f; x)|$ 为最小? 由(3.1)式知应取 x_0, x_1, \dots, x_n , 使得

$$|\omega(x)| = |x - x_0| |x - x_1| \cdots |x - x_n| = \min. \quad (3.4)$$

为此, 只需从 $\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m$ 中选择使差

$$|x - \bar{x}_j| \quad (j=0, 1, \dots, m)$$

取最小值的 \bar{x}_j 作为第一个插值结点 x_0 . 然后, 在剩下的 m 个点中再选择使得 $|x - \bar{x}_j|$ 为最小的点作为第二个插值结点 x_1 . 如此等等, 直到选出 x_n 为止. 显然, 这样选取的 x_0, x_1, \dots, x_n 满足(3.4)的要求.

关于在整个插值区间上的余项极小化问题, 与第二章中 Tchebyshev 最小零偏差多项式直接相关. 事实上, 由(3.3)式, 为使插值余项在整个区间上尽可能小的“最佳”插值结点组, 应该取为该区间上最小零偏差多项式的零点.

以下给出插值余项的 Peano 估计. 它是意大利数学家 G. Peano 在 1913 年给出的.

令 $[a, b]$ 是有限区间, $m \geq 1$ 是整数. 若 $f(x), f^{(1)}(x), \dots, f^{(m-1)}(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 而 $f^{(m)}(x)$ 在 $[a, b]$ 上分段连续且 $|f^{(m)}(x)| \leq M_m$, 则说函数 $f(x)$ 属于函数类 $W^m(M_m; a, b)$.

例 1 令 $f(x) = |x|$, $[a, b] = [-1, 1]$. 容易验证 $f(x) \in W^1(1; -1, 1)$.

例 2 令 $[a, b] = [-1, 1]$ 及

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2, & x \geq 0, \\ -3x^2, & x \leq 0, \end{cases}$$

则

$$f^{(1)}(x) = \begin{cases} 6x, & x \geq 0, \\ -6x, & x \leq 0; \end{cases}$$

$$f^{(2)}(x) = \begin{cases} 6, & x > 0, \\ -6, & x < 0. \end{cases}$$

因此, $f(x) \in W^1(6; -1, 1)$, 同时 $f(x) \in W^2(6; -1, 1)$.

令 x 和 t 是实数, $k \geq 0$ 是整数. 两个变量 x 和 t 的函数 $(x-t)_+^k$ 定义如下:

$$(x-t)_+^k = \begin{cases} (x-t)^k, & x \geq t, \\ 0, & x < t. \end{cases} \quad (3.5)$$

若 t 为固定常数, 则 $(x-t)_+^k$ 就是 x 的截断多项式. 对于 $k=0, 1, 2$, 截断多项式的图形如下(图 3.1):

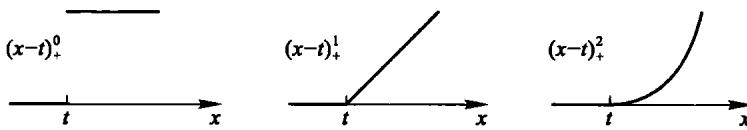


图 3.1

当 x 固定时, $(x-t)_+^k$ 是 t 的函数, 请读者绘出它的图形($k=0, 1, 2$).

我们用 $[a, b]$ 来记包含着点 $\alpha, x_0, x_1, \dots, x_n$ 的最小区间. $E(f; \alpha)$ 仍表插值误差, 亦即 $|E(f; \alpha)| = |f(\alpha) - p_n(\alpha)|$, 其中 $p_n(x)$ 为函数 $f(x)$ 在结点 x_0, x_1, \dots, x_n 上的 n 次插值多项式.

定理 2 设 m 是正整数($1 \leq m \leq n+1$), 则当 $f(x) \in W^m(M_m; a, b)$ 时, 存在一个仅依赖于 $m, \alpha, x_0, x_1, \dots, x_n$ 的函数 $K_m(t)$:

$$\begin{aligned} K_m(t) &= \frac{1}{(m-1)!} E((x-t)_+^{m-1}; \alpha) \\ &= \frac{1}{(m-1)!} \left((\alpha-t)_+^{m-1} - \sum_{k=0}^n l_k(\alpha) (x_k-t)_+^{m-1} \right), \end{aligned} \quad (3.6)$$

使得

$$E(f; \alpha) = \int_a^b K_m(t) f^{(m)}(t) dt. \quad (3.7)$$

证明 依假设条件, 可以将 $f(x)$ 展成 Taylor 级数:

$$f(x) = Q_{m-1}(x) + R_m(x),$$

其中

$$Q_{m-1}(x) = f(\alpha) + (x-\alpha)f'(\alpha) + \dots + \frac{(x-\alpha)^{m-1}}{(m-1)!} f^{(m-1)}(\alpha),$$

$$R_m(x) = \frac{1}{(m-1)!} \int_a^b (x-t)_+^{m-1} f^{(m)}(t) dt.$$

显然,

$$E(f; \alpha) = E(Q_{m-1} + R_m; \alpha) = E(Q_{m-1}; \alpha) + E(R_m; \alpha).$$

由于当 $f(x)$ 是次数 $\leq n$ 的多项式时插值是精确的, 所以 $E(Q_{m-1}; \alpha) = 0$, 因此

$$E(f; \alpha) = E(R_m; \alpha). \quad (3.8)$$

现在, 我们写出 $E(R_m; \alpha)$:

$$\begin{aligned} E(R_m; \alpha) &= \frac{1}{(m-1)!} \int_a^b (\alpha - t)^{m-1} f^{(m)}(t) dt \\ &\quad - \frac{1}{(m-1)!} \sum_{k=0}^n l_k(\alpha) \int_a^b (x_k - t)^{m-1} f^{(m)}(t) dt. \end{aligned}$$

把上式中的积分合并, 并依公式(3.6)和(3.8), 即得(3.7). 证毕.

定理 2 也称为关于插值公式的核定理. 函数 $K_m(t)$ 称为 Peano 核. 显然, $K_m(t)$ 只依赖于 $m, \alpha, x_0, x_1, \dots, x_n$, 而不依赖于 $f(x)$.

利用方程(3.7), 可以估计插值误差的界. 例如, 有下面的定理.

定理 3 设 m 是一正整数 ($1 \leq m \leq n+1$), $f(x) \in W^m(M_m; a, b)$, 则

$$|E(f; \alpha)| \leq e_m M_m, \quad (3.9)$$

其中

$$e_m = \int_a^b |K_m(t)| dt. \quad (3.10)$$

证明 由于 $f(x) \in W^m(M_m; a, b)$, 所以

$$\begin{aligned} |E(f; \alpha)| &= \left| \int_a^b K_m(t) f^{(m)}(t) dt \right| \\ &\leq \int_a^b |K_m(t)| |f^{(m)}(t)| dt \\ &\leq \int_a^b |K_m(t)| M_m(t) dt = M_m e_m. \end{aligned}$$

证毕.

自然会问, 估计式(3.9)中的常数 e_m 能不能用较小的常数代替? 结论由下面的定理给出.

定理 4 设 m 是一正整数 ($1 \leq m \leq n+1$), e_m 由公式(3.10)给出, 则有函数 $f_0(x) \in W^m(M_m; a, b)$, 使得

$$|E(f_0; \alpha)| = e_m M_m.$$

证明 令

$$f_0^{(m)}(x) = \begin{cases} M_m, & \text{当 } K_m(x) \geq 0 \text{ 时}, \\ -M_m, & \text{当 } K_m(x) < 0 \text{ 时}. \end{cases} \quad (3.11)$$

于是,通过对 $f_0^{(m)}(x)$ 的 m 次不定积分运算,即可求出 $f_0(x)$ (自然,它含有 m 个任意的积分常数).依(3.11)式,

$$K_m(t)f_0^{(m)}(t) = |K_m(t)f_0^{(m)}(t)| = M_m|K_m(t)|,$$

从而

$$\begin{aligned} |E(f_0; \alpha)| &= \left| \int_a^b K_m(t)f_0^{(m)}(t)dt \right| \\ &= M_m \int_a^b |K_m(t)| dt = e_m M_m. \end{aligned}$$

证毕.

由(3.3)式所给出的估计式

$$|E(f; \alpha)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |(\alpha - x_0)(\alpha - x_1) \cdots (\alpha - x_n)|$$

与估计式(3.9)是一致的(取 $m = n + 1$).

定理 5 由(3.3)式与(3.9)式给出的插值误差的界是恒等的,换言之

$$\int_a^b |K_{n+1}(t)| dt = \frac{1}{(n+1)!} |(\alpha - x_0)(\alpha - x_1) \cdots (\alpha - x_n)|. \quad (3.12)$$

这个定理的证明基于以下三个引理.

引理 1 当 $1 \leq m < n + 1$ 时,核函数 $K_m(t)$ 在 $[a, b]$ 上至少改变一次符号.

证明 考虑多项式 $Q_m(x) = x^m / m!$. 若 $m < n + 1$, 则 $E(Q_m; \alpha) = 0$. 但是

$$E(Q_m; \alpha) = \int_a^b K_m(t) Q_m^{(m)}(t) dt = \int_a^b K_m(t) dt,$$

从而

$$\int_a^b K_m(t) dt = 0,$$

又由于 $K_m(t) \neq 0$, 因此 $K_m(t)$ 至少在 $[a, b]$ 上改变一次符号. 证毕.

引理 2 如果 $K_{m-1}(t)$ 在 $[a, b]$ 上改变 k 次符号, 则 $K_m(t)$ 在 $[a, b]$ 上至多改变 $k - 1$ 次符号.

证明 依(3.6)式,

$$K_m(a) = K_m(b) = 0 \quad (m = 2, \dots, n + 1).$$

另一方面,不难看出 $K_m(t)$ 是 $K_{m-1}(t)$ 的不定积分(取负号).由此推出,若 $K_{m-1}(t)$ 在 t_1, t_2, \dots, t_k ($a < t_1 < t_2 < \dots < t_k < b$) 处改变符号,则 $K_m(t)$ 在 $[t_i, t_{i+1}]$ ($i=1, 2, \dots, k-1$) 上最多改变一次符号.

引理 3 当 $1 \leq m \leq n+1$ 时, $K_m(t)$ 在 $[a, b]$ 上恰好改变 $n-m+1$ 次符号(从而, $K_{n+1}(t)$ 在 $[a, b]$ 上不变号).

证明 我们知道, $K_m(t)$ 是 $m-1$ 阶分段多项式, 特别, $K_1(t)$ 分段是常数. $K_1(t)$ 在点 $x_0, x_1, \dots, x_n, \alpha$ 处有跳跃. 因为这些点中有两个是 $[a, b]$ 的两端点, 所以 $K_1(t)$ 的符号在 $[a, b]$ 上最多改变 n 次. 如果 $K_1(t)$ 的变号次数小于 n , 或者如果对于任何 $m \leq n-1$, $K_m(t)$ 的变号次数小于 $n-m+1$, 则依引理 2, $K_n(t)$ 不变号. 但是, 依引理 1 这是不可能的, 于是 $K_m(t)$ 恰好改变符号 $n-m+1$ 次.

定理 5 的证明 考虑函数 $Q_{n+1}(x) = x^{n+1}/(n+1)!$. 由于 $Q_{n+1}^{(n+1)}(x) = 1$, 所以

$$|E(Q_{n+1}; \alpha)| = \frac{1}{(n+1)!} |(\alpha - x_0)(\alpha - x_1) \cdots (\alpha - x_n)|.$$

但是, 依(3.7)式又有

$$|E(Q_{n+1}; \alpha)| = \left| \int_a^b K_{n+1}(t) dt \right|.$$

由于 $K_{n+1}(t)$ 不变号, 故

$$\left| \int_a^b K_{n+1}(t) dt \right| = \int_a^b |K_{n+1}(t)| dt.$$

综合之, 即得(3.12)式. 证毕.

§ 4 有限差分计算

这一节介绍有限差分的概念. 设已知函数 $f(x)$ 在一串等距结点 $x_0 + jh$ ($j=0, 1, \dots, n, \dots$) 上的值 $f(x_0), f(x_0 + h), \dots, f(x_0 + nh), \dots$. 定义表达式

$$\Delta f(x_0 + jh) = f(x_0 + (j+1)h) - f(x_0 + jh)$$

为 $f(x)$ 在点 $x_0 + jh$ 处的 1 阶有限差分, 或简称 1 阶差分. 1 阶差分的 1 阶差分叫 2 阶差分, 记为

$$\Delta^2 f(x_0 + jh) = \Delta f(x_0 + (j+1)h) - \Delta f(x_0 + jh).$$

一般说来, n 阶差分定义为 $n-1$ 阶差分的 1 阶差分:

$$\Delta^n f(x_0 + jh) = \Delta^{n-1} f(x_0 + (j+1)h) - \Delta^{n-1} f(x_0 + jh).$$

例如

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0),$$

$$\Delta^2 f(x_0) = \Delta f(x_0 + h) - \Delta f(x_0),$$

$$\Delta^3 f(x_0) = \Delta^2 f(x_0 + h) - \Delta^2 f(x_0),$$

.....

按定义可知符号 Δ 满足指数律：

$$\Delta^p \Delta^q f(x_0) = \Delta^{p+q} f(x_0),$$

其中 p, q 是正整数.

有限差分的理论是微分学的原始形式. 在历史上, 微分学正是由有限差分的理论产生的, 所以差分与微分有着极其相似的性质. 兹列举如下:

1. 常数的差分等于零, 亦即若 $f(x) \equiv c$, 则

$$\Delta f(x) = f(x + h) - f(x) = c - c = 0.$$

2. 常数因子可以提到差分号外, 亦即若 k 为常数, 则有

$$\Delta k f(x) = k f(x + h) - k f(x) = k(f(x + h) - f(x)) = k \Delta f(x).$$

3. 如果当 $x = x_0 + jh$ ($j = 0, 1, \dots, n$) 时,

$$f(x) = \sum_{i=1}^k c_i \varphi_i(x),$$

其中 c_i 是一些常数, 则用归纳法可以证明

$$\Delta^n f(x_0) = \sum_{i=1}^k c_i \Delta^n \varphi_i(x_0).$$

4. 如果当 $x = x_0 + jh$ ($j = 0, 1, \dots, n$) 时, $f(x) = \varphi(x)\psi(x)$, 则

$$\Delta^n f(x_0) = \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} \Delta^\nu \varphi(x_0) \Delta^{n-\nu} \psi(x_0 + \nu h).$$

用归纳法可以证明上述结论.

5. 设 $p_n(x)$ 为 n 次多项式(最高次项的系数为 a_n), 则当 $k < n$ 时, $p_n(x)$ 在 x_0 处的 k 阶差分为 x_0 的 $n - k$ 次多项式; 当 $k = n$ 时, 是常数, 即 $\Delta^n p_n(x) = a_n h^n n!$; 当 $k > n$ 时为零.

不失一般性, 读者可以仅就 $p_n(x) = x^n$ 的情形, 用归纳法证明这一结论.

6. 设已知 $f(x_0 + jh)$ ($j = 0, 1, \dots, n$) 的值, 用逐次代入法容易证明, 计算差

分有以下公式：

$$\begin{aligned}
 \Delta f(x_0) &= f(x_0 + h) - f(x_0), \\
 \Delta^2 f(x_0) &= \Delta f(x_0 + h) - \Delta f(x_0) \\
 &= f(x_0 + 2h) - 2f(x_0 + h) + f(x_0), \\
 &\dots \\
 \Delta^n f(x_0) &= \Delta^{n-1} f(x_0 + h) - \Delta^{n-1} f(x_0) \\
 &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} f(x_0 + (n-i)h). \tag{4.1}
 \end{aligned}$$

按相似的方法，对(4.1)型方程用逐次消元法，得到

$$f(x_0 + nh) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \Delta^i f(x_0). \tag{4.2}$$

实际计算差分时，常用如下表格（差分表）：

x	Δ	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$...
x_0		y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$			
x_1		y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_0$		
x_2		y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_1$	$\Delta^4 y_0$	
x_3		y_3	Δy_3				
x_4		y_4					

下面的定理揭示了函数的差商、差分和导数之间的关系。

定理 6 设函数 $y = f(x)$ 在包含结点 $x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+k}$ 的区间 (a, b) 上为 k 次可微函数，则

$$f(x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+k}) = \frac{\Delta^k y_j}{k!} h^k, \tag{4.3}$$

$$f(x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+k}) = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}, \tag{4.4}$$

$$\frac{\Delta^k y_j}{h^k} = f^{(k)}(\xi). \tag{4.5}$$

此处

$$\min\{x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+k}\} < \xi < \max\{x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+k}\}.$$

证明 首先，用归纳法容易证明(4.3)式。现在证明(4.4)式。令 $p_k(x)$ 表示 $f(x)$ 在结点 $x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+k}$ 上的 k 次插值多项式。因为插值余项 $R(x) =$

$f(x) - p_k(x)$ 在 $x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+k}$ 处为零, 类似于定理 1 的证明知有某 ξ ($\min\{x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+k}\} < \xi < \max\{x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+k}\}$), 使得

$$R^{(k)}(\xi) = f^{(k)}(\xi) - p_k^{(k)}(\xi) = 0.$$

另一方面, 由 Newton 插值多项式知道

$$p_k^{(k)}(\xi) = k! f(x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+k}).$$

联合以上两式可得(4.4)式. 最后, 由(4.3)与(4.4)式即可导出(4.5)式. 证毕.

熟知, k 次多项式的 $k+1$ 阶导数等于零, 因此它的 $k+1$ 阶差分也等于零. 这个性质使得我们可以借助差分表的性质来确定所需的插值多项式的次数. 例如, 当发现函数的第 k 阶差分为常数或近似为常数时, 则用 k 次多项式去作插值多项式就会有较好的结果.

上面介绍的差分叫向前差分. 鉴于计算实践的需要, 我们再介绍向后差分和中心差分的概念.

设 $y_j = f(x_0 - jh)$ ($j = 0, 1, \dots, n$) 为已知, 则分别定义

$$\begin{aligned}\nabla f(x_0) &= f(x_0) - f(x_0 - h), \\ \nabla^2 f(x_0) &= \nabla f(x_0) - \nabla f(x_0 - h), \\ &\dots\dots\dots \\ \nabla^n f(x_0) &= \nabla^{n-1} f(x_0) - \nabla^{n-1} f(x_0 - h)\end{aligned}$$

为 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的向后 1 阶, 2 阶, \dots , n 阶差分.

由向后差分定义, 容易验证

$$\begin{aligned}\nabla f(x_k) &= f(x_k) - f(x_{k-1}) = hf(x_k, x_{k-1}), \\ \nabla^2 f(x_k) &= \nabla f(x_k) - \nabla f(x_{k-1}) \\ &= hf(x_k, x_{k-1}) - hf(x_{k-1}, x_{k-2}) \\ &= 2h^2 f(x_k, x_{k-1}, x_{k-2}), \\ &\dots\dots\dots \\ \nabla^n f(x_k) &= n! h^n f(x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k-n}).\end{aligned}$$

在实际计算向后差分时, 我们常采用向后差分表:

x_{n-3}	f_{n-3}	∇f_{n-2}	$\nabla^2 f_{n-1}$	$\nabla^3 f_n$
x_{n-2}	f_{n-2}	∇f_{n-1}	$\nabla^2 f_n$	
x_{n-1}	f_{n-1}	∇f_n		
x_n	f_n			

由方程 $\delta f(x_0) = f\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) - f\left(x_0 - \frac{h}{2}\right)$ 定义的差分叫做一阶中心差分.
类似地,称

$$\delta^n f(x_0) = \delta^{n-1} f\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) - \delta^{n-1} f\left(x_0 - \frac{h}{2}\right)$$

为 n 阶中心差分. 容易验证 $\left(f_{\frac{1}{2}} = f\left(x_0 + \frac{h}{2}\right)\right)$, 余类推

$$\delta f_{\frac{1}{2}} = f_1 - f_0 = hf(x_0, x_1),$$

$$\delta f_{-\frac{1}{2}} = f_0 - f_{-1} = hf(x_0, x_{-1}),$$

$$\delta^2 f_1 = \delta f_{1+\frac{1}{2}} - \delta f_{1-\frac{1}{2}} = (f_2 - f_1) - (f_1 - f_0)$$

$$= h(f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1))$$

$$= 2h^2 f(x_0, x_1, x_2),$$

.....

$$\delta^{2m+1} f_{k+\frac{1}{2}} = h^{2m+1} (2m+1)! f(x_{k-m}, \dots, x_k, \dots, x_{k+m}, x_{k+m+1}),$$

$$\delta^{2m+1} f_{k-\frac{1}{2}} = h^{2m+1} (2m+1)! f(x_{k-m-1}, \dots, x_k, \dots, x_{k+m}),$$

$$\delta^{2m} f_k = h^{2m} (2m)! f(x_{k-m}, \dots, x_k, \dots, x_{k+m}).$$

可以利用下表计算中心差分:

x_{-2}	f_{-2}				
x_{-1}	f_{-1}	$\delta f_{-3/2}$			
x_0	f_0	$\delta f_{-1/2}$	$\delta^2 f_{-1}$	$\delta^3 f_{-1/2}$	$\delta^4 f_0$
x_1	f_1	$\delta f_{1/2}$	$\delta^2 f_0$	$\delta^3 f_{1/2}$	
x_2	f_2	$\delta f_{3/2}$	$\delta^2 f_1$		

三种差分间有下列关系:

$$(1) \nabla^k f_0 = \Delta^k f_{-k},$$

$$(2) \delta^{2k} f_0 = \Delta^{2k} f_{-k},$$

$$(3) \delta^{2k+1} f_{1/2} = \Delta^{2k+1} f_{-k}.$$

今定义位移算子 E 为

$$Ef(x) = f(x + h),$$

其中 h 为步长. 单位算子(恒等算子) I 定义为

$$If(x) = f(x),$$

即 $I = \Delta^0, \nabla^0$ 和 δ^0 . 诸多算子间有以下关系式成立:

$$\Delta = E - I, \quad \text{即 } E = I + \Delta,$$

$$\nabla = I - E^{-1}, \quad \text{即 } E = (I - \nabla)^{-1},$$

$$\delta = E^{1/2} - E^{-1/2}.$$

鉴于对足够光滑的 $f(x)$, 有

$$\begin{aligned} Ef(x) &= f(x + h) \\ &= \left[1 + h \left(\frac{d}{dx} \right) + \frac{1}{2!} \left(h \frac{d}{dx} \right)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} \left(h \frac{d}{dx} \right)^n + \cdots \right] f(x) \\ &= e^{h \frac{d}{dx}} f(x), \end{aligned}$$

所以

$$E = e^D, \quad D \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{dx},$$

$$D = \ln E = \ln(I + \Delta).$$

由此不难看出, $\ln(I + \Delta)$ 的任一近似计算公式都可派生出一个相应的数值微分公式(至于误差则要作具体分析). 这表明对数函数和指数函数的近似计算问题具有十分重要的意义. 因为由此我们可以“发现”新的数值微分和数值积分公式.

应该指出的是, 这里介绍的观点可以用来“发现”一些新的数值微分与数值积分公式, 但不能作为严格的手段来运用. 事实上, 人们在“发现”了新的公式之后, 还应该用严密的推理来论证它们. 只有这样, 才是周全的.

§ 5 等距结点上的插值公式

对于给定的等距结点的数据, 我们可以灵活地运用插值余项极小化原则, 给出适应具体需要的插值公式. 一般说来, 在左端点 $x = x_0$ 附近进行插值, 宜用 Newton 向前插值多项式; 在右端点 $x = x_n$ 附近插值, 宜用 Newton 向后插值多项式. 如果在插值区间中间进行插值, 宜用带中心差分的插值多项式. 下面分别予以简要介绍.

5.1 Newton 向前插值多项式

设已知 $y_i = f(x_0 + ih)$ ($i = 0, 1, \dots, N$), 需求于

$$x = x_0 + th \quad \left(0 \leq t \leq \frac{1}{2}\right)$$

处 $f(x)$ 的近似值. 按余项极小化原则, 插值结点应取 x_0, x_1, \dots, x_n ($n \leq N$). 注意差商与差分的关系, 由 Newton 插值多项式, 得到

$$\begin{aligned} f(x) &= y_0 + \frac{t}{1!} \Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \dots \\ &\quad + \frac{t(t-1)\cdots(t-n+1)}{n!} \Delta^n y_0 + E(f; x), \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} E(f; x) &= h^{n+1} \frac{t(t-1)\cdots(t-n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \\ x_0 < \xi < x_0 + nh. \end{aligned}$$

通常, 称该公式为 Newton 向前插值多项式.

5.2 Newton 向后插值多项式

设 $x = x_n + th$, 由插值公式(2.2), 可得 Newton 向后插值多项式:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_n + th) \\ &= y_n + \frac{t}{1!} \nabla y_n + \frac{t(t+1)}{2!} \nabla^2 y_n \\ &\quad + \dots + \frac{t(t+1)\cdots(t+n-1)}{n!} \nabla^n y_n + E(f; x), \end{aligned}$$

此处

$$E(f; x) = h^{n+1} \frac{t(t+1)\cdots(t+n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi),$$

其中 ξ 在诸 x_i 与 x 之间.

该公式适用于计算函数在最后一个结点附近的近似值(内插或外推).

5.3 Gauss 插值公式

现在我们引进带中心差分的插值公式. 在插值公式(2.2)中, 用结点列

$$x_0, \quad x_1 = x_0 + h, \quad x_{-1} = x_0 - h, \quad x_2 = x_0 + 2h, \quad x_{-2} = x_0 - 2h, \quad \dots$$

替代结点列 $x_0, x_0 + h, x_0 + 2h, \dots$ 得到

$$\begin{aligned} f(x) &= f_0 + (x - x_0) \frac{\delta f_{\frac{1}{2}}}{1! h^2} + (x - x_0)(x - x_1) \frac{\delta^2 f_0}{2! h^2} \\ &\quad + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_{-1}) \frac{\delta^3 f_{\frac{1}{2}}}{3! h^3} \\ &\quad + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_{-1})(x - x_2) \frac{\delta^4 f_0}{4! h^4} + \dots \end{aligned}$$

若设 $x = x_0 + th, n = 2m$ (或 $2m+1$), 则有

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0 + th) \\ &= f_0 + t \delta f_{\frac{1}{2}} + \frac{t(t-1)}{2!} \delta^2 f_0 + \frac{t(t^2-1)}{3!} \delta^3 f_{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \frac{t(t^2-1)(t-2)}{4!} \delta^4 f_0 + \dots \\ &\quad + \frac{t(t^2-1)(t^2-2^2)\cdots(t^2-(m-1)^2)(t-m)}{(2m)!} \delta^{2m} f_0 \quad (5.1) \\ &\quad \left(\text{或} + \frac{t(t^2-1)(t^2-2^2)\cdots(t^2-m^2)}{(2m+1)!} \delta^{2m+1} f_{\frac{1}{2}} \right) + E(f; x). \end{aligned}$$

在(5.1)式中, 当 $n=2m$ 时, 取至偶数阶差分 δ^{2m} ; 当 $n=2m+1$ 时, 取至奇数阶差分 δ^{2m+1} .

插值余项为: 当 $n=2m$ 时,

$$E(f; x) = h^{2m+1} \frac{t(t^2-1)\cdots(t^2-m^2)}{(2m+1)!} f^{(2m+1)}(\xi); \quad (5.2)$$

当 $n=2m+1$ 时,

$$E(f; x) = h^{2m+2} \frac{t(t^2-1)\cdots(t^2-m^2)(t-m-1)}{(2m+2)!} f^{(2m+2)}(\xi).$$

通常, 称上述公式为 Gauss 向前公式. 在公式(2.2)中, 若用结点列

$$x_0, \quad x_{-1}=x_0-h, \quad x_1=x_0+h, \quad x_{-2}=x_0-2h, \quad x_2=x_0+2h, \quad \dots$$

替代结点列 x_0, x_1, x_2, \dots 时, 得到的是 Gauss 向后公式:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0 + th) \\ &= f_0 + t \delta f_{-\frac{1}{2}} + \frac{t(t+1)}{2!} \delta^2 f_0 \\ &\quad + \frac{t(t^2-1)}{3!} \delta^3 f_{-\frac{1}{2}} + \frac{t(t^2-1)(t+2)}{4!} \delta^4 f_0 + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{t^2(t^2-1)\cdots(t^2-(m-1)^2)(t+m)}{(2m)!} \delta^{2m} f_0 \\
 & \left(\text{或} + \frac{t(t^2-1)\cdots(t^2-m^2)}{(2m+1)!} \delta^{2m+1} f_{-\frac{1}{2}} \right) + E(f; x).
 \end{aligned} \quad (5.3)$$

在公式(5.3)和(5.1)中,“或”的意义相同. $E(f; x)$ 是余项,并且当 $n=2m$ 时,它由(5.2)给出,而当 $n=2m+1$ 时,

$$E(f; x) = h^{2m+2} \frac{t(t^2-1)\cdots(t^2-m^2)(t+m+1)}{(2m+2)!} f^{(2m+2)}(\xi).$$

§ 6 Hermite 插值多项式

为了理论和应用上的需要,本节讨论一类具有重结点的多项式插值方法,即 Hermite 插值方法.因为此类插值问题要求在结点处满足相应的导数条件,所以它也常被称为切触插值问题.

设

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_s, \quad (6.1)$$

$y_k^{(h)}$ ($h=0, \dots, \alpha_k - 1; k=1, \dots, s$) 为事先指定的实数,其中 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 为正整数:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_s = n + 1, \quad \alpha_k \geq 1 \quad (k=1, \dots, s). \quad (6.2)$$

今欲构造一个 n 次多项式 $p(x) \in P_n$,使之满足插值条件:

$$p^{(h)}(x_k) = y_k^{(h)} \quad (h=0, \dots, \alpha_k - 1; k=1, \dots, s). \quad (6.3)$$

为解决插值问题(6.3),最直接的方法是采用待定系数法,或者求解由(6.3)所确定的线性方程组.

此处我们采用构造基本多项式的办法来解决 Hermite 插值问题(6.3).构造一批 n 次多项式

$$L_{ik}(x) \quad (i=1, \dots, s; k=0, \dots, \alpha_i - 1),$$

使之满足

$$L_{ik}^{(h)}(x_m) = 0 \quad (m \neq i; h=0, \dots, \alpha_m - 1) \quad (6.4)$$

和

$$L_{ik}^{(h)}(x_i) = \begin{cases} 0, & \text{当 } h \neq k \\ 1, & \text{当 } h = k \end{cases}, \quad (h=0, \dots, \alpha_i - 1). \quad (6.5)$$

显然,只要上述问题一解决,则 n 次多项式

$$p(x) = \sum_{i=1}^s \sum_{h=0}^{a_i-1} y_i^{(h)} L_{ih}(x) \quad (6.6)$$

就必满足插值条件(6.3).

以下集中来构造 $L_{ik}(x)$. 由(6.4)和(6.5),可知

$$L_{ik}(x)$$

$$= (x - x_1)^{\alpha_1} \cdots (x - x_{i-1})^{\alpha_{i-1}} (x - x_i)^k (x - x_{i+1})^{\alpha_{i+1}} \cdots (x - x_s)^{\alpha_s} l_{ik}(x),$$

其中 $l_{ik}(x) \in P_{\alpha_i - k - 1}$ 是某 $\alpha_i - k - 1$ 次多项式. 若令

$$\omega(x) = (x - x_1)^{\alpha_1} \cdots (x - x_s)^{\alpha_s},$$

则上式可缩写为

$$L_{ik}(x) = \frac{\omega(x)}{(x - x_i)^{\alpha_i - k}} l_{ik}(x). \quad (6.7)$$

为确定 $l_{ik}(x)$ 还需利用条件(6.5)和 Taylor 展开, 可得

$$L_{ik}(x) = \frac{(x - x_i)^k}{k!} (1 + \sigma(x - x_i)^{\alpha_i - k} + \cdots). \quad (6.8)$$

比较(6.7)与(6.8),有

$$l_{ik}(x) = \frac{1}{k!} \frac{(x - x_i)^{\alpha_i}}{\omega(x)} + \sigma'(x - x_i)^{\alpha_i - k} + \cdots,$$

其中 σ 与 σ' 为确定的常数, $l_{ik}(x) \in P_{\alpha_i - k - 1}$, 所以它必定是函数 $\frac{1}{k!} \frac{(x - x_i)^{\alpha_i}}{\omega(x)}$ 在 $x = x_i$ 处 Taylor 展开的前 $\alpha_i - k$ 项和. 若把这 $\alpha_i - k$ 项和记为

$$l_{ik}(x) = \frac{1}{k!} \left\{ \frac{(x - x_i)^{\alpha_i}}{\omega(x)} \right\}_{(x_i)}^{(\alpha_i - k - 1)}$$

则由(6.7)式,应有

$$L_{ik}(x) = \frac{\omega(x)}{(x - x_i)^{\alpha_i}} \frac{(x - x_i)^k}{k!} \left\{ \frac{(x - x_i)^{\alpha_i}}{\omega(x)} \right\}_{(x_i)}^{(\alpha_i - k - 1)}$$

从而

$$p(x) = \sum_{i=1}^s \left[\frac{\omega(x)}{(x - x_i)^{\alpha_i}} \sum_{k=0}^{\alpha_i-1} y_i^{(k)} \frac{(x - x_i)^k}{k!} \cdot \left\{ \frac{(x - x_i)^{\alpha_i}}{\omega(x)} \right\}_{(x_i)}^{(\alpha_i - k - 1)} \right]. \quad (6.9)$$

若在(6.3)式中取 $y_k^{(h)} = f^{(h)}(x_k)$ ($h = 0, \dots, \alpha_k - 1; k = 1, \dots, s$), 则相应的 Hermite 插值多项式为

$$p(x) = \sum_{i=1}^s \left[\frac{\omega(x)}{(x-x_i)^{\alpha_i}} \sum_{k=0}^{\alpha_i-1} f^{(k)}(x_i) \frac{(x-x_i)^k}{k!} \left\{ \frac{(x-x_i)^{\alpha_i}}{\omega(x)} \right\}_{(x_i)}^{(\alpha_i-k-1)} \right]. \quad (6.10)$$

例 1 设 $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_s = 1$, 则插值问题(6.3)就是通常多项式插值问题. 此时, 按定义有

$$\left\{ \frac{(x-x_i)}{\omega(x)} \right\}_{(x_i)}^{(0)} = \frac{1}{\omega'(x_i)},$$

其中 $\omega(x) = (x-x_1)\cdots(x-x_s)$. 相应的 Hermite 插值多项式恰为一般 Lagrange 插值多项式

$$p(x) = \sum_{i=1}^s f(x_i) \frac{\omega(x)}{(x-x_i)\omega'(x_i)}.$$

例 2 设仅有一个 α 重的结点 $x = a$, 则 $\omega(x) = (x-a)^\alpha$, 而相应的 Hermite 插值多项式恰为 $f(x)$ 在 $x=a$ 点 Taylor 展开式的部分和

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\alpha-1} f^{(k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!}.$$

例 3 设 $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_s = 2$, 则相应的 Hermite 插值问题为求 $n = 2s - 1$ 次多项式 $p(x)$, 使之满足

$$\begin{aligned} p(x_i) &= f(x_i), \\ p'(x_i) &= f'(x_i) \end{aligned} \quad (i = 1, \dots, s). \quad (6.11)$$

这个特定的 Hermite 插值问题的几何意义在于使曲线 $y = p(x)$ 不仅通过给定的型值点 $(x_i, f(x_i))$ ($i = 1, \dots, s$), 而且在 $x = x_i$ ($i = 1, \dots, s$) 处与曲线 $y = f(x)$ 有相同的切线.

为推导相应的 Hermite 插值公式, 记 $\sigma(x) = (x-x_1)\cdots(x-x_s)$, 则

$$\begin{aligned} \omega(x) &= [\sigma(x)]^2, \\ \frac{(x-x_i)^2}{\omega(x)} &= \left[\frac{x-x_i}{\sigma(x)} \right]^2. \end{aligned}$$

又因

$$\frac{x - x_i}{\sigma(x)} = \frac{1}{\sigma'(x_i)} - \frac{1}{2} \frac{\sigma''(x_i)}{[\sigma'(x_i)]^2} (x - x_i) + \cdots,$$

$$\left[\frac{x - x_i}{\sigma(x)} \right]^2 = \frac{1}{[\sigma'(x_i)]^2} - \frac{\sigma''(x_i)}{[\sigma'(x_i)]^3} (x - x_i) + \cdots,$$

故由(6.10)式,有

$$p(x) = \sum_{i=1}^s \left(\frac{\sigma(x)}{\sigma'(x_i)(x - x_i)} \right)^2 \times \left[f(x_i) \left(1 - \frac{\sigma''(x_i)}{\sigma'(x_i)} (x - x_i) \right) \right. \\ \left. + f'(x_i)(x - x_i) \right]. \quad (6.12)$$

更特殊地,当 $s=2$,且 $\alpha_1=\alpha_2=2$ 时,相应的插值公式为下述 3 次多项式

$$p(x) = f(x_1) \left(1 - 2 \frac{x - x_1}{x_1 - x_2} \right) \left(\frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \right)^2 \\ + f'(x_1)(x - x_1) \left(\frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \right)^2 + f(x_2) \left(1 - 2 \frac{x - x_2}{x_2 - x_1} \right) \left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \right)^2 \\ + f'(x_2)(x - x_2) \left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \right)^2. \quad (6.13)$$

这是一个非常重要的 Hermite 插值多项式. 它所刻画的曲线 $y=p(x)$ 是这样一条曲线:其在区间 $[x_1, x_2]$ 两个端点处,不仅通过曲线 $y=f(x)$ 上的点 $(x_1, f(x_1))$ 与 $(x_2, f(x_2))$,而且与 $y=f(x)$ 有相同的切线.

Hermite 插值多项式(6.12)的误差估计由下述定理给出.

定理 7 设 $f^{(2s-1)}(x)$ 于 $[a, b]$ 上连续, $f^{(2s)}(x)$ 于 (a, b) 内存在, 又设

$$a \leqslant x_1 < x_2 < \cdots < x_s \leqslant b,$$

则由(6.12)所确定的 Hermite 插值多项式 $p(x)=p_{2s-1}(x)$ 有如下的估计式

$$f(x) - p_{2s-1}(x) = \frac{f^{(2s)}(\xi)}{(2s)!} [\sigma(x)]^2, \quad (6.14)$$

其中 $x_1 < \xi < x_s$.

证明 若 x 为 x_1, x_2, \dots, x_s 中的某一个, 则显然(6.14)成立. 以下假设 $x \neq x_1, \dots, x_s$ 中的任一个. 由于 $f(x) - p_{2s-1}(x)$ 以 x_1, \dots, x_s 为 2 重零点, 因此可设

$$f(x) - p_{2s-1}(x) = (x - x_1)^2 \cdots (x - x_s)^2 \cdot \rho(x). \quad (6.15)$$

对上述给定的 x , 作辅助函数

$$\varphi(t) = f(t) - p_{2s-1}(t) - \rho(x)(t - x_1)^2 \cdots (t - x_s)^2.$$

按插值条件,可知

$$\begin{aligned}\varphi(x_i) &= \varphi'(x_i) = 0, i = 1, \dots, s, \\ \varphi(x) &= 0.\end{aligned}$$

这表明 $\varphi(x)$ 有 s 个 2 重零点 x_1, \dots, x_s 和单零点 x . 由 Rolle 定理, $\varphi'(t)$ 于 x_1, \dots, x_s 以及 x 这 $s+1$ 个不同点所形成的 s 个小区间内部各有一个零点. 注意到 $\varphi'(t)$ 原来已有 s 个零点 x_1, \dots, x_s , 从而 $\varphi'(t)$ 有 $2s$ 个互异的零点. 再次运用 Rolle 定理, $\varphi''(t)$ 应有 $2s-1$ 个零点. 同样地, $\varphi'''(t)$ 有 $2s-2$ 个零点. 依此类推, 最后可知 $\varphi^{(2s)}(t)$ 有 1 个零点, 记之为 ξ . 根据 $\varphi(t)$ 的定义和(6.15)式, 即知 (6.14) 式成立. 证毕.

§ 7 多元插值方法

在一元插值问题中, 我们曾利用差商算法导出 Newton 插值多项式. 本节将讨论多元多项式插值问题. 先从比较简单的二元差商插值算法开始.

设 D 是 \mathbf{R}^2 上的有界闭区域, $f(x, y)$ 是定义在 D 上的连续函数. 取定 D 中的结点组(可整序格点网)

$$\mathcal{N} = \{(x_i, y_j) \mid 0 \leq j \leq n_i, 0 \leq i \leq m\}, \quad (7.1)$$

其中

$$n_0 \geq n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_m.$$

对于函数 $f(x, y)$, 可视自变量 y 为固定值, 则可按一元差商的定义而得到

$$f(x_0, x_1, \dots, x_\nu; y).$$

再视上述差商中的诸 x_0, \dots, x_ν 为固定, 则又可得到它关于自变量 y 的差商

$$f(x_0, x_1, \dots, x_\nu; y_0, y_1, \dots, y_\mu).$$

这样一来, 我们已经给出了二元差商的一种定义方式, 并可以计算出它们来.

为了书写方便, 记

$$f_{\nu\mu} \stackrel{\text{def}}{=} f(x_0, \dots, x_\nu; y_0, \dots, y_\mu),$$

$$X_\nu \stackrel{\text{def}}{=} (x - x_0) \cdots (x - x_{\nu-1}),$$

$$Y_\mu \stackrel{\text{def}}{=} (y - y_0) \cdots (y - y_{\mu-1}),$$

$$X_0 = Y_0 = 1.$$

按一元 Newton 插值公式, 可知

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sum_{\nu=0}^m X_\nu f(x_0, \dots, x_\nu; y) + X_{m+1} f(x, x_0, \dots, x_m; y), \\ f(x_0, \dots, x_\nu; y) &= \sum_{\mu=0}^{n_\nu} Y_\mu f_{\nu\mu} + Y_{n_\nu+1} f(x_0, \dots, x_\nu; y, y_0, \dots, y_{n_\nu}). \end{aligned}$$

从而 \mathcal{N} 上的插值公式为

$$f(x, y) = \sum_{\nu=0}^m \sum_{\mu=0}^{n_\nu} X_\nu Y_\mu f_{\nu\mu} + r(x, y), \quad (7.2)$$

其中

$$p(x, y) = \sum_{\nu=0}^m \sum_{\mu=0}^{n_\nu} X_\nu Y_\mu f_{\nu\mu} \quad (7.3)$$

是满足插值条件

$$p(x_i, y_j) = f(x_i, y_j), \forall (x_i, y_j) \in \mathcal{N} \quad (7.4)$$

的多项式, 而相应插值余项为

$$\begin{aligned} r(x, y) &= X_{m+1} f(x, x_0, \dots, x_m; y) \\ &\quad + \sum_{\nu=0}^m X_\nu Y_{n_\nu+1} f(x_0, \dots, x_\nu; y, y_0, \dots, y_{n_\nu}). \end{aligned} \quad (7.5)$$

应该注意到, 上述插值多项式空间为

$$P \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \sum_{\nu=0}^m \sum_{\mu=0}^{n_\nu} c_{\nu\mu} x^\nu y^\mu \right\}.$$

容易直接验证以上插值多项式是唯一的.

例 1 在插值公式(7.2)中取

$$n_0 = n_1 = \dots = n_m = n,$$

则得到矩形网点上的插值公式

$$f(x, y) = \sum_{\nu=0}^m \sum_{\mu=0}^n X_\nu Y_\mu f_{\nu\mu} + r_1, \quad (7.6)$$

其中

$$\begin{aligned} r_1 &= X_{m+1} f(x, x_0, \dots, x_m; y) \\ &\quad + \sum_{\nu=0}^m X_\nu Y_{n+1} f(x_0, \dots, x_\nu; y, y_0, \dots, y_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= X_{m+1} f(x, x_0, \dots, x_m; y) + Y_{n+1} \{f(x; y, y_0, \dots, y_n) \\
&\quad - X_{m+1} f(x, x_0, \dots, x_m; y, y_0, \dots, y_n)\} \\
&= \frac{X_{m+1}}{(m+1)!} f_x^{(m+1)}(\xi, y) + \frac{Y_{n+1}}{(n+1)!} f_y^{(n+1)}(x, \eta) \\
&\quad - \frac{X_{m+1} Y_{n+1}}{(m+1)! (n+1)!} f_{xy}^{(m+1, n+1)}(\xi, \eta),
\end{aligned}$$

这里 ξ 和 $\bar{\xi}$ 落在包含 x, x_0, \dots, x_m 的最小区间内, 而 η 和 $\bar{\eta}$ 落在包含 y, y_0, \dots, y_n 的最小区间内.

注意此时插值空间为

$$\mathbb{P}_{m,n} = \left\{ \sum_{\nu=0}^m \sum_{\mu=0}^n c_{\nu\mu} x^\nu y^\mu \right\}.$$

例 2 在插值公式(7.2)中取

$$n_\nu = m - \nu, \quad \nu = 0, \dots, m,$$

则得到插值空间 \mathbb{P}_m 中的插值公式

$$f(x, y) = \sum_{\nu=0}^m \sum_{\mu=0}^{m-\nu} X_\nu Y_\mu f_{\nu\mu} + r_2, \quad (7.7)$$

其中

$$\begin{aligned}
r_2 &= X_{m+1} f(x, x_0, \dots, x_m; y) \\
&\quad + \sum_{\nu=0}^m X_\nu Y_{m+1-\nu} f(x_0, \dots, x_\nu; y, y_0, \dots, y_{m-\nu}).
\end{aligned}$$

利用插值公式(7.2), 人们还可以引导出许多插值公式. 读者可以根据需要来确定和使用它们.

唯一可解性与 Haar 定理

以下讨论更一般的插值问题, 从中人们不难发现多元插值问题与一元插值问题之间的本质差别.

设函数 $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ 定义在区间 $[a, b]$ 上. 对于任意给定的 n 个不同的点 $x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ 和 n 个数值 w_1, \dots, w_n , 显然插值问题

$$\sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x_j) = w_j, \quad j = 1, \dots, n$$

有唯一解, 必须且只需行列式

$$|\varphi_i(x_j)| \neq 0. \quad (7.8)$$

一个由 n 个定义在点集 S 上的函数组成的系统 $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ 称为在 S 上是唯

一可解的,如果对于 S 中任意给定的 n 个互异点 x_1, \dots, x_n 来说,(7.8)恒成立.显然, $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ 在 S 上唯一可解,必须且只需在 S 的任意给定的 n 个互异点上取值为零的线性组合 $c_1\varphi_1 + \dots + c_n\varphi_n$ 必恒为零.

例 3 由 $1, x^2$ 组成的函数组在 $[0, 1]$ 上是唯一可解的,但在 $[-1, 1]$ 上却不是唯一可解的.

例 4 在任何区间 $[a, b]$ 上,函数组 $1, x, x^2, \dots, x^n$ 是唯一可解的.

例 5 三角函数系

$$1, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx, \sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx$$

在 $-\pi \leq x < \pi$ 上是唯一可解的.

以下 Haar 定理指出,在高维空间 $\mathbf{R}^m (m \geq 2)$ 中,唯一可解性通常是保证不了的.

定理 8(Haar) 设 S 是欧氏空间 $\mathbf{R}^m (m \geq 2)$ 中包含一个内点 p 的点集.设 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n (n > 1)$ 定义于 S 上,且其中每个函数均在 p 的一个邻域内连续,则这个函数组在 S 上不是唯一可解的.

证明 设 U 是一个包含在 S 中以 p 为中心的小球,它使得诸 φ_i 在其内是连续的.选取 U 中 n 个不同的点 p_1, p_2, \dots, p_n .可以假定行列式

$$|\varphi_i(p_j)| \neq 0, \quad (7.9)$$

若不然,则该函数组已经不是唯一可解,从而定理已证完了.现固定 p_3, \dots, p_n ,并在 U 内连续地移动 p_1 和 p_2 ,使得 p_1 和 p_2 互换位置.由于 U 是 $\mathbf{R}^n (n \geq 2)$ 中的小球,因而在 p_1 和 p_2 互换位置的过程中,人们既可保证 p_1 和 p_2 不相重合,又可保证它们也不与 p_3, \dots, p_n 中的任一点相重合.注意到当我们按上述要求交换了 p_1 与 p_2 的位置后,(7.9)式左端行列式的第 1 列和第 2 列恰好交换了位置.按行列式性质,交换前后两行列式异号.因为 φ_i 是 U 内的连续函数,所以在 p_1 和 p_2 互换位置的过程中必然存在某个中间位置,使与之相对应的行列式为零.从而函数组 $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ 在 S 上不是唯一可解的.证毕.

顺便指出,为使上述 Haar 定理成立,可以不必要求点集 S 中包含有内点 p .事实上,只需要求 S 中包含有一个“三岔”点 p ,亦即在点 p 处有 3 段弧相遇就可以了(见图 7.1).注意此时还需要求 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ 沿该三岔线是连续的.

因为人们可以仿照火车“调头”时惯用的方法使得 p_1 与 p_2 互换位置.

作为思考题,请读者考虑:导致一元插值

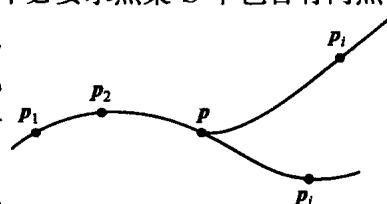


图 7.1

与多元插值之间的这种本质差别的根源何在?

Haar 定理表明,多元函数的插值问题远比一元函数插值问题复杂得多.事实上,任何插值问题中都有两个相互依存、又相互制约的两个要素:插值函数空间、插值结点组.因而多元函数插值问题有两类截然不同的提法,从而形成两类不同的研究方向:

1° 对于给定的函数空间 $\text{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$, 选取适当的插值结点组 $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, 使得插值问题

$$\sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(X_j) = w_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (7.10)$$

对于任意事先给定的 w_1, w_2, \dots, w_n 都有唯一解;

2° 对于给定的插值结点组 $\{X_1, \dots, X_n\}$, 选取适当的函数空间 $\text{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$, 使得插值问题(7.10)对于任意事先给定的 w_1, w_2, \dots, w_n 都有唯一解.

显然,第 2°类问题的研究难度会更大.特别是因为其中插值空间 $\text{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ 的选取并不是唯一的.一般说来,人们会根据理论或应用中的特殊需要,对插值空间 $\text{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ 附加特定的约束,使得相应插值问题具有唯一解。

由于篇幅所限,本书仅就第 1°类插值问题展开.对第 2°类插值问题,有兴趣的读者,可以查阅 Carl de Boor 及其合作者的相关文献.

为搞清插值结点组的选取问题,先引入相应的概念.

设 $p_1(x, y), p_2(x, y), \dots, p_k(x, y)$ 是一组线性无关的实系数二元多项式,
 $P = \text{span}\{p_1(x, y), p_2(x, y), \dots, p_k(x, y)\}.$

D 是 \mathbf{R}^2 上的有界闭区域, $f \in C(D)$, q_1, \dots, q_k 是 D 中互异的点.二元多项式插值问题,是要寻求 $p \in P$, 使得下述插值条件被满足:

$$p(q_i) = f(q_i), \quad i = 1, \dots, k. \quad (7.11)$$

这样的多项式 $p(x, y)$ 称为 $f(x, y)$ 在 P 中的插值多项式, q_1, \dots, q_k 称为插值结点.

由 Haar 定理,为求得插值多项式,首要的问题是选择插值结点组 q_1, \dots, q_k , 使得插值问题(7.11)的解存在并且唯一.若对任意给定的被插函数 $f(x, y)$, 插值问题(7.11)的解均存在并且唯一,则称 q_1, \dots, q_k 是空间 P 的适定结点组.

设 $p(x, y)$ 是 P 中的一个非零多项式, P 中的代数曲线 $p(x, y) = 0$ 由下述

点集所定义：

$$\{(x, y) \mid p(x, y) = 0, p \in P\}.$$

由插值适定结点组的定义和线性代数理论,可以建立下述引理 4.

引理 4 点组 q_1, \dots, q_k 是空间 P 的适定结点组, 必须且只需该点组不在 P 中的任何一条代数曲线上.

该引理的必要性是显然的. 事实上, 如果 q_1, \dots, q_k 是 P 中的适定结点组, 则表明插值问题(7.10)对任意给定的 $f(x, y)$ 均有唯一的解存在. 于是行列式

$$\Delta = |p_i(q_j)| \neq 0.$$

若有某非零多项式 $p \in P$ 存在, 使得点组 q_1, \dots, q_k 落在代数曲线 $p(x, y) = 0$ 上, 即 $p(q_j) = 0, j = 1, \dots, k$. 由适定性定义, 必有 $p(x, y) \equiv 0$. 这与多项式 $p(x, y)$ 的非零性相矛盾. 必要性得证.

以下证明充分性. 假定 q_1, \dots, q_k 不是 P 的适定结点组, 于是 $\Delta = 0$. 这表明 Δ 的 k 个行向量组是线性相关的, 即存在一组不全为 0 的实数 c_1, \dots, c_k , 使得

$$c_1 p_1(q_i) + c_2 p_2(q_i) + \dots + c_k p_k(q_i) = 0, \quad i = 1, \dots, k.$$

它说明 q_1, \dots, q_k 落在 P 中的代数曲线

$$p(x, y) = c_1 p_1(x, y) + c_2 p_2(x, y) + \dots + c_k p_k(x, y) = 0$$

上. 充分性得证.

Bezout 定理 设 $p_1(x, y)$ 与 $p_2(x, y)$ 分别是 m 与 n 次的代数多项式. 如果它们的公共零点数多于 mn , 则 $p_1(x, y)$ 与 $p_2(x, y)$ 必有公共因子存在.

这是一条十分重要的定理, 由于篇幅所限, 此处不拟证明.

关于 P_n 的适定结点组的选取问题有下述一类方法, 其理论基础为下述定理.

定理 9 若 q_1, \dots, q_k 是 P_n 的适定结点组, 且它的每个点都不在某条 l 次 ($l=1$ 或 2) 不可约代数曲线 $q(x, y) = 0$ 上, 则将在该曲线上任取的 $(n+3)l-1$ 个不同点与 q_1, \dots, q_k 放在一起, 必构成空间 P_{n+l} 的一个适定结点组.

采用 Bezout 定理可以证明本定理. 用 A 表示在不可约代数曲线 $q(x, y) = 0$ 上所取的 $(n+3)l-1$ 个不同点的集合. $\{q_i\}_{i=1}^k$ 的点数 $k = \binom{n+2}{2}$. 用 B 表示这两个点集的并, 则点集 B 的点数恰与 P_{n+l} 的维数 $\binom{n+l+2}{2}$ 相同(注意 $l=1$ 或 2). 利用反证法来证明 B 是 P_{n+l} 的适定结点组: 假若 B 不是 P_{n+l} 的适定结点组, 则由引理, 必存在非零多项式 $p(x, y) \in P_{n+l}$, 使得 B 中的所有点落在代数曲线 $p(x, y) = 0$ 上. 但 A 中的点均位于不可约代数曲线 $q(x, y) = 0$ 上, 于是 l 次不可约代数曲线 $q(x, y) = 0$ 与 $n+l$ 次代数曲线 $p(x, y) = 0$ 至少有 $(n+3)l-1 > (n$

$+ l)l$ 个交点. 由 Bezout 定理 $p(x, y)$ 与 $q(x, y)$ 必有公因子存在. 但 $q(x, y)$ 是不可约多项式, 是故 $q(x, y)$ 必为 $p(x, y)$ 的因子, 即有多项式 $r(x, y) \in P_n$ 存在, 使得 $p(x, y) = q(x, y) \cdot r(x, y)$, 并有 $r(q_i) = p(q_i)/q(q_i), i = 1, \dots, k$. 注意到 $\{q_i\}_{i=1}^k$ 是 P_n 的适定结点组, 所以 $r(x, y) \equiv 0$, 进而 $p(x, y) \equiv 0$. 此与 $p(x, y)$ 是非零多项式的假设矛盾. 证毕.

利用定理 9 可以构造出一系列适定结点组. 例如有以下构造 P_n 适定结点组的“添加直线法”.

第 0 步: 在平面上任选一点 q 作为一个结点;

第 1 步: 在平面上任意画一条不通过 q 的直线 L_1 , 并于其上任选 2 个互异点作为新增加的结点;

一般地,

第 n 步: 在平面上任意画一条不通过已选好结点的直线 L_n , 并于其上任选 $n+1$ 个互异点作为新增加的结点.

第 n 步完成后, 前面 $n+1$ 步所得到的结点组成一个 P_n 的适定结点组. 这样的适定结点组称为 n 次直线型结点组.

由上面一系列的分析可知, 在选好了适定结点组之后, 插值问题(7.11)的求解问题, 实质上是一个线性代数问题. 所以人们可以最终将相应的插值多项式具体求出来. 由于结点组的适定性保证了插值多项式的唯一性, 所以往往可以不必按部就班地去求解线性代数问题(7.11), 而采取灵活的方法求出多元插值多项式来. 今举两例如下:

例 6 三角形网点上的 Lagrange 插值多项式

对于平面上任意给定的三角形 ABC , 将其三边均 n 等分. 过每边上的任一分点, 分别作另两边的平行线. 这样我们便把三角形 ABC 作了三角剖分.

设由上产生的与 BC, AC, AB 平行的直线簇方程分别为

$$a_i(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 + ih_1 = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

$$b_j(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 + jh_2 = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

$$c_k(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 + kh_3 = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

其中 $a_0(x, y) = 0, b_0(x, y) = 0$ 和 $c_0(x, y) = 0$ 分别是 BC, AC 和 AB 三边的方程. 如果以 q_{ij} 记 $a_i(x, y) = 0$ 与 $b_j(x, y) = 0$ 的交点, 则由定理 9 可知结点组

$$\Omega_n \stackrel{\text{def}}{=} \{q_{ij} \mid j = 0, 1, \dots, n-i; i = 0, 1, \dots, n\}$$

是 P_n 的适定结点组.

记

$$\begin{aligned} A_i(x, y) &= \prod_{l=0}^{i-1} a_l(x, y), \quad A_0(x, y) = 1, \\ B_j(x, y) &= \prod_{l=0}^{j-1} b_l(x, y), \quad B_0(x, y) = 1, \\ C_k(x, y) &= \prod_{l=0}^{k-1} c_l(x, y), \quad C_0(x, y) = 1, \end{aligned}$$

则 Ω_n 上 Lagrange 插值公式为

$$f(x, y) = \sum_{0 \leq i+j \leq n} f(\mathbf{q}_{ij}) L_{ij}(x, y) + r(x, y), \quad (7.12)$$

其中

$$L_{ij}(x, y) = \frac{A_i(x, y)}{A_i(\mathbf{q}_{ij})} \cdot \frac{B_j(x, y)}{B_j(\mathbf{q}_{ij})} \cdot \frac{C_{n-i-j}(x, y)}{C_{n-i-j}(\mathbf{q}_{ij})}$$

为 Lagrange 型插值基本多项式, 而 $r(x, y)$ 为插值余项.

例 7 直线简单相交网点上的 Lagrange 插值多项式

设 $a_i(x, y) = 0, i = 0, 1, \dots, n$, 是一组直线, 它们两两相交, 但任意三条均不相交于一点. 这样所得的交点的集合称为该直线簇的简单相交网. 今记 $a_i(x, y) = 0$ 与 $a_j(x, y) = 0, i \neq j$ 的交点为 \mathbf{q}_{ij} (显然 $\mathbf{q}_{ij} = \mathbf{q}_{ji}$),

$$\Sigma \stackrel{\text{def}}{=} \{ \mathbf{q}_{ij} \mid i \neq j \}.$$

则 Σ 上 Lagrange 插值公式为

$$f(x, y) = \sum_{0 \leq i < j \leq n} f(\mathbf{q}_{ij}) \frac{S_{ij}(x, y)}{S_{ij}(\mathbf{q}_{ij})} + r(x, y), \quad (7.13)$$

其中 $r(x, y)$ 为插值余项, 而

$$S_{ij}(x, y) = \frac{a_0(x, y) \cdots a_n(x, y)}{a_i(x, y) a_j(x, y)}.$$

应该指出, 以上插值技巧也可以应用于多条直线相交于同一结点的情形.

设已知 n 条互异直线

$$a_i(x, y) = \alpha_i x + \beta_i y + \gamma_i = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (7.14)$$

它们间的交点集合为 $\sigma = \{ \mathbf{q}_j \}_{j=1}^m$, 其中 \mathbf{q}_j 由(7.14)中的 n_i 条直线相交所得,

$2 \leqslant n_i < n, m \leqslant \binom{n}{2}$, 则可以求出相应的插值多项式来(留作习题).

§ 8 径向基函数插值

本节继续讨论多元函数插值问题. 鉴于 Haar 定理揭示的多元函数插值问题的困难和复杂性, 我们转而采用所谓径向基函数(Radial basis function)来处理多元函数插值问题. 该方法已在工程技术中得到广泛应用.

考虑定义在集合 $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d (d \geq 1)$ 上的实值函数 f 的插值问题. 径向基函数插值方法采用定义在 \mathbf{R}^d 上的单个实值连续函数 Φ 的平移 $\Phi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j)$ 作为插值空间的基函数来进行插值. 进一步假定 Φ 是径向对称的, 即

$$\Phi(\mathbf{x}) = \phi(\|\mathbf{x}\|), \quad (8.1)$$

其中 ϕ 是定义在 $\mathbf{R}_{\geq 0}$ (即非负实轴)上的一元实值连续函数, 而 $\|\cdot\|$ 表示模, 通常采用欧氏模.

多元函数 f 的插值函数 S_f 表示为

$$S_f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N a_j \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j), \quad (8.2)$$

此处点集 $X = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N\}$ 由 Ω 中的互异点组成. X 中的诸点 \mathbf{x}_j 称为中心.

这样一来, 多元函数的径向基函数插值方法可表述为求解线性方程组:

$$f(\mathbf{x}_k) = \sum_{j=1}^N a_j \Phi(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j), \quad 1 \leqslant k \leqslant N. \quad (8.3)$$

按线代数理论, 对任意给定的一组 $\{f(\mathbf{x}_1), \dots, f(\mathbf{x}_N)\}$, (8.3) 均有唯一解的充要条件是实对称矩阵

$$\mathbf{A}_{\Phi, X} = \begin{bmatrix} \Phi(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_1) \Phi(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \cdots \Phi(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_N) \\ \Phi(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \Phi(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_2) \cdots \Phi(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_N) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \Phi(\mathbf{x}_N - \mathbf{x}_1) \Phi(\mathbf{x}_N - \mathbf{x}_2) \cdots \Phi(\mathbf{x}_N - \mathbf{x}_N) \end{bmatrix} \quad (8.4)$$

是非奇异的.

常用的径向基函数有

1° Gauss 分布函数

$$\phi(r) = e^{-c^2 r^2}, \quad c > 0; \quad (8.5)$$

2° Multi-Quadric(MQ) 函数

$$\phi(r) = (c^2 + r^2)^\beta, \quad \beta \in \mathbf{R}_+; \quad (8.6)$$

3° 逆 Multi-Quadric(逆 MQ) 函数

$$\phi(r) = (c^2 + r^2)^{-\beta}, \quad \beta \in \mathbf{R}_+; \quad (8.7)$$

4° 薄板样条函数

$$\phi(r) = \begin{cases} r^{2k-d} \log r, & d \text{ 为偶数,} \\ r^{2k-d}, & d \text{ 为奇数,} \end{cases} \quad (8.8)$$

其中 d 为空间 \mathbf{R}^d 的维数, 且 $2k - d > 0$;

5° 紧支集正定径向基函数.

径向基函数插值问题与径向基函数的正定与条件正定性质密切相关. 为此, 我们要先介绍相关的定义与结果.

定义 1 函数 $\Phi(x) = \phi(\|x\|)$, $x \in \mathbf{R}^d$ 称为是正定的, 如果对 \mathbf{R}^d 空间中的任意给定的、由两两互异点组成的点集 $\{x_1, \dots, x_N\}$, 矩阵

$$(\Phi(x_j - x_k))_{j,k}$$

都是正定的.

定义 2 连续函数 $\phi: \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}$ 称为 \mathbf{R}^d 上的正定函数, 如果函数 $\Phi(x) = \phi(\|x\|)$, $x \in \mathbf{R}^d$ 是正定的.

如果径向函数连续, 且 $\phi(+\infty) = 0$, 则与其相应的径向基函数插值问题 (8.3) 有如下的定理成立:

定理 10 若连续函数 $\phi: \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}$ 满足

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \phi(r) = 0,$$

则对 \mathbf{R}^d 中的径向基函数插值问题 (8.3) 均有唯一解存在的条件是矩阵

$$(\Phi(\|x_j - x_k\|))_{j,k}$$

总是正定矩阵.

推论 1 若连续函数 $\phi: \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}$ 满足

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \phi(r) = 0,$$

则 \mathbf{R}^d 中的径向基函数插值问题 (8.3) 均有唯一解存在的条件是函数 $\phi(\|x\|)$ 是正定的.

今采用归纳法来证明定理 10. 适当选取符号后, 可假定 $\phi(0) > 0$. 当仅有两

个数据点时,先假定这两点的距离足够远,因为 $\phi(+\infty)=0$,可知这时相应的 2 阶矩阵的行列式大于 0. 再让两个数据点靠近,根据函数的连续性可知这是一个 2 阶正定矩阵. 假设已有 n 个数据点,且相应的系数矩阵(8.4)是正定的,即该矩阵的直至 n 阶主子式均大于 0. 当再增加 1 个数据点时,设想该数据点是由很远处连续地移动到所在位置的. 矩阵(8.4)的 $n+1$ 阶主子式(行列式)当上述新增数据点开始运动时大于 0,而在移动过程中保持不为 0. 所以这 $n+1$ 阶矩阵的各阶主子式都大于 0. 由归纳法,我们已证明:任何形式为 $(\Phi(\|x_j - x_k\|))$ 的矩阵都是正定的.

定义 3 函数 ϕ 称为在 $(0, +\infty)$ 上是完全单调的,如果 $\phi \in C^\infty(0, +\infty)$ 且

$$(-1)^l \phi^{(l)}(r) \geqslant 0, \forall l \in \mathbb{N}, \quad \forall r > 0. \quad (8.9)$$

如果函数 ϕ 还属于 $C[0, +\infty)$,则进一步称函数 ϕ 在 $[0, +\infty)$ 上是完全单调的.

可以证明联系正定性与完全单调性之间的下述定理成立.

有关它的证明,请读者参阅书后的“主要参考文献”

定理 11 若定义

$$\phi(r) = \Psi(r^2), \quad (8.10)$$

则 $\phi(\|x\|)$ 对任意维空间的 x 都是正定函数的充分必要条件是 $\Psi(r)$ 为完全单调函数.

不难验证 Gauss 分布函数和逆 MQ 函数都是正定函数. 请读者自行验证(留作习题). 因此以 Gauss 分布函数和逆 MQ 函数作为径向基函数所进行的径向基函数插值问题(8.3)的解都是存在唯一的.

定义 4 称连续函数 $\Phi: \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{C}$ 是 m 级条件正半定的,如果对所有的 $N \in \mathbb{N}$,所有可能的两两互异的中心 $x_1, \dots, x_N \in \mathbf{R}^d$,以及所有使下式

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j p(x_j) = 0 \quad (8.11)$$

对所有次数不超过 m 的复值多项式均成立的 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{C}^N$ 而言,二次型

$$\sum_{j,k=1}^N \alpha_j \bar{\alpha}_k \Phi(x_j - x_k) \quad (8.12)$$

都是非负的. 称 Φ 是 m 级条件正定的,如果除去 α 为 0 的情形外,二次型(8.12)都是正定的.

定理 12 连续的偶函数 $\Phi: \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}$ 是 m 级条件正定的,当且仅当对所有 $N \in \mathbb{N}$,所有可能的两两互异的中心 $x_1, \dots, x_N \in \mathbf{R}^d$,以及所有使(8.11)对一切次数不超过 m 的实值多项式 $p(x)$ 均成立的 $\alpha \in \mathbf{R}^N \setminus \{0\}$,二次型

$$\sum_{j,k=0}^N \alpha_j \alpha_k \Phi(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k)$$

是正的.

命题 1 如下的结论成立:

1° MQ 函数

$$\phi(r) = (-1)^{[\beta]} (c^2 + r^2)^\beta, \quad c, \beta > 0, \quad \beta \in \mathbb{N} \quad (8.13)$$

在每个空间 \mathbf{R}^d 上都是 $m = [\beta]$ 级条件正定的;

2° 函数

$$\phi(r) = (-1)^{[\beta/2]} r^\beta, \quad \beta > 0, \quad \beta \in 2\mathbb{N} \quad (8.14)$$

在每个空间 \mathbf{R}^d 上都是 $m = [\beta/2]$ 级条件正定的;

3° 薄板或曲面样条函数

$$\phi(r) = (-1)^{k+1} r^{2k} \log(r) \quad (8.15)$$

在每个空间 \mathbf{R}^d 上都是 $m = k + 1$ 级条件正定的.

对于任一给定的条件正定的径向基函数, 采用下述函数

$$S_{f,X}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) + \sum_{k=1}^Q \beta_k p_k(\mathbf{x}) \quad (8.16)$$

作为插值函数, 其中 Q 是 d 维 $m - 1$ 次多项式空间 $P_{m-1}(\mathbf{R}^d)$ 的维数
 $\binom{m-1+d}{d}, p_1, \dots, p_Q$ 是多项式空间 $P_{m-1}(\mathbf{R}^d)$ 的一组基底.

按照条件正定径向基函数的定义 4, 此时插值问题可表述为

$$\begin{cases} S_{f,X}(\mathbf{x}_j) = f(\mathbf{x}_j), & j = 1, \dots, N, \\ \sum_{j=1}^N \alpha_j p_k(\mathbf{x}_j) = 0, & k = 1, \dots, Q, \end{cases} \quad (8.17)$$

所以插值问题(8.17)的可解性等价于下述方程组的可解性

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{\Phi,X} & \mathbf{P} \\ \mathbf{P}^T & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f|X \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (8.18)$$

其中

$$\mathbf{A}_{\Phi,X} = (\Phi(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k)) \in \mathbf{R}^{N \times N}, \mathbf{P} = (p_k(\mathbf{x}_j)) \in \mathbf{R}^{N \times Q}.$$

显然(8.18)有唯一解存在的条件是矩阵

$$\tilde{\mathbf{A}}_{\Phi,X} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{\Phi,X} & \mathbf{P} \\ \mathbf{P}^T & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

是可逆的.

定理 13 假定 Φ 是一个 m 级条件正定函数, $X = (x_1, \dots, x_N)$ 是多项式空间的一组适定结点组, 则(8.18)的解是存在唯一的.

证明 假定 $(\alpha, \beta)^T$ 落在矩阵 $\tilde{A}_{\Phi, X}$ 的零空间中, 则我们有

$$\begin{cases} \tilde{A}_{\Phi, X}\alpha + P\beta = 0, \\ P^T\alpha = 0. \end{cases} \quad (8.19)$$

上述第二个方程意味着对所有的 $p \in P_{m-1}(\mathbf{R}^d)$, α 满足

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j p(x_j) = 0.$$

以 α^T 左乘(8.19)的第一个方程, 得到

$$0 = \alpha^T \tilde{A}_{\Phi, X} \alpha + (P^T \alpha)^T \beta = \alpha^T \tilde{A}_{\Phi, X} \alpha.$$

由于 Φ 是 m 级条件正定的, 所以 $\alpha = 0$, 进而 $P\beta = 0$. 再根据 X 是 $P_{m-1}(\mathbf{R}^d)$ 的适定结点组, 因此 $\beta = 0$. 证毕.

鉴于篇幅所限, 具有紧支集的正定径向基函数的插值理论此处不拟介绍. 请读者参阅书后的“主要参考文献”.

例 用径向基函数插值方法对二元 Franke 函数

$$\begin{aligned} f(x, y) = & \frac{3}{4} e^{-1/4((9x-2)^2 + (9y-2)^2)} + \frac{3}{4} e^{-(1/49)(9x+1)^2 - (1/10)(9y+1)^2} \\ & + \frac{1}{2} e^{-1/4((9x-7)^2 + (9y-3)^2)} - \frac{1}{5} e^{-(9x-4)^2 + (9y-7)^2}, \quad (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \end{aligned}$$

作逼近.

$f(x, y)$ 在正方形区域 $[0, 1] \times [0, 1]$ 上的图形如图 8.1. 今在 $[0, 1] \times [0, 1]$

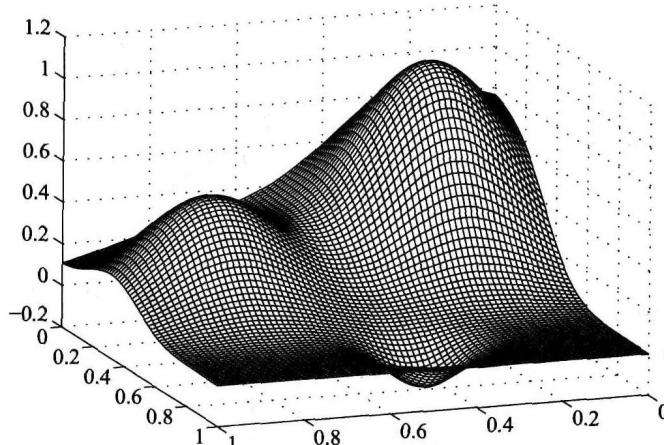


图 8.1

上取如图 8.2 所示的 1089 个散乱点作为插值中心.

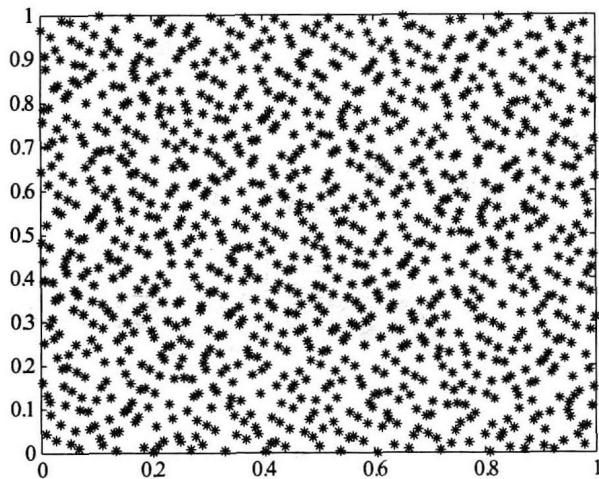


图 8.2

1° 我们用 Gauss 函数 $\phi(r) = e^{-c^2 r^2}$ 作为径向基函数, 并在上述中心点上作插值, 其中形状参数 c 取为 21.1. 算得的图形如图 8.3.

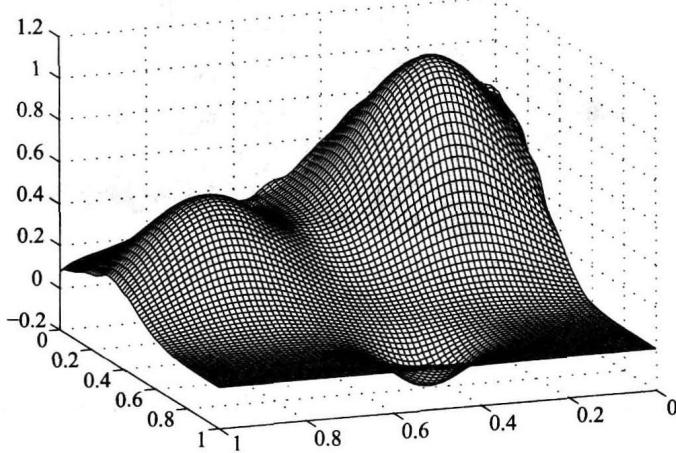


图 8.3

2° 用 MQ 函数 $\phi(r) = \sqrt{c^2 + r^2}$ 作为径向基函数, 并在上述中心点做插值, 其中形状参数 c 取为 0.015 2. 算得的图形如图 8.4.

3° 用薄板样条函数 $\phi(r) = r^2 \log r$ 作为径向基函数, 并在上述中心点上作插值. 这时我们需要添加 1 次多项式进行修正. 算得的图形如图 8.5.

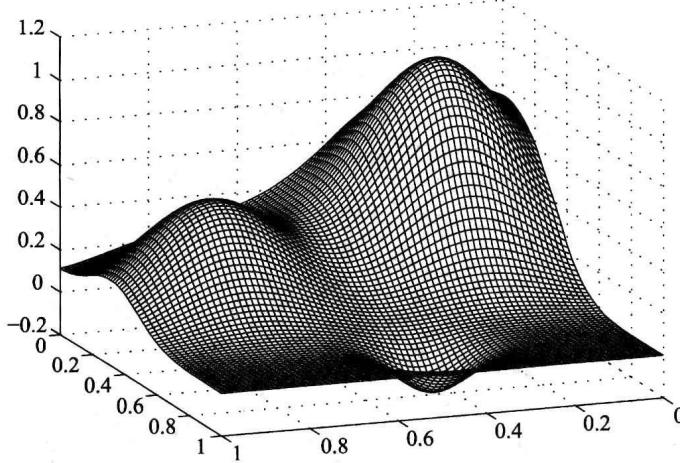


图 8.4

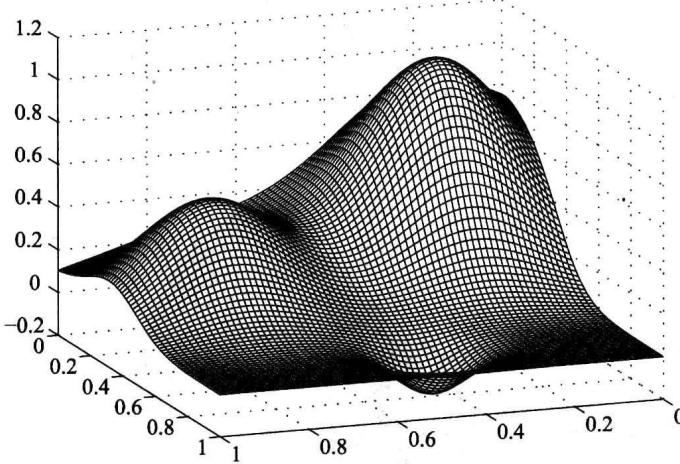


图 8.5

由上面三个径向基函数插值方法得到的最大误差分别为 0.346, 0.014 和 0.013.

第三章习题

1. 试证明 Vandermonde 行列式的下述等式: $V(1, 2, \dots, n) = 1! \cdot 2! \cdots (n-1)!$.
2. 试构造一个 3 次多项式 $p(x)$, 使得 $p(0)=0, p''(0)=1, p(1)=1, p'(1)=2$.
3. 已知函数 $y=e^x$, 试写出它在结点组 $-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1$ 上的 5 次插值多项式.

4. 利用差分性质证明

$$f(n) = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

5. 证明对任意非负整数 k , 有

$$x_+^k + (-1)^k(-x)_+^k = x^k.$$

6. 试求 $\sum_{i=0}^n x_i^k l_i(x), 0 \leq k \leq n$, 其中 $l_i(x)$ 为 Lagrange 基本多项式

$$l_i(x) = \frac{\omega(x)}{(x - x_i)\omega'(x_i)}, \omega(x) = (x - x_0)\cdots(x - x_n).$$

7. 证明

$$|(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)| \leq n! h^{n+1}/4,$$

其中 $h = \max(x_{i+1} - x_i), i = 0, \dots, n-1$.

8. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 互异. 试证 $e^{\alpha_1 x}, e^{\alpha_2 x}, \dots, e^{\alpha_n x}$ 在任何区间上均唯一可解.

9. 证明

$$f(n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \Delta^k f(0).$$

10. 证明

$$\sum_{i=0}^m (-1)^{m-i} \frac{i}{n} \binom{n+m}{n+i} = (-1)^{m+1} \frac{(m+n-2)!}{n! (m-1)!}.$$

[提示] 利用函数

$$f(x) = \frac{(n-x)(n-1-x)\cdots(2-x)}{n!}$$

的 Lagrange 插值公式 ($x_0 = 0, h = 1, x = n+m$).

11. 设 $l_i(x)$ 如题 6 所示. 试证

$$\begin{aligned} l_i(x) &= 1 + \frac{x - x_0}{x_0 - x_1} + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \cdots \\ &\quad + \frac{(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\cdots(x_0 - x_n)}. \end{aligned}$$

12. 设 $f(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$. 试证

$$f(x_0, x_1, \dots, x_p) = 0, p < n.$$

13. 试证 Hermite-Gennochi 公式

$$f(x_0, x_1, \dots, x_n) = \int_D \cdots \int f^{(n-1)}(t_0 x_0 + t_1 x_1 + \cdots + t_n x_n) dt_1 dt_2 \cdots dt_n,$$

其中 D 为下述单纯形

$$D = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid \sum_{i=1}^n x_i \leq 1, x_i \geq 0, i = 1, \dots, n \right\},$$

而 $t_0 = 1 - (t_1 + \cdots + t_n)$.

14. 试证下述具重结点的差商公式

$$\begin{aligned} & f(\underbrace{x_1, \dots, x_1}_{n_1}, \underbrace{x_2, \dots, x_2}_{n_2}, \dots, \underbrace{x_p, \dots, x_p}_{n_p}) \\ &= \int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{p-2}} \phi \cdot f^{(n-1)}(y) dt_{p-1}, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} y &= (1-t_1)x_1 + (t_1-t_2)x_2 + \cdots + (t_{p-2}-t_{p-1})x_{p-1} + t_{p-1}x_p, \\ \phi &= \frac{(1-t_1)^{n_1-1}(t_1-t_2)^{n_2-1} \cdots (t_{p-2}-t_{p-1})^{n_{p-1}-1} t_p^{n_p-1}}{(n_1-1)! (n_2-1)! \cdots (n_p-1)!}. \end{aligned}$$

15. 设 S 是一个有界闭区间, x_1, x_2, \dots, x_n 是 S 中的不同点. 假定 $f(x)$ 定义于 S 上, 且在 S 上可用多项式一致逼近. 试证 $f(x)$ 也必可在 S 上用满足附加条件

$$p(x_i) = f(x_i), \quad i = 1, \dots, n$$

的多项式 $p(x)$ 一致逼近.

16. 证明 Gauss 分布函数

$$\phi(r) = e^{-c^2 r^2}, \quad c > 0$$

是正定函数.

17. 证明逆 MQ 函数

$$\phi(r) = (c^2 + r^2)^{-\beta}, \quad \beta > 0$$

是正定函数.

18. 证明命题 1.

第四章 平方逼近

本书第二章是用

$$\| p - f \| = \max_{a \leq x \leq b} |p(x) - f(x)|$$

来度量逼近多项式 $p(x)$ 与已知函数 $f(x)$ 的近似程度的. 若 $\| p_n(x) - f(x) \| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, 则意味着序列 $\{p_n(x)\}$ 在区间 $[a, b]$ 上一致收敛到 $f(x)$. 一致逼近度量、亦称 Tchebyshev 度量是很重要的一类度量标准. 然而由于它的非线性特征, 使得最佳一致逼近多项式的构造问题十分困难.

对于许多问题来讲, 人们需要求出的是在确定意义下的“整体”近似. 本章讨论一类新的度量——平方度量意义下函数的逼近问题. 先从最小二乘法谈起.

§ 1 最小二乘法

最小二乘法起源于以测量和观测为基础的天文学. Gauss 在 1794 年利用最小二乘法解决了多余观测问题, 当时他只有十七岁. 可以用下面的简单例子描述这类问题.

假定通过观测或实验得到如下一组数据(即列表函数):

k	1	2	3	4	5	6	7	8
x_k	0	1	2	3	4	5	6	7
y_k	1.4	1.3	1.4	1.1	1.3	1.8	1.6	2.3

我们的目的是用一简单的式子表出这些数据间的关系. 从分析数据看出, 这些点差不多分布在一条直线上, 因此我们自然想到用线性函数 $y = a + bx$ 表示它们之间的关系. 这就需定出参数 a 和 b 的值来. 这实际上是多余观测问题, 用插值法不能确定出 a 和 b 的值. 待定参数的确定归结为矛盾方程组的求解问题.

假定有某方法可以定出 a 和 b , 则按 $y = a + bx$, 给出一个 x 便可以算出一个 y . 我们记

$$\bar{y}_k = a + bx_k \quad (k=1, \dots, 8).$$

\bar{y}_k 称为 y_k 的估计值, 显然它们不会是完全相同的, 它们之间的差(通常称为残差)

$$\epsilon_k = y_k - \bar{y}_k \quad (k=1, \dots, 8)$$

无疑是衡量被确定的参数 a 和 b (也就是近似多项式 $y=a+bx$)好坏的重要标志.

可以规定许多原则来确定参数 a, b . 例如

(1) 参数的确定, 将使残差绝对值中最大的一个达到最小, 即

$$T = \max_k |\epsilon_k| \text{ 为最小;}$$

(2) 参数的确定, 将使残差绝对值之和达到最小, 即 $\sum_k |\epsilon_k|$ 为最小;

(3) 参数的确定, 将使残差的平方和达到最小, 即 $\sum_k \epsilon_k^2$ 为最小.

(1)和(2)两个原则是很直观的, 也很理想, 但很不好用; 而原则(3)既直观又很好用. 按原则(3)确定待定参数, 从而得到近似多项式的方法, 就是通常所说的最小二乘法. 这一方法的理论根据是, 概率理论已证明, 只有这样的原则才能使得观测或实验的偶然误差对于所作的近似多项式有最小的影响.

回到所提出的问题上来, 即用最小二乘法确定参数 a, b . 按最小二乘法, 应使

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^8 (y_i - (a + bx_i))^2$$

取最小值. 因此, 应有

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 2 \sum_{i=1}^8 (y_i - (a + bx_i)) = 0,$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 2 \sum_{i=1}^8 (y_i - (a + bx_i)) x_i = 0.$$

由此, 得到如下线性方程组:

$$\begin{aligned} a \sum_{i=1}^8 i^0 + b \sum_{i=1}^8 x_i &= \sum_{i=1}^8 y_i, \\ a \sum_{i=1}^8 x_i + b \sum_{i=1}^8 x_i^2 &= \sum_{i=1}^8 x_i y_i. \end{aligned}$$

经过简单计算, 这个方程组成为

$$\begin{cases} 8a + 28b = 12.2, \\ 28a + 140b = 47.3. \end{cases}$$

解之可得 $a = 1.142, b = 0.110$, 从而得近似多项式 $p_1(x) = 1.142 + 0.110x$.

现在转入讨论更为一般的情形. 设已知列表函数 $y_i = f(x_i)$ ($i = 0, 1, \dots$,

m), 并且我们想用一个通常的 $n (< m)$ 次多项式

$$p_n(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \quad (1.1)$$

去近似它. 问题是应该如何选择 a_0, a_1, \dots, a_n 使 $p_n(x)$ 能较好地近似列表函数 $f(x)$. 按最小二乘法, 应该选择 a_0, a_1, \dots, a_n , 使得

$$S(a_0, a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=0}^m (f(x_i) - p_n(x_i))^2 \quad (1.2)$$

取最小. 注意到 S 是非负的, 且是 a_0, a_1, \dots, a_n 的 2 次多项式, 它必有最小值. 求 S 对 a_0, a_1, \dots, a_n 的偏导数, 并令其等于零, 得到

$$\sum_{i=0}^m (y_i - a_0 - a_1x_i - \cdots - a_nx_i^n) x_i^k = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, n).$$

进一步, 可以将它们写成

$$\sum_{i=0}^m y_i x_i^k = a_0 \sum_{i=0}^m x_i^k + a_1 \sum_{i=0}^m x_i^{k+1} + \cdots + a_n \sum_{i=0}^m x_i^{k+n} \quad (k = 0, 1, \dots, n).$$

引进记号

$$s_k = \sum_{i=0}^m x_i^k \quad \text{和} \quad u_k = \sum_{i=0}^m y_i x_i^k,$$

则上述方程组成为

$$\begin{cases} s_0 a_0 + s_1 a_1 + \cdots + s_n a_n = u_0, \\ s_1 a_0 + s_2 a_1 + \cdots + s_{n+1} a_n = u_1, \\ \cdots \cdots \cdots \\ s_n a_0 + s_{n+1} a_1 + \cdots + s_{2n} a_n = u_n. \end{cases} \quad (1.3)$$

它的系数行列式是

$$X_{n+1} = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_n \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n} \end{vmatrix}.$$

由 $s_i (i = 0, 1, \dots, 2n)$ 的定义及行列式性质, 可以断言

$$X_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} \sum (W(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n))^2. \quad (1.4)$$

此处符号 W 表 Vandermonde 行列式, 而 \sum 是对所有可能的 $\xi_i (i = 0, 1, \dots, n)$ 求

和(每个 ξ_i 可以取值 x_0, x_1, \dots, x_m , 并且当 $i \neq j$ 时 $\xi_i \neq \xi_j$).

由(1.4)式及 Vandermonde 行列式的性质可知, 当 x_0, x_1, \dots, x_m 互异时,

$$W(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \xi_0 & \xi_1 & \cdots & \xi_n \\ \xi_0^2 & \xi_1^2 & \cdots & \xi_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \xi_0^n & \xi_1^n & \cdots & \xi_n^n \end{vmatrix} \neq 0.$$

从而, $X_{n+1} \neq 0 (>0)$, 方程组(1.3)有唯一解 a_0, a_1, \dots, a_n , 且它们使(1.2)取极小值. 如此, 我们应用最小二乘法找到了 $f(x)$ 的近似多项式 $p_n(x)$.

在利用最小二乘法组成和式(1.2)时, 所有点 x_i 都起到了同样的作用, 但是有时依据某种理由认为 Σ 中的某些项的作用大些, 而另外一些作用小些(例如, 一些 y_i 是由精度较高的仪器或操作上比较熟练的人员获得的, 自然应该予以较大的信任), 这在数学上表现为用和

$$\sum_{i=0}^m \rho_i (f(x_i) - p_n(x_i))^2 \quad (1.5)$$

替代和式(1.2)取最小值. 此处诸 $\rho_i > 0$, 且 $\sum_{i=1}^n \rho_i = 1$, ρ_i 通常称为权; 而式(1.5)为加权和.

例 1 设已知函数 $y = f(x)$ 的表列值为

x	0.2	0.5	0.7	0.85	1
y	1.221	1.649	2.014	2.340	2.718

试按最小二乘法构造 $f(x)$ 的二次近似多项式.

解 经过简单计算可得关于参数 a_0, a_1 和 a_2 的方程组(参阅下面的第一个表):

$$5a_0 + 3.250a_1 + 2.503a_2 = 9.942,$$

$$3.250a_0 + 2.503a_1 + 2.090a_2 = 7.185,$$

$$2.503a_0 + 2.090a_1 + 1.826a_2 = 5.857.$$

解之, 得 $a_2 = 0.928, a_1 = 0.751, a_0 = 1.036$. 故

$$p_2(x) = 0.928x^2 + 0.751x + 1.036.$$

x^0	x^1	x^2	x^3	x^4	y	xy	x^2y
1	0.2	0.04	0.008	0.002	1.221	0.244	0.049
1	0.5	0.25	0.125	0.063	1.649	0.824	0.412
1	0.7	0.49	0.343	0.240	2.014	1.410	0.997
1	0.85	0.723	0.614	0.522	2.340	1.989	1.690
1	1	1	1	1	2.718	2.718	2.718
5	3.250	2.503	2.090	1.826	9.942	7.185	5.857

下表给出了 $p_2(x)$ 在结点处的误差.

x	0.2	0.5	0.7	0.85	1
y	1.221	1.649	2.014	2.340	2.718
$p_2(x)$	1.223	1.644	2.017	2.344	2.715
$y - p_2(x)$	-0.002	0.005	-0.003	-0.004	0.003

用多项式 $p_n(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ 去近似一个给定的列表函数(即给出的一组观测值 $y_i = f(x_i)$)时,需要确定的参数是 a_0, a_1, \dots, a_n ;而 $p_n(x)$ 可以看成是 a_0, a_1, \dots, a_n 的线性函数.但是有时在利用观测或实验数据去确定一个经验公式时,往往要确定的函数和待定参数之间不具有线性形式的关系.这样问题就变得有些复杂.然而,常常可以通过变量替换使其线性化.例如:

(i) 有时,我们希望用如下类型的函数:

$$s = pt^q \quad (1.6)$$

去近似一个由一组观测数据(列表)所描绘的函数,其中 p 和 q 是待定的两个参数.显然 s 已非 p 和 q 的线性函数.怎样线性化呢?为此,我们在(1.6)式两端取对数,得到

$$\ln s = \ln p + q \ln t.$$

记 $\ln s = y, \ln p = a_0, a_1 = q, x = \ln t$, 则(1.6)式变成

$$y = a_0 + a_1 x.$$

这是一个一次多项式,它的系数 a_0 和 a_1 可以用最小二乘法求得.

(ii) 我们经常希望用函数

$$S = A e^{Ct} \quad (1.7)$$

去近似一个已给定的列表函数,其中 A, C 是待定的参数.这时,我们可以在

(1.7)的两端取对数:

$$\ln S = \ln A + Ct$$

记 $\ln S = y$, $\ln A = a_0$, $C = a_1$, $x = t$, 则(1.7)式变成

$$y = a_0 + a_1 x$$

这样,仍可用最小二乘法定出 a_0, a_1 (从而也就定出了 A, C), 得到近似函数 $S = Ae^{Ct}$.

例 2 设已知如下一组实验数据:

t	2.2	2.7	3.5	4.1
S	65	60	53	50

试求一个(1.7)型的函数去近似它.

解 将计算过程以紧凑的形式表示如下:

x^0	$x = \ln t$	x^2	$y = \ln S$	xy
1	0.342 4	0.117 2	1.812 9	0.620 7
1	0.431 4	0.186 1	1.778 2	0.767 1
1	0.544 1	0.296 0	1.724 3	0.938 2
1	0.612 8	0.375 5	1.699 0	1.041 1
4	1.930 7	0.974 8	7.014 4	3.367 1
S_0	S_1	S_2	u_0	u_1

由此得方程组

$$4a_0 + 1.930 7a_1 = 7.014 4,$$

$$1.930 7a_0 + 0.974 8a_1 = 3.367 1.$$

解之得 $a_0 = \ln p = 1.963$, $p = 91.9$, $q = a_1 = -0.434$, 从而

$$S = 91.9 t^{-0.434}.$$

§ 2 空间 $L_{\rho(x)}^2$

设已知一列表函数 $y_i = f(x_i)$ ($i = 0, 1, \dots, m$). 为了构造函数 $f(x)$ 的一个 $n (< m)$ 次近似多项式 $p_n(x)$, 按最小二乘法, 应使和

$$S = \sum_{i=0}^m (p_n(x_i) - f(x_i))^2$$

取最小值. 这相当于在结点 x_i ($i = 0, 1, \dots, m$) 处约束 $p_n(x)$, 看 $p_n(x)$ 近似列表函数 $f(x)$ 的程度如何, 也只是看在这 $m + 1$ 个结点上的情况(亦即平方偏差 $(p_n(x_i) - f(x_i))^2$). 有时也需要考虑在全区间 $[a, b]$ 上构造函数 $f(x)$ 的近似多项式 $p_n(x)$, 此时自然应以积分

$$\int_a^b (p_n(x) - f(x))^2 dx$$

代替求和符号 Σ 并取最小值. 实际上, 在数值分析中常以数量

$$\| p - f \| = \sqrt{\int_a^b (p(x) - f(x))^2 dx}$$

来度量函数 $p(x)$ 与 $f(x)$ 的接近程度.

只要回想一下 n 维欧氏空间中的两点距离公式, 就知道上述数量可以类似地理解为函数空间中的元素 $p(x)$ 与 $f(x)$ 两者间的距离. 而当 $\| p_n - f \| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) 时, 也就可把 $p_n(x)$ 理解为按照上述的平方度量收敛于 $f(x)$, 记作

$$p_n(x) \xrightarrow{2} f(x), \quad n \rightarrow \infty.$$

在实变函数论中讨论 L^2 空间理论时, 人们正是这样来理解一个序列的收敛(或极限)概念的.

为了实用的需要, 我们还有必要进一步去扩充上述观点, 设 $\rho(x)$ 是一个在区间 $[a, b]$ 上(L)可积的非负函数, 它至多只在一个测度为零的集合上可能等于零. 以后我们常把 $\rho(x)$ 称为权函数.

对于任意一个定义在区间 $[a, b]$ 上的可测函数 $f(x)$, 如果 $\rho(x)f(x)$ 为(L)可积, 则就说 $f(x)$ 属于 $L_\rho[a, b]$ 类; 如果 $\rho(x)(f(x))^2$ 为(L)可积, 则说 $f(x)$ 属于 $L_\rho^2[a, b]$ 类.

由不等式

$$\rho(x)|f(x)| \leq \rho(x) \frac{1 + f^2(x)}{2},$$

可以看出, 凡 L_ρ^2 中的函数都在 L_ρ 内(即 $L_\rho^2 \subset L_\rho$). 又由不等式

$$|f(x)g(x)| \leq \frac{f^2(x) + g^2(x)}{2},$$

可知 L_ρ^2 中每两个函数之积恒属于 L_ρ .

现在介绍一下范数的概念. L_ρ^2 中的每一个函数 $f(x)$, 都赋予一个数值

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b \rho(x)[f(x)]^2 dx},$$

并称它为 f 的广义绝对值或范数. 由此

$$\|f-g\| = \sqrt{\int_a^b \rho(x)[f(x)-g(x)]^2 dx}$$

便给出了两个函数 f 和 g 之间的距离或接近程度的度量. 所谓平方逼近正是按照这种度量来衡量其逼近程度的.

下面关于范数的三条基本性质是容易验证的:

1. $\|f\| \geq 0$, 并且当且仅当 $f \equiv 0$ 时 $\|f\| = 0$;
2. $\|cf\| = |c| \cdot \|f\|$, c 为一任意常数;
3. $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$.

看来只有性质 3 是需要仔细验证的. 事实上, 在 Schwarz 不等式

$$\int_a^b \rho f g dx \leq \left(\int_a^b \rho f^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b \rho g^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

的两边乘以 2 并各加上

$$\int_a^b \rho f^2 dx + \int_a^b \rho g^2 dx$$

得到

$$\int_a^b \rho(f+g)^2 dx \leq \left(\left(\int_a^b \rho f^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b \rho g^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2.$$

再将上式两边各自开平方, 就恰好得到了性质 3 中的不等式.

利用泛函分析的术语来说, 若是一个函数类中的元素(函数), 按某种方式赋予范数的概念之后, 而范数恰好具有性质 1, 2 和 3, 那么就说该函数类构成一个赋范空间. 如此看来, 函数类 L_ρ^2 对于上面规定的范数来说恰好构成一个赋范空间, 不妨仍用 L_ρ^2 来表示这个空间, 同时还不妨把其中的所有元素(函数)称之为该空间的点.

读者不难自行验证, 当 $[a, b]$ 上一切连续函数 $f(x)$ (多项式自然包括在内) 赋以范数 $\|f\| = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$ 之后, 恰好构成一个赋范空间. 原因是性质 1, 2, 3 都是具备的.

下面, 我们来介绍一下距离空间的一般概念. 假设 S 是任意性质的元素 x ,

y, z, \dots 的集合. 如果对应于 S 中每一对元素 x 和 y 都具有如下性质的实数 $d(x, y)$:

1° $d(x, y) \geq 0$, 并且当且仅当 $x = y$ 时 $d(x, y) = 0$;

2° $d(x, y) = d(y, x)$;

3° $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (所谓三角不等式),

那么集合 S 便叫做“距离空间”, 而 $d(x, y)$ 称为元素 x 与 y 间的距离.

就 L^2_ρ 空间来看, 如果令

$$d(f, g) = \|f - g\|,$$

则条件 1° 与 2° 显然被满足, 而条件 3° 相当于

$$\|f - h\| \leq \|f - g\| + \|g - h\|,$$

其中 f, g, h 均属于 L^2_ρ . 由于 $f - h = (f - g) + (g - h)$, 所以这个不等式是可以从范数性质 3 推导出来的. 因此 L^2_ρ 又构成一个距离空间.

仿 L^2 空间的理论, 我们也可对 L^2_ρ 中的元素序列 $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ 引进平均收敛性概念. 假如 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0$, 则称序列 $f_n(x)$ 平均收敛于 $f(x)$, 记作 $f_n(x) \xrightarrow[\rho]{2} f(x)$ ($n \rightarrow \infty$). 完全类似地, 假如

$$\|f_m - f_n\| \rightarrow 0 \quad (m, n \rightarrow \infty),$$

则称 $\{f_n\}$ 为 L^2_ρ 中的基本序列. 还可以证明, L^2 空间理论中的 Fischer 定理在此仍然成立. 亦即, 凡 L^2_ρ 中的基本序列必有极限且极限函数仍在 L^2_ρ 中 (这也就是关于 L^2_ρ 空间的完备性定理).

§ 3 直交函数系与广义 Fourier 级数

设 $\rho(x)$ 为定义在闭区间 $[a, b]$ 上的权函数. 如果函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 满足条件:

$$\int_a^b \rho(x) f(x) g(x) dx = 0,$$

则称函数 f 与 g 在 $[a, b]$ 上关于权函数 $\rho(x)$ 是直交的. 如果函数系统

$$\omega_1(x), \omega_2(x), \dots, \omega_k(x), \dots$$

中每一对函数在区间 $[a, b]$ 上关于权函数 $\rho(x)$ 均为直交, 则称该系统为 $[a, b]$ 区间上关于权函数 $\rho(x)$ 的直交函数系. 特别, 若 $\rho(x) \equiv 1$, 那就可以不必提到权

函数.

让我们在这里列举几个最常见的直交函数系.

例 1 三角函数系

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$$

是定义在闭区间 $[-\pi, \pi]$ 上的直交函数系.

例 2 余弦函数系与正弦函数系

$$1, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx, \dots$$

$$\sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx, \dots$$

均是 $[0, \pi]$ 上的直交函数系.

例 3 Legendre 多项式

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{d}{dx} \right)^n (x^2 - 1)^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

是区间 $[-1, 1]$ 上的直交多项式系.

例 4 Tchebyshev 多项式系

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

是区间 $[-1, 1]$ 上对权函数 $(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$ 而言的直交系.

例 5 考虑 Sturm-Liouville 型微分方程边值问题: $y'' + \lambda \rho(x) y = 0$, $y(a) = y(b) = 0$, 此处权函数 $\rho(x) > 0$ 是定义在 $[a, b]$ 上的连续函数, 而 λ 为数值参数. 除去平凡解 $y(x) \equiv 0$ 不予考虑之外, 凡不恒等于零的解 $y(x)$ 均称为基本函数, 而对应的 λ 值称为特征值(注意并非任何 λ 值都对应有基本函数). 根据微分方程理论, 上述问题的特征值总是存在的, 而且除常数因子不计外, 对应于每一特征值都只有一个基本函数. 特征值可以由小到大地排列起来, 因而对应的基本函数也可排成一列, 例如:

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots,$$

$$y_1(x), y_2(x), y_3(x), \dots$$

可以证明, 上列的基本函数系在闭区间 $[a, b]$ 上关于权 $\rho(x)$ 是直交系.

事实上, 假如 $i \neq k$, 则

$$y_i'' + \lambda_i \rho(x) y_i = 0, \quad y_k'' + \lambda_k \rho(x) y_k = 0.$$

用 y_k, y_i 分别乘以第一、第二式, 再相减可得

$$(\lambda_i - \lambda_k) \rho(x) y_i y_k + \frac{d}{dx} (y_k y'_i - y_i y'_k) = 0.$$

两边积分又可得

$$(\lambda_i - \lambda_k) \int_a^b \rho(x) y_i y_k dx + [y_k y'_i - y_i y'_k]_a^b = 0.$$

由边界条件及 $\lambda_i \neq \lambda_k$ 便得知

$$\int_a^b \rho(x) y_i y_k dx = 0.$$

证毕.

下面着重介绍广义的 Fourier 展开问题. 设 $\{\omega_k(x)\}$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) 在区间 $[a, b]$ 上关于权函数 $\rho(x)$ 构成直交函数系, 其中每一个 $\omega_k(x)$ 均不几乎处处等于零且均在空间 L_ρ^2 中, 因而

$$A_k = \int_a^b \rho(x) \omega_k^2(x) dx \quad (k = 1, 2, \dots)$$

都是有限正数. 特别, 若 $A_k = 1$ ($k = 1, 2, \dots$), 则称 $\{\omega_k(x)\}$ 为标准直交系(显然, $\left\{ \frac{\omega_k(x)}{\sqrt{A_k}} \right\}$ 总是标准直交系).

设 $f(x) \in L_\rho^2$, 称按下式算出的常数

$$c_k = \frac{1}{A_k} \int_a^b \rho(x) \omega_k(x) f(x) dx \quad (k = 1, 2, \dots)$$

为 $f(x)$ 的广义 Fourier 系数, 从而有如下的广义 Fourier 级数:

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k \omega_k(x).$$

由于我们还不能断定上面的 Fourier 级数是否平均收敛于 $f(x)$, 所以只能用联结符号 \sim 去表示它们之间的相应关系. 尽管如此, 这个级数的部分和却能用来圆满地解答一般形式的最小二乘法问题. 这便是下面的定理.

定理 1 (Toepler) 对于任意指定的正整数 n , 用线性组合式

$$F(x) = \sum_{k=1}^n a_k \omega_k(x)$$

作成的函数对给定的 $f(x)$ 进行平方逼近时, 为使偏差(平均平方偏差)

$$\| F - f \| = \left(\int_a^b \rho(x) [F(x) - f(x)]^2 dx \right)^{1/2}$$

达到最小值, 函数 $F(x)$ 必须等于广义 Fourier 级数的部分和 $S_n(x)$:

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n c_k \omega_k(x).$$

而偏差的最小值等于

$$\|S_n(x) - f(x)\| = \left(\int_a^b \rho(x)[f(x)]^2 dx - \sum_{k=1}^n A_k c_k^2 \right)^{1/2}.$$

证明 根据 $\{\omega_k\}$ 的直交性易于算出

$$\begin{aligned}\|F-f\|^2 &= \int_a^b \rho(x)[F(x)-f(x)]^2 dx \\&= \int_a^b \rho F^2 dx + \int_a^b \rho f^2 dx - 2 \int_a^b \rho F f dx \\&= \int_a^b \rho \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \omega_k^2 \right) dx + \int_a^b \rho f^2 dx - 2 \int_a^b \rho \left(\sum_{k=1}^n a_k \omega_k f \right) dx \\&= \sum_{k=1}^n A_k a_k^2 + \int_a^b \rho f^2 dx - 2 \sum_{k=1}^n A_k a_k c_k \\&= \int_a^b \rho f^2 dx + \sum_{k=1}^n A_k (a_k - c_k)^2 - \sum_{k=1}^n A_k c_k^2,\end{aligned}$$

因此要使 $\|F-f\|^2$ 取最小值, 唯有令 $a_k = c_k$. 亦即, 只有当 $F(x)$ 恰好等于 Fourier 级数的部分和 $S_n(x)$ 时才给出了偏差 $\|F-f\|$ 的最小值. 证毕.

注意 $\|S_n - f\| \geq 0$, 因此根据最小值的那个表达式, 立即推出

$$\sum_{k=1}^n A_k c_k^2 \leq \int_a^b \rho(x)[f(x)]^2 dx.$$

又因为不等式的右端与 n 无关, 故可令 $n \rightarrow \infty$ 而得出

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k c_k^2 \leq \int_a^b \rho(x)[f(x)]^2 dx. \quad (3.1)$$

通常称(3.1)式为广义 Bessel 不等式.

根据偏差的最小值表达式知, 上述的 Bessel 不等式能改为所谓的 Parseval 等式:

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k c_k^2 = \int_a^b \rho(x)[f(x)]^2 dx$$

的充要条件是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n(x) - f(x)\| = 0.$$

换言之, Fourier 级数的部分和 $S_n(x)$ 平均收敛于 $f(x)$ 这件事是同 $f(x)$ 的 Parseval 等式成立这件事互相等价的. 因此, L_p^2 空间中的一个 Fourier 级数是否收敛的问题也就归结为 Parseval 等式是否成立的问题.

试问, 在什么条件下, 给定的数列 $\{c_k\}$ 能够有资格作为 L_p^2 中某一函数 $f(x)$ 的 Fourier 系数, 并且由其形成的 Fourier 级数平均收敛于 $f(x)$? 正像通常的 Fourier 级数论那样, 对于这个问题的回答有如下的定理.

定理 2(Riesz-Fischer) 设 $\{\omega_k(x)\}$ 在闭区间 $[a, b]$ 上关于权函数 $\rho(x)$ 构成直交函数系. 若数列 $\{c_k\}$ ($k = 1, 2, \dots$) 满足条件:

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k c_k^2 < +\infty,$$

其中 $A_k = \int_a^b \rho \omega_k^2 dx$, 则 L_p^2 中存在唯一的函数 $f(x)$, 使得 $f(x)$ 的 Fourier 系数恰好是 $\{c_k\}$, 且 $\sum_{k=1}^n c_k \omega_k(x) \xrightarrow[\rho]{2} f(x)$.

证明 记

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n c_k \omega_k(x),$$

则于 $m > n$ 时依 ω_k 间的直交性, 显然有

$$\begin{aligned} \|S_m - S_n\|^2 &= \left\| \sum_{k=n+1}^m c_k \omega_k \right\|^2 = \int_a^b \rho \left[\sum_{k=n+1}^m c_k \omega_k \right]^2 dx \\ &= \sum_{k=n+1}^m A_k c_k^2 \rightarrow 0 \quad (m > n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

因此 $\{S_n\}$ 为一基本序列, 从而由 L_p^2 的完备性得知其极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$ 亦在 L_p^2 中 (当然这里所说的极限是按照平均收敛的意义而言的), 亦即有 L_p^2 中的函数 $f(x)$ 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n - f\| = 0.$$

现在来验证 $\{c_k\}$ 恰好是 $f(x)$ 的 Fourier 系数. 由于

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b \rho(f - S_n) \omega_k dx \right| &\leq \left(\int_a^b \rho(f - S_n)^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_a^b \rho \omega_k^2 dx \right)^{1/2} \\ &= \|f - S_n\| \sqrt{A_k} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

故

$$\int_a^b \rho f \omega_k dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \rho S_n \omega_k(x) dx = c_k A_k.$$

这表明 c_k 恰好是 $f(x)$ 的 Fourier 系数. 从而 S_n 恰好是 $f(x)$ 的 Fourier 级数的前 n 项部分和, 而极限关系式 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n - f\| = 0$ 表明该 Fourier 级数是平均收敛的:

$$S_n \xrightarrow[\rho]{2} f.$$

又因为序列 $S_n(x)$ 的极限是唯一的, 因此作为极限函数而存在的 $f(x)$ 也是唯一的. 证毕.

若一个直交函数系 $\{\omega_k\}$ 对于 L^2_ρ 中的每一函数, Parseval 等式都成立, 则称它为封闭的直交函数系.

若 $\{\omega_k\}$ 为封闭的直交函数系, 而 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为 L^2_ρ 中的任意两函数, 它们的 Fourier 系数分别为 $\{\alpha_k\}$ 与 $\{\beta_k\}$, 则下列广义 Parseval 等式成立:

$$\int_a^b \rho(x) f(x) g(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \alpha_k \beta_k.$$

事实上, 因为 $f+g$ 的 Fourier 系数为 $\{\alpha_k + \beta_k\}$, 因此利用通常的 Parseval 等式, 有

$$\begin{aligned} \int_a^b \rho(f^2 + 2fg + g^2) dx &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k (\alpha_k^2 + 2\alpha_k \beta_k + \beta_k^2), \\ \int_a^b \rho f^2 dx &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \alpha_k^2, \quad \int_a^b \rho g^2 dx = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \beta_k^2. \end{aligned}$$

由上面三式间的比较便可得出广义的 Parseval 等式.

给定一个直交系 $\{\omega_k\}$, 如果 L^2_ρ 中再也没有一个函数(几乎处处等于零的函数除外)能和一切 ω_k 相直交, 那么 $\{\omega_k\}$ 便称为完备的直交系.

直交系的完备性实际是和封闭性等价的. 这就是下述的定理.

定理 3 $\{\omega_k\}$ 是一个完备直交系的充分必要条件是: 它是一个封闭直交系.

证明 如果 $\{\omega_k\}$ 是封闭直交系, 当函数 f 和每一个 ω_k 都直交时, 则该函数的 Fourier 系数就都等于零, 即 $c_k = 0 (k = 1, 2, \dots)$. 因而根据 Parseval 等式就得到

$$\int_a^b \rho f^2 dx = 0.$$

注意 ρ 非负而且至多只在一个零测度集上可能等于 0, 因此可断言 $f(x)$ 只能几乎处处等于 0. 这就表明 $\{\omega_k\}$ 必是一个完备直交系.

反之, 如果 $\{\omega_k\}$ 不是封闭的, 则在 L^2_ρ 中就有使 Parseval 等式不成立的函数 $g(x)$, 亦即有

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k c_k^2 < \int_a^b \rho(x) [g(x)]^2 dx,$$

其中 c_k 为 $g(x)$ 的 Fourier 系数. 既然 $\sum_{k=1}^{\infty} A_k c_k^2 < +\infty$, 故按 Riesz-Fischer 定理,

L^2_ρ 中又必存在函数 $f(x)$, 它以 $\{c_k\}$ 作为 Fourier 系数, 且 $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \omega_k \xrightarrow{\frac{2}{\rho}} f(x)$

($n \rightarrow \infty$), 从而有

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k c_k^2 = \int_a^b \rho(x) [f(x)]^2 dx.$$

以此与上述不等式相比较, 可知差函数 $h(x) = f(x) - g(x)$ 不能几乎处处等于 0. 然而 $h(x)$ 的 Fourier 系数都是 0(亦即 $h(x)$ 与一切 ω_k 直交), 这表明 $\{\omega_k\}$ 必非完备直交系. 定理证毕.

作为简单总结, 我们知道下列诸概念都是彼此等价的:

- 1° $\{\omega_k\}$ 是完备直交系;
- 2° $\{\omega_k\}$ 是封闭直交系;
- 3° Parseval 等式对每个 $f \in L_p^2$ 都成立;
- 4° L_p^2 中每个 f 的 Fourier 级数都平均收敛;
- 5° 只有几乎处处取零值的函数才能同一切 ω_k 直交;
- 6° 当两个函数有相同的 Fourier 级数时, 它们必定几乎处处相等;
- 7° 对 L_p^2 中的每个 f 用 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ 的线性组合来做平方逼近时, 偏差的最小值恒与 $\frac{1}{n}$ 同时趋于 0;
- 8° 由 $\{\omega_k\}$ 中的函数的一切线性组合构成的类是在 L_p^2 中稠密的(也就是说: 对 L_p^2 中的每个 f 及对任意 $\epsilon > 0$, 都存在有满足不等式 $\|F - f\| < \epsilon$ 的线性组合 $F(x) = \sum_1^n a_k \omega_k$).

注意上述的等价命题 7° 可直接从 Toepler 定理的结论得知. 而 8° 与 7° 的等价关系也是十分明显的.

§ 4 直交函数结构公式

函数系的线性相关与线性无关的概念和通常向量代数中的相关与无关概念是完全一样的.

设 $\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_n(x)$ 是定义在 $[a, b]$ 上的函数系. 若能找到一组不全为 0 的常数 a_1, a_2, \dots, a_n , 使得

$$a_1 \phi_1(x) + a_2 \phi_2(x) + \cdots + a_n \phi_n(x) \equiv 0,$$

那么就称该函数系是线性相关的. 反之, 便称之为线性无关的(只要函数是几乎处处等于零, 就说它恒等于零, 并用记号“ $\equiv 0$ ”表示). 显然在线性无关的情形下要使

$$\sum_{k=1}^n a_k \omega_k(x) = 0$$

就只有 $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$.

一个包含可数多个函数的函数系,要是它的每一个有限部分都是线性无关的,那么该函数系便称为线性无关的.

例 1 函数系 $1, x, x^2, \dots$ 是线性无关的.

事实上,它的每一个有限部分 $x^{n_1}, x^{n_2}, \dots, x^{n_k}$ ($0 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_k$) 都是在任何区间上的线性无关函数系.

例 2 关于权函数 $\rho(x)$ 的任意直交函数系 $\{\omega_k(x)\}$ 都是线性无关的.

事实上,要是 $a_1\omega_{k_1} + \dots + a_n\omega_{k_n} \equiv 0$, 则以 $\rho\omega_{k_i}$ 乘等式的两边并积分, 得到 $a_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

作为例 2 的特例,我们知道三角函数系、余弦函数系、正弦函数系等都是线性无关的系统.

设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是 L_ρ^2 中的两个函数,则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 乘积的积分

$$(f, g) = \int_a^b \rho(x) f(x) g(x) dx$$

为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的内积,如果 $\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_n(x)$ 都是 $L_\rho^2[a, b]$ 中的函数,则称由内积构成的行列式

$$\Delta_n \equiv \Delta(\phi_1, \dots, \phi_n) = \begin{vmatrix} (\phi_1, \phi_1) & (\phi_1, \phi_2) & \cdots & (\phi_1, \phi_n) \\ (\phi_2, \phi_1) & (\phi_2, \phi_2) & \cdots & (\phi_2, \phi_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\phi_n, \phi_1) & (\phi_n, \phi_2) & \cdots & (\phi_n, \phi_n) \end{vmatrix}$$

为函数系 $\{\phi_k(x)\}$ 的 Gram 行列式. 借助这种行列式可以给出一个关于函数系统线性相关与否的判别准则:

定理 4 函数系 $\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_n(x)$ 为线性相关的充分必要条件是 Gram 行列式

$$\Delta(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n) = 0.$$

证明 若函数系为线性相关,则由定义可知有不全为 0 的数值 a_1, \dots, a_n 使得 $\sum_{k=1}^n a_k \phi_k \equiv 0$. 于是将此式两边乘以 $\rho\phi_1, \dots, \rho\phi_n$ 之后再积分,便得到下列方程组:

$$\sum_{k=1}^n a_k (\phi_k, \phi_j) = 0 \quad (j = 1, \dots, n).$$

既然上面的齐次方程组有非零解 $(a_1, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$, 故其系数行列式的值一定为 0, 亦即

$$\Delta(\phi_1, \dots, \phi_n) = 0.$$

反之, 若 $\Delta_n = 0$, 则上述方程组将有非零解 $(a_1, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$. 显然, 方程组可改写为

$$\int_a^b \rho \left(\sum_{k=1}^n a_k \phi_k \right) \phi_j dx = 0 \quad (j = 1, \dots, n).$$

于是用 a_j 乘上式两边之后再取和, 便得到

$$\begin{aligned} & \int_a^b \rho \left(\sum_{k=1}^n a_k \phi_k \right) \left(\sum_{j=1}^n a_j \phi_j \right) dx \\ &= \int_a^b \rho \left(\sum_{k=1}^n a_k \phi_k \right)^2 dx = 0. \end{aligned}$$

这表明 $\sum_{k=1}^n a_k \phi_k \equiv 0$, 亦即函数系 ϕ_1, \dots, ϕ_n 是线性相关的. 证毕.

容易看出, 如若 $\Delta_n \neq 0$, 则必有 $\Delta_1 \neq 0, \dots, \Delta_{n-1} \neq 0$. 事实上, 若 $\Delta_k = 0 (k < n)$, 则 ϕ_1, \dots, ϕ_k 便将是线性相关的, 从而 $\phi_1, \dots, \phi_k, \dots, \phi_n$ 也将线性相关了.

定理 5 若 ϕ_1, \dots, ϕ_n 线性无关则 $\Delta_n > 0$.

证明 令 $\psi_n(x)$ 由如下行列式所定义:

$$\psi_n(x) = \begin{vmatrix} (\phi_1, \phi_1) & \cdots & (\phi_1, \phi_{n-1}) & \phi_1 \\ (\phi_2, \phi_1) & \cdots & (\phi_2, \phi_{n-1}) & \phi_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (\phi_n, \phi_1) & \cdots & (\phi_n, \phi_{n-1}) & \phi_n \end{vmatrix}, \quad (4.1)$$

则用 $\rho \phi_k (k \leq n)$ 乘上式两边再对 x 积分, 可得

$$(\psi_n, \phi_k) = \begin{cases} \Delta_n, & k = n, \\ 0, & k < n, \end{cases} \quad (4.2)$$

事实上, 当 $k < n$ 时, 将(4.1)式右边行列式的最后一列乘以 $\rho \phi_k$ 再对 x 积分之后便与前面的第 k 列相同. 今将 $\psi_n(x)$ 的行列式展开, 则

$$\psi_n(x) = a_1 \phi_1(x) + \cdots + a_{n-1} \phi_{n-1}(x) + \Delta_{n-1} \phi_n(x). \quad (4.3)$$

既然 $\Delta_n \neq 0$, 故 $\Delta_{n-1} \neq 0$, 因而 $\psi_n(x) \neq 0$. 今以 $\rho \psi_n$ 乘以(4.3)式两边并积分, 再注意到 $(\psi_n, \phi_k) = 0 (k < n)$, 则得

$$\int_a^b \rho \psi_n^2 dx = \Delta_{n-1} (\phi_n, \psi_n) = \Delta_{n-1} \Delta_n > 0,$$

从而可见 Δ_n 与 Δ_{n-1} 的符号相同. 依此类推, 可知 Δ_n 与 $\Delta_{n-1}, \dots, \Delta_1$ 的符号都相同. 但 $\Delta_1 = (\phi_1, \phi_1) > 0$, 因此 $\Delta_n > 0$. 定理得证.

我们不准备重述实变函数论中的 Schmidt 直交化步骤, 而给出直交函数的普遍结构公式.

定理 6 设 $\phi_1(x), \phi_2(x), \dots$ 是 $L^2[a, b]$ 中的一个线性无关函数系(有限或可数)又设 $\psi_n(x)$ 的定义如前, 则按下列公式

$$\omega_1(x) = \phi_1(x) / \sqrt{\Delta_1}, \quad \omega_k = \psi_k(x) / \sqrt{\Delta_k \Delta_{k-1}} \quad (k \geq 2)$$

便可造出一个标准直交系 $\{\omega_k\}$.

证明 为使 $\omega_k(x)$ 的表达式对一切 $k \geq 1$ 都通用, 只需规定 $\Delta_0 \equiv 1$ 就可以了. 今设 $1 \leq n \leq k$, 则根据定理 5 证明中已证明的公式(4.2), 易算出如下的内积:

$$\begin{aligned} (\omega_n, \omega_k) &= \frac{(\psi_n, \psi_k)}{\sqrt{\Delta_n \Delta_{n-1} \Delta_k \Delta_{k-1}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\Delta_n \Delta_{n-1} \Delta_k \Delta_{k-1}}} \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i \phi_i + \Delta_{n-1} \phi_n, \psi_k \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\Delta_n \Delta_{n-1} \Delta_k \Delta_{k-1}}} \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i (\phi_i, \psi_k) + \Delta_{n-1} (\phi_n, \psi_k) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\Delta_n \Delta_{n-1} \Delta_k \Delta_{k-1}}} \Delta_{n-1} (\phi_n, \psi_k) \\ &= \begin{cases} 1, & \text{当 } n = k \text{ 时,} \\ 0, & \text{当 } n < k \text{ 时.} \end{cases} \end{aligned}$$

证毕.

§ 5 直交多项式的一般性质

在前面 § 3 中讨论广义 Fourier 展开时, 我们已经知道利用直交函数的线性组合, 能够对指定的函数作平方逼近. 另一方面, 从实际计算的可行性与简便性观点出发, 我们曾一再强调过利用多项式函数作逼近工具是最理想的. 因此人们自然就去考虑这样的问题: 能否构造出种种最有用的直交多项式系统以便作为平方逼近的工具?

看来上述问题是解答的. 因为首先, 原始的幂函数系 $1, x, x^2, x^3, \dots$ 在任一闭区间 $[a, b]$ 上都是线性无关的; 其次, 根据 Schmidt 直交化手续或直交函数

结构公式,对于每一个函数 $\rho(x)$ 总是可以将该幂函数系进行直交化的.

我们还必须考虑这样一个更基本的问题,即不论 $\rho(x)$ 是怎样的权函数,多项式类是否总是在 L^2_ρ 中稠密? 也就是问:是否对 L^2_ρ 中的每个函数都能用多项式作任意精确的逼近? 事实上,我们有如下的定理.

定理 7 设 $f(x) \in L^2_\rho[a, b]$, 则对任意 $\epsilon > 0$, 都存在多项式 $p(x)$, 使得 $\|f - p\| < \epsilon$.

证明 分三步证. 首先证明存在有界可测函数 $g(x)$, 使得 $\|f - g\| < \epsilon/3$. 事实上, 由于点集序列

$$E(|f(x)| > 1) \supseteq E(|f(x)| > 2) \supseteq \dots,$$

因此点集 $E(|f| > n)$ 的测度的极限为

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} mE(|f| > n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} m \prod_{k=1}^n E(|f| > k) \\ &= m \prod_{k=1}^{\infty} E(|f| > k) = 0. \end{aligned}$$

又由于 Lebesgue 积分的绝对连续性, 可知存在 $\delta > 0$, 使得对含于 $[a, b]$ 中的任一可测子集 Δ , 当 $m\Delta < \delta$ 时, 有

$$\int_{\Delta} \rho(x)[f(x)]^2 dx < \frac{\epsilon^2}{9}.$$

今取 n 充分大, 使得 $mE(|f| > n) < \delta$, 于是引入有界可测函数 g :

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{当 } |f(x)| > n \text{ 时,} \\ f(x), & \text{当 } |f(x)| \leq n \text{ 时,} \end{cases}$$

便可导出

$$\begin{aligned} \|f - g\|^2 &= \int_{E(|f| \leq n)} \rho(f - g)^2 dx + \int_{E(|f| > n)} \rho(f - g)^2 dx \\ &= \int_{E(|f| > n)} \rho(f - g)^2 dx = \int_{\Delta} \rho f^2 dx < \frac{\epsilon^2}{9}. \end{aligned}$$

这就表明确实存在有界可测函数 g , 使得 $\|f - g\| < \epsilon/3$.

其次再证明对有界可测函数 $g(|g| \leq n)$, 恒存在一连续函数 $\phi(x)$, 使得 $\|g - \phi\| < \epsilon/3$. 事实上, 存在充分小正数 δ_0 , 使得 $\Delta \subset [a, b]$, $m\Delta < \delta_0$ 时, 能保证

$$\int_{\Delta} \rho(x) dx < \frac{\epsilon^2}{36n^2}.$$

根据 Luzin 定理知有连续函数 $\phi(x)$ 满足条件: $|\phi| < 1$ 及 $mE(g \neq \phi) < \delta_0$, 因而

得到

$$\begin{aligned}\|g - \phi\|^2 &= \int_{E(g=\phi)} \rho(g-\phi)^2 dx + \int_{E(g \neq \phi)} \rho(g-\phi)^2 dx \\ &\leq (2n)^2 \int_{E(g \neq \phi)} \rho dx < \frac{\epsilon^2}{9}.\end{aligned}$$

这就表明有连续函数 ϕ , 使得 $\|g - \phi\| < \frac{\epsilon}{3}$.

最后根据 Weierstrass 第一逼近定理, 可知恒存在多项式 $p(x)$, 使得

$$\|\phi - p\|^2 = \int_a^b \rho(\phi - p)^2 dx < \frac{\epsilon^2}{9}.$$

亦即 $\|\phi - p\| < \frac{\epsilon}{3}$. 因此利用范数的三角不等式便终于得到所希望证明的结果:

$$\|f - p\| \leq \|f - g\| + \|g - \phi\| + \|\phi - p\| < \epsilon.$$

现在再让我们来注意一个事实: 假如对权函数 $\rho(x)$ 而言已经作出一个标准直交多项式系 $\phi_0(x), \phi_1(x), \dots, \phi_n(x), \dots$, 其中 $\phi_n(x)$ 的次数正好是 n , 那么对于任意给定的 n 次多项式 $p(x)$, 显然总可以取一适当常数 c , 使得 $p(x) - c\phi_n(x)$ 降低成为 $n-1$ 次多项式. 于是利用 $\phi_{n-1}(x)$ 乘上适当常数去减它又可降低成为 $n-2$ 次多项式. 以此类推, 便可知: 凡 n 次多项式总可以用 $\phi_n, \phi_{n-1}, \dots, \phi_0$ 的线性组合去表示.

如此, 上面所建立的多项式逼近定理又可改述成这样形式: “设 $f \in L_\rho^2$, 则对任意 $\epsilon > 0$, 都存在着诸 ϕ_k 的某一线性组合 $\sum_{k=1}^n a_k \phi_k$, 使得 $\|f - \sum_{k=1}^n a_k \phi_k\| < \epsilon$ ”. 这也可以概括成一句话: “由 $\{\phi_k\}$ 中的函数的所有线性组合构成的类是在 L_ρ^2 中稠密的”.

由 § 3 之最后总结中的等价命题 $8^\circ, 1^\circ, 2^\circ$ 不难推知下列定理为真:

定理 8 对权函数 $\rho(x)$ 而言的标准直交多项式系 $\{\phi_n(x)\}$ (ϕ_n 的次数是 n) 是 L_ρ^2 空间中的完备直交系(亦即封闭直交系).

定理 9 幂函数系 $1, x, x^2, \dots$ 对任何 L_ρ^2 空间来说都是完备的.

经过以上理论分析之后, 可以看出, 如何利用直交多项式系来作为各空间 L_ρ^2 中的平方逼近工具是极有意义的问题. 以下便进入较具体的讨论.

设 $\rho(x)$ 为给定的权函数, 令 $\{x^k\} (k=0, 1, 2, \dots)$ 为给定在区间 $[a, b]$ 上的幂函数系. 称

$$\mu_n = \int_a^b \rho(x) x^n dx \quad (n=0,1,2,\dots)$$

为权函数 $\rho(x)$ 的矩量. 显然内积 (x^p, x^q) 可表成

$$(x^p, x^q) = \int_a^b \rho(x) x^{p+q} dx = \mu_{p+q}.$$

因而 Gram 行列式 $\Delta(1, x, \dots, x^n)$ 可记成

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} (1,1) & (1,x) & \cdots & (1,x^n) \\ (x,1) & (x,x) & \cdots & (x,x^n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (x^n,1) & (x^n,x) & \cdots & (x^n,x^n) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{n+n} \end{vmatrix}.$$

其次, § 4 中定理 5 证明中引进的 $\phi_n(x)$ 函数可表成

$$\phi_n(x) = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_{n-1} & 1 \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_n & x \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n-1} & x^n \end{vmatrix}.$$

为方便计可规定 $\phi_0(x) \equiv 1, \Delta_{-1} \equiv 1$. 于是根据 § 4 中的定理 6, 便可以构造出如下的标准直交函数系 $\{\phi_n(x)\}$:

$$\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_n \Delta_{n-1}}} \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_{n-1} & 1 \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_n & x \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n-1} & x^n \end{vmatrix} \quad (n=0,1,2,\dots).$$

注意 $\phi_n(x)$ 正好是次数为 n 的多项式, 而且 x^n 的系数是 $\Delta_{n-1}/\sqrt{\Delta_n \Delta_{n-1}} = \sqrt{\Delta_{n-1}/\Delta_n} \neq 0$. 总结一下, 便是下面的定理:

定理 10 不论定义在 $[a, b]$ 上的权函数 $\rho(x)$ 如何, 都存在有关于权 $\rho(x)$ 的标准直交多项式系 $\phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_n(x), \dots$, 其中 $\phi_n(x)$ 正好是 n 次多项式, 其具体结构形式由上列公式给出.

按 § 4 中的理论不难推知, 对于给定的权而言, 除每个直交函数的正负号容许选择之外, 标准直交函数系是唯一确定的. 因此在规定取正号以后, 定理 10 中的 $\phi_n(x)$ 都是唯一存在的. 值得再指出的是: 只要知道一串矩量 $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots$ 的值, $\{\phi_n\}$ 也就可以造出来了.

如果所要求的只是直交多项式系, 而并不要求标准化, 那么直交系中的每一个函数除了可以变动一个常数因子之外, 其构造形式基本上也是唯一确定的, 这

就是下面的定理.

定理 11 设 $f_0(x), f_1(x), f_2(x), \dots$ 是对权函数 $\rho(x)$ 的直交系, $f_n(x)$ 正好是 n 次多项式, 而最高次项系数为 p_n , 则诸 f_n 必可唯一地表示成

$$f_0(x) = p_0, f_n(x) = p_n \sqrt{\Delta_n / \Delta_{n-1}} \phi_n(x) \quad (n=1, 2, \dots).$$

事实上, 因为 $f_n(x)$ 可以表示成

$$f_n(x) = \alpha_0 \phi_0(x) + \alpha_1 \phi_1(x) + \dots + \alpha_n \phi_n(x),$$

而且 $\phi_0(x), \phi_1(x), \dots, \phi_{n-1}(x)$ 也可以表示成 $f_0(x), f_1(x), \dots, f_{n-1}(x)$ 的线性组合, 因此由诸 $f_k(x)$ 间的直交性与诸 $\phi_k(x)$ 间的直交性便推知当 $k \leq n-1$ 时, 恒有

$$(f_n, \phi_k) = \alpha_k (\phi_k, \phi_k) = 0 \quad (\alpha_k = 0).$$

这就表明 $f_n(x) = \alpha_n \phi_n(x)$.

注意 $f_n(x)$ 中 x^n 的系数为 p_n , 而 $\alpha_n \phi_n(x)$ 中 x^n 的系数为 $\alpha_n \sqrt{\Delta_{n-1} / \Delta_n}$. 因此由相等关系定出 α_n 的数值之后, 也就得到定理的证明.

定理 12 设 $f(x) \in L^2_\rho$, 则在所有次数不高于 n 的多项式 $p(x)$ 中, 使平方偏差

$$\| f - p \| ^2 = \int_a^b \rho(x) [f(x) - p(x)]^2 dx$$

达到最小值的只有其 Fourier 级数的部分和

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k \phi_k(x) \quad (c_k = (f, \phi_k)),$$

并且最小平方偏差是

$$\min \| f - p \| ^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k^2.$$

这个定理是一般的 Toepler 定理的推论. 注意标准直交多项式系 $\{\phi_k\}$ 是封闭的, 故有 Parseval 等式成立, 因而最小平方偏差为

$$\begin{aligned} \| f - S_n \| ^2 &= \int_a^b \rho [f]^2 dx - \sum_{k=1}^n c_k^2 \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 - \sum_{k=1}^n c_k^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k^2. \end{aligned}$$

这就证明了定理 12. 多项式 $\phi_n(x)$ 还有一个有趣的极值性质:

定理 13 在最高次项系数为 1 的所有 n 次多项式中, 使积分 $(p, p) =$

$\int_a^b \rho(x)[p(x)]^2 dx$ 达到其最小值的多项式只有

$$p(x) = \sqrt{\Delta_n / \Delta_{n-1}} \phi_n(x).$$

证明 显然最高次项系数为 1 的 n 次多项式 $p(x)$ 恒可表作

$$p(x) = a_0 \phi_0(x) + \cdots + a_{n-1} \phi_{n-1}(x) + \sqrt{\Delta_n / \Delta_{n-1}} \phi_n(x).$$

因此选择多项式 $p(x)$ 就等于选择系数 a_0, \dots, a_{n-1} . 既然 $p(x)$ 本身为多项式且已表示成 ϕ_0, \dots, ϕ_n 的有穷级数(亦即 Fourier 级数部分和), 故 Parseval 等式自然成立, 亦即有

$$\int_a^b \rho(x)[p(x)]^2 dx = \sum_{k=0}^n a_k^2 + \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}.$$

由此可见其最小值即由条件 $a_0 = \cdots = a_n = 0$ 所给出. 定理得证.

直交多项式的根(亦称零点)恰好是各种 Gauss 型求积公式的结点. 仅从这点即可知, 开展直交多项式根的研究的重要性. 我们有如下的简单定理:

定理 14 标准直交系 $\{\phi_n\}$ 中的多项式 $\phi_n(x)$ 的所有根都是单实根, 并且都在开区间 (a, b) 内.

证明 假如 $\phi_n(x)$ 在 (a, b) 内的根都是偶重根(即根的重数为偶数), 则 $\phi_n(x)$ 在 (a, b) 上便保持定号, 因而 $\phi_n(x)$ 与常数 $\phi_0(x)$ 的直交性条件

$$\int_a^b \rho(x) \phi_n(x) dx = 0$$

也就不可能成立. 由此看来, 在 (a, b) 内部必有奇重根. 设奇重根的个数为 k , 而 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ ($k < n$) 为这些相异的奇重根. 于是 $f(x) = (x - \xi_1)(x - \xi_2) \cdots (x - \xi_k)$ 为次数低于 $\phi_n(x)$ 的多项式, 由直交性可知

$$\int_a^b \rho(x) f(x) \phi_n(x) dx = 0.$$

但另一方面, $f(x) \phi_n(x)$ 是在 (a, b) 内只含偶重根的多项式, 因此根据前段的同样推理, 可知上述积分不可能为 0. 由此可见, $k < n$ 的假定是不对的. 亦即必然有 $k = n$. 这就说明 n 个根都是开区间 (a, b) 内的单根.

定理 15 设 $n \geq 1$, 则 $\phi_n(x)$ 和 $\phi_{n+1}(x)$ 的根必相互交错. 亦即 $\phi_n(x)$ 的根 ξ_k 和 $\phi_{n+1}(x)$ 的根 η_k 之间有如下的不等式关系:

$$a < \eta_1 < \xi_1 < \eta_2 < \xi_2 < \cdots < \xi_n < \eta_{n+1} < b.$$

应用数学归纳法, 可以证明这个定理(留作习题).

令 $\tilde{\phi}_n(x)$ 表示最高次项系数是 1 的 n 次直交多项式，则

$$\tilde{\phi}_0(x) = 1, \quad \tilde{\phi}_n(x) = \sqrt{\Delta_n / \Delta_{n-1}} \phi_n(x).$$

下面的定理给出了诸 $\tilde{\phi}_n(x)$ 间的一个递推关系。

定理 16 对一切 $n=0,1,2,\dots$ 都成立着递推关系

$$\tilde{\phi}_{n+2}(x) = (x - \alpha_{n+2}) \tilde{\phi}_{n+1}(x) - \beta_{n+1} \tilde{\phi}_n(x),$$

其中 α_{n+2} 与 β_{n+1} 为某些常数。

证明 显然 $n+2$ 次多项式 $x \tilde{\phi}_{n+1}(x)$ 可以表示成

$$x \tilde{\phi}_{n+1}(x) = c_0 \tilde{\phi}_0(x) + c_1 \tilde{\phi}_1(x) + \cdots + c_{n+2} \tilde{\phi}_{n+2}(x).$$

因左边最高次项系数为 1，故 $c_{n+2}=1$. 其次，若用 $\rho(x) \tilde{\phi}_k(x)$ 乘等式两边再积分（亦即取内积），则于 $k \leq n-1$ 时由直交性可知等式即变为

$$c_k (\tilde{\phi}_k, \tilde{\phi}_k) = (\tilde{\phi}_k, x \tilde{\phi}_{n+1}) = (x \tilde{\phi}_k, \tilde{\phi}_{n+1}) = 0,$$

因而 $c_k=0$ ($k=0,1,\dots,n-1$). 于是原式相当于

$$x \tilde{\phi}_{n+1}(x) = c_n \tilde{\phi}_n(x) + c_{n+1} \tilde{\phi}_{n+1}(x) + c_{n+2} \tilde{\phi}_{n+2}(x).$$

因而递推公式得证。

最后，再让我们来确定常数 α_{n+2} 与 β_{n+1} . 显然，若用 $\rho(x) \tilde{\phi}_{n+1}(x)$ 来乘定理中的递推公式的两边并积分，则得

$$\int_a^b \rho(x) (x - \alpha_{n+2}) [\tilde{\phi}_{n+1}(x)]^2 dx = 0.$$

因而得出

$$\alpha_{n+2} = \frac{\int_a^b \rho(x) x \tilde{\phi}_{n+1}^2(x) dx}{\int_a^b \rho(x) \tilde{\phi}_{n+1}^2(x) dx}.$$

注意上式右边分子积分中多出一个 x ($a \leq x \leq b$) 因子，因而容易得出估计式 $a < \alpha_{n+2} < b$ ($n=0,1,2,\dots$). 再用 $\rho(x) \tilde{\phi}_n(x)$ 乘递推公式两边并积分，则得

$$\begin{aligned} \beta_{n+1} \int_a^b \rho(x) \tilde{\phi}_n^2(x) dx &= \int_a^b \rho(x) x \tilde{\phi}_{n+1}(x) \tilde{\phi}_n(x) dx \\ &= \int_a^b \rho(x) \tilde{\phi}_{n+1}(x) [\tilde{\phi}_{n+1}(x) + r(x)] dx. \end{aligned}$$

$$= \int_a^b \rho(x) \tilde{\phi}_{n+1}^2(x) dx,$$

其中 $x \tilde{\phi}_n(x) = \tilde{\phi}_{n+1}(x) + r(x)$, $r(x)$ 为低于 $n+1$ 次的多项式. 故

$$\begin{aligned}\beta_{n+1} &= \frac{\int_a^b \rho \tilde{\phi}_{n+1}^2 dx}{\int_a^b \rho \tilde{\phi}_n^2 dx} = \frac{(\Delta_{n+1}/\Delta_n)(\phi_{n+1}, \phi_{n+1})}{(\Delta_n/\Delta_{n-1})(\phi_n, \phi_n)} \\ &= \Delta_{n+1}\Delta_{n-1}/\Delta_n^2 \quad (n=1, 2, \dots).\end{aligned}$$

若记 $\Delta_{-1}=1$, 则上列等式便对 $n=0$ 亦成立.

由定理 16 易推知 ϕ_{n+2} 与 ϕ_{n+1} 不能有公共根. 假若不然, 该根亦将是 ϕ_{n+1} 与 ϕ_n 的公共根. 以此类推, 最后该根还将是 ϕ_1, ϕ_0 的公共根. 但 $\phi_0=\text{常数}\neq 0$, 故引出矛盾.

递推公式是很有用的, 因为利用它可以逐步确定出诸 $\tilde{\phi}_n(x)$ (或 $\phi_n(x)$) 的具体结构形式, 而不必去展开 $\phi_n(x)$ 所代表的行列式. 特别地, 当 n 较大时, 行列式 $\phi_n(x)$ 的展开是很麻烦的.

§ 6 直交多项式级数的收敛性

设 $\{\phi_n(x)\}$ 是对权函数 $\rho(x)$ 的标准直交多项式系, $f(x)$ 为空间 $C[a, b]$ 中的一个函数. 试研究在什么条件下, f 的广义 Fourier 级数 $\sum c_k \phi_k(x)$ 能在通常意义上收敛到 $f(x)$?

以 $S_n(x)$ 记 $f(x)$ 的广义 Fourier 级数的第 n 部分和

$$S_n(x) \triangleq S[f; x] = \sum_{k=0}^n c_k \phi_k(x).$$

即

$$S_n(x) = \int_a^b \rho(t) f(t) \left[\sum_{k=0}^n \phi_k(x) \phi_k(t) \right] dt.$$

它相当于通常 Fourier 级数理论中的 Dirichlet 积分, 而表达式

$$K_n(t, x) = \sum_{k=0}^n \phi_k(t) \phi_k(x)$$

称为广义 Dirichlet 核(简称为核).

显然, 不高于 n 次的多项式 $p_n(x)$ 按直交多项式 $\{\phi_k\}$ 展开所得的第 n 部分

和 $S_n(x)$ 是与 $p_n(x)$ 等同的：

$$S_n[p_n; x] \equiv p_n(x),$$

于是

$$S_n[f - p_n; x] = S_n[f; x] - S_n[p_n; x] = S_n[f; x] - p_n(x),$$

两边各加 $-f(x)$ 并移项，则得出。

$$\begin{aligned} S_n[f; x] - f(x) &= p_n(x) - f(x) + S_n[f - p_n; x], \\ |S_n[f; x] - f(x)| &\leq |p_n(x) - f(x)| + |S_n[f - p_n; x]|. \end{aligned}$$

因 $f(x)$ 为连续函数，故存在最佳逼近 $E_n(f)$ ，而 $|p_n(x) - f(x)| \leq E_n(f) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$)。因此 $|S_n[f; x] - f(x)|$ 是否趋于 0 的问题归结为 $|S_n[f - p_n; x]|$ 是否趋于 0 的问题。

显然

$$\begin{aligned} |S_n[f - p_n; x]| &= \left| \int_a^b \rho(t)[f(t) - p_n(t)]K_n(t, x)dt \right| \\ &\leq \max_{a \leq t \leq b} |f(t) - p_n(t)| \int_a^b \rho(t)|K_n(t, x)|dt \\ &\leq E_n(f) \int_a^b \rho(t)|K_n(t, x)|dt \\ &= E_n(f)L_n(x), \end{aligned}$$

其中 $L_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b \rho(t)|K_n(t, x)|dt$ 称为 Lebesgue 函数。

这样，便总结出如下的收敛定理：

定理 17 设 $f(x)$ 为 $[a, b]$ 上的连续函数，则当条件

$$E_n(f)L_n(x) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

满足时，便有收敛的 Fourier 级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \phi_k(x) = f(x).$$

又若在 $[a, b]$ 上， $E_n(f)L_n(x) \xrightarrow{1} 0$ ，则上面的级数便是一致收敛的。

注 利用 § 5 中所讲的递推公式，可以证明广义 Dirichlet 核 $K_n(t, x)$ 能简单地表示成

$$K_n(t, x) = \frac{\sqrt{\Delta_{n+1}\Delta_{n-1}}\phi_{n+1}(t)\phi_n(x) - \phi_{n+1}(x)\phi_n(t)}{\Delta_n} \quad (t \neq x).$$

这叫做 Christoffel-Darboux 公式。根据这个公式可以建立另外一些收敛性定理。

例如,假设对固定的点 x ,序列 $\{\phi_n(x)\}$ 为有界.又设 $\mu(t) = \frac{f(t)-f(x)}{t-x}$ 属于空间 L^2_ρ ,那么在 x 点处等式 $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \phi_k(x) = f(x)$ 便成立.

§7 几种特殊的直交多项式

本节将简略地介绍三种最常用的直交多项式系.它们是 Legendre 多项式系 $\{P_n(x)\}$, Laguerre 多项式系 $\{L_n(x)\}$ 和 Hermite 多项式系 $\{H_n(x)\}$. 它们在数学物理问题及数值积分中均有重要意义.

1. Legendre 多项式

在区间 $[-1, 1]$ 上对于权函数 $\rho(x) \equiv 1$ 构成直交系的多项式 $p_n(x)$ 称为 Legendre 多项式 ($n = 0, 1, 2, \dots$). 可根据 §4 中所讲述的一般结构公式(定理 6)来找出 $p_n(x)$ 的表达式,然而行列式的计算是很麻烦的.

早在 1814 年 Rodriguez 就已经找到了简单而便利的表达式:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{d}{dx} \right)^n (x^2 - 1)^n.$$

容易看出,这确实是一个 n 次多项式,而且 x^n 项的系数是

$$\frac{1}{2^n \cdot n!} (2n)(2n-1)\cdots(n+1) = \frac{(2n)!}{2^n \cdot (n!)^2}.$$

因此当规定最高次项系数为 1 时,多项式可表作

$$\tilde{P}_n(x) = \frac{n!}{(2n)!} \left(\frac{d}{dx} \right)^n (x^2 - 1)^n.$$

现在来验证上述多项式系是关于权函数 $\rho(x) \equiv 1$ 的直交系. 记 $\phi(x) = (x^2 - 1)^n$, 则

$$\phi^{(k)}(\pm 1) = 0 \quad (0 \leq k \leq n-1), \text{ 而且 } P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \phi^{(n)}(x).$$

设 $Q(x)$ 为次数不高于 n 的任意多项式,则由分部积分法易算出

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 P_n(x) Q(x) dx \\ &= \frac{1}{2^n \cdot n!} \left\{ [Q(x) \phi^{(n-1)}(x)]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 Q'(x) \phi^{(n-1)}(x) dx \right\} \\ &= -\frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^1 Q'(x) \phi^{(n-1)}(x) dx = \dots \end{aligned}$$

$$= \frac{(-1)^n}{2^n n!} \int_{-1}^1 Q^{(n)}(x) \phi(x) dx.$$

因此假如 $Q(x)$ 的次数低于 n , 则 $Q^{(n)}(x) \equiv 0$, 从而 $Q(x)$ 便和 $P_n(x)$ 相直交. 这就表明 $P_n(x)$ 是与 $P_{n-1}, \dots, P_1(x), P_0(x)$ 都直交. 因而 $\{P_n(x)\}$ 确实是 $[-1, 1]$ 上关于权 $\rho(x) \equiv 1$ 的直交系.

若在上列计算中取 $Q(x) = P_n(x)$, 则

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx &= \frac{(-1)^n}{2^n n!} \int_{-1}^1 P_n^{(n)}(x) (x^2 - 1)^n dx \\ &= \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} \int_{-1}^1 (1 - x^2)^n dx \\ &= \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} \theta d\theta \\ &= \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} \frac{2^{n+1} (n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{2}{2n+1}, \end{aligned}$$

因此标准直交函数为

$$\hat{P}_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^2 - 1)^n.$$

根据一般理论, 可知 $P_n(x)$ 的所有根都是单实根, 且位于开区间 $(-1, 1)$ 之内. 以下给出 $P_n(x)$ ($n = 0, 1, \dots, 5$) 的显式表达式以供参考:

$$P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1),$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x),$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3),$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x).$$

根据 Rodrigue 公式, 利用二项式展开定理及逐项微分容易得到如下的普遍表达式:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^k k! (n-k)! (n-2k)!} x^{n-2k}.$$

$P_n(x)$ 实际是下列 Legendre 微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{2x}{1-x^2} \frac{dy}{dx} + \frac{n(n+1)}{1-x^2} y = 0$$

在正规点 $x=0$ 附近满足条件 $y(1)=1$ 的唯一确定的多项式解. 要证明这一点,

只需利用微分方程幂级数解法就行.事实上,只需将 $P_n(x)$ 代入上述微分方程加以验证即可.还可以根据 $P_n(x)$ 的表达式去验证 $P_n(1)=1$ (留作习题).

现在来证明 $P_n(x)$ 有如下的母函数:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)z^n \quad (|z|<1).$$

在验证之前,记上式左端为 $G(x,z)$:

$$G(x,z)=[1+(z^2-2xz)]^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty} A_n(x)z^n.$$

我们的目标是证明 $A_n(x)\equiv P_n(x)$.

首先根据二项展开式的形式容易看出 z^n 的系数 $A_n(x)$ 的确是 x 的 n 次多项式.令 $x=1$,则

$$G(1,z)=(1-z)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty} z^n=\sum_{n=0}^{\infty} A_n(1)z^n,$$

因而 $A_n(1)=1$.如此看来,只要再验证 $A_n(x)$ 满足 Legendre 微分方程就够了.

求 $G(x,z)$ 关于 z 的偏导数,经变形即得

$$(1-2xz+z^2)\frac{\partial G}{\partial z}=(x-z)G.$$

再求 $G(x,z)$ 关于 x 的偏导数,由比较可得

$$z\frac{\partial G}{\partial z}=(x-z)\frac{\partial G}{\partial x}.$$

以 $G=\sum A_n z^n$ 分别代入上面二式的两边,并分别比较 z^{n-1} 和 z^n 的系数,得到

$$nA_n-(2n-1)x A_{n-1}+(n-1)A_{n-2}=0,$$

$$x\frac{dA_n}{dx}-\frac{dA_{n-1}}{dx}=nA_n.$$

如果将上面所列第一式对 x 微分,并利用第二式(其中令 n 改为 $n-1$)消去 dA_{n-2}/dx ,则得出

$$\frac{dA_n}{dx}-x\frac{dA_{n-1}}{dx}=nA_{n-1}.$$

又利用上列第二式乘以 $-x$ 再与此处所得之式相加,则得出

$$(1-x^2)\frac{dA_n}{dx}=n(A_{n-1}-xA_n).$$

对 x 微分此最后所得之式,化简后得

$$(1-x^2) \frac{d^2 A_n}{dx^2} - 2x \frac{dA_n}{dx} + n(n+1)A_n = 0.$$

这就证实了 $A_n(x)$ 确实满足 Legendre 方程, 并且 $A_n(1)=1$. 利用多项式解的唯一性, 就可以得出结论: $A_n(x) \equiv P_n(x)$.

利用母函数还可以证明如下的不等式:

$$|P_n(x)| \leq 1 \quad (n=0,1,\dots).$$

事实上, 令 $x = \cos \theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$ 代入母函数公式后, 得出

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) z^n \\ &= [1 - z(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) + z^2]^{-1/2} = (1 - ze^{i\theta})^{-1/2} (1 - ze^{-i\theta})^{-1/2} \\ &= \left[\sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-ze^{i\theta})^k \right] \left[\sum_{s=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{s} (-ze^{-i\theta})^s \right]. \end{aligned}$$

当 $|z| < 1$ 时, 右端二幂级数是可以相乘的. 比较左右两端 z^n 的系数后得出

$$\begin{aligned} P_n(\cos \theta) &= \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} (e^{i n \theta} + e^{-i n \theta}) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{(2(n-k)-1)!!}{(2(n-k))!!} e^{i(2k-n)\theta}. \end{aligned}$$

注意上式右边各项的系数均为正, 而各项将于 $\theta=0$ 时达到最大值, 这样便推出

$$|P_n(\cos \theta)| \leq P_n(\cos 0) = P_n(1) = 1.$$

这就证明了所需的不等式.

最后还值得提到关于 $P_n(x)$ 的一个递推公式:

$$nP_n(x) - (2n-1)xP_{n-1}(x) + (n-1)P_{n-2}(x) = 0.$$

这在论证 $P_n(x)$ 的母函数时实际已经得到, 只要在那儿将 A_n 改换成 $P_n(x)$ 就可以了. 如果应用 § 5 中的公式(定理 16), 也同样可以得到上述结果.

2. Laguerre 多项式

以前所讨论的一切, 都是假定基本区间 $[a, b]$ 是有限的. 其实, 权函数、 L_p^2 空间以及直交系等概念也完全可以推广到无限区间的情形. 所谓 Laguerre 多项式系 $\{L_n(x)\}$, 就是在区间 $(0, +\infty)$ 上关于权函数 e^{-x} 所构成的直交系. 它们可以用类似于 Rodrigue 公式的表达式来定义:

$$L_n(x) = e^x \left(\frac{d}{dx} \right)^n (x^n e^{-x}).$$

只要将上式右端的导数算出, 就知道 $L_n(x)$ 是 n 次多项式:

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} n(n-1)\cdots(n-k+1) x^{n-k},$$

其中最高次项系数是 $(-1)^n$, 因此

$$\tilde{L}_n(x) = (-1)^n e^x \left(\frac{d}{dx} \right)^n (x^n e^{-x})$$

便是最高次项系数为 1 的 Laguerre 多项式.

记 $U_n(x) = x^n e^{-x}$, 则

$$U_n^{(k)}(0) = U_n^{(k)}(+\infty) = 0 \quad (k=0, 1, \dots, n-1).$$

因此假如 $V(x)$ 是次数不高于 n 的多项式, 则由分部积分法容易算出

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty e^{-x} L_n(x) V(x) dx \\ &= \int_0^\infty U_n^{(n)} V dx \\ &= [U_n^{(n-1)} V + \dots + (-1)^{n-1} U_n V^{(n-1)}]_0^\infty + (-1) \int_0^\infty U_n V^{(n)} dx \\ &= (-1)^n \int_0^\infty U_n V^{(n)} dx. \end{aligned}$$

因此当 V 的次数低于 n 时, 上面的最后结果便是零. 这表明 L_n 是与一切次数较低的多项式相直交的. 从而也就证明 $\{L_n\}$ 是关于权 e^{-x} 的直交系.

又如果在以上的计算中取 $V = L_n(x)$, 则

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-x} [L_n(x)]^2 dx &= (-1)^n \int_0^\infty U_n \cdot (-1)^n n! dx \\ &= n! \int_0^\infty x^n e^{-x} dx = (n!)^2. \end{aligned}$$

从而可知标准化了的直交函数应该写成

$$\hat{L}_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!} e^x \left(\frac{d}{dx} \right)^n (x^n e^{-x}).$$

3. Hermite 多项式

所谓 Hermite 多项式 $\{H_n(x)\}$, 就是在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上关于权函数 e^{-x^2}

所构成的直交系. 它可以通过如下的表达式来定义:

$$H_n(x) = e^{x^2} \left(\frac{d}{dx} \right)^n (e^{-x^2}).$$

将上式右端的导数逐步算出, 就知道 $H_n(x)$ 是 n 次的多项式, 而且用归纳法容易证明它的最高次项系数是 $(-2)^n$.

记 $u = e^{-x^2}$, 则

$$u^{(k)}(-\infty) = u^{(k)}(+\infty) = 0 \quad (k=0,1,2,\dots).$$

因此对任何次数不高于 n 的多项式 $V(x)$, 利用逐次分部积分法同样可得出:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_n(x) V(x) dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} V^{(n)}(x) dx.$$

因此当 V 的次数低于 n 时, 上式右端便是零, 这就证明了 $\{H_n\}$ 确实是关于权 e^{-x^2} 的直交系.

其次, 如果在上式中取 $V(x) = H_n(x)$, 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [H_n(x)]^2 dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} (-2)^n n! dx = 2^n n! \sqrt{\pi}.$$

因而标准直交函数的形式应该是

$$\hat{H}_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n(x).$$

直交多项式与连分式的关系

设 x 是固定的, 则

$$\frac{\tilde{\phi}_n(t) - \tilde{\phi}_n(x)}{t - x} \quad (n > 0)$$

是 t 的 $n-1$ 次多项式. 由对称性可知, 它也是 x 的 $n-1$ 次多项式. 所以函数

$$\psi_n(x) = \int_a^b \rho(t) \frac{\tilde{\phi}_n(t) - \tilde{\phi}_n(x)}{t - x} dt \quad (n > 0) \quad (7.1)$$

也是 x 的 $n-1$ 次多项式. 对于如此的多项式, 亦有如下递推公式

$$\begin{aligned} \psi_{n+2}(x) &= (x - \alpha_{n+2}) \psi_{n+1}(x) - \beta_{n+1} \psi_n(x), \\ n &= 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (7.2)$$

其中 α_{n+2} 与 β_{n+1} 同定理 16 中所指出者. 事实上, 可以根据定理 16 和函数

$\psi_n(x)$ 的定义直接推出此递推关系式. 如果约定 $\psi_0(x) = 0$, 则(7.2)对于 $n = 0$ 亦成立.

引进记号

$$\beta_0 = \int_a^b \rho(x) dx = \psi_1(x),$$

并用 α_1 表示 $\tilde{\phi}_1(x)$ 的根, 则有理分式

$$\psi_n(x) / \tilde{\phi}_n(x) \quad (7.3)$$

为连分式

$$\cfrac{\beta_0}{x - \alpha_1 - \cfrac{\beta_1}{x - \alpha_2 - \cfrac{\beta_2}{x - \alpha_3 - \dots}}} \quad (7.4)$$

的第 n 近似^①. 事实上, (7.4)式的第 1 近似为

$$\cfrac{\beta_0}{x - \alpha_1} = \cfrac{\psi_1(x)}{\tilde{\phi}_1(x)},$$

第 2 近似为

$$\begin{aligned} \cfrac{\beta_0}{x - \alpha_1 - \cfrac{\beta_1}{x - \alpha_2}} &= \cfrac{\psi_1(x)}{\tilde{\phi}_1(x) - \cfrac{\beta_1}{x - \alpha_2}} \\ &= \cfrac{(x - \alpha_2)\psi_1(x) - \beta_1\psi_0(x)}{(x - \alpha_2)\tilde{\phi}_1(x) - \beta_1\tilde{\phi}_0(x)} = \cfrac{\psi_2(x)}{\tilde{\phi}_2(x)}, \end{aligned}$$

再根据连分式的性质及数学归纳法即可证得(7.4).

以下定理指出了连分式与直交多项式的关系.

Stieltjes 定理 设 x 是位于闭区间 $[a, b]$ 外的实数, 则连分式(7.4)收敛且其值为

$$\int_a^b \cfrac{\rho(t)}{x - t} dt. \quad (7.5)$$

证明 不妨设 $x > b$. 作辅助函数

$$\Phi_n(z_1, \dots, z_n)$$

^① 关于连分式的某些知识, 本书第六章有介绍.

$$= \int_a^b [1 + z_1(x-t) + z_2(x-t)^2 + \cdots + z_n(x-t)^n]^2 \frac{\rho(t)}{x-t} dt,$$

并求它的最小值点.

显然这个问题的解是存在且唯一的. 因为所论问题正是求函数 $f(t) = -1$, 用线性无关函数 $x-t, (x-t)^2, \dots, (x-t)^n$ 的线性组合关于权 $\rho(t)/(x-t)$ 的最佳平方逼近问题.

按多元函数极值问题求法, 所要求的 z_1, \dots, z_n , 应满足

$$\frac{\partial \Phi_n}{\partial z_1} = 0, \dots, \frac{\partial \Phi_n}{\partial z_n} = 0.$$

记所求得的值为 $\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n$, 则

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \Phi_n}{\partial z_i} = \int_a^b \rho(t) [1 + \bar{z}_1(x-t) + \cdots + \bar{z}_n(x-t)^n] (x-t)^{i-1} dt = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (7.6)$$

若记

$$1 + \bar{z}_1(x-t) + \cdots + \bar{z}_n(x-t)^n = H(t),$$

则(7.6)式表明

$$\int_a^b \rho(t) H(t) (x-t)^{i-1} dt = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

由此容易推知

$$\int_a^b \rho(t) H(t) t^j dt = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n-1.$$

这说明 n 次多项式 $H(t)$ 与所有低于 n 次的多项式, 关于权 $\rho(t)$ 均直交. 从而 $H(t)$ 与 $\tilde{\phi}_n(t)$ 仅能相差一常数因子, 即

$$H(t) = c \tilde{\phi}_n(t).$$

取 $t=x$, 则得到 $c \tilde{\phi}_n(x) = 1$, 从而

$$H(t) = \frac{\tilde{\phi}_n(t)}{\tilde{\phi}_n(x)}.$$

所以若用 M_n 表示 Φ_n 的最小值, 则

$$\begin{aligned} M_n &= \int_a^b \rho(t) \left[\frac{\tilde{\phi}_n(t)}{\tilde{\phi}_n(x)} \right]^2 \frac{1}{x-t} dt \\ &= \int_a^b \rho(t) \frac{\tilde{\phi}_n(t)}{\tilde{\phi}_n(x)} \left[1 + \sum_{i=1}^n \bar{z}_i (x-t)^i \right] \frac{1}{x-t} dt. \end{aligned}$$

然而

$$\int_a^b \rho(t) \tilde{\phi}_n(t) (x-t)^{i-1} dt = 0, \quad i=1, \dots, n,$$

所以

$$\begin{aligned} M_n &= \int_a^b \rho(t) \frac{\tilde{\phi}_n(t)}{\tilde{\phi}_n(x)} \frac{dt}{x-t} \\ &= \int_a^b \rho(t) \frac{\tilde{\phi}_n(t) - \tilde{\phi}_n(x) + \tilde{\phi}_n(x)}{(x-t)\tilde{\phi}_n(x)} dt \\ &= \int_a^b \rho(t) \frac{dt}{x-t} - \frac{\tilde{\phi}_n(x)}{\tilde{\phi}_n(x)}. \end{aligned}$$

为证

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = 0, \quad (7.7)$$

考虑

$$M_{n-1} = \min \{ \Phi_{n-1}(z_1, \dots, z_{n-1}) \}.$$

若用 z_1^*, \dots, z_n^* 表示使 Φ_{n-1} 取到最小值的点，则对任何 β 值，显然

$$\begin{aligned} 0 \leq M_n &\leq \int_a^b \rho(t) \{ [1 + z_1^*(x-t) + \dots + z_{n-1}^*(x-t)^{n-1}] \\ &\quad \cdot [1 - \beta(x-t)] \}^2 \frac{1}{x-t} dt. \end{aligned}$$

特别地取 $\beta = \frac{1}{x-a}$ ，因为当 $a \leq t \leq b$ 时

$$0 \leq 1 - \frac{x-t}{x-a} \leq \frac{b-a}{x-a} = q < 1,$$

是故

$$0 \leq M_n \leq q^2 \int_a^b \rho(t) [1 + z_1^*(x-t) + \dots + z_{n-1}^*(x-t)^{n-1}]^2 \frac{dt}{x-t},$$

即

$$0 \leq M_n \leq q^2 M_{n-1}.$$

同样地,有

$$0 \leq M_{n-1} \leq q^2 M_{n-2},$$

.....

$$0 \leq M_2 \leq q^2 M_1,$$

从而

$$0 \leq M_n \leq q^{2n-2} M_1,$$

即(7.7)式成立.实际上,分式 $\psi_n(x)/\tilde{\phi}_n(x)$ 在任何与 $[a, b]$ 的距离为正数的集合上,一致收敛于积分(7.5).

以 Tchebyshev 多项式为例来说明上述结果.如所知,在闭区间 $[-1, 1]$ 上,Tchebyshev 多项式系关于权函数 $1/\sqrt{1-x^2}$ 构成直交系.对于首项系数为 1 的 Tchebyshev 多项式 $\tilde{T}_n(x)$ 的递推关系式为

$$\tilde{T}_{n+2}(x) = x \tilde{T}_{n+1}(x) - \frac{1}{4} \tilde{T}_n(x), \quad n = 1, 2, \dots,$$

即相应于一般理论中的 α_{n+2} 和 β_{n+1} 为 $\alpha_{n+2} = 0, \beta_{n+1} = 1/4 (n = 1, 2, \dots)$, 而相应于 $n=0$ 的 $\alpha_2 = 0, \beta_1 = 1/2$. 因为按前面取法, α_1 是 $T_1(x) = x$ 的零点, 所以 $\alpha_1 = 0$. 最后还有

$$\beta_0 = \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi.$$

所以

$$\int_{-1}^1 \frac{dt}{(x-t)\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi}{x - \frac{1/2}{x - \frac{1/4}{x - \dots}}}.$$

作变量替换 $t = 2u/(1+u^2)$, 可得

$$\int_{-1}^1 \frac{dt}{(x-t)\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{x^2-1}}, \quad x > 1,$$

从而

$$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{x - \frac{1/2}{x - \frac{1/4}{x - \frac{1/4}{x - \dots}}}}, \quad x > 1.$$

不难验证,上述连分式的第 n 近似分式的分母与 $\tilde{T}_n(x)$ 相同.

前面我们讲述直交多项式的理论时并没有提及连分式理论,只是在这里点明了它们两者的有机联系.然而值得提到的是,从历史的观点来说,直交多项式一般理论的创始人 P. L. Tchebyshev,当年正是把函数展开为连分式作为出发点来研究直交多项式的.目前已有学者,借助于这种观点来讨论多元直交多项式的构造理论和方法.

§8 多元直交多项式

直交函数系,特别是直交多项式系在数值分析中起着十分重要的作用.为了适应处理多元函数展开,特别是多元平方逼近理论和实际问题的需要,建立多元直交多项式的理论一直是人们关注的热门课题之一.

设 \mathbf{R}^n 是 n 维欧氏空间.显然,次数不超过 k 次的 n 元多项式空间的维数是 $\binom{k+n}{n}$.次数为 k 的互异的 n 元单项式的个数为 $\binom{k+n-1}{n-1}$.

记次数恰为 d 的多项式集合为 H_d ,次数不超过 $d-1$ 的多项式集合仍记为 P_{d-1}

定理 18 对于 \mathbf{R}^n 中给定的区域 D 和权函数 $W(x_1, \dots, x_n)$,恰有 $\binom{k+n-1}{n-1}$ 个线性无关的多项式 H_k ,它们中的每一个多项式在 D 上关于权 $W(x_1, \dots, x_n)$ 与 P_{k-1} 中所有的多项式均直交.即

$$\int_D W(x_1, \dots, x_n) p_k(x_1, \dots, x_n) q_{k-1}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = 0,$$

对一切 $p_k \in H_k, q_{k-1} \in P_{k-1}$ 均成立.

证明 仅就 $n=2, k=3$ 的情形来证明.一般情形的证明是类似的.我们将指出,有 4 个多项式

$$p^{3,0}(x, y) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + x^3,$$

$$p^{2,1}(x, y) = b_{00} + b_{10}x + b_{01}y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + x^2y,$$

$$p^{1,2}(x, y) = d_{00} + d_{10}x + d_{01}y + d_{20}x^2 + d_{11}xy + d_{02}y^2 + xy^2,$$

$$p^{0,3}(x, y) = e_{00} + e_{10}x + e_{01}y + e_{20}x^2 + e_{11}xy + e_{02}y^2 + y^3$$

与全体 P_2 直交.

显然,为证 $p^{3,0}(x,y)$ 与 P_2 中的所有多项式直交,只需证明它与 $1, x, y, x^2, xy, y^2$ 直交即可.按直交性的定义,由上可引出 $p^{3,0}(x,y)$ 中 6 个系数满足的线性方程组

$$\begin{pmatrix} c_{00} & c_{10} & c_{01} & c_{20} & c_{11} & c_{02} \\ c_{10} & c_{20} & c_{11} & c_{30} & c_{21} & c_{12} \\ c_{01} & c_{11} & c_{02} & c_{21} & c_{12} & c_{03} \\ c_{20} & c_{30} & c_{21} & c_{40} & c_{31} & c_{22} \\ c_{11} & c_{21} & c_{12} & c_{31} & c_{22} & c_{13} \\ c_{02} & c_{12} & c_{03} & c_{22} & c_{13} & c_{04} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} \\ a_{10} \\ a_{01} \\ a_{20} \\ a_{11} \\ a_{02} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_{30} \\ -c_{40} \\ -c_{31} \\ -c_{50} \\ -c_{41} \\ -c_{32} \end{pmatrix}, \quad (8.1)$$

其中

$$c_{\alpha\beta} = I(x^\alpha y^\beta) \stackrel{\text{def}}{=} \int_D W(x,y) x^\alpha y^\beta dx dy.$$

以 $I_{2,2}$ 记(8.1)中系数矩阵.完全类似地,按 $p^{2,1}(x,y), p^{1,2}(x,y), p^{0,3}(x,y)$ 与 P_2 中所有多项式的直交性,也可得到相应的系数所应满足的线性方程组.不难验证,这些方程组的系数矩阵都是 $I_{2,2}$.下述的定理 20 指出, $I_{2,2}$ 是满秩的,从而(8.1)有唯一解存在.即 $p^{3,0}, p^{2,1}, p^{1,2}, p^{0,3}$ 存在且唯一.

定理 19 矩阵 $I_{2,2}$ 满秩.

证明 假若不然,即 $I_{2,2}$ 奇异.则有不全为 0 的常数 $\alpha_{00}, \alpha_{10}, \alpha_{01}, \alpha_{20}, \alpha_{11}$ 和 α_{02} 存在,它们是(8.1)相应齐次方程组的非零解.若记

$$q_2(x,y) = \alpha_{00} + \alpha_{10}x + \alpha_{01}y + \alpha_{20}x^2 + \alpha_{11}xy + \alpha_{02}y^2,$$

则

$$\begin{aligned} \int_D W(x,y) q_2(x,y) dx dy &= 0, \\ \int_D W(x,y) x \cdot q_2(x,y) dx dy &= 0, \\ \int_D W(x,y) y \cdot q_2(x,y) dx dy &= 0, \\ \int_D W(x,y) x^2 \cdot q_2(x,y) dx dy &= 0, \\ \int_D W(x,y) xy \cdot q_2(x,y) dx dy &= 0, \\ \int_D W(x,y) y^2 \cdot q_2(x,y) dx dy &= 0. \end{aligned} \quad (8.2)$$

分别以 $\alpha_{00}, \alpha_{10}, \alpha_{01}, \alpha_{20}, \alpha_{11}$ 和 α_{02} 乘(8.2)中的第 1, 2, 3, 4, 5 和 6 式,再相加起来,可得出

$$\int_D W(x, y) [q_2(x, y)]^2 dx dy = 0,$$

但这是不可能的, 所以 $I_{2,2}$ 满秩.

定理 20 若 $p_3(x, y) \in P_3$ 在 D 上关于权 $W(x, y)$ 与 P_2 中的多项式均直交, 则 $p_3(x, y)$ 是 $p^{3,0}(x, y), p^{2,1}(x, y), p^{1,2}(x, y)$ 和 $p^{0,3}(x, y)$ 的线性组合.

证明 设

$$\begin{aligned} p_3(x, y) = & \alpha_{30}x^3 + \alpha_{21}x^2y + \alpha_{12}xy^2 + \alpha_{03}y^3 + \alpha_{20}x^2 \\ & + \alpha_{11}xy + \alpha_{02}y^2 + \alpha_{10}x + \alpha_{01}y + \alpha_{00} \end{aligned}$$

与 P_2 中的所有多项式直交. 按 $p^{3,0}, p^{2,1}, p^{1,2}$ 和 $p^{0,3}$ 的定义, $p_3 - \alpha_{30}p^{3,0} - \alpha_{21}p^{2,1} - \alpha_{12}p^{1,2} - \alpha_{03}p^{0,3} = \bar{q}_2 \in P_2$.

因为 $p_3, p^{3,0}, p^{2,1}, p^{1,2}, p^{0,3}$ 均与 P_2 中的所有多项式直交, 所以作为它们线性组合的 \bar{q}_2 必也与 P_2 中一切多项式直交. 特别地, \bar{q}_2 与 \bar{q}_2 自己直交, 即

$$\int_D W(x, y) [\bar{q}_2(x, y)]^2 dx dy = 0.$$

从而 $q_2(x, y) = 0$, 是故

$$p_3 = \alpha_{30}p^{3,0} + \alpha_{21}p^{2,1} + \alpha_{12}p^{1,2} + \alpha_{03}p^{0,3}.$$

证毕.

由于定理 20 成立, 称 $p^{3,0}, p^{2,1}, p^{1,2}$ 和 $p^{0,3}$ 为关于区域 D 和权 $W(x, y)$ 的 3 次直交多项式的基底.

对于一般情形而言, 相对应的结论是: 对于给定的区域 D , 非负权函数 $W(x_1, \dots, x_n)$, 存在确定的 $\binom{k+n-1}{n-1}$ 个形如

$$p^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n} = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} + \text{低次项} \quad (8.3)$$

的 k 次多项式与 P_{k-1} 中所有的多项式皆直交. (8.3) 式所示的 $\binom{k+n-1}{n-1}$ 个多项式是线性无关的, 并且在 D 上关于权 $W(x_1, \dots, x_n)$ 与 P_{k-1} 中一切多项式直交的任一 k 次多项式, 均可用这些(8.3)形多项式线性表示. 因而它们组成 D 上关于权 $W(x_1, \dots, x_n)$ 的 k 次直交多项式的基底.

(8.3) 式中的低次项的系数, 可通过求解 $\binom{k+n-1}{n} \times \binom{k+n-1}{n}$ 阶线性方程组得到.

用 $I_{n,k-1}$ 记该方程组系数矩阵. 显然 $I_{n,k-1}$ 是对称的, 且包含所有单项式积分

$$\begin{aligned} & I(x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}) \\ &= \int_D W(x_1, x_2, \dots, x_n) x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} dx_1 dx_2 \cdots dx_n, \end{aligned}$$

$$0 \leqslant \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \leqslant 2k - 2.$$

类似于定理 19, 可以证明 $I_{n,k-1}$ 是满秩的. 事实上, $I_{n,k-1}$ 还是正定的. 对于 2 维情形, 如果 $W(x, y)$ 在 D 上非负, 则 $I_{2,2}$ 也是正定的. 若令

$$\begin{aligned} q_2(x, y) &= \alpha_{00} + \alpha_{10}x + \alpha_{01}y + \alpha_{20}x^2 + \alpha_{11}xy + \alpha_{02}y^2, \\ \mathbf{a}^T &= (\alpha_{00}, \alpha_{10}, \alpha_{01}, \alpha_{20}, \alpha_{11}, \alpha_{02}), \end{aligned}$$

则

$$\int_D W(x, y)[q_2(x, y)]^2 dx dy = \mathbf{a}^T I_{2,2} \mathbf{a}.$$

是故对任意的 \mathbf{a} , $I_{2,2}$ 正定.

在 n 维区域 D 上, $W(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 非负不是直交多项式基底存在且唯一的必要条件; $I_{n,k-1}$ 满秩是基底存在且唯一的充分条件.

如所知, 一元直交多项式的零点是实的、互异的并且全部位于给定区间的内部. 对于二元情形, 也有类似的结果.

设多项式 $p_m(x, y)$ 在给定的单连通区域 D 上关于非负权函数 $W(x, y)$ 与所有 P_{m-1} 中的多项式直交. 又设 $p_m(x, y)$ 在实数域上分解为不可约多项式因子的乘积

$$p_m(x, y) = p_{m_1}(x, y)p_{m_2}(x, y)\cdots p_{m_s}(x, y), \quad (8.4)$$

$$m = m_1 + m_2 + \cdots + m_s, \quad m_i \geqslant 1, i = 1, \dots, s,$$

其中诸 $p_{m_i}(x, y)$ 是实系数多项式, 且在实数域中是不可约的.

定理 21 (8.4) 式中的不可约实因子 $p_{m_i}(x, y)$, $i = 1, \dots, s$ 是互异的(若两实因子只差一个常数因子, 则认为是同一个多项式, 而不加区别); 而且对每一个 i , 曲线 $p_{m_i}(x, y) = 0$ 与 D 内部区域的交集是非空的.

证明 先证第一条结论. 若两个 p_{m_i} 已经重合, 例如 $p_{m_1} = p_{m_2}$. 取

$$q_{m-2}(x, y) = p_{m_3} \cdots p_{m_s}(x, y),$$

$$q_{m-1}(x, y) = p_{m_1} p_{m_3} \cdots p_{m_s}(x, y),$$

则由上述表达式及直交性可知

$$\begin{aligned} \int_D W(x, y)[q_{m-1}(x, y)]^2 dx dy &= \int_D W(x, y)p_m(x, y) \cdot q_{m-2}(x, y) dx dy \\ &= 0. \end{aligned}$$

但这是不可能的, 从而(8.4)中的各因子是互异的.

为证定理的第二条结论, 设 $p_{m_1}(x, y) = 0$ 与 D 内部无交集. 考虑多项式

$$q_{2m-1} = p_{m_1}(p_{m_2} \cdots p_{m_s})^2,$$

按 p_m 的直交性, 可知

$$\int_D W(x, y) q_{2m-1}(x, y) dx dy = 0. \quad (8.5)$$

既然按反证法假定, $p_{m_1}(x, y) = 0$ 与 D 内部无交集, 因而在 D 上 p_m 与 $p_{m_2} \cdots p_{m_s}$ 同时变号, 即 q_{2m-1} 在 D 上不变号. 这与(8.5)式相矛盾. 证毕.

几种常见区域上的直交多项式

(I) 记 n 维方体域为

$$C_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid -1 \leq x_i \leq 1, i = 1, \dots, n\}. \quad (8.6)$$

C_n 上以权 $W(x_1, \dots, x_n) \equiv 1$ 的直交多项式的基底是 Legendre 多项式的乘积:

$$P^{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(x_1, \dots, x_n) = P_{\alpha_1}(x_1) \cdots P_{\alpha_n}(x_n),$$

其中 $P_{\alpha_i}(x_i)$ 是 $[-1, 1]$ 上的 α_i 次 Legendre 多项式.

(II) n 维球域

$$S_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1\}$$

上次数 ≤ 4 的直交多项式基底为

$$p^{0,0,\dots,0} = 1,$$

$$p^{1,0,\dots,0} = x_1,$$

$$p^{2,0,\dots,0} = x_1^2 - \frac{1}{n+1},$$

$$p^{1,1,0,\dots,0} = x_1 x_2,$$

$$p^{3,0,\dots,0} = x_1^3 - \frac{3}{n+4} x_1,$$

$$p^{2,1,0,\dots,0} = x_1^2 x_2 - \frac{1}{n+4} x_2,$$

$$p^{1,1,1,0,\dots,0} = x_1 x_2 x_3,$$

$$p^{4,0,\dots,0} = x_1^4 - \frac{6}{n+6} x_1^2 + \frac{3}{(n+4)(n+6)},$$

$$p^{3,1,0,\dots,0} = x_1^3 x_2 - \frac{3}{n+6} x_1 x_2,$$

$$p^{2,2,0,\dots,0} = x_1^2 x_2^2 - \frac{1}{n+6} (x_1^2 + x_2^2) + \frac{1}{(n+4)(n+6)},$$

$$p^{2,1,1,0,\dots,0} = x_1^2 x_2 x_3 - \frac{1}{n+6} x_2 x_3,$$

$$p^{1,1,1,1,0,\dots,0} = x_1 x_2 x_3 x_4.$$

若 m_1, m_2, \dots, m_n 是非负整数, 则

$$p_{m_1, \dots, m_n} = K \frac{\partial^m}{\partial x_1^{m_1} \cdots \partial x_n^{m_n}} (x_1^2 + \cdots + x_n^2 - 1)^m$$

是 $m = m_1 + \cdots + m_n$ 次多项式, 且在 S_n 上同所有低次多项式直交, 其中 K 是常数. 可以通过选择 K 使得 p_{m_1, \dots, m_n} 标准化.

对于 2 维 S_2 上, 次数 $m \leq 4$ 的情形, 这些直交多项式如下:

$$p_{0,0} = 1,$$

$$p_{1,0} = x,$$

$$p_{2,0} = 3x^2 + y^2 - 1,$$

$$p_{1,1} = xy,$$

$$p_{3,0} = 5x^3 + 3xy^2 - 3x,$$

$$p_{2,1} = 3x^2y + y^3 - y,$$

$$p_{4,0} = 35x^4 + 30x^2y^2 + 3y^4 - 30x^2 - 6y^2 + 3,$$

$$p_{3,1} = 5x^3y + 3xy^3 - 3xy,$$

$$p_{2,2} = 5x^4 + 18x^2y^2 + 5y^4 - 6x^2 - 6y^2 + 1.$$

(III) n 维单纯形区域

$$T_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq 1, x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}$$

上次数 ≤ 3 的直交多项式基底为

$$p^{0,0,\dots,0} = 1,$$

$$p^{1,0,\dots,0} = x_1 - \frac{1}{n+1},$$

$$p^{2,0,\dots,0} = x_1^2 - \frac{4}{n+3}x_1 + \frac{2}{(n+2)(n+3)},$$

$$p^{1,1,0,\dots,0} = x_1x_2 - \frac{1}{n+3}(x_1 + x_2) + \frac{1}{(n+2)(n+3)},$$

$$p^{3,0,\dots,0} = x_1^3 - \frac{9}{n+5}x_1^2 + \frac{18}{(n+4)(n+5)}x_1 - \frac{6}{(n+3)(n+4)(n+5)},$$

$$\begin{aligned} p^{2,1,0,\dots,0} = & x_1^2x_2 - \frac{1}{n+5}x_1^2 - \frac{4}{n+5}x_1x_2 + \frac{4}{(n+4)(n+5)}x_1 \\ & + \frac{2}{(n+4)(n+5)}x_2 - \frac{2}{(n+3)(n+4)(n+5)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p^{1,1,1,0,\dots,0} = & x_1x_2x_3 - \frac{1}{n+5}(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) \\ & + \frac{1}{(n+4)(n+5)}(x_1 + x_2 + x_3) \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{(n+3)(n+4)(n+5)}.$$

当 $n=2$ 时, T_2 上的直交多项式为

$$p_{0,0}=1,$$

$$p_{1,0}=2x+y-1,$$

$$p_{2,0}=6x^2+6xy+y^2-6x-2y+1,$$

$$p_{1,1}=3x^2+8xy+3y^2-4x-4y+1,$$

$$p_{3,0}=20x^3+30x^2y+12xy^2+y^3-30x^2-24xy-3y^2+12x+3y-1,$$

$$p_{2,1}=10x^3+36x^2y+27xy^2+4y^3-18x^2-36xy-9y^2+9x+6y-1,$$

$$p_{4,0}=70x^4+140x^3y+90x^2y^2+20xy^3+y^4-140x^3-180x^2y$$

$$-60xy^2-4y^3+90x^2+60xy+6y^2-20x-4y+1,$$

$$p_{3,1}=35x^4+160x^3y+180x^2y^2+64xy^3+5y^4-80x^3-240x^2y$$

$$-144xy^2-16y^3+60x^2+90xy+18y^2-16x-8y+1,$$

$$p_{2,2}=15x^4+120x^3y+216x^2y^2+120xy^3+15y^4-40x^3-216x^2y$$

$$-216xy^2-40y^3+36x^2+108xy+36y^2-12x-12y+1.$$

第四章习题

1. 设 F 为 m 维向量, $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m$ 为直交向量组. 又设 F_n 为 F 关于 $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m$ 的直交展开:

$$F_n = \sum_{j=1}^n c_j \phi_j, n \leq m.$$

试证明

$$\|F - F_n\|^2 = \|F\|^2 - \sum_{j=1}^n c_j^2 (\phi_j, \phi_j).$$

2. 证明三角插值多项式可表成

$$S_m(x) = \frac{1}{2m+1} \sum_{k=-m}^m y_k \frac{\sin \left[\left(m + \frac{1}{2} \right) x - k\pi \right]}{\sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{k\pi}{2m+1} \right)},$$

并用它证明当 $f(x)$ 连续可微时, $S_m(x)$ 一致收敛于 $f(x)$.

3. 试求 $f(x)=|x|$ 关于 Legendre 多项式和 Tchebyshev 多项式的展开式.
4. 试证直交函数系 $\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_m(x), \dots$ 在函数类 F 中完全的充分必要条件是: 对任何 $f \in F$, 若 $\|f\| \neq 0$, 则其 Fourier 系数不全为 0.
5. 设 $p(x) \in P_n$, 试证明

$$(p(x), K_n(x, t)) = p(t),$$

其中 $K_n(x, t)$ 为核多项式.

6. 证明使下述相对误差的平方和

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{a_j - y}{y} \right)^2$$

取极小的 $y = \sum_{j=1}^n a_j^2 / \sum_{j=1}^n a_j$.

7. 设 $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq 1$, 且

$$f_k(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq x_k, \\ 0, & x_k < x \leq 1. \end{cases}$$

试计算 Gram 行列式 $\Delta(f_1, f_2, \dots, f_n)$.

8. 设 $\phi_1, \dots, \phi_n \neq 0$. 试证下述 Hadamard 不等式:

$$0 \leq \Delta(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n) \leq \|\phi_1\|^2 \cdot \|\phi_2\|^2 \cdots \|\phi_n\|^2,$$

并且 $\Delta = 0$, 当且仅当诸 ϕ_i 线性相关; $\Delta = \|\phi_1\|^2 \cdot \|\phi_2\|^2 \cdots \|\phi_n\|^2$, 当且仅当 $(\phi_i, \phi_j) = 0$, $i \neq j$.

9. 给出上述 Hadamard 不等式的几何解释.

10. 用点

$$0, \frac{1}{2^k}, \frac{2}{2^k}, \dots, \frac{n}{2^k}, \frac{n+1}{2^k}, \dots, \frac{2^k-1}{2^k}, 1$$

把闭区间 $[0, 1]$ 分成 2^k 个子区间, 并引进函数

$$r_k(x) = \begin{cases} 0, & \text{当 } x = \frac{n}{2^k}, n = 0, 1, \dots, 2^k, \\ (-1)^n, & \text{当 } \frac{n}{2^k} < x < \frac{n+1}{2^k}, n = 0, 1, \dots, 2^k-1. \end{cases}$$

函数系 $\{r_k(x)\}$ 称为 Rademacher 系.

试证 Rademacher 函数系在闭区间 $[0, 1]$ 上是一个直交系, 并绘出 $r_0(x), r_1(x), r_2(x)$ 和 $r_3(x)$ 在 $[0, 1]$ 区间上的几何图形.

第五章 数值积分

§ 1 数值积分的一般概念

本章讨论定积分的近似计算问题. 从微积分学中我们知道能够利用Newton-Leibnitz公式

$$\int_a^b f(x) dx = \left[\int f(x) dx \right]_{x=a}^{x=b}$$

去计算的定积分是很少的. 事实上, 在实际问题中, 我们常常无法利用初等函数去表出原函数 $\int f(x) dx$. 例如, 对于概率积分与椭圆积分

$$P(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-x^2} dx \quad (0 \leq t < \infty)$$

和

$$E(t) = \int_0^t \sqrt{1 + k^2 \sin^2 x} dx \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

来说, 我们便遇到了上述的困难. 因此人们必须考虑定积分的近似计算问题.

以下, 我们所讨论的求积公式绝大多数具有如下形式:

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k), \quad (1.1)$$

其中 x_k 为求积公式的结点, A_k 为求积系数. 通常, 称右端的和为求积和; 又称

$$E[f] = \int_a^b \rho(x) f(x) dx - \sum_{k=1}^n A_k f(x_k)$$

为求积误差. 有时, 也将求积公式写成

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + E[f].$$

在(1.1)式中, $[a, b]$ 是实直线上的有限或无限的区间; 函数 $\rho(x)$ 是已知的固定的非负函数, 且常常是 $\rho(x) \equiv 1$, 以后我们将称它为权函数. 此外, 我们还假定积分

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx, \quad \int_a^b \rho(x) x^m dx \quad (m=0,1,2,\dots)$$

总是存在的, 并且函数 $f(x)$ 在点 x_1, \dots, x_n 处是有定义的.

一般说来, 求积公式(1.1)中的结点 x_k 和系数 A_k 可以按所希望的方式随意选取(除非是被积函数仅在一离散点集上是已知的, 那时只好从已知的离散点集中去选取 x_k 了). 自然, 我们总是希望通过 x_k 和 A_k 的选取使得在某种意义下求积误差尽可能地小.

概括来说, 数值积分问题可分解为下述的三个主要问题:

- (1) 求积公式的具体构造问题;
- (2) 精确程度的衡量标准问题;
- (3) 余项估计问题(亦即, 误差估计问题).

为了解决第一个问题, 我们必须考虑结点 x_1, x_2, \dots, x_n 和求积系数 A_1, A_2, \dots, A_n 的决定(或选择)问题. 为了合理地解决第二个问题, 我们将引进代数精度的概念. 至于第三个问题, 则主要是借助于内插多项式的余项估计公式来解决.

由第一章的 Weierstrass 多项式逼近定理可知, 对于闭区间上的连续函数, 都可以用多项式去一致地逼近它. 换句话说, 任一连续函数都可以用多项式作为它的最简单的近似函数. 一般说来, 多项式的次数取得越高, 用它们来近似连续函数的程度也就越高. 这自然使我们想到利用多项式的次数去规定求积公式的精确程度(所谓代数精度).

代数精度的概念是这样: 就形如(1.1)式的求积公式来说, 假如对 $f(x) = 1, x, x^2, \dots, x^m$ (或次数 $\leq m$ 的多项式), 公式恒精确地成立(亦即 $E[f] = 0$), 而当 $f(x) = x^{m+1}$ 时公式不精确成立, 则称公式(1.1)的代数精度为 m . 容易看出 m 越大, 则就一般的连续函数 $f(x)$ 而言, 公式(1.1)的右端数值与左端积分值的接近程度也就越高. 事实上, 当 m 越大时, 用次数不高于 m 的多项式(例如 $p(x)$)去近似 $f(x)$ 也就越好, 即 $\max_{a \leq x \leq b} |f(x) - p(x)| = \delta_m$ 也就越小, 因而公式(1.1)的误差也就越小. 理由是:

$$\begin{aligned}\Delta_m &= \left| \int_a^b \rho(x) f(x) dx - \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) \right| \\ &= \left| \int_a^b \rho(x) [f(x) - p(x)] dx - \sum_{k=1}^n A_k [f(x_k) - p(x_k)] \right|\end{aligned}$$

$$\leq \int_a^b \rho(x) \delta_m dx + \sum_{k=1}^n |A_k| \delta_m.$$

由此可见,引进代数精度的概念作为衡量求积公式的精确性是十分自然的.

下面的定理说明了具有代数精度的求积公式的存在性.

定理1 对于任意给定的 n 个不同的结点 x_1, \dots, x_n , 有常数 A_1, \dots, A_n 使得当 $f(x)$ 是次数 $\leq n-1$ 的多项式时求积公式(1.1)精确成立, 亦即

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k).$$

证明 设已给定点 x_1, \dots, x_n , 并且 $p_{n-1}(x)$ 是函数 $f(x)$ 在这些点上的 Lagrange 插值多项式, 亦即

$$f(x) = p_{n-1}(x) + E[f; x],$$

此处

$$p_{n-1}(x) = \sum_{k=1}^n l_k(x) f(x_k),$$

$$l_k(x) = \omega(x)/(x - x_k) \omega'(x_k), \quad \omega(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_n).$$

于是

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx = \int_a^b \rho(x) p_{n-1}(x) dx + \int_a^b \rho(x) E[f; x] dx. \quad (1.2)$$

定义

$$A_k = \int_a^b \rho(x) l_k(x) dx \quad (k = 1, \dots, n), \quad (1.3)$$

则(1.2)式变为

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + \int_a^b \rho(x) E[f; x] dx. \quad (1.4)$$

但是, 若 $f(x) = q_{n-1}(x)$ 是次数 $\leq n-1$ 的多项式, 则 $f(x) \equiv p_{n-1}(x)$. 这意味着 $E[f; x] \equiv 0$, 故

$$\int_a^b \rho(x) E[f; x] dx = 0.$$

证毕.

注意, 上述定理并没有要求 x_k 一定要属于区间 $[a, b]$. 另外, 定理只是断言: 当 A_k 由(1.3)式决定时, 公式(1.1)对于一切次数 $\leq n-1$ 的多项式是精确

的. 这个公式对较高次的多项式可能是精确的, 也可能不是精确的. 换言之, 定理 1 说明了公式(1.1)的代数精度 $d \geq n - 1$.

我们称求积系数由(1.3)式决定的求积公式为插值型求积公式. 由于对次数不超过 $n - 1$ 次的任一多项式 $f(x)$ 说来, $E[f; x] \equiv 0$, 所以 n 个结点的插值型求积公式的代数精度 $d \geq n - 1$. 反之, 容易证明, 代数精度 $d \geq n - 1$ 的 n 个结点的求积公式一定是插值型求积公式. 事实上, 因 Lagrange 插值基本多项式 $l_k(x) \in P_{n-1}$, 而因求积公式的代数精度 $d \geq n - 1$, 因此该求积公式对 $l_k(x)$ 必精确成立, 即 $\int_a^b \rho(x) l_k(x) dx = \sum_{j=1}^n A_j l_k(x_j) = A_k$, $k = 1, \dots, n$. 特别, 当 x_k ($k = 1, \dots, n$) 属于 $[a, b]$ 时, 我们称公式

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) \quad (1.5)$$

为内插型求积公式, 其中求积系数由下式确定:

$$A_k = \int_a^b \frac{\rho(x) \omega(x)}{(x - x_k) \omega'(x_k)} dx \quad (k = 1, \dots, n). \quad (1.6)$$

§ 2 Newton-Cotes 公式

设 $[a, b]$ 是一有限区间, $\rho(x) \equiv 1$. 令 $h = (b - a)/n$, $x_0 = a$, $x_1 = a + h, \dots$, $x_n = a + nh = b$. 依定理 1, 有常数 A_k 使得求积公式

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k) \quad (2.1)$$

对于一切次数 $\leq n$ 的多项式是精确的. 事实上, 当 A_k 由(1.6)式决定时(注意, 此时 $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$; $k = 0, 1, \dots, n$), 上述求积公式的代数精度 $d \geq n$. 以后, 我们称 N 个结点的内插型求积公式为 N 点的 Newton-Cotes 公式. 通常, 称一个结点的 Newton-Cotes 公式

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a) f(a) + E[f] \quad (2.2)$$

为矩形公式; 称 2 个结点的 Newton-Cotes 公式

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{1}{2} (b - a) (f(a) + f(b)) + E[f] \quad (2.3)$$

为梯形公式;称3个结点的Newton-Cotes公式

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}f(a) + \frac{4h}{3}f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{h}{3}f(b) + E[f] \quad (2.4)$$

为 Simpson 公式,此处 $h = \frac{1}{2}(b-a)$.

由多项式插值余项公式可知,梯形公式的求积误差为

$$E(f) = \int_a^b f(a, b, x)(x-a)(x-b)dx. \quad (2.5)$$

设 $f(x)$ 有连续的二阶导数,由于当 $a \leq x \leq b$ 时,

$$(x-a)(x-b) \leq 0,$$

所以对(2.5)式应用积分中值定理可知必有 $[a, b]$ 中的点 ξ_1 和 ξ_2 使得

$$\begin{aligned} E[f] &= f(a, b, \xi_1) \int_a^b (x-a)(x-b)dx \\ &= -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi_2). \end{aligned} \quad (2.6)$$

同理,Simpson 公式(2.4)的求积误差为

$$E[f] = \int_a^b f(a, b, c, x)(x-a)(x-b)(x-c)dx, \quad (2.7)$$

其中 $c = \frac{1}{2}(a+b)$.

设 $f(x)$ 有四阶连续的导数,由于

$$(x-c)dx = \frac{1}{2}d[(x-a)(x-b)],$$

故由分部积分公式和积分中值定理可得

$$\begin{aligned} E[f] &= \frac{1}{4} \int_a^b f(a, b, c, x) d[(x-a)(x-b)]^2 \\ &= \frac{1}{4} \int_a^b f(a, b, c, x, x) [(x-a)(x-b)]^2 dx \\ &= \frac{1}{4} f(a, b, c, \xi_1, \xi_1) \int_a^b (x-a)^2 (x-b)^2 dx \\ &= -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\xi) \quad (a < \xi < b). \end{aligned} \quad (2.8)$$

从 Simpson 公式的求积误差公式(2.8)可以看出,Simpson 公式的代数精确度竟

是 3.

从公式(2.6)和(2.8)看出,对给定的被积函数 $f(x)$ 而言,当积分区间缩短时,求积误差以更快的速度减小.因此,在实际计算中为了保证计算的精度,往往首先用分点

$$x_i = a + i(b - a)/n \quad (i = 0, 1, \dots, n)$$

将区间 $[a, b]$ 分成 n 个相等的子区间:

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n],$$

而后对每个子区间再应用梯形公式(2.3)或 Simpson 公式(2.4).例如,对每个子区间应用梯形公式(2.3),得到

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx = \frac{b-a}{2n} (f(x_i) + f(x_{i+1})) - \frac{1}{12} \left(\frac{b-a}{n} \right)^3 f''(\xi_i).$$

于上式中舍掉余项并对 i 从 0 到 $n-1$ 求和,可得一个新的求积公式

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2n} \left(f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right) \right) \stackrel{\text{def}}{=} T_n. \quad (2.9)$$

上述求积公式的误差是

$$E_n[f] = -\frac{1}{12} \left(\frac{b-a}{n} \right)^3 \sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi_i). \quad (2.10)$$

若 $f''(x)$ 连续,由于 ξ_i 均为 $[a, b]$ 的内点,所以由介值定理有

$$f''(\xi) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi_i) \quad (a < \xi < b).$$

将其代入(2.10)式,得到

$$E_n[f] = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\xi). \quad (2.11)$$

公式(2.9)称为复化梯形公式,求积误差由(2.11)式确定.

同样,我们可以建立复化 Simpson 公式.用分点

$$x_j = a + j(b - a)/2n \quad (j = 0, 1, \dots, 2n)$$

将 $[a, b]$ 分为 $2n$ 等分.然后,在每个子区间

$$[x_0, x_2], [x_2, x_4], \dots, [x_{2n-2}, x_{2n}]$$

上应用 Simpson 公式并求和, 得到

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x) dx \\ &= \frac{b-a}{6n} \left[f(a) + f(b) + 4 \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + (2i+1)\frac{b-a}{2n}\right) \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) \right] + E_{2n}[f], \end{aligned} \quad (2.12)$$

其中

$$\begin{aligned} E_{2n}[f] &= -\frac{1}{2880} \left(\frac{b-a}{n}\right)^5 \sum_{i=0}^{n-1} f^{(4)}(\xi_i) \\ &= -\frac{1}{2880} \frac{(b-a)^5}{n^4} f^{(4)}(\xi), \quad a < \xi < b. \end{aligned} \quad (2.13)$$

关于 Simpson 型求积, 还有一类 4 点 Simpson3/8 求积公式:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \frac{b-a}{3} \left[\frac{3}{8} f(a) + \frac{9}{8} f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + \frac{9}{8} f\left(\frac{a+2b}{3}\right) + \frac{3}{8} f(b) \right] \\ &\quad + O\left[\left(\frac{b-a}{3}\right)^5 f^{(4)}\right], \end{aligned} \quad (2.14)$$

它也具有 3 次代数精度.

如下的 Bode 求积公式具有 5 次代数精度, 它有 5 个求积结点:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \frac{b-a}{4} \left[\frac{14}{45} f(a) + \frac{64}{45} f\left(\frac{3a+b}{4}\right) + \frac{24}{45} f\left(\frac{2a+2b}{4}\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{64}{45} f\left(\frac{a+3b}{4}\right) + \frac{14}{45} f(b) \right] + O\left[\left(\frac{b-a}{4}\right)^7 f^{(6)}\right]. \end{aligned} \quad (2.15)$$

递推关系是数值方法的重要技巧, 它具有结构紧凑和便于在计算机上实现的特点. 下面, 仅以梯形公式为例介绍一下所谓的逐次分半算法.

首先在整个区间 $[a, b]$ 上应用梯形公式算出积分近似值 T_1 ; 然后将 $[a, b]$ 二等分, 对 $n = 2$ 应用复化梯形公式算出 T_2 ; 再将每个小区间二等分(即将 $[a, b]$ 四等分), 对 $n = 4$ 应用复化梯形公式算出 T_4 ; 如此下去, 直至相邻两个值之差小于允许误差为止. 应注意, 在计算后面的 T_{2n} 时可以利用前面算出的 T_n 的值:

$$T_{2n} = \frac{b-a}{2(2n)} \left(f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) \right)$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \sum_{i=1}^n f\left(a + (2i-1)\frac{b-a}{2n}\right) \\
& = \frac{1}{2} \left(T_n + \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(a + (2i-1)\frac{b-a}{2n}\right) \right) \\
& = \frac{1}{2} (T_n + H_{2n}),
\end{aligned} \tag{2.16}$$

其中

$$H_{2n} = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(a + (2i-1)\frac{b-a}{2n}\right) \tag{2.17}$$

为复化中矩形公式. 应用公式(2.16)和公式(2.17)计算 T_{2n} 时只要计算被积函数 $f(x)$ 在 n 个点处的值就可以了, 可见递推算法减少了计算量.

现在, 我们来看一看为什么可以通过相邻两个近似积分值之差来控制计算过程. 令

$$I = \int_a^b f(x) dx,$$

则依(2.10)式可知

$$\begin{aligned}
E_n[f] &= I - T_n = -\frac{1}{12} \left(\frac{b-a}{n}\right)^3 \sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi_i), \\
E_{2n}[f] &= I - T_{2n} = -\frac{1}{12} \left(\frac{b-a}{2n}\right)^3 \sum_{i=0}^{2n-1} f''(\eta_i).
\end{aligned}$$

将两式相除并注意当 n 充分大时,

$$\begin{aligned}
\frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi_i) &\approx \int_a^b f''(x) dx, \\
\frac{b-a}{2n} \sum_{i=0}^{2n-1} f''(\eta_i) &\approx \int_a^b f''(x) dx,
\end{aligned}$$

则得到

$$\begin{aligned}
\frac{I - T_n}{I - T_{2n}} &\approx 4, \\
I &\approx T_{2n} + \frac{1}{3}(T_{2n} - T_n).
\end{aligned} \tag{2.18}$$

上式说明, 若两个相邻的积分近似值 T_n 与 T_{2n} 之差为允许误差, 则 T_{2n} 与积分精确值之差大约是允许误差的三分之一, 因此计算可以至此为止. 误差之此

种估计法称为后天估计(事后估计).

对 Simpson 公式也有类似的算法, 此处不细说了. 比较公式(2.9), (2.12)和(2.16), 可以得到复化 Simpson 公式与梯形公式的如下关系:

$$S_{2n} = \frac{4}{3} T_{2n} - \frac{1}{3} T_n. \quad (2.19)$$

§ 3 Romberg 方法

现在来比较一下复化梯形公式与复化 Simpson 公式. 复化梯形公式仅对 1 次多项式精确成立, 收敛速度是 $\left(\frac{1}{n}\right)^2$; 而复化 Simpson 公式对所有次数不超过 3 的多项式精确成立, 收敛速度是 $\left(\frac{1}{n}\right)^4$. 所以一般说来 Simpson 公式要比梯形公式好. 然而如果我们用逐次分半算法计算了 T_1, T_2, T_4, \dots , 则依(2.19)式顺便就可以算出复化 Simpson 公式的值 S_2, S_4, \dots . 同样, 用 S_{2n} 和 S_{4n} 作适当的线性组合又可以得到更好的求积公式. 这种用两个相邻的近似公式(其中一个公式是由另一个公式的分半得到的)的线性组合而得到更好的近似公式的方法, 就是近代电子计算机上常用的 Romberg 求积方法, 也叫逐次分半加速法. 形如(2.19)的公式也叫逐次分半加速公式.

公式(2.19)是由比较求积公式的系数得到的. 下面想从另一个角度, 即从近似求积余项的分析来引出这种加速公式的一般形式.

令

$$I = \int_a^b f(x) dx.$$

由复化梯形公式的余项

$$E_n^T[f] = I - T_n = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\xi),$$

$$E_{2n}^T[f] = I - T_{2n} = -\frac{(b-a)^3}{12(2n)^2} f''(\eta)$$

可以看出, $4E_{2n}^T[f] - E_n^T[f] \approx 0$ 对所有次数不超过 2 的多项式精确成立. 因此

$$4(I - T_{2n}) - (I - T_n) \approx 0,$$

亦即

$$I \approx \frac{4}{4-1} T_{2n} - \frac{1}{4-1} T_n = \frac{4}{3} T_{2n} - \frac{1}{3} T_n$$

对所有次数不超过 2 的多项式精确成立. 事实上, 它就是 Simpson 求积公式, 它对所有的 3 次多项式也是精确成立的.

同样由复化 Simpson 公式的求积误差表达式

$$E_{2n}^S[f] = I - S_{2n} = -\frac{(b-a)^5}{2880n^4} f^{(4)}(\xi),$$

$$E_{4n}^S[f] = I - S_{4n} = -\frac{(b-a)^5}{2880(2n)^4} f^{(4)}(\eta)$$

可以看出, $4^2 E_{4n}^S[f] - E_{2n}^S[f] \approx 0$. 对所有次数不超过 4 的多项式精确成立. 因此

$$4^2(I - S_{4n}) - (I - S_{2n}) \approx 0,$$

亦即

$$I \approx \frac{4^2}{4^2-1} S_{4n} - \frac{1}{4^2-1} S_{2n} \stackrel{\Delta}{=} C_{4n} \quad (3.1)$$

对所有次数不超过 4 的多项式精确成立. 这就是复化 Cotes 公式. 复化 Cotes 公式的余项为

$$\int_a^b f(x) dx - C_{4n} = -\frac{2}{945} \cdot \frac{(b-a)^7}{(4n)^6} f^{(6)}(\xi).$$

因此, 实际上复化 Cotes 公式(3.1)对 5 次多项式也是精确成立的.

当 $n=1$ 时, 记 $y_i = f\left(a + i \frac{b-a}{4}\right)$, 则有

$$\begin{aligned} C_4 &= \frac{4^2}{4^2-1} S_4 - \frac{1}{4^2-1} S_2 \\ &= (b-a) \left(\frac{7}{90} y_0 + \frac{32}{90} y_1 + \frac{2}{15} y_2 + \frac{32}{90} y_3 + \frac{7}{90} y_4 \right). \end{aligned}$$

上式即是 $n=4$ 时的 Newton-Cotes 公式, 也称为 Cotes 公式.

类似地, 我们可以将复化 Cotes 公式加速, 从而得到更好的求积公式.

以此类推, 可以得到一系列逐次分半加速公式. 它可表列如下:

区间等分数	逐次分半加速公式	代数精度
n	梯形公式(T 公式): T_n	1
$2n$	Simpson 公式(S 公式): $S_{2n} = \frac{4}{4-1} T_{2n} - \frac{1}{4-1} T_n$	3
$4n$	Cotes 公式(C 公式): $C_{4n} = \frac{4^2}{4^2-1} S_{4n} - \frac{1}{4^2-1} S_{2n}$	5
$8n$	Romberg 公式(R 公式): $R_{8n} = \frac{4^3}{4^3-1} C_{8n} - \frac{1}{4^3-1} C_{4n}$	7
$16n$	D 公式: $D_{16n} = \frac{4^4}{4^4-1} R_{16n} - \frac{1}{4^4-1} R_{8n}$	9
$32n$	E 公式: $E_{32n} = \frac{4^5}{4^5-1} D_{32n} - \frac{1}{4^5-1} D_{16n}$	11
\vdots	\vdots	\vdots

在实际计算中,逐次分半加速法可按如下表格逐行进行计算.当表中对角线上出现两个顺序接连的数之差为允许误差时,即可停止运算.

逐次分半加速表

例 计算定积分

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx,$$

并使误差不超过 0.000 1.

解 (1) 在区间 [1,2] 上用梯形公式得

$$T_1 = \frac{1}{2} [f(1) + f(2)] = \frac{3}{4} = 0.750\ 00.$$

(2) 将 [1,2] 二等分

$$H_2 = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{2}{3} \approx 0.666\ 67,$$

$$T_2 = \frac{1}{2} (T_1 + H_2) \approx 0.708\ 33,$$

$$S_2 = \frac{4T_2 - T_1}{4-1} \approx 0.694\ 44.$$

(3) 将 [1,2] 四等分

$$H_4 = \frac{1}{2} \left[f\left(\frac{5}{4}\right) + f\left(\frac{7}{4}\right) \right] \approx 0.685\ 71,$$

$$T_4 = \frac{1}{2} (T_2 + H_4) \approx 0.697\ 02,$$

$$S_4 = \frac{4T_4 - T_2}{4-1} \approx 0.693\ 25,$$

$$C_4 = \frac{4^2 S_4 - S_2}{4^2 - 1} \approx 0.693\ 17.$$

(4) 将 [1,2] 8 等分

$$H_8 = \frac{1}{4} \left[f\left(\frac{9}{8}\right) + f\left(\frac{11}{8}\right) + f\left(\frac{13}{8}\right) + f\left(\frac{15}{8}\right) \right] \approx 0.691\ 22,$$

$$T_8 = \frac{1}{2} (T_4 + H_8) \approx 0.694\ 12,$$

$$S_8 = \frac{4T_8 - T_4}{4-1} \approx 0.693\ 15,$$

$$C_8 = \frac{4^2 S_8 - S_4}{4^2 - 1} \approx 0.693\ 15,$$

$$R_8 = \frac{4^3 C_8 - C_4}{4^3 - 1} \approx 0.693\ 15.$$

由于 $|C_4 - R_8| = 0.000\ 02 < 0.000\ 1$, 故计算可以停止. 所得积分近似值为 0.693 15.

§ 4 Euler-Maclaurin 公式

为介绍 Euler-Maclaurin 公式, 必须先讲述 Bernoulli 数.

Bernoulli 数 $\{B_j\}$ 由下述母函数生成:

$$G(t) = \frac{t}{e^t - 1},$$

亦即

$$G(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B_j}{j!} t^j, \quad B_j = \left[\frac{t}{e^t - 1} \right]_{t=0}^{(j)}, \quad j = 1, \dots, \quad (4.1)$$

而

$$B_0 = G(0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{e^t - 1} = 1.$$

为写出前几个 Bernoulli 数, 注意到

$$G(-t) = t + \frac{t}{e^{-t} - 1}$$

即

$$G(-t) = t + G(t),$$

所以

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{B_j}{j!} (-1)^j t^j = t + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B_j}{j!} t^j.$$

比较 t 的同次幂系数, 可知

$$B_1 = -1/2, \quad B_{2j+1} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots),$$

其他的 Bernoulli 数为

$$\begin{aligned} B_0 &= 1, B_2 = 1/6, B_4 = -1/30, B_6 = 1/42, \\ B_8 &= -1/30, B_{10} = 5/66, B_{12} = -691/2730, B_{14} = 7/6, \\ B_{16} &= -3617/510, B_{18} = 43867/798, B_{20} = -174611/330. \end{aligned}$$

它们间有如下递推关系式

$$B_n = \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} B_\nu \quad (n > 1). \quad (4.2)$$

Bernoulli 多项式由下述母函数生成：

$$H(x, t) = \frac{t e^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B_j(x)}{j!} t^j. \quad (4.3)$$

Bernoulli 多项式和 Bernoulli 数的关系为 $B_n(0) = B_n$. 前几个 Bernoulli 多项式为

$$B_0(x) = 1, \quad B_1(x) = x - 1/2, \quad B_2(x) = x^2 - x + 1/6,$$

$$B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{x}{2}, \quad B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 1/30.$$

按 $B_k(x)$ 的定义, 可知

$$B_k(x) = \left[\frac{t e^{xt}}{e^t - 1} \right]_{t=0}^{(k)} = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \left(\frac{t}{e^t - 1} \right)_{t=0}^{(i)} (e^{xt})_{t=0}^{(k-i)},$$

从而

$$B_k(x) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} B_i x^{k-i}. \quad (4.4)$$

在(4.3)式两边对 x 求导数, 可知

$$\frac{d}{dx} H(x, t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B'_j(x)}{j!} t^j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B_j(x)}{j!} t^{j+1},$$

因此

$$B'_j(x) = j \cdot B_{j-1}(x), \quad j = 1, 2, \dots. \quad (4.5)$$

以 $1-x$ 代替(4.3)式中的 x , 得到

$$H(1-x, t) = \frac{t e^{(1-x)t}}{e^t - 1} = \frac{(-t)e^{x(-t)}}{e^{-t} - 1} = H(x, -t).$$

按 $B_j(x)$ 的定义, 有

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{B_j(1-x)}{j!} t^j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B_j(x)}{j!} (-t)^j,$$

从而

$$B_j(1-x) = (-1)^j B_j(x), \quad j = 0, 1, \dots. \quad (4.6)$$

由此可知,当 j 为奇数时,(4.6)式表明,此时 $B_j(x)$ 在 $[0,1]$ 上以 $x=1/2$ 点中心对称;当 j 为偶数时,(4.6)式表明,此时 $B_j(x)$ 在 $[0,1]$ 上以 $x=1/2$ 直线对称.

若于(4.6)式中取 $x=0$,则可得到 $B_j(1)=(-1)^j B_j(0)$,从而有

$$\begin{aligned} B_{2k+1}(1) &= -B_{2k+1}(0) = -B_{2k+1} = 0, \\ B_{2k}(1) &= B_{2k}(0) = B_{2k}. \end{aligned}$$

现在定义以 1 为周期的函数 $\bar{B}_k(x)$:

$$\bar{B}_k(x) = \begin{cases} B_k(x), & 0 \leq x \leq 1, \\ \bar{B}_k(x-1), & x \geq 1. \end{cases}$$

定理(Euler-Maclaurin 公式) 设 $m \geq 0, n \geq 1, h = (b-a)/n, x_j = a + jh, j = 0, \dots, n$. 若 $f(x) \in C^{2m+2}[a, b]$, 则下述 Euler-Maclaurin 公式成立:

$$\begin{aligned} &\int_a^b f(x) dx - h \left[\frac{1}{2} f(a) + f(a+h) + \dots + f(a+(n-1)h) + \frac{1}{2} f(b) \right] \\ &= - \sum_{j=1}^n \frac{B_{2j} h^{2j}}{(2j)!} [f^{(2j-1)}(b) - f^{(2j-1)}(a)] \\ &\quad + \frac{h^{2m+2}}{(2m+2)!} \int_a^b \left[\bar{B}_{2m+2} \left(\frac{x-a}{h} \right) - B_{2m+2} \right] f^{(2m+2)}(x) dx. \end{aligned} \quad (4.7)$$

证明 应用 Bernoulli 多项式的性质,

$$\begin{aligned} \int_a^{a+h} f(x) dx &= h \int_0^1 f(a+th) dt = h \int_0^1 f(a+th) B'_1(t) dt \\ &= h [f(a+th) B_1(t)] \Big|_0^1 - h^2 \int_0^1 f'(a+th) B_1(t) dt \\ &= \frac{h}{2} [f(a) + f(a+h)] - \frac{h^2}{2} \int_0^1 f'(a+th) B'_2(t) dt \\ &= \frac{h}{2} (f(a) + f(a+h)) - \frac{h^2}{2} [f'(a+th) B_2(t)] \Big|_0^1 \\ &\quad + \frac{h^3}{2} \int_0^1 f''(a+th) B_2(t) dt \\ &= \frac{h}{2} (f(a) + f(a+h)) - \frac{h^2}{2} \cdot B_2 \cdot (f'(a+h) - f'(a)) \\ &\quad + \frac{h^3}{6} [f''(a+th) B_3(t)] \Big|_0^1 - \frac{h^4}{6} \int_0^1 f'''(a+th) B_3(t) dt \\ &= \dots \\ &= \frac{h}{2} (f(a) + f(a+h)) - \sum_{k=0}^{m+1} \frac{B_{2k} h^{2k}}{(2k)!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cdot (f^{(2k-1)}(a+h) - f^{(2k-1)}(a)) + \frac{h^{2m+3}}{(2m+2)!} \int_0^1 B_{2m+2}(t) \\ & \cdot f^{(2m+2)}(a+th) dt, \end{aligned} \quad (4.8)$$

其中求和号下的最后一项, 可化为

$$\begin{aligned} & \frac{B_{2m+2} h^{2m+2}}{(2m+2)!} (f^{(2m+1)}(a+h) - f^{(2m+1)}(a)) \\ & = \frac{B_{2m+2} h^{2m+3}}{(2m+2)!} \int_0^1 f^{(2m+2)}(a+th) dt. \end{aligned}$$

将之代入(4.8)式并整理, 得到

$$\begin{aligned} \int_a^b f(a+th) dt &= \frac{h}{2} (f(a) + f(a+h)) - \sum_{k=1}^m \frac{B_{2k} h^{2k}}{(2k)!} (f^{(2k-1)}(a+h) \\ &- f^{(2k-1)}(a)) + \frac{h^{2m+3}}{(2m+2)!} \int_0^1 f^{(2m+2)}(a+th) [B_{2m+2}(t) - B_{2m+2}] dt. \end{aligned}$$

上式右端的积分项可化为

$$\frac{h^{2m+2}}{(2m+2)!} \int_a^{a+h} f^{(2m+2)}(x) \left[\bar{B}_{2m+2} \left(\frac{x-a}{h} \right) - B_{2m+2} \right] dx.$$

证毕.

还有第二 Euler-Maclaurin 求积公式. 对于它来说, 相应和式是对一批“半点”上的函数值求的和.

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= h \left[f\left(a + \frac{1}{2}h\right) + f\left(a + \frac{3}{2}h\right) + \cdots + f\left(a + \left(n - \frac{1}{2}\right)h\right) \right] \\ &+ \frac{B_2 h^2}{4} (f'(b) - f'(a)) + \cdots \\ &+ \frac{B_{2k} h^{2k}}{(2k)!} (1 - 2^{-2k+1}) (f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)) + \cdots \end{aligned} \quad (4.9)$$

其实(4.9)式完全可以从原来的 Euler-Maclaurin 公式, 同取步长为 $h/2$ 的 Euler-Maclaurin 公式两者组合起来而得到(留作习题).

Euler-Maclaurin 公式(4.7)和(4.9), 既可作为求和公式, 又可作为求积公式. 该公式及其多元推广, 已被应用于各类求积与求和问题中. 直至近年, 仍有学者从事这方面的理论和应用研究.

§ 5 Gauss 型求积公式

本节讨论当求积公式的结点(又称计值点)个数 n 确定后, 求积公式的代数精确度最高能是多少, 并给出这类具有最高代数精度的求积公式的一般理论. 如前所知, 只要 n 点求积公式的代数精度不少于 $n - 1$, 则它一定是插值型的求积公式. 因此具有最高代数精度的求积公式必然是插值型求积公式.

设

$$\int_a^b \rho(x)f(x)dx \approx \sum_{j=1}^n A_j f(x_j) \quad (5.1)$$

为以 x_1, \dots, x_n 为结点的插值型求积公式. 人们可以断言, 上述求积公式对于 $2n$ 次代数多项式

$$f(x) = (x - x_1)^2 \cdots (x - x_n)^2$$

必不能精确成立. 事实上, 对任意选定的求积系数 A_1, \dots, A_n , 必有

$$\sum_{j=1}^n A_j f(x_j) = 0.$$

另一方面, 显然有

$$\int_a^b \rho(x)(x - x_1)^2 \cdots (x - x_n)^2 dx > 0.$$

所以(5.1)的最高代数精度必不能超过 $2n - 1$.

人们要问: 是否存在具有 $2n - 1$ 次代数精度的求积公式? 如果存在的话, 它的求积结点应该有什么特征呢? 以下定理给上述问题一个肯定的回答.

定理 2 插值型求积公式(5.1)具有 $2n - 1$ 次代数精度, 必须且只需插值结点 x_1, \dots, x_n 是 $[a, b]$ 上以 $\rho(x)$ 为权的 n 次直交多项式的零点.

证明 设(5.1)具有 $2n - 1$ 次代数精度. 记 $\omega(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_n)$, 对任意给定的多项式 $q(x) \in P_{n-1}$, 因(5.1)的代数精度为 $2n - 1$, 所以

$$\int_a^b \rho(x)\omega(x)q(x)dx = \sum_{j=1}^n A_j \omega(x_j)q(x_j) = 0,$$

亦即 $\omega(x)$ 与 $q(x)$ 关于权 $\rho(x)$ 直交.

反之, 若 $\omega(x)$ 与任何次数 $\leq n - 1$ 的多项式关于 $\rho(x)$ 直交. 注意到, 任意

给定 $f(x) \in P_{2n-1}$, 恒可表为 $f(x) = q(x)\omega(x) + r(x)$, 其中 $q(x)$ 与 $r(x)$ 均属于 P_{n-1} . 且

$$\begin{aligned} \int_a^b \rho(x)f(x)dx &= \int_a^b \rho(x)q(x)\omega(x)dx + \int_a^b \rho(x)r(x)dx \\ &= \sum_{j=1}^n A_j r(x_j) \\ &= \sum_{j=1}^n A_j [q(x_j)\omega(x_j) + r(x_j)] \\ &= \sum_{j=1}^n A_j f(x_j), \end{aligned}$$

即求积公式(5.1)具有 $2n-1$ 次代数精度. 证毕.

具有最高代数精度 $2n-1$ 的插值型求积公式, 称为 Gauss 型求积公式. 由定理 2, 构造 Gauss 型求积公式的关键问题是: 给定了 $\rho(x)$ 与 n , 究竟应如何来作多项式 $\omega(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$, 使 $\omega(x)$ 与任意次数 $\leq n-1$ 的多项式 $q(x)$ 关于 $\rho(x)$ 恒直交, 其中 $a \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_n \leq b$. 由直交多项式理论, 多项式 $\omega(x)$ 可表示成

$$\omega(x) = \frac{1}{\Delta_{n-1}} \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_{n-1} & 1 \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_n & x \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n-1} & x^n \end{vmatrix}.$$

定理 3 设(5.1)为 Gauss 型内插求积公式, 则其求积系数 A_k 皆为正, 且 A_k 有一个与(1.6)等价的表达式:

$$A_k = \frac{1}{[\omega'(x_k)]^2} \int_a^b \frac{\rho(x)[\omega(x)]^2}{(x - x_k)^2} dx. \quad (5.2)$$

证明 显然, 多项式

$$f(x) = [\omega(x)/(x - x_k)]^2$$

的次数是不超过 $2n-2$ 的, 并且容易看出

$$f(x_l) = \begin{cases} 0, & l \neq k, \\ [\omega'(x_k)]^2, & l = k. \end{cases}$$

由于 Gauss 公式对其精确成立, 故得

$$\int_a^b \rho(x)f(x)dx = \sum_{l=1}^n A_l f(x_l) = A_k [\omega'(x_k)]^2.$$

因为 $\int_a^b \rho(x)f(x)dx > 0$, 所以

$$A_k = \frac{1}{[\omega'(x_k)]^2} \int_a^b \rho(x)f(x)dx > 0.$$

最后将多项式 $f(x)$ 代入, 便得到公式(5.2).

定理 4 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 内 $2n$ 次连续可微, 则 Gauss 型公式(5.1)的余项表达式为

$$E[f] = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \int_a^b \rho(x)[\omega(x)]^2 dx,$$

其中 $a \leq \xi \leq b$, $\omega(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$.

证明 根据 Hermite 插值公式可以作出一个次数 $\leq 2n-1$ 的多项式 $\varphi(x)$, 使得 $\varphi(x_k) = f(x_k)$, $\varphi'(x_k) = f'(x_k)$ ($k = 1, \dots, n$), 并且

$$f(x) = \varphi(x) + \frac{[\omega(x)]^2}{(2n)!} f^{(2n)}(\eta),$$

此处 $\eta = \eta(x) \in [a, b]$, $x_k \in [a, b]$ ($k = 1, \dots, n$).

在上式两端乘以 $\rho(x)$ 后再积分, 则得

$$\int_a^b \rho(x)f(x)dx = \int_a^b \rho(x)\varphi(x)dx + \int_a^b \rho(x) \frac{[\omega(x)]^2}{(2n)!} f^{(2n)}(\eta)dx. \quad (5.3)$$

既然 $\varphi(x)$ 是次数 $\leq 2n-1$ 的多项式, 故(5.3)式右端的第一项为

$$\int_a^b \rho(x)\varphi(x)dx = \sum_{k=1}^n A_k \varphi(x_k) = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k).$$

注意 $\rho(x)[\omega(x)]^2$ 非负, 因此(5.3)式右端的余项可利用积分中值定理改写成

$$E[f] = \frac{1}{(2n)!} f^{(2n)}(\xi) \int_a^b \rho(x)[\omega(x)]^2 dx.$$

这样便证明了定理 4.

现在, 我们考虑 Gauss 型求积公式的收敛性问题.

定理 5 设 $[a, b]$ 为一有限区间, 并有 Gauss 型求积公式序列

$$\int_a^b \rho(x)f(x)dx \approx \sum_{k=1}^n A_{k,n} f(x_{k,n}) \quad (n = 2, 3, \dots). \quad (5.4)$$

若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则此公式序列收敛于积分的真值.

证明 只需证, 对于给定的 $\epsilon > 0$, 存在 N , 使得当 $n > N$ 时有

$$\left| \int_a^b \rho(x) f(x) dx - \sum_{k=1}^n A_{k,n} f(x_{k,n}) \right| < \epsilon.$$

定义

$$C = \int_a^b \rho(x) dx = \sum_{k=1}^n A_{k,n}$$

和 $\epsilon_1 = \epsilon / (3C)$. 依 Weierstrass 定理, 对给定的 ϵ_1 , 有 N 次多项式 $q_N(x)$ 使得

$$|f(x) - q_N(x)| < \epsilon_1 \quad (x \in [a, b]).$$

若 $n > N$, 则和式(5.4)中的 n 点公式对 $q_N(x)$ 是精确的. 从而当 $n > N$ 时有

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b \rho(x) f(x) dx - \sum_{k=1}^n A_{k,n} f(x_{k,n}) \right| \\ &= \left| \int_a^b \rho(x) f(x) dx - \int_a^b \rho(x) q_N(x) dx \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^n A_{k,n} q_N(x_{k,n}) - \sum_{k=1}^n A_{k,n} f(x_{k,n}) \right| \\ &\leq \left| \int_a^b \rho(x) f(x) dx - \int_a^b \rho(x) q_N(x) dx \right| \\ &\quad + \left| \sum_{k=1}^n A_{k,n} q_N(x_{k,n}) - \sum_{k=1}^n A_{k,n} f(x_{k,n}) \right| \\ &= \left| \int_a^b \rho(x) [f(x) - q_N(x)] dx \right| \\ &\quad + \left| \sum_{k=1}^n A_{k,n} [q_N(x_{k,n}) - f(x_{k,n})] \right| \\ &\leq \int_a^b \rho(x) |f(x) - q_N(x)| dx \\ &\quad + \sum_{k=1}^n A_{k,n} |q_N(x_{k,n}) - f(x_{k,n})| \\ &\leq \epsilon_1 \int_a^b \rho(x) dx + \epsilon_1 \sum_{k=1}^n A_{k,n} \\ &\leq 2C\epsilon_1 = 2C\epsilon/(3C) = \frac{2}{3}\epsilon < \epsilon. \end{aligned}$$

Gauss 型求积公式序列的收敛性比定理 5 的结论还要好. 可以证明, 这一求积公式序列当积分存在时就收敛于积分的真值.

§ 6 Gauss 公式和 Mehler 公式

Gauss 公式和 Mehler 公式都是一般的 Gauss 型公式的特别情形. 因为它们很有用, 所以值得专门来介绍一下.

经典的 Gauss 公式为

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + E[f], \quad (6.1)$$

因此这是在一般 Gauss 型公式中令 $\rho(x) \equiv 1, [a, b] = [-1, 1]$ 所得的特别情形.

根据一般理论, 我们知道公式中的结点 x_k 乃是 n 次多项式 $\omega(x)$ 的零点; 而这个 $\omega(x)$ 必须与一切不超过 $n - 1$ 次的多项式 $q(x)$ 直交, 亦即有

$$\int_{-1}^1 \omega(x) q(x) dx = 0.$$

虽然这样的 $\omega(x)$ 总可以通过矩量

$$\mu_k = \int_{-1}^1 x^k dx \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

作成的行列式表示出来, 但是这样做毕竟是麻烦的. 事实上, 人们早已发现著名的 Legendre 多项式

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

恰好具有上述 $\omega(x)$ 所要求的直交性. 由于 $P_n(x)$ 也是 n 次多项式, 因此它与我们所需要的 $\omega(x)$ 顶多差一个常数因子. 容易看出

$$P_n(x) = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} x^n + \dots,$$

因此所需要的 $\omega(x)$ (即最高次项的系数是 1 的多项式) 可以表成

$$\omega(x) = \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!} P_n(x).$$

这样, 我们不仅解决了 Gauss 公式的结点问题, 而且也可以利用所得到的 $\omega(x)$

去解决求积系数问题和求积公式余项问题. 显然

$$A_k = \int_{-1}^1 \frac{\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)} dx = \int_{-1}^1 \frac{P_n(x)}{(x - x_k)P'_n(x_k)} dx. \quad (6.2)$$

但是用这个公式来计算 A_k 还是不甚方便, 事实上我们可以得到更简便的系数公式. 试考虑积分

$$S_k = \int_{-1}^1 \frac{P_n(x)}{x - x_k} P'_n(x) dx, \quad (6.3)$$

注意到被积函数为 $2n - 2$ 次多项式, 故由 Gauss 公式知

$$S_k = A_k [P'_n(x_k)]^2. \quad (6.4)$$

另一方面, 如令

$$u = \frac{P_n(x)}{x - x_k}, \quad dv = P'_n(x) dx,$$

则将(6.3)的右端进行分部积分, 可知有

$$S_k = \left[\frac{P_n^2(x)}{x - x_k} \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 P_n(x) \left(\frac{P_n(x)}{x - x_k} \right)' dx. \quad (6.5)$$

注意上式右端第二项内的被积函数又是 $2n - 2$ 次多项式, 它应该精确地等于 Gauss 公式的求积和. 又因 $P_n(x_k) = 0 (k = 1, 2, \dots, n)$, 故(6.5)式右端的积分等于零. 注意到 $P_n^2(\pm 1) = 1$, 容易求出第一项的值为

$$S_k = \left[\frac{P_n^2(x)}{x - x_k} \right]_{-1}^1 = \frac{1}{1 - x_k} + \frac{1}{1 + x_k} = \frac{2}{1 - x_k^2}.$$

因此依(6.4)式, 便得到了 A_k 的系数公式:

$$A_k = \frac{2}{(1 - x_k^2)[P'_n(x_k)]^2}. \quad (6.6)$$

这样, 我们已完全解决了 Gauss 公式的构造问题.

在验证 $P_n(x)$ 的直交性时, 我们曾用分部积分法处理了积分

$$I = \int_{-1}^1 P_n(x) Q(x) dx.$$

就 $Q(x) \equiv P_n(x)$ 而言, 则由同样的计算手续可得

$$\int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx = (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n dx = \frac{2}{2n+1}. \quad (6.7)$$

于是根据 Gauss 型求积公式余项的普遍公式, 我们便可算出公式(6.1)中的余项为

$$\begin{aligned} E[f] &= \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \int_{-1}^1 [\omega(x)]^2 dx \\ &= \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3} f^{(2n)}(\xi), \end{aligned} \quad (6.8)$$

其中 $-1 \leq \xi \leq 1$. 在此, 我们用到了(6.7)式和

$$\omega(x) = \frac{2^n(n!)^2}{(2n)!} P_n(x).$$

下面简要地介绍 Mehler 求积公式的结构形式. Mehler 公式的权函数与积分区间如下:

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad [a, b] = [-1, 1].$$

对这种情形, 相应的直交多项式 $\omega(x)$ 恰好就是 Tchebyshev 多项式

$$\tilde{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x).$$

$\tilde{T}_n(x)$ 的 n 个零点 x_1, x_2, \dots, x_n 便是 Mehler 公式的结点. 再根据求积系数的一般公式, 将 $\omega(x) \equiv \tilde{T}_n(x)$ 代入并作变数代换 $x = \cos \theta$, 则可得出所需要的系数为

$$A_k = \frac{1}{\tilde{T}'_n(x_k)} \int_0^\pi \frac{\frac{1}{2^{n-1}} \cos n\theta}{\cos \theta - x_k} d\theta = \frac{\pi}{n}. \quad (6.9)$$

上式中的三角函数(实际是 $n-1$ 次三角多项式)的积分值恰好等于 $\frac{\pi}{n} \tilde{T}'_n(x_k)$ 的事实, 留给读者作为一个习题来论证.

综上所述, 可知 Mehler 公式的形式是

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x) dx = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) + E[f], \quad (6.10)$$

其中 $x_k, k = 1, \dots, n$ 是 $\tilde{T}_n(x) = 0$ 的根.

公式(6.10)的最大优点是求积系数都相同. 这在应用时可以减少 $n - 1$ 次乘法运算.

最后, 我们不加证明地指出(6.10)式中余项的一个估计式

$$E[f] = \frac{\pi}{(2n)!} \frac{f^{(2n)}(\xi)}{2^{2n-1}} \quad (-1 \leq \xi \leq 1). \quad (6.11)$$

这里当然应先假定 $f^{(2n)}(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上存在并连续.

例 试用 Gauss 公式计算定积分

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + 1)(3x^2 + 4)}}.$$

显然, 如作变数替换 $x = \frac{1}{2}(t + 1)$, 则上述积分的积分区间便变为 $[-1, 1]$, 因而便可直接应用公式(6.1). 自然也可以直接利用与公式(6.1)完全等价而积分区间是 $[0, 1]$ 的那个 Gauss 公式:

$$\int_0^1 F(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k^* F(x_k^*), \quad (6.12)$$

此处 A_k^* 与 x_k^* 同公式(6.1)中的 A_k 与 x_k 之间的关系是

$$A_k^* = \frac{1}{2} A_k, \quad x_k^* = \frac{1}{2}(x_k + 1).$$

在 V. E. Kleirov 的《近似计算方法讲义》一书中曾给出关于 $n = 1, 2, \dots, 8$ 的诸 A_k^* 与 x_k^* 之值. 例如现在我们是利用 4 个结点的公式(6.12)来计算积分 I , 则由查表可知

k	x_k^*	A_k^*
1	0.069 432	0.173 927
2	0.330 009	0.326 073
3	0.669 991	0.326 073
4	0.930 568	0.173 927

在这里我们还看出求积系数 A_k^* 的分布是对称的, 并且 $x_1^* + x_4^* = x_2^* + x_3^* = 1$ (亦即结点位置对 $[0, 1]$ 的中点亦是对称的). 这个事实对一般的 n 也都成立.

既然有了 A_k^* 与 x_k^* 的具体数值, 那么代入公式(6.12)的右端便立即得到所需的积分值:

$$I \approx \sum_{k=1}^4 A_k^* F(x_k^*) = 0.402\ 184.$$

同样,如果利用 3 个结点的公式来计算,则所得的数值是 $I \approx 0.402\ 114$. 这与上面所得的结果相比较,有 4 位小数是相同的,所以可取 $I \approx 0.402\ 1$.

§ 7 三角精度与周期函数的求积公式

在实际应用问题中有时遇到周期函数的定积分,因此有必要讨论这种积分的近似求积法.

假定要计算的积分是 $I = \int_0^{2\pi} f(x) dx$, 其中 $f(x)$ 是 x 的以 2π 为周期的连续函数, 即 $f(x + 2\pi) = f(x)$. 我们希望建立带有 n 个结点的求积公式:

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k). \quad (7.1)$$

根据 Weierstrass 第二逼近定理,用三角多项式

$$T_m(x) = a_0 + \sum_{k=1}^m (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

可以一致地逼近周期连续函数. 因此自然又使我们想到用形如上述 $T_m(x)$ 的 m 次三角多项式的次数 m 来规定求积公式(7.1)的精度.

如果公式(7.1)对任意 m 次三角多项式都精确成立, 而对 $m+1$ 次三角多项式不恒成立, 此时便称(7.1)的三角精度为 m .

现在我们来证明无论怎样选取 x_k 和 A_k 都不能使公式(7.1)的三角精度提高到 $\geq n$. 让我们考虑 n 次三角多项式

$$f(x) = \prod_{k=1}^n \sin^2 \left(\frac{x - x_k}{2} \right), \quad (7.2)$$

其中 x_k 为(7.1)右端求积中的结点.

由三角函数的和积互化公式可知几个三角多项式的乘积仍是三角多项式, 而次数等于连乘的多项式的次数之和. 因此(7.2)显然是 n 次三角多项式, 假如设想(7.1)的三角精度 $\geq n$, 则自然就会有

$$\int_0^{2\pi} \left[\prod_{k=1}^n \sin^2 \left(\frac{x - x_k}{2} \right) \right] dx = \sum_{j=1}^n A_j f(x_j) = 0.$$

但上式的左端 >0 ,这个矛盾便证明了(7.1)的三角精度无论如何不能超过 $n-1$.

进一步还可以证明(7.1)确实可以达到最高可能的精度 $n-1$.这只需取等距结点和相等的系数 $A_1=A_2=\cdots=A_n$ 即可办到.

在 $[0,2\pi]$ 中任取步长为 $h=\frac{2\pi}{n}$ 的等距结点

$$x_k = x_1 + (k-1)h \quad (k=1,2,\cdots,n).$$

又假定一切系数为常数($A_k=A$),在公式(7.1)中令 $f(x)\equiv 1$,则

$$\int_0^{2\pi} dx = \sum_{k=1}^n A_k = nA.$$

因此可知 $A=\frac{2\pi}{n}$.从而,公式(7.1)此时即变成如下特殊形式:

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx \approx \frac{2\pi}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k). \quad (7.3)$$

易验证求积公式(7.3)确实具有三角精度 $n-1$,为此只需取 $f(x)\equiv 1$, $\cos mx, \sin mx$ ($m=1,2,\cdots,n-1$)来验证就可以了,自然同样地取

$$f(x)=e^{imx} \quad (m=0,1,2,\cdots,n-1; i=\sqrt{-1})$$

来验算一下亦就够了.当然 $m=0$ 是无须验证的.以下可假定 $0 < m \leq n-1$.此时,我们有

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx = \int_0^{2\pi} e^{imx}dx = \frac{1}{im} \left[e^{imx} \right]_0^{2\pi} = 0;$$

另一方面,求积和也等于0,原因是

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n f(x_k) &= \sum_{k=1}^n e^{im(x_1+(k-1)h)} = e^{imx_1} \sum_{k=1}^n e^{im(k-1)h} \\ &= e^{imx_1} \left(\frac{e^{imnh} - 1}{e^{imh} - 1} \right) = 0 \quad \left(h = \frac{2\pi}{n} \right). \end{aligned}$$

这就证明了关于精度所作的断言.

显然,如果被积函数的周期为 $T>0$,则只需作一变数代换即可将公式(7.3)变形为

$$\int_0^T f(x)dx = \frac{T}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) + E[f], \quad (7.4)$$

其中 $0 \leqslant x_1 \leqslant h$, $h = \frac{T}{n}$, $x_k = x_1 + (k-1)h$ ($k = 1, 2, \dots, n$).

例 试计算椭圆积分

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - 0.5 \sin^2 \varphi}}.$$

注意被积函数为偶函数,且周期为 π ,因此

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - 0.5 \sin^2 \varphi}}.$$

我们可以对 $T = \pi$ 来利用公式(7.4). 取 $n = 6$ 及关于 $\varphi = 0$ 为对称的结点 $x_{\pm 1} = \pm \frac{\pi}{12}$, $x_{\pm 2} = \pm \frac{\pi}{4}$, $x_{\pm 3} = \pm \frac{5}{12}\pi$, 于是由(7.4)式便得到(注意 $f(x_k) = f(-x_k)$)

$$2I \approx \frac{\pi}{3} \sum_{k=1}^3 f(x_k).$$

如果使用 6 位小数去计算,则得 $I = 1.854\ 007$,和积分的精确值

$$I = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} \approx 1.854\ 075$$

相比较,其误差为 6.8×10^{-5} .

§8 奇异积分的计算

许多应用问题中所遇到的反常积分的计算问题,常可借助于变量替换或分部积分法,使之变成通常的积分来计算.

例 1 计算

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}.$$

解 上述积分可拆成两部分:

$$I = \int_0^1 \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} dx + \int_1^\infty \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} dx.$$

采用变量替换 $z = 1/x$, 则右端第二个积分变为

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} dx &= \int_1^0 \frac{-1}{\left(1+\frac{1}{z}\right)\sqrt{\frac{1}{z}}} z^{-2} dz \\ &= \int_0^1 \frac{1}{(1+z)\sqrt{z}} dz,\end{aligned}$$

所以

$$I = 2 \int_0^1 \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} dx.$$

再采用分部积分法, 得到

$$I = 2 + 4 \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2} dx.$$

右端的积分已是通常的定积分, 因而可用一般的数值积分公式来计算了.

对于一个积分来讲, 如果它的被积函数在积分区间上处处连续, 而它的某些阶导数在区间内的某点不是有界的. 此时虽然人们仍可用数值积分公式来计算它, 但因余项的界已无法控制, 致使这类数值积分公式无效. 这表明如果被积函数 $f(x)$ 的导数存在奇点, 则会导致数值积分公式无效.

以下介绍 Kontorovich 奇点分离法. 它是专门为解决以上问题的一类方法. 其基本思想乃是作出与被积函数有同样特点的可积分成有限形式的初等函数. 如从被积函数减去这个辅助函数, 便得到与其导数同为连续的函数. 作为辅助函数, 常取 Taylor 级数的部分和. 这样求积公式则可应用于被积函数与辅助函数之差上.

设所欲求的积分为

$$I = \int_a^b (x - x_0)^\sigma \phi(x) dx, \quad \sigma > -1,$$

其中 $\phi(x_0) \neq 0$, 且在 x_0 的某个邻域内有一直到 k 阶的连续导数.

利用恒等式

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \left[\phi(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} \phi'(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^k}{k!} \phi^{(k)}(x_0) \right] \\ &\quad + \left[\phi(x) - \phi(x_0) - \frac{(x-x_0)}{1!} \phi'(x_0) - \cdots - \frac{(x-x_0)^k}{k!} \phi^{(k)}(x_0) \right],\end{aligned}$$

将被积函数 $f(x) = (x - x_0)^\sigma \phi(x)$ 分解为

$$f(x) = (x - x_0)^\sigma \phi(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

其中

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \phi(x_0)(x - x_0)^\sigma + \frac{\phi'(x_0)}{1!}(x - x_0)^{\sigma+1} + \cdots + \frac{\phi^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^{\sigma+k}, \\ f_2(x) &= (x - x_0)^\sigma \left[\phi(x) - \phi(x_0) - \frac{x - x_0}{1!} \phi'(x_0) - \cdots - \frac{\phi^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \right]. \end{aligned}$$

所以

$$I = \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx = I_1 + I_2,$$

此处的 I_1 已是正常的积分, 因而可以数值积分. $f_2(x)$ 有一直到 k 阶的导数存在, 事实上有

$$\begin{aligned} f_2^{(k)}(x) &= (x - x_0)^{\sigma+1} \left\{ \frac{\sigma(\sigma-1)\cdots(\sigma-k+1)}{(k+1)!} \phi^{(k+1)}(\xi_0) \right. \\ &\quad \left. + \binom{k}{1} \frac{\sigma(\sigma-1)\cdots(\sigma-k+2)}{k!} \phi^{(k+1)}(\xi_1) + \cdots + \phi^{(k+1)}(\xi_k) \right\}, \end{aligned}$$

其中诸 ξ_j 为 x_0 与 x 之间的数, 所以

$$\int_a^b f_2(x) dx$$

可用含有 $f^{(m)}(\xi)$ ($m \leq k$) 的余项之数值积分公式来计算.

例 2 计算

$$I = \int_0^1 \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} dx.$$

解 利用恒等式

$$\frac{1}{1+x} = (1-x+x^2) + \left(\frac{1}{1+x} - 1+x-x^2 \right).$$

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} (1-x+x^2) dx + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{1+x} - 1+x-x^2 \right) dx.$$

上面右端第一个积分可直接算出

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} (1-x+x^2) dx \approx 1.733\ 333,$$

而第二个积分经化简后,为

$$-\int_0^1 \frac{x^2 \sqrt{x}}{1+x} dx,$$

利用 3 点 Gauss 积分公式可求得它的值 $-0.162\ 601$. 最后求得

$$I \approx 1.570\ 73.$$

顺便指出,近年来国内、外学者们更经常采用样条方法来构造数值积分方法. 特别地,拟插值样条算子常被应用于各种奇异积分,包括 Cauchy 主值积分和有限部分积分的数值积分. 它们在奇异积分方程,特别是在边界元方法中有着重要的应用.

§ 9 高维求积公式

设 D_n 是 n 维欧氏空间 \mathbf{R}^n 中的区域. 记 $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_n)$, $d\mathbf{X} = dx_1 \cdots dx_n$. 本节讨论如下形式的求积公式:

$$\int_{D_n} f(\mathbf{X}) \omega(\mathbf{X}) d\mathbf{X} \approx \sum_{i=1}^N A_i f(\mathbf{X}_i), \quad (9.1)$$

其中 $\omega(\mathbf{X}) = \omega(x_1, \dots, x_n)$ 是权函数, 它在 D_n 上非负; 诸 $\mathbf{X}_i \in D_n$ 称为求积结点; 诸 A_i 是不依赖于 $f(\mathbf{X})$ 的常数, 称为求积系数.

求积公式(9.1)的误差为

$$\rho_N = \int_{D_n} \omega(\mathbf{X}) f(\mathbf{X}) d\mathbf{X} - \sum_{i=1}^N A_i f(\mathbf{X}_i),$$

有时(9.1)式也被写成

$$\int_{D_n} \omega(\mathbf{X}) f(\mathbf{X}) d\mathbf{X} = \sum_{i=1}^N A_i f(\mathbf{X}_i) + \rho_N. \quad (9.2)$$

如果对任意的单项式

$$x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}, k_1 + k_2 + \cdots + k_n \leq k$$

求积公式(9.1)精确成立, 并且至少有一个 $k+1$ 次的单项式, 使得(9.1)式不精确成立, 则称求积公式(9.1)具有 k 次代数精度. 简称它为 k 次求积公式.

由于篇幅所限,我们不能展开来讨论高维求积公式的所有理论和方法.本节只介绍平面区域上的 Radon 7 点 5 次求积公式.

设 D 为平面上的任意有界区域,权函数 $\omega(x, y) \equiv 1$. 我们将证明,能够构造 D 上的 7 点 5 次求积公式. 为此,需要寻求 D 上的三个线性无关的 3 次直交多项式,它们有 7 个互异的公共零点. 如果这样的多项式已经找到了,则可证明以这 7 个公共零点为求积结点的求积公式就有 5 次代数精度.

先描述 7 点 5 次求积公式的特征.

令 $p_k(x, y)$ 和 $p_{k,i}(x, y)$ 表示真正 k 次的 2 元多项式,而 $q_k(x, y)$, $q_{k,i}(x, y)$ 表示次数 $\leq k$ 的 2 元多项式,即 $q_k \in P_k$, $q_{k,i} \in P_k$.

按第四章中关于多元直交多项式的理论, D 上 3 次直交多项式有 4 个基底. 设这些基底多项式为

$$\begin{aligned} p^{3,0}(x, y) &= x^3 + q_2^{3,0}(x, y), \\ p^{1,2}(x, y) &= xy^2 + q_2^{1,2}(x, y), \\ p^{2,1}(x, y) &= x^2y + q_2^{2,1}(x, y), \\ p^{0,3}(x, y) &= y^3 + q_2^{0,3}(x, y), \end{aligned} \quad (9.3)$$

其中 $q_2^{i,j} \in P_2$, $i + j = 3$. 引进三个常数

$$\begin{aligned} A &= \int_D [p^{3,0} \cdot p^{1,2} - (p^{2,1})^2] dx dy, \\ B &= \int_D [p^{3,0} \cdot p^{0,3} - p^{2,1} \cdot p^{1,2}] dx dy, \\ C &= \int_D [p^{2,1} \cdot p^{0,3} - (p^{1,2})^2] dx dy. \end{aligned} \quad (9.4)$$

以下恒假定区域 D 使 A, B, C 不全为 0, 即

$$A^2 + B^2 + C^2 > 0. \quad (9.5)$$

为构造平面区域 D 上的 5 次求积公式,至少需要多少个求积结点? 下面的定理回答了这个问题.

定理 6 (Meisovskih) 设 D 满足(9.5). 为了构造 D 上的一个 5 次求积公式,求积结点的个数不能少于 7.

证明 采用反证法. 假若不然, 设求积公式

$$\int_D f(x, y) dx dy \approx \sum_{j=1}^6 C_j f(x_j, y_j) \quad (9.6)$$

具有 5 次代数精度.

可以断言,结点 $\rho_j = (x_j, y_j)$, $j = 1, \dots, 6$ 不能同时落在一条 2 次曲线上. 事实上,如果 $\{\rho_j\}_1^6$ 落在 2 次曲线

$$l(x, y) = 0, \quad l \in P_2$$

上,则 $[l(x, y)]^2 \in P_4 \subset P_5$ 作为 $f(x, y)$, 必使(9.6)精确成立. 但这是不可能的, 因为对于 $f = l^2$ 来说, (9.6)的左端大于 0, 而右端为 0.

通过求积公式(9.6)的 6 个求积结点中的任意 5 点(假定不包括点 ρ_k)作一条 2 次代数曲线 $l_k(x, y) = 0$, 则 $l_k(\rho_k) \neq 0$. 因假定(9.6)具有 5 次代数精度, 特别地对于 $[l_k(x, y)]^2 \in P_4$ 应是精确的, 即

$$\int_D [l_k(x, y)]^2 dx dy = C_k [l_k(\rho_k)]^2,$$

所以 $C_k > 0, k = 1, \dots, 6$.

对于 D 上的任意 3 次直交多项式 $\mu(x, y)$, 显然(9.6)对于 5 次多项式 $\mu(x, y)l_k(x, y)$ 是精确成立的, 即

$$\int_D \mu(x, y)l_k(x, y) dx dy = C_k \mu(\rho_k) l_k(\rho_k).$$

可是, 按 $\mu(x, y)$ 的直交性, 上式左端为 0, 再由 $C_k > 0, l_k(\rho_k) \neq 0$ 的事实, 必可推知 $\mu(\rho_k) = 0, k = 1, \dots, 6$. 这表明(9.6)的求积结点, 是任意 3 次直交多项式的零点. 当然也是由(9.3)给出的 3 次直交多项式的 4 个基底的零点.

以下证明 A, B 和 C 皆为 0. 事实上,

$$\begin{aligned} A &= \int_D [p^{3,0} \cdot xy^2 - p^{2,1} \cdot x^2 y] dx dy \\ &= \int_D [(x^3 + q_2^{3,0})xy^2 - (x^2 y + q_2^{2,1})x^2 y] dx dy \\ &= \int_D [q_2^{3,0}xy^2 - q_2^{2,1}x^2 y] dx dy. \end{aligned}$$

因 $q_2^{3,0}, q_2^{2,1} \in P_2$, 且(9.6)为 5 次求积公式, 所以它对最后的积分精确成立, 即

$$A = \sum_{i=1}^6 C_i [q_2^{3,0}(x_i, y_i)x_i y_i^2 - q_2^{2,1}(x_i, y_i)x_i^2 y_i]. \quad (9.7)$$

又因按(9.3)给出的四个 3 次直交多项式均以求积结点为零点, 所以

$$q_2^{3,0}(x_i, y_i) = -x_i^3, \quad q_2^{2,1}(x_i, y_i) = -x_i^2 y_i.$$

由(9.7)可知 $A = 0$. 同理可证得 $B = C = 0$, 这与 $A^2 + B^2 + C^2 > 0$ 矛盾. 定理

得证.

定理 7 若 7 点求积公式

$$\int_D f(x, y) dx dy \approx \sum_{i=1}^7 A_i f(x_i, y_i) \quad (9.8)$$

具有 5 次代数精确度, 则有 3 个 3 次多项式

$$p_{3,1}(x, y), p_{3,2}(x, y), p_{3,3}(x, y) \quad (9.9)$$

存在, 满足下列条件:

- (i) 多项式组(9.9)线性无关, 且其中任一多项式均与 P_2 中的任意多项式直交;
- (ii) (9.8)中的 7 个求积结点是(9.9)中 3 个多项式的公共零点;
- (iii) 以(9.8)中 7 个求积结点为零点的任意 3 次多项式, 必是(9.9)中 3 个多项式的线性组合;
- (iv) 存在 3 个 1 次多项式

$$q_{1,i}(x, y) = a_i x + b_i y + c_i, \quad i = 1, 2, 3$$

(其中至少有两个 1 次多项式不恒为零), 使得

$$q_{1,1}(x, y) p_{3,1}(x, y) + q_{1,2}(x, y) p_{3,2}(x, y) + q_{1,3}(x, y) p_{3,3}(x, y) \equiv 0. \quad (9.10)$$

本定理的完全证明比较冗长, 此处从略.

下面讨论 7 点 5 次求积公式的构造方法.

首先介绍如何构造 3 个线性无关的直交多项式 $p_{3,i} \in P_3, i = 1, 2, 3$, 使得

$$q_{1,1} \cdot p_{3,1} + q_{1,2} \cdot p_{3,2} + q_{1,3} \cdot p_{3,3} \equiv 0, \quad (9.11)$$

其中 $q_{1,i}$ 如定理 7 中所述. 其次将指出 $p_{3,i} (i = 1, 2, 3)$ 有 7 个公共零点, 且若这些公共零点互异, 则它们可用作 5 次求积公式(9.8)的求积结点.

定理 8 如果(9.4)中的 A, B, C 不全为 0, 则可找到 3 个线性无关的直交多项式 $p_{3,i} (i = 1, 2, 3)$, 它们满足(9.11), 其中 $q_{1,i} (i = 1, 2, 3)$ 为 1 次函数, 且至少有两个不恒为 0.

证明 先证明可以找到 3 次直交多项式 $p_{3,i} (i = 1, 2, 3)$, 使得

$$xp_{3,1} + yp_{3,2} = p_{3,3}. \quad (9.12)$$

因为任意 3 次直交多项式 $p_{3,1}$ 与 $p_{3,2}$ 均能以 3 次直交多项式基底线性表示, 即

$$\begin{aligned} p_{3,1} &= \alpha_{30} p^{3,0} + \alpha_{21} p^{2,1} + \alpha_{12} p^{1,2} + \alpha_{03} p^{0,3}, \\ p_{3,2} &= \beta_{30} p^{3,0} + \beta_{21} p^{2,1} + \beta_{12} p^{1,2} + \beta_{03} p^{0,3}. \end{aligned}$$

按(9.12)式, $xp_{3,1} + yp_{3,2}$ 应是 3 次多项式, 即它的 4 次项为 0, 所以

$$\alpha_{30} = \beta_{03} = 0, \alpha_{21} = -\beta_{30}, \alpha_{12} = -\beta_{21}, \alpha_{03} = -\beta_{12},$$

所以

$$\begin{aligned} p_{3,1} &= \alpha p^{2,1} + \beta p^{1,2} + \gamma p^{0,3}, \\ p_{3,2} &= -\alpha p^{3,0} - \beta p^{2,1} - \gamma p^{1,2}. \end{aligned} \tag{9.13}$$

以下确定 α, β 和 γ , 以使 $xp_{3,1} + yp_{3,2}$ 为一 3 次直交多项式.

因为 $p_{3,1}, p_{3,2}$ 为 3 次直交多项式, 所以 $xp_{3,1} + yp_{3,2}$ 与 P_1 中的所有多项式直交, 故我们只需选择 α, β 和 γ 使得

$$xp_{3,1} + yp_{3,2} = \alpha(xp^{2,1} - yp^{3,0}) + \beta(xp^{1,2} - yp^{2,1}) + \gamma(xp^{0,3} - yp^{1,2})$$

与 x^2, xy 和 y^2 都直交就可以了, 由此推出

$$\begin{bmatrix} 0 & A & B \\ -A & 0 & C \\ -B & -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{9.14}$$

若 A, B, C 不全为 0, 则上述齐方程组的系数矩阵的秩为 2, 所以(9.14)解空间的维数为 1, 即除差一常数因子外, (9.14)有唯一的一组非零解 α, β, γ , 因而 $p_{3,1}$ 与 $p_{3,2}$ 线性无关. 分两种情形来讨论:

- (a) $p_{3,3} = xp_{3,1} + yp_{3,2}$ 与 $p_{3,1}, p_{3,2}$ 线性无关;
- (b) $p_{3,3}$ 是 $p_{3,1}, p_{3,2}$ 的线性组合:

$$p_{3,3} = \lambda_1 p_{3,1} + \lambda_2 p_{3,2}. \tag{9.15}$$

对于情形(a): 我们找到了三个线性无关的多项式, 它们满足(9.12)(是(9.11)型的恒等式).

对于情形(b): 按(9.12)和(9.15), 可得

$$(x - \lambda_1)p_{3,1} + (y - \lambda_2)p_{3,2} = 0. \tag{9.16}$$

经变换 $x - \lambda_1 = x'$, $y - \lambda_2 = y'$, (9.16) 成为

$$xp_{3,1} + yp_{3,2} = 0, \tag{9.17}$$

其中为简便计, 仍采用了原来的符号表示自变量与直交多项式. 因此, 对于情形

(b), 我们找到了两个线性无关的直交多项式. 若将 $p_{3,3}$ 取为任意的与 $p_{3,1}, p_{3,2}$ 线性无关的 3 次直交多项式, 并取 $q_{1,3} \equiv 0$, 则仍可把(9.17)式看成(9.11)型的恒等式.

现在研究 $p_{3,3}(x, y)$. 对于情形(b), (9.17)式成立, 所以由整除性知

$$p_{3,1} = yp_2, \quad p_{3,2} = -xp_2, \quad (9.18)$$

其中 $p_2 \in P_2$. 不难看出, p_2 与在原点取值为 0 的 3 次多项式 $q_3 \in P_3$ 都直交. 事实上, 由对 q_3 所作的假定, $q_3 = xq_{2,1} + yq_{2,2}$. 根据(9.18), 以及 $p_{3,1}$ 与 $p_{3,2}$ 的直交性,

$$\begin{aligned} \int_D p_2 \cdot q_3 dx dy &= \int_D p_2(xq_{2,1} + yq_{2,2}) dx dy \\ &= \int_D (-p_{3,2}q_{2,1} + p_{3,1}q_{2,2}) dx dy = 0. \end{aligned}$$

由上述结论, 还可推知 $p_2(0,0) \neq 0$. 因为否则 p_2 将会与自己直交, 从而 $p_2 \equiv 0$. 但由 $p_2 \equiv 0$, 将推出 $p_{3,1} \equiv p_{3,2} \equiv 0$, 这显然是错误的.

以下证明对情形(b), 所有的 3 次直交多项式在原点的值为 0. 设 $p_3(x, y)$ 为任意的 3 次直交多项式, 则 $p_3(x, y) - p_3(0,0)$ 为在原点取值为 0 的 3 次多项式. 因而

$$\int_D [p_3(x, y) - p_3(0,0)] p_2(x, y) dx dy = 0.$$

但 p_3 是直交多项式, 故

$$p_3(0,0) \int_D p_2(x, y) dx dy = 0.$$

又因

$$\begin{aligned} \int_D xp_2 dx dy &= 0, \quad \int_D yp_2 dx dy = 0, \\ \int_D x^2 p_2 dx dy &= 0, \quad \int_D xy p_2 dx dy = 0, \quad \int_D y^2 p_2 dx dy = 0, \end{aligned}$$

所以若 $\int_D p_2 dx dy = 0$, 则可推出 p_2 与自己直交, 而这在前面已指出是不可能的, 因此有 $p_3(0,0) = 0$.

设 p_3^* 是任意与 $p_{3,1}$ 和 $p_{3,2}$ 线性无关的 3 次直交多项式. 由(9.18),

$$p_{3,1} = y(\alpha_{00} + \alpha_{10}x + \dots), \quad p_{3,2} = -x(\alpha_{00} + \alpha_{10}x + \dots),$$

其中 $\alpha_{00} = p_2(0,0) \neq 0$. 可从 p_3^* 中减去 $p_{3,1}$ 与 $p_{3,2}$ 的线性组合, 以使

$$p_{3,3} \equiv p_3^* - (\alpha_1 p_{3,1} + \alpha_2 p_{3,2})$$

中不含 x, y 的一次项. 显然 $p_{3,1}, p_{3,2}, p_{3,3}$ 与 $p_{3,1}, p_{3,2}, p_3^*$ 有相同的公共零点.

综上可知, $p_{3,3}$ 可取成不含 x 和 y 的一次项的任意 3 次直交多项式. 这样的多项式不可能是 $p_{3,1}$ 与 $p_{3,2}$ 的线性组合. 记

$$p_{3,3} = \alpha_{30} p^{3,0} + \alpha_{21} p^{2,1} + \alpha_{12} p^{1,2} + \alpha_{03} p^{0,3}.$$

因 $p_{3,3}$ 不含 x 和 y 的一次项, 这相当于对 α_{ij} 添了两个约束条件, 所以有 $p_{3,3}$ 的两个参数族, 它们与 $p_{3,1}, p_{3,2}$ 线性无关. 从而对于情形(b), $p_{3,3}$ 不是唯一的. 证毕.

定理 9 若 $p_{3,1}, p_{3,2}$ 和 $p_{3,3}$ 满足关系式

$$q_{1,1} p_{3,1} + q_{1,2} p_{3,2} + q_{1,3} p_{3,3} \equiv 0, \quad (9.19)$$

其中 $q_{1,i} = a_i x + b_i y + c_i$ ($i = 1, 2, 3$), 则(除差一常数倍外)这些关系或与(9.12)重合(对于情形(a)), 或与(9.17)重合(对于情形(b)).

证明 只证情形(a)时的结论, 对于情形(b)的证明是类似的.

方程(9.19)可写成

$$\begin{aligned} x(a_1 p_{3,1} + a_2 p_{3,2} + a_3 p_{3,3}) + y(b_1 p_{3,1} + b_2 p_{3,2} + b_3 p_{3,3}) \\ + (c_1 p_{3,1} + c_2 p_{3,2} + c_3 p_{3,3}) = 0. \end{aligned}$$

但满足(9.12)的 $p_{3,i}$ 是唯一的, 所以

$$\begin{aligned} a_1 p_{3,1} + a_2 p_{3,2} + a_3 p_{3,3} &= a p_{3,1}, \\ b_1 p_{3,1} + b_2 p_{3,2} + b_3 p_{3,3} &= a p_{3,2}, \\ c_1 p_{3,1} + c_2 p_{3,2} + c_3 p_{3,3} &= -a p_{3,3}, \end{aligned}$$

其中 $a \neq 0$. 由于 $p_{3,1}, p_{3,2}, p_{3,3}$ 线性无关, 所以

$$\begin{aligned} a_1 &= a, a_2 = 0, a_3 = 0, \\ b_1 &= 0, b_2 = a, b_3 = 0, \\ c_1 &= 0, c_2 = 0, c_3 = -a. \end{aligned}$$

证毕.

定理 10 多项式 $p_{3,1}, p_{3,2}$ 和 $p_{3,3}$ 无公共因子.

证明 首先证明 $p_{3,i}$ ($i = 1, 2, 3$) 无 2 次的公共因子. 假若不然, 设 $p_{3,i}$ (i

$=1,2,3$)有2次的公共因子 p_2 ,即有 $p_{3,i}=p_2 \cdot p_{1,i}$ ($i=1,2,3$),其中 $p_{1,i} \in P_1$.因 $p_{3,i}$ 线性无关,故有常数 c_1, c_2 和 c_3 存在,使得

$$c_1 p_{1,1} + c_2 p_{1,2} + c_3 p_{1,3} = 1.$$

两边乘以 p_2 ,得到

$$c_1 p_{3,1} + c_2 p_{3,2} + c_3 p_{3,3} = p_2.$$

这意味着

$$\int_D [p_2(x, y)]^2 dx dy = 0,$$

矛盾.

以下证明 $p_{3,i}$ ($i=1,2,3$)无1次公共因子.先看情形(a).假定 $p_{3,i}=p_1 \cdot p_{2,i}$ ($i=1,2,3$),其中 $p_{2,i}$ ($i=1,2,3$)线性无关.由(9.12),

$$xp_{2,1} + yp_{2,2} = p_{2,3},$$

即 $xp_{2,1} + yp_{2,2}$ 中的3次项不存在,因此

$$\begin{aligned} p_{2,1} &= y(ax + by) + p_{1,1}^*, \\ p_{2,2} &= -x(ax + by) + p_{1,2}^*, \\ p_{2,3} &= xp_{1,1}^* + yp_{1,2}^*. \end{aligned}$$

由此得到

$$p_{1,2}^* \cdot p_{2,1} - p_{1,1}^* \cdot p_{2,2} = (ax + by) p_{2,3}.$$

两边乘以 p_1 ,得到

$$p_{1,2}^* p_{3,1} - p_{1,1}^* p_{3,2} = (ax + by) p_{3,3}.$$

由(9.12)的唯一性,应有

$$p_{1,2}^* = ax, \quad p_{1,1}^* = -ay,$$

从而 $p_{2,3} \equiv 0, p_{3,3} \equiv 0$.但这是不可能的.

再看情形(b).假定 $p_{3,i}=p_1 p_{2,i}$ ($i=1,2,3$),则 $p_{3,1}=yp_1 p_{1,1}, p_{3,2}=-xp_1 p_{1,1}, p_{3,3}=p_1 p_2^*$.我们指出, $p_2(0,0) \neq 0$,此处 $p_2=p_1 \cdot p_{1,1}$.因此 $p_{1,1}(0,0) \neq 0$.又因 $p_{2,3}(0,0)=0$,所以 $p_2^*(0,0)=0$.故必有 $p_2^*=xp_{1,1}^*+yp_{1,2}^*$.从而

$$p_{1,2}^* p_{3,1} - p_{1,1}^* p_{3,2} = p_{1,2}^* p_1 p_{1,1} y + p_{1,1}^* p_1 p_{1,1} x$$

$$\begin{aligned}
 &= p_1 p_{1,1} (x p_{1,1}^* + y p_{1,2}^*) \\
 &= p_{1,1} p_{3,3}.
 \end{aligned}$$

按(9.17)的唯一性, $p_{1,1} \equiv 0$, 矛盾. 证毕.

利用 Bezout 定理等, 可证得

定理 11 多项式 $p_{3,1}, p_{3,2}$ 和 $p_{3,3}$ 有 7 个公共零点.

证明从略.

设 $\rho_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, \dots, 7$ 是 $p_{3,1}, p_{3,2}$ 和 $p_{3,3}$ 的 7 个公共零点. 若它们互异, 则可用以作为 D 上的 5 次求积公式的求积结点.

定理 12 $p_{3,i}$ ($i = 1, 2, 3$) 的公共零点 $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_7$ 不能同时落在一条 2 次曲线上.

证明 假定 ρ_i ($i = 1, \dots, 7$) 同在 2 次曲线 $\bar{p}_2 = 0$ 上. 首先假定 \bar{p}_2 不可约. 由 Bezout 定理, 在情形(a)下, \bar{p}_2 是诸 $p_{3,i}$ 的公共分支, 这与定理 11 相矛盾. 在情形(b)下, 曲线 $p_2 = 0$ 与 $\bar{p}_2 = 0$ 有 6 个公共交点. 再由 Bezout 定理, $\bar{p}_2 = 0$ 应与 $p_2 = 0$ 重合. 但 $p_2(0,0) \neq 0$, 故 $\bar{p}_2(0,0) \neq 0$. 这也是不可能的.

假定 $\bar{p}_2 = p_{1,1} \cdot p_{1,2}$, 则 $p_{1,1} = 0$ 与 $p_{1,2} = 0$ 两条直线中至少有一条含有 ρ_i ($i = 1, \dots, 7$) 中的四个点. 由 Bezout 定理, 该直线必为 $p_{3,1}, p_{3,2}$ 和 $p_{3,3}$ 的公共分支. 此与定理 11 相矛盾. 证毕.

定理 13 若 $q_5(x, y) \in P_5$, 且 ρ_1, \dots, ρ_7 是它的零点, 则存在 $q_{2,i} \in P_2$, $i = 1, 2, 3$ 满足

$$q_5 = q_{2,1} p_{3,1} + q_{2,2} p_{3,2} + q_{2,3} p_{3,3}. \quad (9.20)$$

证明 因 ρ_1, \dots, ρ_7 不在同一条 2 次曲线上, 所以可以找到另外 14 个点 ρ_8, \dots, ρ_{21} , 使得 ρ_1, \dots, ρ_{21} 不在一条 5 次曲线上. (9.20) 式两端的 5 次多项式, 均以 ρ_1, \dots, ρ_7 为零点. 为使(9.20)成立, 只需其两端的 5 次多项式在 ρ_8, \dots, ρ_{21} 处相等即可. 这导致一个 18 个未知数($q_{2,i}$ 的系数), 14 个方程的线性方程组.

为讨论此方程组的可解性, 考虑相应的齐方程组. 即寻求 $q_{2,i}$ ($i = 1, 2, 3$), 使得

$$q_{2,1} p_{3,1} + q_{2,2} p_{3,2} + q_{2,3} p_{3,3} = 0. \quad (9.21)$$

对于情形(a), (9.21) 成为

$$(q_{2,1} + xq_{2,3}) p_{3,1} + (q_{2,2} + yq_{2,3}) p_{3,2} = 0.$$

因 $p_{3,1}$ 与 $p_{3,2}$ 无公共分支, 根据整除性理论, 可知有非零常数 μ , 使

$$q_{2,1} + xq_{2,3} = -\mu p_{3,2} = \mu x(ax^2 + \beta xy + \gamma y^2) + \mu(\alpha q_2^{3,0} + \beta q_2^{2,1} + \gamma q_2^{1,2}), \quad (9.22)$$

$$q_{2,2} + yq_{2,3} = \mu p_{3,1} = \mu y(ax^2 + \beta xy + \gamma y^2) + \mu(\alpha q_2^{2,1} + \beta q_2^{1,2} + \gamma q_2^{0,3}). \quad (9.23)$$

比较上两式两端 3 次项系数, 得到

$$q_{2,3} = \mu(ax^2 + \beta xy + \gamma y^2) + ax + by + c.$$

进而, 由(9.22)、(9.23)可解出 $q_{2,1}$ 与 $q_{2,2}$. 从而得到(9.21)的一般解, 它依赖于四个常数 a, b, c, μ . 所以齐方程组系数矩阵的秩数是 14, 因而相应的非齐方程组总是可解的. 亦即, 在情形(a)下, 满足(9.20)的 $q_{2,1}, q_{2,2}$ 和 $q_{2,3}$ 存在.

对于情形(b). 由(9.18), 方程(9.21)成为

$$(yq_{2,1} - xq_{2,2})p_2 + q_{2,3}p_{3,3} = 0.$$

因 p_2 与 $p_{3,3}$ 无公因子, 所以

$$q_{2,3} = \mu p_2, \quad yq_{2,1} - xq_{2,2} = -\mu p_{3,3}, \quad (9.24)$$

其中 μ 为非零常数. 由于 $p_{3,3}(0,0)=0$, 所以 $p_{3,3}=yq_{2,4}-xq_{2,5}$, 其中 $q_{2,4}, q_{2,5} \in P_2$. 将之代入(9.24)的第二式, 又得到

$$y(q_{2,1} + \mu q_{2,4}) - x(q_{2,2} + \mu q_{2,5}) = 0.$$

所以

$$\begin{aligned} q_{2,1} + \mu q_{2,4} &= x(ax + by + c), \\ q_{2,2} + \mu q_{2,5} &= y(ax + by + c). \end{aligned}$$

而(9.21)的一般解为

$$q_{2,1} = -\mu q_{2,4} + x(ax + by + c),$$

$$q_{2,2} = -\mu q_{2,5} + y(ax + by + c),$$

$$q_{2,3} = \mu p_2,$$

它们依赖 4 个任意常数 a, b, c 和 μ . 所以在情况(b)下, (9.21), 进而(9.20)是可解的.

定理 14 若 $p_{3,1}, p_{3,2}$ 和 $p_{3,3}$ 的 7 个公共零点互异, 则它们可以作为 5 次求积公式

$$\int_D f(x, y) dx dy \approx \sum_{i=1}^7 B_i f(x_i, y_i)$$

的求积结点.

证明 既然可以找到 ρ_8, \dots, ρ_{21} , 使得 $\rho_1, \dots, \rho_7, \rho_8, \dots, \rho_{21}$ 不落在同一条 5 次代数曲线上, 所以通过解 21 阶线性方程组, 可找到 B_1, \dots, B_{21} , 使得对一切 $q_5 \in P_5$, 有

$$\int_D q_5(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^{21} B_i q_5(\rho_i, \rho_i). \quad (9.25)$$

以下证明 $B_8 = \dots = B_{21} = 0$.

先看 B_8 . 由于 ρ_1, \dots, ρ_{21} 不在一条 5 次代数曲线上, 所以可以找到 $q_5 \in P_5$, 使得

$$q_5(\rho_i) = \delta_{8i}, \quad (9.26)$$

其中 δ_{ij} 为 Kronecker 符号. 因为 ρ_1, \dots, ρ_7 是 q_5 的零点, 由定理 13, 有 $q_{2,1}, q_{2,2}$ 和 $q_{2,3}$ 存在, 使得

$$q_5 = q_{2,1} p_{3,1} + q_{2,2} p_{3,2} + q_{2,3} p_{3,3}.$$

从而

$$\begin{aligned} \int_D q_5(x, y) dx dy &= \int_D (q_{2,1} p_{3,1} + q_{2,2} p_{3,2} + q_{2,3} p_{3,3}) dx dy \\ &= 0. \end{aligned}$$

再由(9.25)和(9.26), 得到

$$\int_D q_5(x, y) dx dy = B_5 = 0.$$

同理可证得 $B_9 = B_{10} = \dots = B_{21} = 0$. 证毕.

在利用二元直交多项式理论构造 7 点 5 次求积公式的过程中, 在 D 上所应满足的条件

$$A^2 + B^2 + C^2 > 0$$

起了关键的作用. Radon 曾指出, 当 D 为轴对称区域时, 上述条件被满足. 以下证明, 当 D 为对称区域时, 以上条件也满足.

定理 15 设 D 为对称区域, 则 $A^2 + B^2 + C^2 > 0$.

证明 采用反证法. 假若不然, 设 $A = B = C = 0$. 不难看出, 无论 D 是否是中心对称区域, 在其上, 基本直交多项式与 x 和 y 的组合

$$p^{3,0}y - p^{2,1}x, p^{0,3}x - p^{1,2}y, \quad (9.27)$$

与所有 2 次多项式直交.

当 D 为对称区域时, 基本直交多项式为

$$\begin{aligned} p^{3,0} &= x^3 + \frac{1}{\Delta} (\mu_{11}\mu_{31} - \mu_{02}\mu_{40})x + \frac{1}{\Delta} (\mu_{11}\mu_{40} - \mu_{20}\mu_{31})y, \\ p^{2,1} &= x^2y + \frac{1}{\Delta} (\mu_{11}\mu_{22} - \mu_{02}\mu_{31})x + \frac{1}{\Delta} (\mu_{11}\mu_{31} - \mu_{20}\mu_{22})y, \\ p^{1,2} &= xy^2 + \frac{1}{\Delta} (\mu_{11}\mu_{13} - \mu_{02}\mu_{22})x + \frac{1}{\Delta} (\mu_{11}\mu_{22} - \mu_{20}\mu_{13})y, \\ p^{0,3} &= y^3 + \frac{1}{\Delta} (\mu_{11}\mu_{04} - \mu_{02}\mu_{13})x + \frac{1}{\Delta} (\mu_{11}\mu_{13} - \mu_{20}\mu_{04})y, \end{aligned}$$

其中

$$\mu_{\alpha\beta} = \int_D x^\alpha y^\beta dx dy, \quad \alpha, \beta = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\Delta = \mu_{20}\mu_{02} - \mu_{11}^2.$$

显然当 $\alpha + \beta$ 为奇数时, $\mu_{\alpha\beta} = 0$.

上述公式可简记为

$$p^{3-i,i} = x^{3-i}y^i + a^{(i)}x + b^{(i)}y, \quad i = 0, 1, 2, 3.$$

这样, (9.27) 可表示为

$$\begin{aligned} p^{3,0}y - p^{2,1}x &= -a^{(1)}x^2 + (a^{(0)} - b^{(1)})xy + b^{(0)}y^2, \\ p^{0,3}x - p^{1,2}y &= a^{(3)}x^2 + (b^{(3)} - a^{(2)})xy - b^{(2)}y^2. \end{aligned}$$

它们均为 2 次多项式. 由于要求它们与所有的 2 次多项式均直交, 因而它们的系数全为 0. 特别地, 其中 xy 的系数为 0. 亦即 $a^{(0)} - b^{(1)} = 0, b^{(3)} - a^{(2)} = 0$. 这两个式子又可改写为 $\mu_{02}\mu_{40} - \mu_{20}\mu_{22} = 0$, 和 $\mu_{20}\mu_{04} - \mu_{02}\mu_{22} = 0$. 从而

$$\mu_{40}\mu_{04} - \mu_{22}^2 = 0.$$

但这是不可能的. 证毕.

例 1 设 D 为单纯形

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x + y \leq 1.$$

其上的基本直交多项式为

$$p^{3,0} = x^3 - \frac{9}{7}x^2 + \frac{3}{7}x - \frac{1}{35},$$

$$p^{2,1} = x^2y - \frac{1}{7}x^2 - \frac{4}{7}xy + \frac{2}{21}x + \frac{1}{21}y - \frac{1}{105},$$

$$\begin{aligned} p^{1,2} &= p^{2,1}(y, x), \\ p^{0,3} &= p^{3,0}(y, x). \end{aligned}$$

由计算可得

$$A = C = -\frac{8}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7!}, \quad B = \frac{8}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7!}.$$

可见 $A^2 + B^2 + C^2 > 0$. 可求得(9.14)的一组解 $\alpha = \beta = \gamma = 1$. 于是由(9.13), 得到

$$\begin{aligned} p_{3,1} &= x^2y + xy^2 + y^3 - \frac{1}{7}x^2 - \frac{8}{7}xy - \frac{10}{7}y^2 + \frac{1}{7}x + \frac{4}{7}y - \frac{1}{21}, \\ p_{3,2} &= -xy^2 - x^2y - x^3 + \frac{1}{7}y^2 + \frac{8}{7}xy + \frac{10}{7}x^2 - \frac{1}{7}y - \frac{4}{7}x + \frac{1}{21}. \end{aligned}$$

再根据(9.12), 得到

$$p_{3,3} = xp_{3,1} + yp_{3,2} = \frac{1}{21}(y-x)[3(y^2 + xy + x^2) - 6xy - 3(y+x) + 1].$$

因为 $p_{3,3}$ 不是 $p_{3,1}$ 与 $p_{3,2}$ 的线性组合, 所以属于情形(a).

此处不拟写出 $p_{3,1}$, $p_{3,2}$ 和 $p_{3,3}$ 的公共零点的计算. 但注意, 由 $p_{3,1} = 0$ 与 $p_{3,3} = 0$, 可知结点分布在直线 $y = x$ 上. 因而问题转化为解 3 次代数方程. 剩下的 4 个结点, 可由方程组 $p_{3,1} + p_{3,2} = 0$ 与 $p_{3,3} = 0$ 求出. 而这又归结为求解 2 次幂的代数方程组. 为应用方便, 以下表列出 7 点 5 次求积公式的结点和系数.

x_i	$\frac{1}{3}$	$\frac{6+\sqrt{15}}{21}$	$\frac{9-2\sqrt{15}}{21}$	$\frac{6+\sqrt{15}}{21}$	$\frac{6-\sqrt{15}}{21}$	$\frac{9+2\sqrt{15}}{21}$	$\frac{6-\sqrt{15}}{21}$
y_i	$\frac{1}{3}$	$\frac{9-2\sqrt{15}}{21}$	$\frac{6+\sqrt{15}}{21}$	$\frac{6+\sqrt{15}}{21}$	$\frac{9+2\sqrt{15}}{21}$	$\frac{6-\sqrt{15}}{21}$	$\frac{6-\sqrt{15}}{21}$
A_k	$\frac{9}{80}$	$\frac{155+\sqrt{15}}{2400}$	$\frac{155+\sqrt{15}}{2400}$	$\frac{155+\sqrt{15}}{2400}$	$\frac{155-\sqrt{15}}{2400}$	$\frac{155-\sqrt{15}}{2400}$	$\frac{155-\sqrt{15}}{2400}$

例 2 设 D 为圆域 $x^2 + y^2 \leq 1$, 则 7 点 5 次求积公式

$$\int_D f(x, y) dx dy \approx \sum_{i=1}^7 A_i f(x_i, y_i)$$

中的求积结点 $\rho_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, \dots, 7$ 与求积系数 A_i , $i = 1, \dots, 7$ 见下表.

x_i	0	$\frac{\sqrt{2}}{3}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	$-\frac{1}{\sqrt{6}}$	$-\frac{\sqrt{2}}{3}$	$\frac{-1}{\sqrt{6}}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$
y_i	0	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{-1}{\sqrt{2}}$	$\frac{-1}{\sqrt{2}}$
A_i	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{8}$

例 3 设 D 为方形区域 $-1 \leq x, y \leq 1$, 则 7 点 5 次求积公式的求积结点与求积系数如下表.

x_i	0	$\sqrt{\frac{14}{15}}$	$-\sqrt{\frac{14}{15}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{-1}{\sqrt{3}}$	$\frac{-1}{\sqrt{3}}$
y_i	0	0	0	$\sqrt{\frac{3}{5}}$	$-\sqrt{\frac{3}{5}}$	$\sqrt{\frac{3}{5}}$	$-\sqrt{\frac{3}{5}}$
A_i	$\frac{8}{7}$	$\frac{20}{63}$				$\frac{5}{9}$	

例 4 Meisovskih-Phillips 12 点 7 次求积公式.

区域 D 为 $-1 \leq x, y \leq 1$. 积分公式为

$$\begin{aligned} & \int_D f(x, y) dx dy \\ & \approx 4 \frac{77 - 3\sqrt{385}}{891} [f(r, 0) + f(-r, 0) + f(0, r) + f(0, -r)] \\ & + 4 \frac{77 + 3\sqrt{385}}{891} [f(s, 0) + f(-s, 0) + f(0, s) + f(0, -s)] \\ & + \frac{25}{81} \left[f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}, \sqrt{\frac{3}{5}}\right) + f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}, -\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}, \sqrt{\frac{3}{5}}\right) \right. \\ & \left. + f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}, -\sqrt{\frac{3}{5}}\right) \right], \end{aligned}$$

其中

$$r = \sqrt{\frac{105 + 3\sqrt{385}}{140}}, \quad s = \sqrt{\frac{105 - 3\sqrt{385}}{140}}.$$

例 5 Burnside 8 点 5 次求积公式. 积分区域 D 同例 4.

$$\begin{aligned} & \int_D f(x, y) dx dy \\ & \approx \frac{40}{49} \left[f\left(\sqrt{\frac{7}{15}}, 0\right) + f\left(-\sqrt{\frac{7}{15}}, 0\right) + f\left(0, \sqrt{\frac{7}{15}}\right) + f\left(0, -\sqrt{\frac{7}{15}}\right) \right] \\ & \quad + \frac{9}{49} \left[f\left(\sqrt{\frac{7}{9}}, \sqrt{\frac{7}{9}}\right) + f\left(\sqrt{\frac{7}{9}}, -\sqrt{\frac{7}{9}}\right) + f\left(-\sqrt{\frac{7}{9}}, \sqrt{\frac{7}{9}}\right) \right. \\ & \quad \left. + f\left(-\sqrt{\frac{7}{9}}, -\sqrt{\frac{7}{9}}\right) \right]. \end{aligned}$$

§ 10 n 维单纯形上的求积公式

设 n 维欧氏空间 \mathbf{R}^n 中的单纯区域为

$$S_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq 1, x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n\}. \quad (10.1)$$

单纯形 S_n 的顶点和中心分别记为

$$\begin{aligned} V_0 &= (0, 0, \dots, 0), V_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, V_n = (0, \dots, 0, 1), \\ C &= \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1}, \dots, \frac{1}{n+1} \right). \end{aligned} \quad (10.2)$$

显然单纯形 S_n 的体积 $\Delta_n = 1/n!$.

以下介绍几种求积公式, 其中有的还是新的求积公式. 它们的代数精确度及误差估计式, 留给读者作为习题来完成.

定理 16 如下的 $n+1$ 点, 具有 2 次代数精度的求积公式成立:

$$\int_{S_n} f(X) dX \approx \frac{\Delta_n}{n+1} \sum_{i=0}^n f(U_i), \quad (10.3)$$

其中

$$U_i = \frac{1}{\sqrt{n+2}} V_i + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+2}}\right) C, i = 0, \dots, n. \quad (10.4)$$

定理 17 如下的 $n+2$ 点, 具有 2 次代数精度的求积公式成立:

$$\int_{S_n} f(X) dX \approx \frac{\Delta_n}{(n+1)(n+2)} \sum_{i=0}^n f(V_i) + \frac{(n+1)\Delta_n}{n+2} f(C). \quad (10.5)$$

定理 18 如下的 $n+2$ 点, 具有 3 次代数精度的求积公式成立:

$$\int_{S_n} f(X) dX \approx A_n \sum_{i=0}^n f(U_i) + B_n \cdot f(C), \quad (10.6)$$

其中

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{(n+3)^2}{4(n+1)(n+2)}, \quad B_n = -\frac{(n+1)^2 \Delta_n}{4(n+2)}, \\ U_i &= \frac{2}{n+3} V_i + \frac{n+1}{n+3} C, \quad i=0,1,\cdots,n. \end{aligned} \quad (10.7)$$

定理 19 如下的 $2n+3$ 点, 具有 3 次代数精度的求积公式成立:

$$\int_{S_n} f(X) dX \approx A_n \sum_{i=0}^n f(V_i) + B_n \sum_{i=0}^n f(U_i) + C_n \cdot f(C), \quad (10.8)$$

其中

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{3\Delta_n}{(n+1)(n+2)(n+3)}, \quad B_n = \frac{n^3 \Delta_n}{(n+1)(n+2)(n+3)}, \quad C_n = -\frac{(n+1)^2(n-3)\Delta_n}{(n+2)(n+3)}, \\ U_i &= (V^* - V_i)/n, \quad V^*: = \sum_{i=0}^n V_i, \quad i=0,\cdots,n. \end{aligned} \quad (10.9)$$

定理 20 如下的 $(n+2)(n+3)/2$ 点, 具有 4 次代数精度的求积公式成立:

$$\begin{aligned} \int_{S_n} f(X) dX &\approx A_n \sum_{i=0}^n f(V_i) + B_n \sum_{i=0}^n f(U_i) \cdot \\ &\quad + C_n \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n f(P_{ij}) + D_n f(C), \end{aligned} \quad (10.10)$$

其中

$$\begin{aligned} A_n &= -\frac{(n-12)\Delta_n}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}, \quad B_n = \frac{(n+2)^3 \Delta_n}{(n+1)(n+3)(n+4)}, \\ C_n &= \frac{16\Delta_n}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}, \quad D_n = -\frac{(n+1)^3 \Delta_n}{(n+2)(n+3)}, \\ U_i &= \frac{1}{n+2} V_i + \frac{n+1}{n+2} C, \quad P_{ij} = \frac{1}{2}(V_i + V_j), \quad i < j. \end{aligned} \quad (10.11)$$

第五章习题

- 试证 n 点 Newton-Cotes 公式中的系数满足 $A_{n-k+1} = A_k$. 再利用这个结论证明: 如果

n 是奇数, 则 n 点 Newton-Cotes 公式对一切阶数 $\leq n$ 的多项式是准确的.

2. 已知一具有 d 次代数精度的求积公式, 试证明对此公式做线性变换得到的新求积公式也具有 d 次代数精度.

3. 试证明, 只要积分存在, 则复化梯形公式(2.9)形成的求积公式序列收敛于此积分的真值($n \rightarrow \infty$).

4. 试求关于 $[a, b] = [-1, 1]$ 和 $\rho(x) = x^2$ 的 2 点、3 点、4 点和 5 点 Gauss 公式. 验证这些公式的代数精度分别是 3, 5, 7 和 9.

5. 试求关于 $[a, b] = [0, 1]$ 和 $\rho(x) = x^6$ 的 2 点 Gauss 公式.

6. 试证明 Mehler 公式(6.10)是可以从公式(7.4)推导出来的.

7. 假定已知求积公式

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^n A_i f(x_i),$$

其中 $A_i > 0$, 且它对 $f(x) \equiv 1$ 是精确的. 若 $f(x_i)$ 中的误差最多是 $\frac{1}{2} 10^{-k}$, 试证明由这个公式产生的误差不大于 $(b-a) \cdot \frac{1}{2} 10^{-k}$.

8. 证明求积公式

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b)) - \frac{(b-a)^2}{12} (f'(b) - f'(a))$$

的代数精度是 3.

9. 证明 $B_{2k+1}(x)$ 于 $[0, 1]$ 中仅有 $0, 1/2, 1$ 三个根 ($k \geq 1$).

10. 证明 $B_{2k}(x) - B_{2k}$ 于 $[0, 1]$ 中不变号.

11. 证明

$$x^n = \int_x^{x+1} B_n(x) dx,$$

$$\sum_{k=1}^n k^m = \int_1^{n+1} B_m(x) dx.$$

12. 证明下述公式对次数不高于 4 的多项式精确成立:

$$\int_0^\infty e^{-x} f(x) dx \approx \frac{2+\sqrt{2}}{4} f(2-\sqrt{2}) + \frac{2-\sqrt{2}}{4} f(2+\sqrt{2}).$$

13. 证明

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \int_a^{a+n\hbar} f(x) dx &= f\left(a + \frac{\hbar}{2}\right) + f\left(a + \frac{3\hbar}{2}\right) + \cdots + f\left(a + nh - \frac{\hbar}{2}\right) \\ &\quad + \frac{\hbar}{24} [f'(a + nh) - f'(a)] - \frac{7h^3}{5760} [f^{(3)}(a + nh) - f^{(3)}(a)] \\ &\quad + \frac{31h^5}{157680} [f^{(5)}(a + nh) - f^{(5)}(a)] - \cdots. \end{aligned}$$

14. 证明下述公式对次数不高于 6 的多项式精确成立:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x) dx \approx \frac{\sqrt{\pi}}{6} \left[f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 4f(0) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right].$$

15. 证明定理 16(按代数精度的定义).

16. 证明定理 17(按代数精度的定义).

17. 证明定理 18(按代数精度的定义).

18. 证明定理 19(按代数精度的定义).

19. 证明定理 20(按代数精度的定义).

第六章 非线性逼近

考虑函数 $\ln(1+x)$ 的逼近问题. 它的 Taylor 展开式为

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} \quad (-1 < x \leq 1).$$

记上式右端前 s 项的和为 $T_s(x)$, 显然 $T_s(x)$ 可以作为 $\ln(1+x)$ 的一种近似. 由连分式展开的方法, $\ln(1+x)$ 又有如下的连分式展开式:

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} + \frac{1^2 x}{2} + \frac{1^2 x}{3} + \frac{2^2 x}{4} + \frac{2^2 x}{5} + \dots.$$

不难算出它的前 4 个渐近分式依次为

$$R_1(x) = \frac{2x}{2+x},$$

$$R_2(x) = \frac{6x+3x^2}{6+6x+x^2},$$

$$R_3(x) = \frac{60x+60x^2+11x^3}{60+90x+36x^2+3x^3},$$

$$R_4(x) = \frac{420x+630x^2+260x^3+25x^4}{420+840x+540x^2+120x^3+6x^4}.$$

可以具体算出, $R_n(x)$ 的展开式将含有函数 $\ln(1+x)$ 之 Taylor 展开式的前 $2n$ 项和 $T_{2n}(x)$. 下面来比较 $R_n(x)$ 与 $T_{2n}(x)$ 的逼近误差. 设以 ϵ_R 与 ϵ_T 分别记 $R_n(x)$ 与 $T_{2n}(x)$ 同 $\ln(1+x)$ 之间的误差, 并取 $x=1$. 它们误差的对比如下表:

n	$R_n(1)$	ϵ_R	$T_{2n}(1)$	ϵ_T
1	0.667	0.026	0.50	0.19
2	0.692 31	0.000 84	0.58	0.11
3	0.693 122	0.000 025	0.617	0.076
4	0.693 146 32	0.000 000 76	0.634	0.058

$$(\ln 2 = 0.693\ 147\ 18\cdots)$$

由上表可知, $R_4(1)$ 的精确度竟比 $T_8(1)$ 的精确度高几乎 10^5 倍. 这说明开展某些函数的有理逼近或一般非线性逼近的研究是很有必要的.

§ 1 非线性一致逼近

讨论如下有理分式:

$$R_{m,n}(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}, \quad (1.1)$$

其中 $P_m(x) \in P_m$, $Q_n(x) \in P_n$ 分别为 x 的 m, n 次多项式, 且设 $R_{m,n}(x)$ 是既约有理分式, 即 $P_m(x)$ 与 $Q_n(x)$ 互质.

设 $f(x)$ 是有界闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数. 定义偏差函数 $f(x) - R_{m,n}(x)$ 的绝对值的上确界为 $R_{m,n}(x)$ 与 $f(x)$ 的最大偏差, 简称为偏差:

$$\Delta(R_{m,n}) = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x) - R_{m,n}(x)|. \quad (1.2)$$

又定义量

$$\rho_{m,n}(f) = \inf_{R_{m,n}} \sup_{a \leq x \leq b} |f(x) - R_{m,n}(x)| \quad (1.3)$$

为形如(1.1)的有理分式类: $R_{m,n} \stackrel{\text{def}}{=} \{R_{m,n}(x)\}$ 对给定函数 $f(x)$ 的最佳逼近或最小偏差.

关于偏差的下界估计, 有:

定理 1 (Vallée-Poussin) 设多项式 $A(x) = a_0 x^{m-\mu} + \dots + a_{m-\mu}$, $B(x) = b_0 x^{n-\nu} + \dots + b_{n-\nu}$ 互质, 其中 $0 \leq \mu \leq m$, $0 \leq \nu \leq n$, $b_0 \neq 0$, 且设

$$R(x) = A(x)/B(x)$$

在 $[a, b]$ 区间上为有穷, 差函数 $f(x) - R(x)$ 在 $[a, b]$ 中的点列

$$x_1 < x_2 < \dots < x_N$$

上以正负交错的符号取异于 0 的值

$$\lambda_1, -\lambda_2, \dots, (-1)^{N-1} \lambda_N \quad (\text{不妨假定各个 } \lambda_j > 0),$$

而且 $N = m + n - d + 2$, $d = \min(\mu, \nu)$, 则对每一形如(1.1)的函数 $Q(x)$, 恒有

$$\Delta(Q) \geq \min\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\}. \quad (1.4)$$

当 $R(x) \equiv 0$ 且 $N = m + 2$ (即 $d = n$) 时, 此不等式仍然成立.

证明 采用反证法. 假若存在一个形如(1.1)的函数 $Q(x)$, 满足

$$\Delta(Q) < \min\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\}.$$

考察差

$$\begin{aligned}\eta(x) &= Q(x) - R(x) \\ &= [f(x) - R(x)] - [f(x) - Q(x)].\end{aligned}$$

显然 $\eta(x_1), \eta(x_2), \dots, \eta(x_N)$ 不等于 0 且正负交错变号. 由于 $\eta(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 根据连续函数的介值定理, $\eta(x)$ 于 (a, b) 内至少有 $N - 1 = m + n - d + 1$ 个零点. 然而

$$\eta(x) = Q(x) - R(x) = v(x)/u(x)$$

中分子 $v(x)$ 的次数 $\leq \max\{m + n - \mu, m + n - \nu\} = m + n - d$, 从而必有 $\eta(x) \equiv 0$, 亦即 $Q(x) \equiv R(x)$. 此与定理假设相矛盾, 故定理得证.

定理 2 在所有形如(1.1)的有理分式中, 至少存在一个有理分式 $Q(x)$, 使得它与 $f(x)$ 的偏差 $\Delta(Q)$ 取到极小值, 即

$$\Delta(Q) = \min.$$

证明 只需证明存在形如(1.1)的有理分式 $Q(x)$, 使得

$$\Delta(Q) = \rho_{m,n}(f).$$

下面我们将具体地构造出 $Q(x)$ 来. 按下确界的定义, 存在无穷函数序列 $\{Q_i(x)\}$, 使得

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \Delta(Q_i) = \rho_{m,n}(f),$$

其中

$$Q_i(x) = \frac{q_{0i}x^m + q_{1i}x^{m-1} + \dots + q_{mi}}{p_{0i}x^n + p_{1i}x^{n-1} + \dots + p_{ni}}.$$

将 $Q_i(x)$ 如下标准化, 使其分母的系数满足

$$p_{0i}^2 + p_{1i}^2 + \dots + p_{ni}^2 = 1 \quad (i = 1, 2, \dots).$$

我们来证明相应的系数 q_{ji} ($j = 0, 1, \dots, m$) 也是有界的. 事实上, 设

$$\Delta(Q_i) < M \quad (i=1,2,\cdots),$$

又设 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{m+1}$ 为 (a, b) 内给定的互异点, 则对其中任一点 ξ , 必有

$$\begin{aligned} & \left| \frac{q_{0i}\xi^m + q_{1i}\xi^{m-1} + \dots + q_{mi}}{p_{0i}\xi^n + p_{1i}\xi^{n-1} + \dots + p_{ni}} \right| \\ & \leq \left| \frac{q_{0i}\xi^m + q_{1i}\xi^{m-1} + \dots + q_{mi}}{p_{0i}\xi^n + p_{1i}\xi^{n-1} + \dots + p_{ni}} - f(\xi) \right| + |f(\xi)| \\ & \leq M + \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|. \end{aligned}$$

从而有正常数 K 存在, 使得

$$|q_{0i}\xi^m + q_{1i}\xi^{m-1} + \dots + q_{mi}| < K.$$

由于多项式 $q_{0i}x^m + q_{1i}x^{m-1} + \dots + q_{mi}$ 在 $m+1$ 个点 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{m+1}$ 处的值是有界的, 比方设它们依次为 K_1, K_2, \dots, K_{m+1} , 则按线性方程组

$$q_{0i}\xi_j^m + q_{1i}\xi_j^{m-1} + \dots + q_{mi} = K_j \quad (j=1, 2, \dots, m+1),$$

可以解出 q_{li} 的一个表达式 ($l=0, \dots, m$). 显然这些 q_{li} ($l=0, \dots, m$) 均有界.

由于 p_{ji} ($j=0, \dots, n$) 和 q_{li} ($l=0, \dots, m$) 有界, 根据 Bolzano-Weierstrass 定理, 在有理分式序列 $\{Q_i(x)\}$ 中, 可以选出某子序列, 不妨仍记为 $\{Q_i(x)\}$, 使得

$$\lim_{i \rightarrow \infty} p_{ji} = a_j, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} q_{li} = b_l.$$

今作(1.1)型有理分式

$$P(x) = \frac{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m}{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n}.$$

以下来证明 $\Delta(P) = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - P(x)| = \rho_{m,n}(f)$. 因为 $P(x)$ 只可能在有限多个点处变为无穷, 而在 $[a, b]$ 区间的其他点 \tilde{x} 处, 显然有

$$\lim_{i \rightarrow \infty} Q_i(\tilde{x}) = P(\tilde{x}), \tag{1.5}$$

所以

$$\begin{aligned} |P(\tilde{x})| & \leq |f(\tilde{x})| + |f(\tilde{x}) - Q_i(\tilde{x})| + |Q_i(\tilde{x}) - P(\tilde{x})| \\ & \leq \max_{a \leq x \leq b} |f(x)| + \Delta(Q_i) + \epsilon_i, \end{aligned}$$

即除去可能在有限个点处外, 总有

$$|P(x)| < N = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)| + M.$$

从而上式在区间 $[a, b]$ 上处处成立, 即 $P(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上处处有限, 所以(1.5)式处处成立.

由于 $P(x)$ 各系数与 $Q_i(x)$ 各相应系数之间的极限关系, 不难看出极限关系式

$$\lim_{i \rightarrow \infty} Q_i(x) = P(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

在 $[a, b]$ 上一致成立. 这样一来, 若于

$$\begin{aligned} & \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - P(x)| \\ & \leq \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - Q_i(x)| + \max_{a \leq x \leq b} |P(x) - Q_i(x)| \end{aligned}$$

两边令 i 趋于无穷, 立即得到

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x) - P(x)| \leq \rho_{m,n}(f),$$

是故 $\Delta(P) \leq \rho_{m,n}(f)$. 又显然有

$$\rho_{m,n}(f) \leq \Delta(P),$$

所以最终证得

$$\Delta(P) = \rho_{m,n}(f).$$

存在性定理 2 证毕.

根据定理 2, 存在形如(1.1)的有理分式 $R(x)$, 使得

$$\Delta(R) = \rho_{m,n}(f), \tag{1.6}$$

其中 $f(x)$ 是区间 $[a, b]$ 上的连续函数. 称满足(1.6)的有理分式为 $f(x)$ 于(1.1)所示有理分式类中的最佳一致逼近有理分式. 下面的 Tchebyshev 定理对最佳一致逼近有理分式的特征作了确切的描述.

定理 3 形如(1.1)的有理分式函数中在 $[a, b]$ 上与 $f(x)$ 偏差最小的有理分式 $P(x)$ 由下述特征所唯一确定^①.

若将 $P(x)$ 写成

$$P(x) = \frac{b_0 x^{m-\mu} + b_1 x^{m-\mu-1} + \cdots + b_{m-\mu}}{a_0 x^{n-\nu} + a_1 x^{n-\nu-1} + \cdots + a_{n-\nu}} = \frac{B(x)}{A(x)},$$

其中 $A(x), B(x)$ 互质, $a_0 \neq 0, 0 \leq \mu \leq m, 0 \leq \nu \leq n$, 则在 $[a, b]$ 上使 $f(x) -$

① 此处所说的唯一性, 乃指经约分化简后为相同的有理分式者.

$P(x)$ 以正负交错的符号达到 $\Delta(P)$ 的点列之点数 $N \geq m + n - d + 2$, 其中 $d = \min(\mu, \nu)$. 若 $P(x) \equiv 0$, 则 $N \geq m + 2$.

证明 充分性. 设

$$N \geq m + n - d + 2,$$

并于定理 1 中取 $|\lambda_k| = \Delta(P)$, 则知对任何形如(1.1)的有理分式 $Q(x)$, 必有

$$\Delta(Q) \geq \Delta(P).$$

从而 $P(x)$ 是最佳逼近有理分式.

必要性. 采用反证法. 设满足要求的偏离点的个数为 $N' \leq m + n - d + 1$; 我们来证 $P(x)$ 必不是最佳逼近有理分式. 将 $[a, b]$ 分为如下的 N' 个子区间:

$$[a, \xi_1], [\xi_1, \xi_2], \dots, [\xi_{N'-1}, b], \quad (1.7)$$

使之在上述区间上, 轮流满足

$$-\Delta(P) \leq f(x) - P(x) \leq \Delta(P) - \alpha$$

和

$$-\Delta(P) + \alpha \leq f(x) - P(x) \leq \Delta(P),$$

并且(1.7)中每个区间内只含一个偏离点.

为证 $P(x)$ 不是最佳者, 只需求得形如(1.1)的有理分式 $Q(x)$, 使得

$$\Delta(Q) < \Delta(P) \quad (1.8)$$

成立即可.

引入多项式

$$\Phi(x) = (x - \xi_1)(x - \xi_2) \cdots (x - \xi_{N'-1}),$$

显然它在 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{N'-1}$ 处依次变号.

由于 $A(x)$ 与 $B(x)$ 互质, 于是存在次数分别为 m 与 n 的多项式 $\phi(x)$ 与 $\psi(x)$, 使得

$$A(x)\phi(x) + B(x)\psi(x) = 1.$$

于上式两边同乘多项式 $\Phi(x)$, 得到

$$\Phi(x) = A(x)\phi(x)\Phi(x) + B(x)\psi(x)\Phi(x). \quad (1.9)$$

用 $B(x), A(x)$ 分别去除(带余) $\phi(x)\Phi(x), \psi(x)\Phi(x)$:

$$\begin{aligned}\phi(x)\Phi(x) &= B(x)q_1(x) + r_1(x), \\ \psi(x)\Phi(x) &= A(x)q_2(x) + r_2(x),\end{aligned}\quad (1.10)$$

其中 $r_1(x) \in P_{m-\mu}$, $r_2(x) \in P_{n-\nu}$ 分别为 $m-\mu$, $n-\nu$ 次多项式.

将(1.10)代入(1.9)有

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= A(x)B(x)q_1(x) + A(x)B(x)q_2(x) \\ &\quad + A(x)r_1(x) + B(x)r_2(x) \\ &= B(x)\{A(x)[q_1(x) + q_2(x)] + r_2(x)\} + A(x)r_1(x) \\ &= B(x) \cdot u(x) + A(x) \cdot v(x),\end{aligned}$$

其中 $u(x), v(x)$ 分别为次数不高于 n, m 的多项式.

作有理分式

$$Q(x) = \frac{B(x)\Omega(x) - \omega v(x)}{A(x)\Omega(x) + \omega u(x)},$$

于是

$$\begin{aligned}P(x) - Q(x) &= \frac{B(x)}{A(x)} - \frac{B(x)\Omega(x) - \omega v(x)}{A(x)\Omega(x) + \omega u(x)} \\ &= \frac{\omega[B(x)u(x) + A(x)v(x)]}{A(x)[A(x)\Omega(x) + \omega u(x)]} \\ &= \frac{\omega\Phi(x)}{A(x)[A(x)\Omega(x) + \omega u(x)]}.\end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned}f(x) - Q(x) &= [f(x) - P(x)] + [P(x) - Q(x)] \\ &= [f(x) - P(x)] \\ &\quad + \frac{\omega\Phi(x)}{A(x)[A(x)\Omega(x) + \omega u(x)]},\end{aligned}\quad (1.11)$$

于是只需特别取 $\Omega(x) \equiv 1$, 并取 $|\omega|$ 充分小, 则在调节 ω 正、负号的前提下可以保证(1.11)最后一等号右端第二项恰与第一项在各偏离点上的值异号. 从而, 只需对充分小的 ω 取形如(1.1)的有理分式

$$Q(x) = \frac{B(x) - \omega v(x)}{A(x) + \omega u(x)},$$

即可保证不等式(1.8)成立. 必要性得证.

最后用反证法证明唯一性. 设另有形如(1.1)的有理分式 $Q(x)$, 使得

$$\Delta(Q) = \Delta(P) = \rho_{m,n}(f).$$

假设与 $Q(x)$ 相应的量 N', μ', ν', d' 与 N, μ, ν, d 意义相同. 由必要性, 知

$$N' \geq m + n - d' + 2, \quad N \geq m + n - d + 2.$$

为确定起见, 不妨假定 $N' \geq N$.

设

$$\beta_1 < \beta_2 < \cdots < \beta_{N'}$$

为相应于 $Q(x)$ 的偏离点. 考虑差函数

$$\begin{aligned} \eta(x) &= P(x) - Q(x) \\ &= [f(x) - Q(x)] - [f(x) - P(x)]. \end{aligned}$$

若 β_j 点同样也是 $P(x)$ 的同类(同正或同负)偏离点, 则应有

$$\eta(\beta_j) = 0.$$

否则 $\eta(\beta_j) \neq 0$, 但此时必然有

$$\operatorname{sign} \eta(\beta_j) = \operatorname{sign} [f(\beta_j) - Q(\beta_j)]. \quad (1.12)$$

例如假设

$$\eta(\beta_{i-1}) \neq 0, \quad \eta(\beta_i) = \cdots = \eta(\beta_{i+k}) = 0, \quad \eta(\beta_{i+k+1}) \neq 0,$$

由于 $(-1)^{i-1}[f(\beta_{i-1}) - Q(\beta_{i-1})]$ 与 $(-1)^{i+k+1}[f(\beta_{i+k+1}) - Q(\beta_{i+k+1})]$ 同号, 从而根据(1.12)知

$$\operatorname{sign} \eta(\beta_{i-1}) = \operatorname{sign} (-1)^k \eta(\beta_{i+k+1}). \quad (1.13)$$

当 k 为偶数时, 由(1.13), $\eta(x)$ 在区间 $[\beta_{i-1}, \beta_{i+k+1}]$ 两端点上同号. 于是 $\eta(x)$ 在该区间上有偶数个根. 当 k 为奇数时, 由(1.13), $\eta(x)$ 在区间 $[\beta_{i-1}, \beta_{i+k+1}]$ 两端点上异号. 于是 $\eta(x)$ 在该区间上有奇数个根.

总之, $\eta(x)$ 在 $[\beta_{i-1}, \beta_{i+k+1}]$ 区间中根的个数与 k 同奇偶. 但已知 $\beta_i, \dots, \beta_{i+k}$ (共 $k+1$ 个) 是 $\eta(x)$ 的根, 于是为保证同奇偶, 必有第 $k+2$ 个根存在. 依此推导, 可知 $\eta(x)$ 在区间 $[a, b]$ 内至少应有 $N'-1$ 个根. 但这是不可能的, 因为 $\eta(x) = C(x)/D(x)$ 中分子的次数

$$r = \begin{cases} \max\{m+n-\mu'-\nu, m+n-\mu-\nu'\} \leq N'-2, & \text{当 } P(x) \neq 0, Q(x) \neq 0, \\ m-\nu' \leq N'-2, & \text{当 } P(x) \equiv 0, \\ m-\nu \leq N'-2, & \text{当 } Q(x) \equiv 0. \end{cases}$$

因而定理唯一性证完.

最后我们来证明,当 $P(x) \equiv 0$ 时, $P(x)$ 是最佳逼近有理分式必须且只需 $N \geq m + 2$.

若 $N \geq m + 2$, 则于定理 1 所示的 Vallée-Poussin 定理中取

$$|\lambda_j| = \Delta(P) = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|,$$

则对任何形如(1.1)的有理分式 $Q(x)$, 均有

$$\Delta(Q) \geq \Delta(P) = |\lambda_j|.$$

从而 $P(x)$ 为最佳逼近有理分式.

反之, 设 $P(x) \equiv 0$ 为最佳逼近有理分式, 我们来证 $N \geq m + 2$. 若不然, 设偏差点个数 $N' \leq m + 1$. 考虑

$$\Phi(x) = (x - \xi_1)(x - \xi_2) \cdots (x - \xi_{N'-1}).$$

作 $Q(x) = \omega \Phi(x)$, 其中 ω 为一充分小实数, 则可以同前面必要性证明一样而引出矛盾. 至此定理全部证完.

若 $r_n(x)$ 是两个互质多项式的商:

$$r_n(x) = P_n(x)/Q_n(x) \quad (-\infty < x < +\infty),$$

则称 $r_n(x)$ 为 n 阶有理函数. 定义

$$\rho_n(f) = \inf_{r_n} \sup_{x \in A} |f(x) - r_n(x)|,$$

其中 A 为实数集合, $r_n(x)$ 取遍一切 n 阶有理函数. 根据关于函数类的“宽度”的研究可知, 对于性质较好的函数来说, 有理函数逼近的优越性不大. 然而, 对于有较小奇异性的函数, 有理逼近却非常有效.

下面来考察函数 $f(x) = |x|$ 在区间 $[-1, 1] = A$ 上用 n 阶有理函数逼近的误差估计问题.

定理 4 (Newman) 当 $n \geq 5$ 时, 恒有

$$\rho_n(|x|) \leq 3e^{-\sqrt{n}}. \quad (1.14)$$

证明 设 $a = e^{-1/\sqrt{n}}$, 则当 n 充分大时, a 接近于 1, 而 a^{n-1} 却接近于零. 先来证明估计式

$$\prod_{j=1}^{n-1} \frac{1-a^j}{1+a^j} \leq e^{-\sqrt{n}} \quad (n \geq 5). \quad (1.15)$$

事实上, 利用数学分析中的典型方法不难证明

$$\frac{1-t}{1+t} \leq e^{-2t}, \quad \text{当 } t \geq 0,$$

从而

$$\prod_{j=1}^{n-1} \frac{1-a^j}{1+a^j} \leq \exp \left\{ -2 \sum_{j=1}^{n-1} a^j \right\} = \exp \left\{ -2 \frac{a-a^n}{1-a} \right\}.$$

又, 当 $n \geq 5$ 时,

$$2(a-a^n) \geq 2(e^{-1/\sqrt{5}} - e^{-\sqrt{5}}) > 1,$$

对于所有 $t \geq 0$, 还有

$$1-e^{-t} \leq t,$$

所以

$$\frac{1}{1-a} \geq \sqrt{n}.$$

从而估计式(1.15)成立.

设

$$p(x) = \prod_{k=1}^{n-1} (x+a^k), \quad r_n(x) = \frac{x[p(x)-p(-x)]}{p(x)+p(-x)}, \quad (1.16)$$

显然 $r_n(x)$ 是 n 阶有理函数. 我们来证明

$$| |x| - r_n(x) | < 3e^{-\sqrt{n}} \quad (n \geq 5, -1 \leq x \leq 1). \quad (1.17)$$

因为 $|x|$ 与 $r_n(x)$ 都是偶函数, 为了证明(1.17)只需考虑 $0 \leq x \leq 1$ 的情形. 对于满足条件 $0 \leq x \leq a^n = \exp(-\sqrt{n})$ 的 x , 由于 $p(-x) \geq 0$, 从而

$$0 \leq r_n(x) \leq x,$$

故有

$$| |x| - r_n(x) | \leq x \leq e^{-\sqrt{n}} \leq 3e^{-\sqrt{n}},$$

即当 $0 \leq x \leq a^n$ 时(1.17)式成立.

当 $a^n \leq x \leq 1$ 时, 必存在某个 j ($0 \leq j \leq n-1$), 使得 $a^{j+1} \leq x \leq a^j$, 于是由(1.15), 有

$$\left| \frac{p(-x)}{p(x)} \right| = \prod_{k=1}^j \frac{a^k - x}{a^k + x} \prod_{k=j+1}^{n-1} \frac{x - a^k}{x + a^k}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \prod_{k=1}^j \frac{a^k - a^n}{a^k + a^n} \prod_{k=j+1}^{n-1} \frac{a^j - a^k}{a^j + a^k} \\
 &= \prod_{m=n-j}^{n-1} \frac{1 - a^m}{1 + a^m} \prod_{m=1}^{n-j-1} \frac{1 - a^m}{1 + a^m} \\
 &= \prod_{m=1}^{n-1} \frac{1 - a^m}{1 + a^m} \leq e^{-\sqrt{n}}.
 \end{aligned}$$

因此当 $a^n \leq x \leq 1$ 时, 由于下述不等式成立 ($0 \leq x \leq 1$):

$$| |x| - r_n(x) | = 2x \left| \frac{p(-x)}{p(x) + p(-x)} \right| \leq \frac{2}{\left| \frac{p(x)}{p(-x)} - 1 \right|},$$

所以

$$| |x| - r_n(x) | \leq \frac{2}{e^{\sqrt{n}} - 1} \leq 3e^{-\sqrt{n}} \quad (n \geq 5).$$

定理 4 证完.

Newman 还证明了

$$\rho_n(|x|) \geq \frac{1}{2} e^{-9\sqrt{n}} \quad (n \geq 5). \quad (1.18)$$

综合(1.14)与(1.18), 可知

$$\frac{1}{2} e^{-9\sqrt{n}} \leq \rho_n(|x|) \leq 3e^{-\sqrt{n}} \quad (n \geq 5). \quad (1.19)$$

它比 $f(x) = |x|$ 在 $[-1, 1]$ 上的最佳 n 次多项式逼近的误差阶 $O(1/n)$ 要优越得多.

D. Newman 的不等式(1.19)还可以用来估计某些函数的有理逼近的误差阶.

§ 2 有理函数插值

给定 $m + n + 1$ 个互异的点

$$x_0, x_1, \dots, x_{m+n}$$

和相应的函数值

$$f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_{m+n}),$$

希望构造一个有理分式函数

$$R_{m,n}(x) = \frac{N_m(x)}{D_n(x)} = \frac{a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0}, \quad (2.1)$$

使之满足插值条件

$$R_{m,n}(x_j) = f(x_j) \quad (j = 0, 1, \dots, m+n). \quad (2.2)$$

这种问题就是所谓有理函数插值问题.

显然, 当分母次数 $n=0$ 时, $R_{m,n}(x)$ 是一个 m 次的多项式. 从而插值问题(2.2)的解存在并且唯一. 但是, 当 $n>0$, 即(2.1)所示的 $R_{m,n}(x)$ 真正是一个有理分式函数时, 插值问题(2.2)是否对任何右端 $\{f(x_j)\}$ 皆有唯一解存在呢?

且看下述几个例子.

例 1 设 $m=0$, $f(x_j)=0$, $f(x_k)\neq 0$,

$$R_{0,n}(x) = \frac{a_0}{b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0}.$$

于是由 $R_{0,n}(x_j)=0$ 推知 $a_0=0$. 但是当 $a_0=0$ 时, 显然

$$R_{0,n}(x)\neq 0$$

不成立. 是故, 此时相应插值问题无解.

例 2 设 $m=n=1$, 且

$$f(x_1)=f(x_2)\neq f(x_3),$$

则由相应插值条件, 必有

$$\frac{a_1 x_1 + a_0}{b_1 x_1 + b_0} = \frac{a_1 x_2 + a_0}{b_1 x_2 + b_0},$$

于是

$$(a_0 b_1 - a_1 b_0)(x_2 - x_1) = 0.$$

而 $x_1\neq x_2$, 从而

$$a_0 b_1 = a_1 b_0.$$

若 $b_1=0$, 则 $R_{1,1}(x)$ 退化为一次多项式. 既然 $R_{1,1}(x)$ 在 $x=x_1, x_2$ 处的值一样(假定), 说明 $y=R_{1,1}(x)$ 是一条平行于 x 轴的直线. 当然也就不可能满足

$$R_{1,1}(x_3)\neq f(x_2)$$

了,所以不妨设 $b_1 \neq 0$,于是

$$a_0 = a_1 b_0 / b_1.$$

从而

$$\begin{aligned} R_{1,1}(x) &= \frac{a_1 x + a_0}{b_1 x + b_0} = \frac{a_1 x + a_1 b_0 / b_1}{b_1 x + b_0} \\ &= \frac{a_1(b_1 x + b_0)}{b_1(b_1 x + b_0)} = \frac{a_1}{b_1} = \text{const.} \end{aligned}$$

这样一来,又不可能满足插值条件中所要求的条件

$$R_{1,1}(x_1) \neq R_{1,1}(x_3)$$

了.总之,本例所讨论的有理插值问题的解不存在.

为了便于讨论,需要引进一些定义.两个有理分式

$$R_1(x) = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}, \quad R_2(x) = \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} \quad (2.3)$$

称为恒等,如果存在一个非零常数 a ,使得

$$P_2(x) = aP_1(x), \quad Q_2(x) = aQ_1(x).$$

此时记 $R_1(x) \equiv R_2(x)$.

(2.3)所示两有理分式 $R_1(x), R_2(x)$ 称为等价的,如果

$$P_1(x) \cdot Q_2(x) \equiv P_2(x) \cdot Q_1(x).$$

此时常记为 $R_1(x) \sim R_2(x)$.

对于此处所定义的关系“ \sim ”,显然有下列三个性质:

(i) $R(x) \sim R(x)$;

(ii) $R(x) \sim Q(x), Q(x) \sim S(x)$, 则 $R(x) \sim S(x)$;

(iii) $R(x) \sim Q(x)$, 则 $Q(x) \sim R(x)$,

所以“ \sim ”是一种等价关系.

显然可知,两有理分式 $R_1(x)$ 和 $R_2(x)$ 等价,必须且只需 $R_1(x)$ 和 $R_2(x)$ 的最简(既约)有理分式 $\bar{R}_1(x)$ 和 $\bar{R}_2(x)$ 恒等.

今后只要两有理分式等价,则认为它们是同一个有理分式,而不加以区别.有理函数插值的唯一性也是在这种意义上说的.

定理 5 插值问题(2.2)若有解,则必唯一.

证明 设

$$R_{m,n}(x) = \frac{N_m(x)}{D_n(x)}, \quad \bar{R}_{m,n}(x) = \frac{\bar{N}_m(x)}{\bar{D}_n(x)}$$

同时满足插值条件(2.2):

$$R_{m,n}(x_j) = \bar{R}_{m,n}(x_j) = f(x_j) \quad (j=0, \dots, m+n),$$

于是由

$$\frac{N_m(x_j)}{D_n(x_j)} = \frac{\bar{N}_m(x_j)}{\bar{D}_n(x_j)} \quad (j=0, \dots, m+n)$$

可推知

$$N_m(x_j)\bar{D}_n(x_j) = \bar{N}_m(x_j)D_n(x_j) \quad (j=0, \dots, m+n).$$

因为 $N_m(x)\bar{D}_n(x)$ 与 $\bar{N}_m(x)D_n(x)$ 为次数不高于 $m+n$ 的多项式, 所以从上式可知

$$N_m(x)\bar{D}_n(x) \equiv \bar{N}_m(x)D_n(x).$$

从而 $R_{m,n}(x) \sim \bar{R}_{m,n}(x)$. 定理 5 证完.

定理 5 说明对于有理函数插值来说, 关键的问题是存在性和具体解法.

我们知道, 当(2.1)所示的有理分式 $R_{m,n}(x)$ 满足插值条件(2.2)时, 只要分母 $D_n(x_j) \neq 0$ ($j=0, \dots, m+n$), 就应有

$$N_m(x_j) - f(x_j)D_n(x_j) = 0 \quad (j=0, \dots, m+n). \quad (2.4)$$

它是一个关于系数 $a_m, \dots, a_0, b_n, \dots, b_0$ 的线性代数方程组. 这当然比非线性方程组(2.2)要容易求解了.

那么, (2.2)在什么条件下会与(2.4)等价呢? 下面定理 6 对这个问题作了明确的回答.

定理 6 设线性方程组(2.4)有非平凡解. 为使满足插值条件(2.2)的最简有理分式 $R_{m,n}(x) = p_m(x)/q_n(x)$ 存在, 必须且只需(2.4)的任一非平凡解 $N_m^*(x), D_n^*(x)$ 在约去一切公因子后得到的互质多项式 $A(x), B(x)$ 仍然是(2.4)的解, 即

$$A(x_j) - f(x_j)B(x_j) = 0 \quad (j=0, \dots, m+n).$$

证明 必要性. 设 $N_m^*(x)$ 与 $D_n^*(x)$ 是(2.4)的任一组非平凡解:

$$N_m^*(x_j) - f(x_j)D_n^*(x_j) = 0 \quad (j=0, \dots, m+n). \quad (2.5)$$

按假设,有(2.1)型的最简有理分式 $t(x)/v(x)$ 存在,使插值条件(2.2)得以满足

$$\frac{t(x_j)}{v(x_j)} = f(x_j) \quad (j=0, \dots, m+n). \quad (2.6)$$

由于 $t(x)$ 与 $v(x)$ 互质, 所以 $v(x_j) \neq 0$. 因为否则为使上式成立, 必亦有 $t(x_j) = 0$, 是故 $t(x)$ 与 $v(x)$ 有公共因子 $(x - x_j)$ 了. 以(2.6)代入(2.5), 得到

$$N_m^*(x_j) - \frac{t(x_j)}{v(x_j)} D_n^*(x_j) = 0 \quad (j=0, \dots, m+n).$$

两边同乘以 $v(x_j)$, 得到

$$N_m^*(x_j)v(x_j) - t(x_j)D_n^*(x_j) = 0 \quad (j=0, \dots, m+n).$$

这样一来, 次数不超过 $m+n$ 的多项式

$$N_m^*(x)v(x) - t(x)D_n^*(x)$$

已有 $m+n+1$ 个互异的根, 从而

$$N_m^*(x)v(x) - t(x)D_n^*(x) \equiv 0.$$

在上式中约去 $N_m^*(x)$ 与 $D_n^*(x)$ 的最大公因子, 则有

$$A(x)v(x) - t(x)B(x) \equiv 0.$$

特别地, 也应有

$$A(x_j)v(x_j) - t(x_j)B(x_j) = 0 \quad (j=0, \dots, m+n).$$

注意到(2.6)式, 上式亦即

$$A(x_j) - f(x_j)B(x_j) = 0 \quad (j=0, \dots, m+n).$$

必要性得证.

充分性. 设如上定义的 $A(x), B(x)$ 是(2.4)的解:

$$A(x_j) - f(x_j)B(x_j) = 0 \quad (j=0, \dots, m+n).$$

可断言 $B(x_j) \neq 0$. 因为否则由上式, 必也有 $A(x_j) = 0$. 从而与 $A(x), B(x)$ 互质的假定相矛盾. 既然如此, 我们可以用 $B(x_j)$ 遍除上式两边, 而得到

$$\frac{A(x_j)}{B(x_j)} = f(x_j) \quad (j=0, \dots, m+n).$$

是故 $A(x)/B(x)$ 满足插值条件(2.2). 充分性得证. 定理 6 全部证完.

定理 6 建立了(2.2)与(2.4)等价的充分必要条件. 然而由于所给条件仍不便于检验. N. Macon 与 D. E. Dupree 给出了下述便于检验的条件.

定理 7 设 $(x_j, y_j) (j = 0, \dots, m+n)$ 中各 $x_j (j = 0, \dots, m+n)$ 是互异的. 为使满足插值条件(2.2)的最简有理分式

$$R_{m,n}(x) = \frac{N_m(x)}{D_n(x)}$$

存在, 必须且只需以下诸矩阵

$$\mathbf{A}_j = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^{m-1} & y_0 & x_0 y_0 & \cdots & x_0^{n-1} y_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{j-1} & x_{j-1}^2 & \cdots & x_{j-1}^{m-1} & y_{j-1} & x_{j-1} y_{j-1} & \cdots & x_{j-1}^{n-1} y_{j-1} \\ 1 & x_{j+1} & x_{j+1}^2 & \cdots & x_{j+1}^{m-1} & y_{j+1} & x_{j+1} y_{j+1} & \cdots & x_{j+1}^{n-1} y_{j+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{m+n} & x_{m+n}^2 & \cdots & x_{m+n}^{m-1} & y_{m+n} & x_{m+n} y_{m+n} & \cdots & x_{m+n}^{n-1} y_{m+n} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

$(j = 0, \dots, m+n)$ 都是非奇异的, 其中 $y_j = f(x_j) (j = 0, \dots, m+n)$.

定理 7 的证明要用到若干引理, 此处不拟列出.

H. Salzer 讨论了切触有理插值问题. 设 $N(x), D(x)$ 是 x 的两个多项式, x_1, \dots, x_r 是互异实数, $f^{(j)}(x_i), j = 0, 1, \dots, s_i - 1$ 为一批给定的数. 所谓切触有理插值, 就是确定 $N(x)$ 和 $D(x)$ 的系数, 使得

$$\left. \frac{d^j}{dx^j} \left[\frac{N(x)}{D(x)} \right] \right|_{x=x_i} = f^{(j)}(x_i) \quad (2.8)$$

$$(j = 0, 1, \dots, s_i - 1; i = 1, \dots, r).$$

若 $k = \sum_{i=1}^r s_i$, 通常取 $N(x)$ 和 $D(x)$ 的次数相等或接近相等, 即当 k 为奇数时, $N(x)$ 和 $D(x)$ 的次数皆取成 $[k/2]$; 当 k 为偶数时, $N(x)$ 和 $D(x)$ 的次数则分别取 $[k/2]$ 和 $[k/2] - 1$.

设 $D(x_i) \neq 0$, 一般有理函数插值问题

$$\frac{N(x_i)}{D(x_i)} = f(x_i) \quad (i = 1, \dots, r)$$

自然等价于 $N(x_i) = [D(x)f(x)]_{x=x_i} (i = 1, \dots, r)$. 一阶切触插值

$$\left. \frac{N(x)}{D(x)} \right|_{x=x_i} = f(x_i), \quad \left[\frac{N(x)}{D(x)} \right]' \Big|_{x=x_i} = f'(x_i), \quad (2.9)$$

可以表示为

$$N(x_i) = [D(x)f(x)]_{x=x_i}, \quad \frac{N'(x_i)}{D(x_i)} - \frac{N(x_i)D'(x_i)}{[D(x_i)]^2} = f'(x_i). \quad (2.10)$$

后一等式中又可用 $f(x_i)$ 代替 $N(x_i)/D(x_i)$, 再用 $D(x_i)$ 遍乘而化为 $N'(x_i) = f(x_i)D'(x_i) + f'(x_i)D(x_i)$. 因而(2.9)最后化成

$$\begin{aligned} N(x_i) &= [D(x)f(x)]_{x=x_i}, \\ N'(x_i) &= [D(x)f(x)]'_{x=x_i}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

完全类似地, 二阶切触有理插值可转化为

$$\begin{aligned} N(x_i) &= [D(x)f(x)]_{x=x_i}, \quad N'(x_i) = [D(x)f(x)]'_{x=x_i}, \\ N''(x_i) &= [D(x)f(x)]''_{x=x_i}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

一般情况下, 是否也可把有理切触插值

$$\frac{d^m}{dx^m} \left(\frac{N(x)}{D(x)} \right)_{x=x_i} = f^{(m)}(x_i) \quad (m=0,1,\cdots,s_i-1) \quad (2.13)$$

化成等价形式(当 $D(x_i) \neq 0$ 时)

$$N^{(m)}(x_i) = \frac{d^m}{dx^m} (D(x)f(x))_{x=x_i} \quad (m=0,1,\cdots,s_i-1)? \quad (2.14)$$

回答是肯定的. 这可以用数学归纳法来证明. 事实上, 由前面的分析, 已知当 $r=s_i-1=0,1$ 时, (2.13)和(2.14)是等价的. 今设当 $r=s-1$ 时, (2.13)与(2.14)也是等价的. 我们来证明当 $r=s$ 时, 它们还是等价的. 其实只需再证明

$$\frac{d^s}{dx^s} \left(\frac{N(x)}{D(x)} \right)_{x=x_i} = f^{(s)}(x_i) \quad (2.15)$$

与

$$N^{(s)}(x_i) = \frac{d^s}{dx^s} (D(x)f(x))_{x=x_i} \quad (2.16)$$

等价就够了.

设(2.16)成立. 因由 Leibnitz 公式

$$N^{(s)}(x_i) = \frac{d^s}{dx^s} (D(x)f(x))_{x=x_i} = \sum_{k=0}^s \binom{s}{k} f^{(k)}(x_i) D^{(s-k)}(x_i), \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} N^{(s)}(x_i) &= \left[\frac{N(x)}{D(x)} D(x) \right]_{x=x_i}^{(s)} \\ &= \sum_{k=0}^s \binom{s}{k} \left(\frac{N(x)}{D(x)} \right)_{x=x_i}^{(k)} D^{(s-k)}(x_i). \end{aligned} \quad (2.18)$$

由归纳假定,后一式右端中 $[N(x)/D(x)]_{x=x_i}^{(k)} = f^{(k)}(x_i)$ ($k=0,1,\cdots,s-1$).

因而比较上两式右端,即知

$$f^{(s)}(x_i) = \left[\frac{N(x)}{D(x)} \right]_{x=x_i}^{(s)}$$

亦即(2.15)成立.

反之,假定(2.15)式成立,则由(2.18)式,有

$$\begin{aligned} N^{(s)}(x_i) &= \sum_{k=0}^s \binom{s}{k} \left(\frac{N(x)}{D(x)} \right)_{x=x_i}^{(k)} D^{(s-k)}(x_i) \\ &= \sum_{k=0}^s \binom{s}{k} f^{(k)}(x_i) D^{(s-k)}(x_i) \\ &= [f(x)D(x)]_{x=x_i}^{(s)}, \end{aligned}$$

即(2.16)成立.

总之,我们已建立了如下定理:

定理 8 设 $D(x_i) \neq 0$, 则有理切触插值问题

$$\left(\frac{d}{dx} \right)^m \left[\frac{N(x)}{D(x)} \right]_{x=x_i} = f^{(m)}(x_i) \quad (m=0, \cdots, s_i - 1)$$

与下述线性问题

$$N^{(m)}(x_i) = \left(\frac{d}{dx} \right)^m [D(x)f(x)]_{x=x_i} \quad (m=0, \cdots, s_i - 1)$$

是等价的.

若把定理 8 中的微商换成有限差(等距情况)或差商,则可以建立类似的定理.另外,当 $N(x)$ 与 $D(x)$ 不是普通多项式,而是广义多项式时,定理 8 也是照样成立的.

由定理 8 可知,只要各个 $D(x_i) \neq 0$, 则有理切触插值问题(2.8)便等价于线性方程组

$$N^{(m)}(x_i) = \left(\frac{d}{dx}\right)^m [D(x)f(x)]_{x=x_i} \quad (2.19)$$

$$(m=0,1,\dots,s_i-1; i=1,\dots,r).$$

下面我们应用定理 8 来具体讨论有理切触插值的构造问题. Salzer 具体讨论了下述连分式作为有理分式 $N(x)/D(x)$ 的表达式:

$$\begin{aligned} \frac{N(x)}{D(x)} &= a_{1,0} + \frac{x-x_1}{a_{1,1}} + \frac{x-x_1}{a_{1,2}} + \cdots + \frac{x-x_1}{a_{1,s_1-1}} \\ &\quad + \frac{x-x_1}{a_{2,0}} + \frac{x-x_2}{a_{2,1}} + \cdots + \frac{x-x_2}{a_{2,s_2-1}} \\ &\quad + \frac{x-x_2}{a_{3,0}} + \cdots + \frac{x-x_{r-1}}{a_{r,0}} + \frac{x-x_r}{a_{r,1}} + \cdots + \frac{x-x_r}{a_{r,s_r-1}} \end{aligned} \quad (2.20)$$

为了讨论方便,先介绍一些有关连分式的预备知识:

1° 连分式 $b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \cdots + \frac{a_n}{b_n + \cdots}}$ 表示

$$\begin{aligned} b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{\ddots}{\ddots}}} \\ + \frac{a_n}{b_n + \ddots} \end{aligned} \quad (2.21)$$

2° 分式 a_n/b_n 称为连分式(2.21)的第 n 节; a_n 与 b_n 称为连分式(2.21)的第 n 节的两项; a_1, a_2, \dots 称为连分式(2.21)的部分分子, b_1, b_2, \dots 称为连分式(2.21)的部分分母. 有限连分式

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \cdots + \frac{a_n}{b_n}}} = \frac{P_n}{Q_n}$$

称为连分式(2.21)的第 n 个渐近分式.

3° 相邻三个渐近分式之间有递推关系式

$$\begin{cases} P_n = b_n P_{n-1} + a_n P_{n-2}, \\ Q_n = b_n Q_{n-1} + a_n Q_{n-2}. \end{cases} \quad (2.22)$$

事实上,按连分式的定义

$$\frac{P_0}{Q_0} = \frac{b_0}{1}, \quad \frac{P_1}{Q_1} = \frac{b_0 b_1 + a_1}{b_1},$$

$$\begin{aligned}\frac{P_2}{Q_2} &= b_0 + \frac{a_1}{b_1 + b_2} = b_0 + \frac{a_1 b_2}{b_1 b_2 + a_2} \\ &= \frac{b_0 b_1 b_2 + b_0 a_2 + a_1 b_2}{b_1 b_2 + a_2} = \frac{b_2 P_1 + a_2 Q_0}{b_2 Q_1 + a_2 Q_0}.\end{aligned}$$

这说明当 $n=1$ 和 $n=2$ 时, (2.22) 式成立(此处规定 $P_{-1}=1, Q_{-1}=0$). 设递推公式(2.22)对 n 已成立, 即

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{b_n P_{n-1} + a_n Q_{n-2}}{b_n Q_{n-1} + a_n Q_{n-2}}.$$

我们来证明当 n 换成 $n+1$ 时, (2.22) 也成立. 注意从 P_n/Q_n 变到 P_{n+1}/Q_{n+1} 应以 $b_n + a_{n+1}/b_{n+1}$ 代替 b_n , 于是

$$\begin{aligned}\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} &= \frac{b_n P_{n-1} + \frac{a_{n+1} P_{n-1}}{b_{n+1}} + a_n P_{n-2}}{b_n Q_{n-1} + \frac{a_{n+1} Q_{n-1}}{b_{n+1}} + a_n Q_{n-2}} \\ &= \frac{b_{n+1} P_n + a_{n+1} P_{n-1}}{b_{n+1} Q_n + a_{n+1} Q_{n-1}}.\end{aligned}$$

所以对于一切正整数 n 而言, 递推公式(2.22)恒成立(其中已规定 $P_{-1}=1, Q_{-1}=0$).

下面回过来继续讨论(2.20)所述 $N(x)/D(x)$ 的切触插值问题. 假定 $a_{1,0}, a_{1,1}, \dots, a_{i-1, s_{i-1}-1}$ 已经求出, 于是由(2.20)可以求出它的渐近分式 $\frac{P_{t-1}(x)}{Q_{t-1}(x)}, \frac{P_{t-2}(x)}{Q_{t-2}(x)}$, 此处 $t-1 = \sum_{j=1}^{i-1} s_j$. 根据递推关系(2.22), 有

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{R_i(x)P_{t-1}(x) + (x - x_{i-1})P_{t-2}(x)}{R_i(x)Q_{t-1}(x) + (x - x_{i-1})Q_{t-2}(x)}, \quad (2.23)$$

其中

$$\begin{aligned}R_i(x) &= a_{i,0} + \frac{x - x_i}{a_{i,1}} + \frac{x - x_i}{a_{i,2}} + \dots \\ &\quad + \frac{x - x_i}{a_{i,s_i-1}} + \frac{x - x_i}{a_{i+1,0}} + \frac{x - x_{i+1}}{a_{i+1,1}} + \dots + \frac{x - x_r}{a_{r,s_r-1}}.\end{aligned} \quad (2.24)$$

当按(2.23)所示的 $N(x)/D(x)$ 和切触条件(2.8)(其中 $x = x_i$)来确定 $a_{i,0}, a_{i,1}, \dots, a_{i,s_i-1}$ 时(共 s_i 个条件), $R_i(x)$ 表达式中的项

$$\frac{x - x_i}{a_{i+1,0}} + \frac{x - x_{i-1}}{a_{i+1,1}} + \dots + \frac{x - x_n}{a_{n,s_n-1}}$$

是可以忽略的.若记

$$\frac{S_i(x)}{T_i(x)} = a_{i,0} + \frac{x - x_i}{a_{i,1}} + \frac{x - x_i}{a_{i,2}} + \dots + \frac{x - x_i}{a_{i,s_i-1}},$$

则由定理 8, $S_i(x)$ 和 $T_i(x)$ 两多项式的系数应该满足

$$\begin{aligned} & \left\{ S_i(x)P_{t-1}(x) + (x - x_{i-1})T_i(x)P_{t-2}(x) \right\}^{(m)} \Big|_{x=x_i} \\ &= [f(x)\{S_i(x)Q_{t-1}(x) + (x - x_{i-1})T_i(x)Q_{t-2}(x)\}]^{(m)} \Big|_{x=x_i} \\ & \quad (m=0,1,\dots,s_i-1). \end{aligned} \quad (2.25)$$

由此求出 $S_i(x)/T_i(x)$ 表达式中的各系数 $a_{i,0}, a_{i,1}, \dots, a_{i,s_i-1}$. 于是(2.24)的渐近公式 $P_t(x)/Q_t(x), P_{t+1}(x)/Q_{t+1}(x), \dots$ 可按递推公式

$$\begin{aligned} P_{t+k}(x) &= a_{i,k}P_{t+k-1}(x) \\ &+ \begin{cases} (x - x_{i-1}) \\ (x - x_i) \end{cases} \cdot P_{t+k-2}(x), \begin{array}{l} \text{当 } k=0, \\ \text{当 } k=1, \dots, s_i-1, \end{array} \\ Q_{t+k}(x) &= a_{i,k} \cdot Q_{t+k-1}(x) \\ &+ \begin{cases} (x - x_{i-1}) \\ (x - x_i) \end{cases} \cdot Q_{t+k-2}(x), \begin{array}{l} \text{当 } k=0, \\ \text{当 } k=1, \dots, s_i-1 \end{array} \end{aligned} \quad (2.26)$$

来逐个地确定.用 $i+1$ 替代 i , 用 $t+s_i$ 替代 t 又可重复上述各步骤……当具有较小的 s_i 值时, 比如 $s_i=2, s_{i+1}=3, \dots$, 则立即可以比较方便地在多个点处应用公式(2.25).

Euler-Minding 曾经推导出关于有限连分式 $S_i(x)/T_i(x)$ 的具体有理分式表达:

$$\begin{aligned} S_i(x) &= a_0a_1\dots a_{s_i-1} + \left[1 + \sum_{0 \leq j \leq s_i-2} (x - x_i)/a_ja_{j+1} \right. \\ &+ \sum_{0 \leq j < k \leq s_i-3} \sum_{k+1}^{\infty} (x - x_i)^2/a_ja_{j+1}a_{k+1}a_{k+2} \\ &\left. + \sum_{0 \leq j < k < l \leq s_i-4} \sum_{k+1}^{\infty} (x - x_i)^3/a_ja_{j+1}a_{k+1}a_{k+2}a_{l+2}a_{l+3} + \dots \right] \end{aligned} \quad (2.27)$$

和

$$\begin{aligned} T_i(x) &= a_1a_2\dots a_{s_i-1} \left[1 + \sum_{1 \leq j \leq s_i-2} (x - x_i)/a_ja_{j+1} \right. \\ &+ \left. \sum_{1 \leq j < k \leq s_i-3} \sum_{k+1}^{\infty} (x - x_i)^2/a_ja_{j+1}a_{k+1}a_{k+2} + \dots \right], \end{aligned}$$

其中 $a_j (j = 0, 1, \dots, s_i - 1)$ 表示 $a_{i,j} (j = 0, 1, \dots, s_i - 1)$.

具体写出, 可列下表:

s_i	$S_i(x)$	$T_i(x)$
1	a_0	1
2	$a_1 a_0 + (x - x_i)$	a_1
3	$a_2 a_1 a_0 + (a_2 + a_0)(x - x_i)$	$a_2 a_1 + (x - x_i)$
4	$a_3 a_2 a_1 a_0 + (a_3 a_2 + a_3 a_0 + a_1 a_0) \times (x - x_i) + (x - x_i)^2$	$a_3 a_2 a_1 + (a_3 + a_1)(x - x_i)$
5	$a_4 a_3 a_2 a_1 a_0 + (a_4 a_3 a_2 + a_4 a_3 a_0 + a_4 a_1 a_0 + a_2 a_1 a_0)(x - x_i) + (a_4 + a_2 + a_0)(x - x_i)^2$	$a_4 a_3 a_2 a_1 + (a_4 a_3 + a_4 a_1 + a_2 a_1)(x - x_i) + (x - x_i)^2$
6	$a_5 a_4 a_3 a_2 a_1 a_0 + (a_5 a_4 a_3 a_2 + a_5 a_4 a_3 a_0 + a_5 a_4 a_1 a_0 + a_3 a_2 a_1 a_0)(x - x_i) + (a_5 a_4 + a_5 a_2 + a_5 a_0 + a_3 a_2 + a_3 a_0 + a_1 a_0)(x - x_i)^2 + (x - x_i)^2$	$a_5 a_4 a_3 a_2 a_1 + (a_5 a_4 a_3 + a_5 a_4 a_1 + a_5 a_2 a_1 + a_3 a_2 a_1)(x - x_i) + (a_5 + a_3 + a_1)(x - x_i)^2$

§ 3 Padé 逼近

一个函数的 Taylor 级数展开的系数同该函数值的关系问题, 是一个有意义的数学问题, 也是一个重要的实际问题. 它是许多物理和生物学中数学模型的计算基础. 如所知, 如果一个 Taylor 级数展开绝对收敛, 则它唯一确定一函数的值, 且该函数任意次可微. 反之, 如果一个函数任意次可微, 则它也唯一确定一个 Taylor 级数展开. 此时实际上我们可以用多项式来逼近给定的函数, 然而这种方法是有限制的. 考虑

$$f(x) = \left(\frac{1+2x}{1+x} \right)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{5}{8}x^2 + \frac{13}{16}x^3 - \frac{141}{128}x^4 + \dots \quad (3.1)$$

容易看到当 $x > \frac{1}{2}$ 时, 上述 Taylor 级数是不收敛的, 当然也不能用它来计算 $f(\infty) = \sqrt{2}$ 了!

如果作变量替换

$$x = w/(1-2w) \text{ 或 } w = x/(1+2x),$$

则

$$\begin{aligned} f[x(w)] &= (1-w)^{-1/2} \\ &= 1 + \frac{1}{2}w + \frac{3}{8}w^2 + \frac{5}{16}w^3 + \frac{35}{128}w^4 + \dots \end{aligned} \quad (3.2)$$

在 $w = \frac{1}{2}$ ($x = \infty$) 处是收敛的. 取 Taylor 级数(3.2)的前几个截断多项式于 $w = \frac{1}{2}$ 的值, 即可得 $\sqrt{2} = f(\infty)$ 的近似值:

$$1, 1.125, 1.343\ 75, 1.382\ 81, 1.399\ 90, \dots \quad (3.3)$$

还原于原先的变量 x , 则(3.2)的前几个关于 w 的截断多项式, 正是 x 的下列有理分式

$$1, \frac{1+(5/2)x}{1+2x}, \frac{1+(9/2)x+(43/8)x^2}{(1+2x)^2}, \dots \quad (3.4)$$

下面我们考虑获取由 Taylor 级数展开式(3.1)所定义函数 $f(x)$ 的其他有理分式逼近的一种重要方法——Padé 逼近方法.

考虑 $f(x)$ 的这样一种有理分式逼近

$$(a+bx)/(c+dx),$$

使其 Taylor 级数展开的前 3 项同(3.1)的前 3 项相重合, 于是求得

$$\frac{1+(7/4)x}{1+(5/4)x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{5}{8}x^2 + \frac{25}{32}x^3 - \frac{125}{128}x^4 + \dots \quad (3.5)$$

按它算出 $\sqrt{2} = f(\infty) \approx 1.4$, 它比(3.3)所给近似为好. 考虑 $f(x)$ 的下述有理分式:

$$(a+bx+cx^2)/(d+ex+hx^2),$$

使其 Taylor 级数展开的前 5 项同(3.1)的前 5 项重合, 则得到

$$\frac{1+(13/4)x+(41/16)x^2}{1+(11/4)x+(29/16)x^2}. \quad (3.6)$$

由它算得 $\sqrt{2} = f(\infty) \approx \frac{41}{29} = 1.413\ 793\ 103$. 往下, 按同样思路分别考虑分子(母)为 3 次, 4 次和 5 次多项式之有理分式, 使其 Taylor 级数展开与(3.1)的前 7 项, 9 项和 11 项相重合. 于是相应求得 $\sqrt{2} = f(\infty)$ 的下述近似值:

$$1.414\ 201\ 183, 1.414\ 213\ 198 \text{ 和 } 1.414\ 213\ 552. \quad (3.7)$$

$\sqrt{2}$ 同最后一近似的误差仅为 10^{-8} . 足见这种算法是很优越的. 由此即可引导出一般的 Padé 逼近方法.

设 $f(x)$ 由下述形式幂级数所定义

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j. \quad (3.8)$$

$f(x)$ 的 $[L/M]$ 的 Padé 逼近为

$$[L/M] = P_L(x)/Q_M(x), \quad (3.9)$$

其中 $P_L(x) \in P_L$, $Q_M(x) \in P_M$ 分别为次数不超过 L, M 的多项式. (3.9) 中 $P_L(x)$ 和 $Q_M(x)$ 的系数, 按下述方程来确定:

$$f(x) - P_L(x)/Q_M(x) = O(x^{L+M+1}). \quad (3.10)$$

因为一个有理分式的分子、分母同乘一常数其值不变, 我们特地要求 $Q_M(x)$ 满足标准化条件

$$Q_M(0) = 1.0. \quad (3.11)$$

最后要求 $P_L(x)$ 与 $Q_M(x)$ 无公共因子存在.

若记

$$\begin{aligned} P_L(x) &= p_0 + p_1 x + \cdots + p_L x^L, \\ Q_M(x) &= 1 + q_1 x + \cdots + q_M x^M, \end{aligned} \quad (3.12)$$

则由标准化条件(3.11), 可用 $Q_M(x)$ 遍乘(3.10)式以线性化系数方程. 于是比较系数可得线性方程组

$$\left\{ \begin{array}{ll} a_0 & = p_0, \\ a_1 + a_0 q_1 & = p_1, \\ a_2 + a_1 q_1 + a_0 q_2 & = p_2, \\ \vdots & \vdots \\ a_L + a_{L-1} q_1 + \cdots + a_0 q_L & = p_L, \\ a_{L+1} + a_L q_1 + \cdots + a_{L-M+1} q_M & = 0, \\ \vdots & \vdots \\ a_{L+M} + a_{L+M-1} q_1 + \cdots + a_L q_M & = 0, \end{array} \right. \quad (3.13)$$

其中已规定

$$a_n \equiv 0 \quad (\text{当 } n < 0), \quad q_j \equiv 0 \quad (\text{当 } j > M). \quad (3.14)$$

为方便计, 记

$$L + M = N, \quad L - M = J. \quad (3.15)$$

Froebenius 和 Padé 曾利用条件 $Q_M(x) \not\equiv 0$ 来替代标准化条件(3.11). 这两类条件显然是不同的. 事实上, 作为例子考虑

$$f(x) = 1 + x^2 + \cdots.$$

对于 $L = M = 1$, 容易验证

$$P_1(x) = Q_1(x) = x, \quad P_1(x)/Q_1(x) = 1,$$

满足

$$Q_M(x)f(x) - P_L(x) = O(x^{N+1})$$

而不满足(3.10). 按我们的定义, 该幂级数的[1/1]逼近是不存在的.

下面的唯一性定理, 无论按哪种规定都是成立的.

定理 9 (Froebenius-Padé) 对于任意形式幂级数 $f(x)$, 若其 $[L/M]$ Padé 逼近存在, 则必唯一.

证明 仅就满足标准化条件(3.11)的情况来证明. 假定有两个这样的 Padé 逼近

$$\frac{X(x)}{Y(x)}, \quad \frac{U(x)}{V(x)},$$

其中 $X(x), U(x) \in P_L$; $Y(x), V(x) \in P_M$. 按(3.10), 必然有

$$\frac{X(x)}{Y(x)} - \frac{U(x)}{V(x)} = O(x^{L+M+1}). \quad (3.16)$$

今以 $Y(x)V(x)$ 同乘(3.16)式两边, 可得

$$X(x)V(x) - Y(x)U(x) = O(x^{L+M+1}). \quad (3.17)$$

因为(3.17)式的左端为一个次数不超过 $L + M$ 的多项式, 为使(3.17)成立, 只有

$$X(x)V(x) - Y(x)U(x)$$

恒为 0. 因为 $Y(x)$ 与 $V(x)$ 不恒为 0, 因而有

$$\frac{X(x)}{Y(x)} = \frac{U(x)}{V(x)}.$$

因为按定义 $X(x)$ 与 $Y(x)$, $U(x)$ 与 $V(x)$ 互质, 且 $Y(0) = V(0) = 1.0$. 唯一性得证.

上述定理的成立与否, 是与定义方程的奇异性无关的. 当非奇异时, 可直接求解而得 $[L/M]$ Padé 逼近:

$$[L/M] = \frac{\begin{vmatrix} a_{L-M+1} & a_{L-M+2} & \cdots & a_{L+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_L & a_{L+1} & \cdots & a_{L+M} \\ \sum_{j=M}^L a_{j-M} x^j & \sum_{j=M-1}^L a_{j-M+1} x^j & \cdots & \sum_{j=0}^L a_j x^j \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{L-M+1} & a_{L-M+2} & \cdots & a_{L+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_L & a_{L+1} & \cdots & a_{L+M} \\ x^M & x^{M-1} & \cdots & 1 \end{vmatrix}}, \quad (3.18)$$

在上述各求和号中,若下标超过上标时,该和为 0. 这个结果是 Jacobi 得到的.

人们常把函数 $f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ 的 Padé 逼近列成一张所谓“Padé 逼近表”:

[0/0]	[0/1]	[0/2]	[0/3]	...
[1/0]	[1/1]	[1/2]	[1/3]	...
[2/0]	[2/1]	[2/2]	[2/3]	...
[3/0]	[3/1]	[3/2]	[3/3]	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

例 1 $f(x) = e^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}$ 的 Padé 逼近表(见下表).

令 $x=1$, 则可得 e 的相应的 Padé 逼近表, 其中

$$\begin{aligned} [1/1] &= 3, \quad [2/2] = 19/7, \\ [3/3] &= 193/71, \quad [4/4] = 2721/1001. \end{aligned}$$

$2721/1001$ 与 e 真值的误差仅在第八位小数上相差 1.

例 1 中 $f(x) = e^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}$ 的 Padé 逼近表

L/M	0	1	2	3	4
0	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1-x}$	$\frac{2}{2-2x+x^2}$	$\frac{6}{6-6x+3x^2-x^3}$	$\frac{24/(24-24x+12x^2-4x^3+x^4)}{120+24x}/(120-90x+36x^2-8x^3+x^4)$
1	$\frac{1+x}{1}$	$\frac{2+x}{2-x}$	$\frac{6+2x}{6-4x+x^2}$	$\frac{24+6x}{24-18x+6x^2-x^3}$	

续表

L/M	0	1	2	3	4
2	$\frac{2+2x+x^2}{2}$	$\frac{6+4x+x^2}{6-2x}$	$\frac{12+6x+x^2}{12-6x+x^2}$	$\frac{60+24x+3x^2}{60-36x+9x^2-x^3}$	$(360+120x+12x^2)/(360-240x+72x^2-12x^3+x^4)$
3	$\frac{6+6x+3x^2+x^3}{6}$	$\frac{24+18x+16x^2+x^3}{24-6x}$	$\frac{60+36x+9x^2+x^3}{60-24x+3x^2}$	$\frac{120+60x+12x^2+x^3}{120-60x+12x^2-x^3}$	$(840+360x+60x^2+4x^3)/(840-480x+120x^2-16x^3+x^4)$
4	$(24+24x+12x^2+4x^3+x^4)/24$	$(120+96x+36x^2+8x^3+x^4)/(120-24x)$	$(360+240x+72x^2+12x^3+x^4)/(360-120x+12x^2)$	$(840+480x+120x^2+16x^3+x^4)/(840-360x+60x^2-4x^3)$	$(1680+840x+180x^2+20x^3+x^4)/(1680-840x+180x^2-20x^3+x^4)$

大量的具体算例表明,在 $N = L + M$ 为一确定常数时,所有各可能的 $[L/M]$ Padé 逼近中,以 L 和 M 相等或接近相等者为最精确. 比如当 $N = 2n$ 时,我们应该采用 $[n/n]$ Padé 逼近; 当 $N = 2n + 1$ 时,我们应该采用 $[n+1/n]$ 或 $[n/n+1]$ Padé 逼近. 总而言之,应该采用 Padé 逼近表的主对角线或主对角线附近的 Padé 逼近.

为了得到比(3.18)更为紧凑的表现形式,于(3.18)右端分子和分母两行列式中,均以第 1 列各元素减去第 2 列相应元素的 x 倍; 以第 2 列各元素减去第 3 列相应元素的 x 倍; ……则按行列式性质,其值是不变的,即得出

$$[L/M] = \frac{\begin{vmatrix} a_{L-M+1} - xa_{L-M+2} & \cdots & a_L - xa_{L+1} & a_{L+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_L - xa_{L+1} & \cdots & a_{L+M-1} - xa_{L+M} & a_{L+M} \\ -a_{L-M+1}x^{L+1} & \cdots & -a_Lx^{L+1} & \sum_{j=0}^L a_j x_j \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{L-M+1} - xa_{L-M+2} & \cdots & a_L - xa_{L+1} & a_{L+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_L - xa_{L+1} & \cdots & a_{L+M-1} - xa_{L+M} & a_{L+M} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}} \quad (3.19)$$

按行列式性质,上式分母以最后一列展开即可化为一个 M 阶行列式; 同时对分子上的行列式施以变换: 以 x^{j-M-1} 乘其第 j 列 ($j = 1, \dots, M$), 然后将它们统统加到最后一列, 则得到

$$[L/M] = \frac{\begin{vmatrix} a_{L-M+1} - xa_{L-M+2} & \cdots & a_L - xa_{L+1} & a_{L-M+1}x^{-M} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_L - xa_{L+1} & \cdots & a_{L+M-1} - xa_{L+M} & a_Lx^{-M} \\ -a_{L-M+1}x^{L+1} & \cdots & -a_Lx^{L+1} & \sum_{j=0}^{L-M} a_j x^j \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{L-M+1} - xa_{L-M+2} & \cdots & a_L - xa_{L+1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_L - xa_{L+1} & \cdots & a_{L+M-1} - xa_{L+M} \end{vmatrix}} \quad (3.20)$$

再将(3.20)的分子上的行列式按最后一行作 Laplace 展开, 并且除 $\sum_{j=0}^{L-M} a_j x^j$ 的代数余子式外, 其他各余子式均又按其最后一列作 Laplace 展开, 则由逆矩阵的定义知

$$[L/M] = \sum_{j=0}^{L-M} a_j x^j + x^{L-M+1} \{ \boldsymbol{\omega}^T(L/M) \mathbf{W}^{-1}(L/M) \boldsymbol{\omega}(L/M) \}, \quad (3.21)$$

其中 $\mathbf{W}^{-1}[L/M]$ 是下述矩阵的逆矩阵:

$$\mathbf{W}(L/M) = \begin{pmatrix} a_{L-M+1} - xa_{L-M+2} & \cdots & a_L - xa_{L+1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_L - xa_{L+1} & \cdots & a_{L+M-1} - xa_{L+M} \end{pmatrix}, \quad (3.22)$$

而

$$\boldsymbol{\omega}(L/M) = (a_{L-M+1}, a_{L-M+2}, \dots, a_L)^T, \quad (3.23)$$

如果 $j < 0$, 则规定 $a_j \equiv 0$. 当 $L < M$ 时, (3.21) 式中的和式 $\sum_{j=0}^{L-M} a_j x^j \equiv 0$. 纵使当 $M > L + 1$ 时, 出现 x 的负幂, 等式(3.21)也照样成立.

按照同样的方法也可得到另一种紧凑表达式

$$[L/M] = \sum_{j=0}^{L+n} a_j x^j + x^{L+n+1} \{ \boldsymbol{\omega}^T((L+M)/M) \mathbf{W}^{-1}(L/M) \boldsymbol{\omega}((L+n)/M) \}, \quad (3.24)$$

其中 $0 \leq n \leq M$.

关于有理分式函数的 Padé 逼近, 有

定理 10 (Padé) 函数 $f_0(x)$ 具有形式

$$f_0(x) = \frac{\sum_{t=0}^l c_t x^t}{1 + \sum_{u=1}^m e_u x^u}, \quad (3.25)$$

必须且只需它的 Padé 逼近为

$$[L/M] = f_0(x), \quad (3.26)$$

只要 $L \geq l, M \geq m$.

证明 若(3.25)的幂级数展开式为

$$f_0(x) = \sum_{t=0}^{\infty} d_t x^t, \quad (3.27)$$

则有($e_0 = 1$)

$$\left(\sum_{u=0}^m e_u x^u \right) \sum_{t=0}^{\infty} d_t x^t = \sum_{t=0}^l c_t x^t. \quad (3.28)$$

选取任一给定的满足 $\pi_h(0) = 1.0$ 的 h 次多项式 $\pi_h(x)$, 并取

$$\begin{aligned} P_L(x) &= \sum_{r=0}^L p_r x^r \equiv \pi_h(x) \sum_{t=0}^l c_t x^t \quad (L \geq l+h), \\ Q_M(x) &= \sum_{s=0}^M q_s x^s \equiv \pi_h(x) \sum_{u=0}^m e_u x^u \quad (M \geq m+h), \end{aligned}$$

则由(3.28)式可知它们满足定义 $[L/M]$ Padé 逼近的方程组(3.13). 这表明由(3.25)式定义的 $f_0(x)$ 确为它自己的 $[L/M]$ Padé 逼近.

反之, 若对所有 $L \geq l, M \geq m$, 恒使(3.26)式成立, 则由 Padé 逼近方程, 知

$$\left(\sum_{u=0}^m e_u x^u \right) \sum_{t=0}^{\infty} g_t x^t - \sum_{t=0}^l c_t x^t = O(x^{L+M+1}). \quad (3.29)$$

因为 $e_0 = 1$, 对比(3.13)即可发现在每一方程中, 具有最高下指标的 g_t 的系数正好是 1.0. 考虑足够大的 L 和 M , 采用把(3.29)右端看做是 0 的方法, 可以得到 x 任意次幂的系数. 因此(3.29)提供了唯一由(3.26)给出的关于 g_t 的解. 因为 g_t 等于(3.27)中的 d_t , 此即由(3.26)推出了(3.25). 定理证毕.

定理 11 给定任一形式幂级数(3.8)($a_0 \neq 0$), 下面事实成立:

1° 对任一固定 M , 均存在 L_j 的一个无穷序列, 使得 $[L_j/M]$ 恒存在;

2° 对任一固定 L , 均存在 M_j 的一个无穷序列, 使得 $[L/M_j]$ 恒存在;

3° 对任一固定 J , 均存在一无穷序列 M_j , 使得 $[M_j + J/M_j]$ 恒存在.

该定理是 Baker 于 1973 年建立的. 它表明, 任一形式幂级数总是可以用 Padé 逼近方法而获得其有理逼近的.

例 2 求 $\tanh \mu x$, $-1 \leq x \leq 1$, $\mu = \frac{1}{2} \ln 3$ 的逼近.

先引出 $(\tanh \mu x)/x$ 的 $[2/4]$ Padé 逼近, 并以 $x[2/4]$ 作为 $\tanh \mu x$ 的逼近. 考虑 $(\tanh \mu x)/x$ 的幂级数

$$\frac{\tanh \mu x}{x} = \mu + \frac{\mu^3}{3} x^2 + \frac{2\mu^5}{15} x^4 - \frac{17\mu^7}{315} x^6 + \frac{62\mu^9}{2835} x^8 - + \dots,$$

列出相应方程组(3.13), 则可求得

$$\begin{aligned} P_2(x) &= \mu + \frac{2\mu^3}{21} x^2, \\ Q_4(x) &= 1 + \frac{3\mu^2}{7} x^2 + \frac{\mu^4}{105} x^4. \end{aligned}$$

因而

$$[2/4] = \frac{P_2(x)}{Q_4(x)} = \frac{0.549\ 306\ 144\ 3 + 0.015\ 785\ 344\ 8x^2}{1 + 0.129\ 315\ 960\ 1x^2 + 0.000\ 867\ 098\ 7x^4}.$$

相应的 $\tanh \mu x$ ($-1 \leq x \leq 1$) 的 $[3/4]$ 逼近为 $xP_2(x)/Q_4(x)$:

$$\frac{0.549\ 306\ 144\ 3x + 0.015\ 785\ 344\ 8x^3}{1 + 0.129\ 315\ 960\ 1x^2 + 0.000\ 867\ 098\ 7x^4}.$$

常按下法来估计 Padé 逼近的误差上界: 取

$$P_2(x) - Q_4(x)(\tanh \mu x)/x$$

幂级数展开式中第一个非零项作为误差项, 即为

$$-\frac{\mu^9}{99\ 225} x^8.$$

于是用 $x[2/4]$ 逼近 $\tanh \mu x$ 的相对误差函数是

$$\begin{aligned} &\frac{x[2/4] - \tanh \mu x}{\tanh \mu x} \\ &= \frac{1}{Q_4(x)} - \frac{P_2(x) - Q_4(x) \frac{\tanh \mu x}{x}}{\tanh \mu x}. \end{aligned}$$

以 $-\mu^9 x^8 / 99225$ 近似替代上式右端的分子, 则相对误差函数近似为

$$\Delta = \left(-\frac{\mu^9}{99225} x^8 \right) / \left(Q_4(x) - \frac{\tanh \mu x}{x} \right).$$

当 $-1 \leq x \leq 1$ 时,

$$Q_4(x) \geq 1, \quad \frac{\tanh \mu x}{x} \geq \tanh \mu.$$

从而当 $-1 \leq x \leq 1$ 时

$$\Delta \leq \frac{\mu^9}{99225 \cdot \tanh \mu} = 0.9177 \dots \times 10^{-7} < 0.92 \times 10^{-7}.$$

$\tanh \mu x$ 于 $[-1, 1]$ 上最佳有理逼近为

$$R^*(x) = \frac{0.54930614401x + 0.1574011995x^3}{1 + 0.12923360954x^2 + 0.00085891904x^4}.$$

其相对误差为 0.59×10^{-9} .

Padé 逼近的 ϵ - 算法 所谓 ϵ - 算法, 原是 Shanks 与 Wynn 为提高序列收敛速度而设计的. 对于给定的序列 $S_0, S_1, \dots, S_j, \dots, \epsilon$ - 算法的基本关系为

$$\epsilon_0^{(j)} = S_j, \quad \epsilon_{-1}^{(j)} = 0, \quad (3.30)$$

$$\epsilon_{k+1}^{(j)} = \epsilon_{k-1}^{(j-1)} + \frac{1}{\epsilon_k^{(j+1)} - \epsilon_k^{(j)}}, \quad j = 0, 1, \dots, k = 0, 1, \dots.$$

今设 S_j 是下列形式幂级数

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

的前 $j+1$ 项部分和在 $x = x_0$ 点的值:

$$S_j = \sum_{i=0}^j a_i x_0^i.$$

Shanks 与 Wynn 指出了 ϵ - 算法与 Padé 逼近方法的重要关系

$$\epsilon_{2k}^{(j)} = [(k+j)/k]_{f(x)}(x_0), \quad (3.31)$$

即 $\epsilon_{2k}^{(j)}$ 是 $f(x)$ 的 $[(k+j)/k]$ Padé 逼近在 $x = x_0$ 点的值.

在实际应用时, 常把 ϵ - 算法所生成的 2 维数组排列成一个所谓 ϵ - 阵:

$$\begin{matrix} \epsilon_{-1}^{(0)} & \epsilon_0^{(0)} & & & & \\ \epsilon_{-1}^{(1)} & \epsilon_0^{(1)} & \epsilon_1^{(0)} & & & \\ \epsilon_{-1}^{(2)} & \epsilon_0^{(2)} & \epsilon_1^{(1)} & \epsilon_2^{(0)} & & \\ \epsilon_{-1}^{(3)} & \epsilon_0^{(3)} & \epsilon_1^{(2)} & \epsilon_2^{(1)} & \epsilon_3^{(0)} & \ddots \\ \epsilon_{-1}^{(4)} & \epsilon_0^{(4)} & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \vdots & & & & & \end{matrix} \quad (3.32)$$

考虑 ϵ - 阵中的一块

$$\begin{matrix} & & \epsilon_{2r}^{(m-1)} & & & \\ & \epsilon_{2r-1}^{(m)} & \epsilon_{2r-1}^{(m)} & \epsilon_{2r}^{(m-1)} & \epsilon_{2r+1}^{(m-1)} & \epsilon_{2r+2}^{(m-1)} \\ \epsilon_{2r-2}^{(m+1)} & \epsilon_{2r-1}^{(m+1)} & \epsilon_{2r}^{(m+1)} & \epsilon_{2r+1}^{(m+1)} & \epsilon_{2r+2}^{(m+1)} & \\ & \epsilon_{2r}^{(m+1)} & & & & \end{matrix} \quad (3.33)$$

按照公式(3.30)可知

$$\begin{aligned} \epsilon_{2r+1}^{(m-1)} - \epsilon_{2r-1}^{(m-2)} &= (\epsilon_{2r}^{(m)} - \epsilon_{2r}^{(m-1)})^{-1}, \\ \epsilon_{2r+1}^{(m)} - \epsilon_{2r-1}^{(m-1)} &= (\epsilon_{2r}^{(m+1)} - \epsilon_{2r}^{(m)})^{-1}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

上两式左、右端分别相减，并利用递推关系(3.30)，可得

$$\begin{aligned} &(\epsilon_{2r+2}^{(m-1)} - \epsilon_{2r}^{(m)})^{-1} - (\epsilon_{2r}^{(m)} - \epsilon_{2r-1}^{(m+1)})^{-1} \\ &= (\epsilon_{2r}^{(m+1)} - \epsilon_{2r}^{(m)})^{-1} - (\epsilon_{2r}^{(m)} - \epsilon_{2r}^{(m-1)})^{-1}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

取 $r = i, m + r = j$ ($i, j = 0, 1, \dots$) 再根据(3.31)式，即可得

$$\begin{aligned} &([i+1/j] - [i/j])^{-1} - ([i/j] - [i-1/j])^{-1} \\ &= ([i/j+1] - [i/j])^{-1} - ([i/j] - [i/j-1])^{-1}, \\ &\quad i, j = 0, 1, \dots. \end{aligned} \quad (3.36)$$

它指出了 Padé 表中，相邻 5 个 Padé 逼近的关系。若记它们为

$$\begin{matrix} N \\ W & C & E \\ S \end{matrix}$$

则(3.36)式指出了

$$(C - N)^{-1} + (C - S)^{-1} = (C - W)^{-1} + (C - E)^{-1}. \quad (3.37)$$

关于 Padé 逼近的推广可以作如下一种考虑。因为 $f(x)$ 的 Padé 逼近也可以理解为是由方程

$Q_M(x)f(x) - P_L(x)$ =一直到 x^{L+M} 项系数全为 0

中解出 $P_L(x)/Q_M(x)$ 所得的近似式. Shafer 于 1972 年提出考虑从

$$P_L(x)[f(x)]^2 + Q_M(x)f(x) + R_N(x) = \text{一直到 } x^{L+M+N+1} \text{ 项系数为 } 0 \quad (3.38)$$

中解出 $f(x)$, 即按一元二次方程求根公式“解出”

$$f(x) \approx -\frac{Q_M(x) \pm \sqrt{Q_M^2(x) - 4P_L(x)R_N(x)}}{2P_L(x)}. \quad (3.39)$$

并以此作为 $f(x)$ 的所谓 $[L/M/N]2$ 次逼近. 事实上, 由于 $f(x)$ 的幂级数展开已知, 所以 $[f(x)]^2$ 的幂级数展开也已知. 因而由 (3.38) 得到关于 $P_L(x)$ 、 $Q_M(x)$ 以及 $R_N(x)$ 各系数间的线性方程组, 从中可求出 $P_L(x)$ 、 $Q_M(x)$ 和 $R_N(x)$ 来, 最后再按 (3.39) 式求出 $f(x)$ 的逼近式.

还可把 (3.38) 换成微分方程形式

$$P_9(x) \frac{d^2 f}{dx^2} + Q_8(x) \frac{df}{dx} + R_6(x)f(x) = 0,$$

而考虑 Padé 逼近的新的推广. 鉴于篇幅所限, 此处不拟详述了.

§ 4 有理逼近的一些算法

4.1 Darboux 公式及其有关方法

研究积分

$$R_n = (-1)^n (z-a)^{n+1} \int_0^1 \varphi(t) f^{(n+1)}(a+t(z-a)) dt. \quad (4.1)$$

反复作分部积分, 可得到

$$\begin{aligned} R_n &= \sum_{r=0}^n (-1)^{n-r} (z-a)^{n-r} [\varphi^{(r)}(1) f^{(n-r)}(z) - \varphi^{(r)}(0) f^{(n-r)}(a)] \\ &\quad - \int_0^1 \varphi^{(n+1)}(t) f(a+t(z-a)) dt. \end{aligned}$$

若其中 $\varphi(t)$ 为一次数不超过 n 的多项式, 则上式右端积分为零. 于是有 Darboux 公式

$$\begin{aligned}\varphi^{(n)}(0)[f(z) - f(a)] &= \sum_{r=1}^n (-1)^{r-1}(z-a)^r \\ &\cdot [\varphi^{(n-r)}(1)f^{(r)}(z) - \varphi^{(n-r)}(0)f^{(r)}(a)] + R_n.\end{aligned}\quad (4.2)$$

当 $\varphi(t) = (t-1)^n$ 时, $\varphi^{(r)}(1) = 0$ ($r = 0, 1, \dots, n-1$). 这时 (4.2) 恰为 Taylor 公式(带余项).

当 $\varphi(t) = t^n(t-1)^n$ 时, 于相应 Darboux 公式中用 $2n$ 代替 n , 则可得下列简化公式

$$\begin{aligned}f(z) &= f(a) + \sum_{r=1}^n \frac{(2n-r)!}{(2n)!} \binom{n}{r} [f^{(r)}(a) - \\ &(-1)^r f^{(r)}(z)](z-a)^r + R_{2n},\end{aligned}\quad (4.3)$$

此处 $R_{2n} = (z-a)^{2n+1} \int_0^1 t^n(t-1)^n f^{(2n+1)}(a+t(z-a)) dt$. (4.3) 式称为 Hummel-Seebeck-Obrechkoff 公式, 简称 HSO 公式.

对于满足

$$f'(z) = R_1(z)f(z) + R_2(z) \quad (4.4)$$

(其中 $R_1(z)$ 和 $R_2(z)$ 为 z 的任意给定的有理函数) 的任一函数 $f(z)$, 显然 (4.3) 式两边都有含 $f(z)$ 的项. 只需从中把 $f(z)$ 作为未知元解出, 即可得到 $f(z)$ 的一种有理逼近式. 例如

$$\begin{aligned}&e^z, e^{-z^2/2}, 10^z, \log_b z, \arctan z, \\ &(z^2+1)^{-1/2}(c + \sinh z), z^{-n}(a + b \ln z), \\ &(1-z^2)^{-1/2}, [R(x)]^\alpha,\end{aligned}$$

其中 $R(x)$ 为任意有理函数, 而 α 为任意指定的实数, 都可以采用 HSO 公式而获得相应的有理逼近式.

例 1 设 $f(z) = e^z$, 取 $a = 0$. 从相应公式 (4.3) 中解出 e^z , 可得 e^z 的有理逼近式

$$e^z = \frac{\sum_{r=0}^n (2n-r)! \binom{n}{r} z^r + R_{2n}}{\sum_{r=0}^n (-1)^r (2n-r)! \binom{n}{r} z^r}, \quad (4.5)$$

其中 $R_{2n} = z^{2n+1} \int_0^1 t^n(t-1)^n e^{tz} dt$. 舍去 (4.5) 中的 R_{2n} , 即可得 e^z 的有理逼近式

近式.

分别取 $n = 0, 1, 2, \dots$, 则由(4.5)得到 e^z 的逼近式 $\frac{1}{1}, \frac{2+z}{2-z}, \frac{12+6z+z^2}{12-6z+z^2}, \frac{120+60z+12z^2+z^3}{120-60z+12z^2-z^3}, \dots$ 它们恰好为 e^z 的 $[0/0], [1/1], [2/2], [3/3], \dots$ Padé 逼近. 这自然是一个很有趣的巧合.

当然并不是一切函数的 HSO 逼近都能得到 Padé 逼近式的. 事实上, 如果取 $f(z) = \exp(\arctan z)$, 则其 HSO 逼近 ($a=0, n=1$) 为

$$f(z) \approx \frac{1 + \frac{1}{2}z + z^2 + \frac{1}{2}z^3}{1 - \frac{1}{2}z + z^2}.$$

但相应的 Padé 逼近却为

$$f(z) \approx \frac{1 + 0.84z + 0.87z^2 + \frac{17}{60}z^3}{1 - 0.16z + 0.53z^2}.$$

例 2 设 $f(z) = c \cdot \exp \frac{-z^2}{2}$ ($a=0, n=2$) 时, 由 HSO 公式给出的逼近式为

$$f(z) \approx \frac{(12 - z^2) / \sqrt{2\pi}}{12 + 5z^2 + z^4}.$$

它在 $(-\infty, +\infty)$ 上的最大误差为 0.0125.

如果采用 Darboux 公式, 其中取 $\varphi(t)$ 为 $[0, 1]$ 区间上的最小零偏差多项式 $T_n^*(x)$, 则对同一个 $f(z)$ 所得逼近式为

$$f(z) = \frac{(16 - z^2) / \sqrt{2\pi}}{16 + 7z^2 + z^4}.$$

它在 $(-\infty, +\infty)$ 上的最大误差为 0.026.

4.2 微分修正算法(Cheney - Loeb 算法)

对于给定的函数 $f(x)$, 有理逼近问题, 相当于选取 c, d 使得

$$\Delta(c, d) = \sup_x |f(x) - \sum c_i x^i / \sum d_j x^j| = \min.$$

为了给出一个一般算法, 考虑

$$\Delta(c) = \sup_i \frac{(A^i, c) + a_i}{(B^i, c) + b_i}, \quad (4.6)$$

其中 (A^i, c) 表示 A^i 与 c 的内积,且 c 仅限于在下述区域内取值

$$D = \{c \in E_n \mid (B^i, c) + b_i > 0, \text{ 对一切 } i\}. \quad (4.7)$$

本节将仅限于 i 的取值范围是一个有限集合.

定理 12 (Cheney - Loeb) $\Delta(c)$ 于区域 D 上的局部极小必然也是整体极小.

证明 假若不然. 设有 c^* 是 $\Delta(c)$ 在 D 上的非整体的局部极小值点, 则存在点 $c^0 \in D$, 使得

$$\Delta(c^0) < \Delta(c^*).$$

作辅助函数

$$R^i(c) = \frac{(A^i, c) + a_i}{(B^i, c) + b_i},$$

并选取 i , 使

$$R^i(c^*) = \Delta(c^*),$$

且 $R^i(c)$ 在 c^0 方向上是不减的. 因 $R^i(c)$ 于 D 中是连续可微的, 根据 Rolle 定理, 存在点 $\lambda c^* + (1 - \lambda)c^0$ ($0 < \lambda < 1$), 使得 $\frac{dR^i}{d\lambda} = 0$.

实际进行导数运算, 有

$$\begin{aligned} \frac{dR^i}{d\lambda} &= \{[(B^i, c^0) + b_i](A^i, c^* - c^0) - [(A^i, c^0) + a_i] \\ &\quad \cdot (B^i, c^* - c^0)\}[(B^i, \lambda c^* + (1 - \lambda)c^0) + b_i]^{-2} = 0. \end{aligned}$$

不难看出, $\frac{dR^i}{d\lambda}$ 的分子不依赖于 λ . 所以它只要在某一处为 0, 必然处处为 0. 是故应在连接 c^* 与 c^0 的线段上有 $R^i(c) \equiv \text{常数}$, 所以

$$\Delta(c^0) \geq R^i(c^0) = R^i(c^*) = \Delta(c^*).$$

定理证毕.

定理 13 为使 c^* 是 $\Delta(c)$ 在 D 中的极小值点, 必须且只需线性不等式组

$$(A^i - \mu B^i, z) < 0 \quad (i \in I) \quad (4.8)$$

不相容, 其中

$$\mu = \Delta(c^*), \quad I = \{i \mid R^i(c^*) = \mu\}. \quad (4.9)$$

证明 假设 c^* 是 $\Delta(c)$ 在 D 上的极小值点, 则对充分小的 z , 有

$$\Delta(c^* + z) \geq \Delta(c^*).$$

于是必存在某 $i \in I$, 使得

$$\frac{(A^i, c^* + z) + a_i}{(B^i, c^* + z) + b_i} \geq \frac{(A^i, c^*) + a_i}{(B^i, c^*) + b_i} = \mu,$$

从而 $(A^i - \mu B^i, c^* + z) + a_i - b_i \mu \geq 0$. 整理即得 $(A^i - \mu B^i, z) + (A^i - \mu B^i, c^*) + a_i - b_i \mu \geq 0$. 按 μ 的定义, $(A^i - \mu B^i, c^*) + a_i - b_i \mu = 0$, 于是

$$(A^i - \mu B^i, z) \geq 0,$$

即(4.8)不相容, 必要性得证.

反之, 设(4.8)不相容, 则对任何 z , 都存在 $i \in I$, 使得

$$(A^i, z) \geq \mu(B^i, z).$$

另一方面, 按 μ 的定义, 有

$$(A^i, c^*) + a_i = \mu[(B^i, c^*) + b_i].$$

上两式两边对应相加, 得

$$(A^i, c^* + z) + a_i \geq \mu[(B^i, c^* + z) + b_i],$$

即 $\Delta(c^* + z) \geq \frac{(A^i, c^* + z) + a_i}{(B^i, c^* + z) + b_i} \geq \mu = \Delta(c^*)$,

是故 c^* 为极小值点. 充分性得证. 定理证毕.

今设 $A_i, B_i (i=1, \dots, m)$ 为任意集合 D 上的实值函数, 假定对一切 $c \in D$ 和 $i (i=1, \dots, m)$, 均有

$$0 < \alpha \leq B_i(c) \leq \beta. \quad (4.10)$$

重新定义

$$\Delta(c) = \max_i \frac{A_i(c)}{B_i(c)}. \quad (4.11)$$

微分修正算法的具体算法如下:

1° 选取初始近似 $c^0 \in D$;

2° 假定 c^{k-1} 已经求得 ($k=1, 2, \dots$), 然后来求辅助函数

$$\delta_k(c) = \max_i \frac{A_i(c) - \Delta(c^{k-1})B_i(c)}{B_i(c^{k-1})} \quad (4.12)$$

于 D 中的极小值点, 并以其作为新的近似向量 c^k .

这样可形成一个向量序列 $\{c^k\}$. 关于序列 $\{c^k\}$ 的极小化性质是 Cheney-Loeb 建立的:

定理 14 (Cheney-Loeb) $\Delta(c^k)$ 随 k 的增大而单调下降, 且

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta(c^k) = \inf_{c \in D} \Delta(c). \quad (4.13)$$

证明 首先, 由于 c^k 是 $\delta_k(c)$ 的极小值点, 因而

$$\delta_k(c^k) \leq \delta_k(c^{k-1}) = \max_i \frac{A_i(c^{k-1})}{B_i(c^{k-1})} - \Delta(c^{k-1}) = 0. \quad (4.14)$$

对任意 c^i , 亦有

$$\delta_k(c^k) \leq \delta_k(c) = \max_i \left\{ \left[\frac{A_i(c)}{B_i(c)} - \Delta(c^{k-1}) \right] \frac{B_i(c)}{B_i(c^{k-1})} \right\}. \quad (4.15)$$

于(4.15)中取 $c = c^k$, 并利用(4.14), 可得

$$\delta_k(c^k) \geq \frac{\beta}{\alpha} [\Delta(c^k) - \Delta(c^{k-1})]. \quad (4.16)$$

选取 $c \in D$, 使

$$\Delta(c) \leq \Delta(c^{k-1}). \quad (4.17)$$

这样的 c 若不存在, 则 c^{k-1} 已为所求, 从而无须讨论. 由(4.15), 可知,

$$\begin{aligned} \delta_k(c^k) &\leq \frac{\alpha}{\beta} \max_i \left[\frac{A_i(c)}{B_i(c)} - \Delta(c^{k-1}) \right] \\ &= \frac{\alpha}{\beta} [\Delta(c) - \Delta(c^{k-1})], \end{aligned}$$

于是联系(4.16)式可知

$$\Delta(c^k) - \Delta(c^{k-1}) \leq \frac{\alpha^2}{\beta^2} [\Delta(c) - \Delta(c^{k-1})],$$

即

$$\Delta(c^k) \leq \Delta(c^{k-1}) + \frac{\alpha^2}{\beta^2} [\Delta(c) - \Delta(c^{k-1})].$$

根据下确界与下界关系, 有

$$\Delta(c^k) \leq \Delta(c^{k-1}) + \frac{\alpha^2}{\beta^2} [\Delta^* - \Delta(c^{k-1})]. \quad (4.18)$$

由(4.17)及上述不等式可知 $\Delta(c^k) \leq \Delta(c^{k-1})$, 即 $\Delta(c^k)$ 单调下降.

若 $\Delta(c^k)$ 单调下降而趋于 $-\infty$, 则显然 c^k 为极小化序列. 否则 $\Delta(c^k)$ 随 k 无限增大而趋于确定的极限值. 于是只需在(4.18)中令 $k \rightarrow \infty$, 得出

$$\Delta^* - \lim_{k \rightarrow \infty} \Delta(c^{k-1}) \geq 0.$$

但由 $\Delta^* \leq \Delta(c^{k-1})$, 又有

$$\Delta^* \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \Delta(c^{k-1}).$$

从而(4.13)式成立. 定理 14 得证.

Cheney-Loeb 还指出: 对 $c = (c_1, \dots, c_N)$, 设 $\Delta(c) = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x) - P(c, x)/Q(c, x)|$, 其中 $f(x) \in c[a, b]$, 而

$$P(c, x) = \sum_{i=1}^n c_i x^{i-1}, \quad Q(c, x) = \sum_{i=n+1}^N c_i x^{i-n-1}.$$

采用下述方法产生的序列 $\{c^k\}$, 使得 $\Delta(c^k) \downarrow$ 且 $\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta(c^k) = \Delta^*$: 先于单位方体 $|c_i^0| \leq 1$ 上选取 c^0 , 使于 $[a, b]$ 上 $Q(c^0, x) > 0$; 对给定 c^k , 取

$$\delta_k(c) = \max_x \{|f(x)Q(c, x) - P(c, x)| - \Delta(c^k)Q(c, x)\}$$

于单位立方体上的极小值点作为 c^{k+1}, \dots .

特别, 当对 $\Delta(c)$ 的每个极小值点 c^* 而言, $P(c^*, x)$ 与 $Q(c^*, x)$ 均互质, 则 $\lim_{k \rightarrow \infty} c^k = c^*$.

4.3 Maehly 连分式经济化方法

在第二章中, 我们曾介绍过利用最小零偏差多项式来改善幂级数展开的所谓经济化技巧. 对于一个给定函数的收敛连分式展开来讲, 也有类似的经济化方法. 这就是此处的 Maehly 方法.

设函数 $F(x)$ ($-1 \leq x \leq 1$) 在 $[-1, 1]$ 上有较好的收敛连分式展开

$$F(x) = \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2 x}{b_2} + \frac{a_3 x}{b_3} + \dots; \quad (4.19)$$

或者当 $F(x)$ 是偶函数时,

$$F(x) = \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2 x^2}{b_2} + \frac{a_3 x^2}{b_3} + \dots, \quad (4.20)$$

当 $F(x)$ 是奇函数时,

$$F(x) = \frac{a_1 x}{b_1} + \frac{a_2 x^2}{b_2} + \frac{a_3 x^3}{b_3} + \dots \quad (4.21)$$

先假定 $F(x)$ 既非偶函数, 又非奇函数, 则它的连分式展开式为(4.19). 考虑连分式

$$\Gamma_n(x) = \frac{\alpha_1}{b_1} + \frac{\alpha_2 x}{b_2} + \dots + \frac{\alpha_n x}{b_n}, \quad (4.22)$$

其中 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 按下述方法确定. 仍以 $T_n(x)$ 记 Tchebyshev 多项式. 因为 $T_n(x)$ 中 x^n 系数为 2^{n-1} , 所以

$$2^{-n+1} T_n(x) = \tilde{T}_n(x) = x^n + t_{n-1} x^{n-1} + \dots + t_1 x + t_0, \quad (4.23)$$

其中诸 t_i 是确定的常数.

设

$$p_k = \frac{\alpha_{k+1}}{b_k b_{k+1}}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (4.24)$$

则 α_k 由下式确定

$$\alpha_k = \alpha_k [1 + (-1)^{n-k} t_{k-1} \prod_{r=k}^n p_r], \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (4.25)$$

如此确定的截断连分式 $\Gamma_n(x)$ 就是 $F(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上的一个有理逼近. 实际上, $\Gamma_n(x)$ 几乎就是 $F(x)$ 的最佳一致有理逼近. 不难验证, $\Gamma_n(x) - F(x)$ 近似地等于一个很小的常数乘以 $T_n(x)$. 因为 $\Gamma_n(x)$ 是按 $F(x)$ 的连分式展开的第 $n+1$ 阶渐近公式 $C_{n+1}(x)$ 引导出来的, 可以称 $\Gamma_n(x)$ 为 $C_{n+1}(x)$ 的经济化. 通常它比 $F(x)$ 的第 n 阶渐近分式 $C_n(x)$ 的近似程度要好.

当 $F(x)$ 是偶函数或奇函数时, 也有类似的经济化方法.

设 $F(x)$ 为偶函数, 其连分式展开为

$$F(x) = \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2 x^2}{b_2} + \frac{a_3 x^4}{b_3} + \dots$$

考虑连分式

$$\Gamma_n(x) = \frac{\alpha_1}{b_1} + \frac{\alpha_2 x^2}{b_2} + \dots + \frac{\alpha_n x^2}{b_n},$$

其中诸 α_k 按下述方法确定. 设

$$2^{-2n+1}T_{2n}(x) = x^{2n} + t_{2n-2}x^{2n-2} + \cdots + t_0,$$

其中 $T_{2n}(x)$ 为 $2n$ 次 Tchebyshev 多项式. 设 p_k 仍按(4.24)定义,但

$$\alpha_k = a_k \left[1 - |t_{2k-2}| \cdot \prod_{r=k}^n p_r \right], \quad k=1, 2, \dots, n. \quad (4.26)$$

这样, $\Gamma_n(x) - F(x)$ 近似地等于一个很小的常数乘以 $T_{2n}(x)$ ($-1 \leq x \leq 1$).

当 $F(x)$ 为奇函数时, 它的连分式展开为

$$F(x) = \frac{a_1 x}{b_1} + \frac{a_2 x^2}{b_2} + \frac{a_3 x^2}{b_3} + \dots.$$

考虑连分式

$$\Gamma_n(x) = \frac{a_1 x}{b_1} + \frac{a_2 x^2}{b_2} + \dots + \frac{a_n x^2}{b_n},$$

其中诸 a_k 按下述方法确定: 设

$$2^{-2n}T_{2n+1}(x) = x^{2n+1} + t_{2n-1}x^{2n-1} + \cdots + t_1x,$$

其中 $T_{2n+1}(x)$ 为 $2n+1$ 次 Tchebyshev 多项式. p_k 仍按(4.24)定义,但

$$\alpha_k = a_k \left[1 - |t_{2k-1}| \cdot \prod_{r=k}^n p_r \right], \quad k=1, 2, \dots, n. \quad (4.27)$$

类似地, $\Gamma_n(x) - F(x) \approx \epsilon \cdot T_{2n+1}(x)$, $-1 \leq x \leq 1$, 而 ϵ 是一个小常数.

4.4 Remez 算法

Remez 算法是一种寻求函数的近似最佳有理逼近的方法. 由于篇幅所限, 此处仅作一简要介绍.

假定我们要用 $R_{m,n}(x)$ 中的有理分式

$$R_{m,n}^*(x) = \frac{p_0^* + p_1^* x + p_2^* x^2 + \cdots + p_m^* x^m}{q_0^* + q_1^* x + q_2^* x^2 + \cdots + q_n^* x^n} \quad (4.28)$$

来逼近 $F(x) \in C[a, b]$.

假定(4.28)分母中的常数项 $q_0^* = 1$, 这可以采用分子、分母同乘一个非零常数的方法办到.

设 $m+n+2$ 个交错点用 $x_k^*, k=1, 2, \dots, m+n+2$ 来表示:

$$a = x_1^* < x_2^* < \cdots < x_{m+n+1}^* < x_{m+n+2}^* = b,$$

则由 Tchebyshev 最佳逼近定理, 有

$$\frac{p_0^* + p_1^* x_k^* + \cdots + p_m^*(x_k^*)^m}{q_0^* + q_1^* x_k^* + \cdots + q_n^*(x_k^*)^n} - F(x_k^*) = (-1)^k \mu^*, \quad (4.29)$$

此处 $|\mu^*| = \max_{a \leq x \leq b} |R_{m,n}(x) - F(x)|$, 从而

$$\begin{aligned} & p_0^* + p_1^* x_k^* + \cdots + p_m^*(x_k^*)^m + q_1^* x_k^* [-F(x_k^*) - (-1)^k \mu^*] \\ & + q_2^*(x_k^*)^2 [-F(x_k^*) - (-1)^k \mu^*] + \cdots \\ & + q_n^*(x_k^*)^n [-F(x_k^*) - (-1)^k \mu^*] - (-1)^k \mu^* = F(x_k^*), \\ & k = 1, 2, \dots, m+n+2. \end{aligned}$$

如果我们已经知道交错点组 $x_k^*, k = 1, 2, \dots, m+n+2$, 并且可以解出这个非线性方程组, 则 $R_{m,n}(x)$ 的系数即可得到. 因而 $R_{m,n}(x)$ 已求出. Remez 采用以下迭代算法来求 $R_{m,n}(x)$ 的各系数:

(1) 选择初始值 $x_k, k = 1, \dots, m+n+2$, 使得

$$a = x_1 < x_2 < \cdots < x_{m+n+2} = b.$$

(2) 求解如下 $m+n+2$ 个非线性方程组成的方程组

$$\begin{aligned} & p_0 + p_1 x_k + \cdots + p_m x_k^m + q_1 x_k [-F(x_k) - (-1)^k \mu] \\ & + q_2 x_k^2 [-F(x_k) - (-1)^k \mu] + \cdots \\ & + q_n x_k^n [-F(x_k) - (-1)^k \mu] - (-1)^k \mu = F(x_k), \\ & k = 1, 2, \dots, m+n+2 \end{aligned} \quad (4.30)$$

以求出 μ 和下述有理分式中的各系数 p_i, q_j :

$$R_{m,n}(x) = \frac{p_0 + p_1 x + \cdots + p_m x^m}{q_0 + q_1 x + \cdots + q_n x^n}, \quad q_0 = 1;$$

(3) 求出绝对误差函数

$$R_{m,n}(x) - F(x)$$

在 $[a, b]$ 内的极值点. 为简单起见, 假设包括 a, b 在内恰有 $m+n+2$ 个极值点, 它们是 $y_k, k = 1, 2, \dots, m+n+2$:

$$a = y_1 < y_2 < \cdots < y_{m+n+2} = b;$$

(4) 以 y_k 替代 $x_k, k = 1, 2, \dots, m+n+2$, 并重复(2)以及其后步骤;

.....

该方法的目的是使得 $x_k \rightarrow x_k^*$, $p_k \rightarrow p_k^*$, $q_k \rightarrow q_k^*$, 和 $\mu \rightarrow \mu^*$. 通常该过程的收敛性理论是比较复杂的. 但只要 x_k 充分接近 x_k^* , $k = 1, 2, \dots, m+n+2$, 则在适当假定下, 该过程具有 2 次收敛性. 在实际计算时, 一般这种迭代要进行五步或六步.

以上介绍的是 Remez 算法的梗概. 下面考虑一些细节.

初始近似 $\{x_k\}$ 选的不适当, 则该过程可能不收敛. 通常人们选取 Tcheby-shev 多项式的极值点作为初始点:

$$x_k = \frac{1}{2}(b-a) \cos \frac{(m+n+2-k)\pi}{m+n+1} + \frac{1}{2}(b+a), \\ k = 1, 2, \dots, m+n+2. \quad (4.31)$$

注意 $x_1 = a$, $x_{m+n+2} = b$.

因为(4.30)是一个关于多项式的线性方程组, 它可用直接方法来求解. 现在利用迭代方法来解它. 重写(4.30)为

$$p_0 + p_1 x_k + \dots + p_m x_k^m + q_1 x_k [-F(x_k) - (-1)^k \mu'] \\ + q_2 x_k^2 [-F(x_k) - (-1)^k \mu'] + \dots \\ + q_n x_k^n [-F(x_k) - (-1)^k \mu'] + (-1)^k \mu = F(x_k), \\ k = 1, 2, \dots, m+n+2, \quad (4.32)$$

注意其中除一处外, 我们已用 μ' 取代了原来的 μ . 如果把 μ' 作为已知的, 则(4.32)是一个以 $p_0, p_1, \dots, p_m, q_1, \dots, q_n$ 和 μ 为未知数的方程组. 开始迭代时, 令 $\mu' = 0$, 并解(4.32), 以求出这些未知数. 然后用新求得的 μ 代替 μ' (但诸 x_k 保持不变), 再求解(4.32). 重复这种迭代过程, 并且每一步我们都是用新求出的 μ 来代替原有的 μ' , 再求解(4.32). 这样, 作为 Remez 方法的步骤(2)的一部分, 我们执行了一个求解 $m+n+2$ 个线性方程组的内迭代. 通常 $\{p_k\}$, $\{q_k\}$ 和 μ 能很好地收敛到(4.30)的解.

在步骤(3)中, 需要寻求误差函数 $R_{m,n}(x) - F(x)$ 在 $[a, b]$ 内的极值点. $R_{m,n}(x)$ 中的诸系数可从步骤(2)中得到. 为寻求极值点, 没有特殊的方法可采用. 在求得 $R_{m,n}(x) - F(x)$ 的导数后, 可用通常办法来求这些极值点. 在这些计算中的精度不必要求太高, 因为 $R_{m,n}(x)$ 系数对于极值点的微小改变并不敏感.

为了修正上面叙及的 Remez 算法, 来得到 $F(x)$ 的最佳相对误差逼近, 我们需用下式来替代(4.30):

$$p_0 + p_1 x_k + \dots + p_m x_k^m + q_1 x_k F(x_k) [-1 - (-1)^k \mu]$$

$$+ q_2 x_k^2 F(x_k) [-1 - (-1)^k \mu] + \cdots + q_n x_k^n F(x_k) [-1 - (-1)^k \mu] \\ - (-1)^k F(x_k) \mu = F(x_k), \quad k=1, 2, \dots, m+n+2. \quad (4.30)^*$$

并对(4.32)做相应的改变. 同样在步骤(3)中, 我们确定的是相对误差函数 $[R_{m,n}(x) - F(x)]/F(x)$ 的极值点, 而不是绝对误差的极值点. 下面的例子将给出用 Remez 方法计算相对误差逼近的说明.

在实际应用 Remez 算法时, 可能会遇到一些困难. 例如, 当(4.32)中的未知数越来越多时, (4.32)可能会成为病态方程. 但若计算的精度足够高, 这个问题可以避免; 如果(4.28)中用以表达 $R_{m,n}(x)$ 的不可约有理分式很接近可约, 即它的分子、分母有接近相同的因子时, Remez 方法的收敛速度可能较差; 最后一个困难是, 在应用 Remez 方法时, 在步骤(2)中可能得到一个并不是人们所需要的解. 例如一个解使得 $R_{m,n}(x)$ 的分母在 $[a, b]$ 内有零点, 从而这样得到的 $R_{m,n}(x)$ 不属于有理函数类 $R_{m,n}$.

例 3 在 $R_{1,1}$ 类中, 寻求一有理分式 $R_{1,1}^*(x)$, 使得它在区间 $[1/16, 1]$ 上与函数 \sqrt{x} 的相对误差的最大值为最小. 即 $R_{1,1}^*(x) \in R_{1,1}$ 是 \sqrt{x} 的最佳有理(相对)逼近.

解 $R_{1,1}^*(x)$ 具有形式

$$R_{1,1}^*(x) = \frac{p_0^* + p_1^* x}{1 + q_1^* x}.$$

用 Remez 方法计算 p_0^* , p_1^* 和 q_1^* :

(1) 取

$$x_1 = 1/16, \quad x_4 = 1,$$

并且 x_1 和 x_4 自始至终保持这些值. 为了估算另外两个极值点 x_2 和 x_3 , 任意取两个初始值

$$x_2 = 0.4, \quad x_3 = 0.7.$$

(2) 线性方程组(4.30)* 成为

$$\begin{cases} p_0 + p_1 x_1 + q_1 x_1 \sqrt{x_1} (-1 + \mu) + \mu \sqrt{x_1} = \sqrt{x_1}, \\ p_0 + p_1 x_2 + q_1 x_2 \sqrt{x_2} (-1 - \mu) - \mu \sqrt{x_2} = \sqrt{x_2}, \\ p_0 + p_1 x_3 + q_1 x_3 \sqrt{x_3} (-1 + \mu) + \mu \sqrt{x_3} = \sqrt{x_3}, \\ p_0 + p_1 x_4 + q_1 x_4 \sqrt{x_4} (-1 - \mu) - \mu \sqrt{x_4} = \sqrt{x_4}. \end{cases}$$

利用前面讲述的 Remez 方法,从中解出 p_0, p_1, q_1 和 μ .

(3) 找出相对误差函数

$$\frac{R_{1,1}(x) - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

在 $[1/16, 1]$ 区间中的极值点,其中 $R_{1,1}(x)$ 的系数是按步骤(2)已求得的. 求这个相对误差函数的导数,并令该导数为 0. 经整理,得到

$$p_1 q_1 x^2 + (3p_0 q_1 - p_1)x + p_0 = 0.$$

上述方程的较小根成为 y_2 , 较大根是 y_3 . 其他两个极值点,恒为

$$y_1 = 1/16, \quad y_4 = 1.$$

以下表格中给出了用 Remez 方法迭代了四次的结果.

迭代 i 步后	x_2	x_3	p_0	p_1	q_1	μ
0	0.400 000	0.700 000	—	—	—	—
1	0.141 723	0.656 591	0.155 548	1.774 123	0.942 204	0.006 453
2	0.122 816	0.487 372	0.146 615	2.026 298	1.208 816	0.016 255
3	0.127 369	0.491 034	0.148 607	1.999 239	1.188 498	0.018 576
4	0.127 347	0.490 783	0.148 596	1.999 654	1.188 972	0.018 603

所以

$$R_{1,1}^*(x) \approx \frac{0.148 596 + 1.999 654x}{1 + 1.188 972x}.$$

§ 5 Prony 指数型函数逼近方法

Prony 方法是一类为了获得指数型非线性逼近的重要算法. 其目的是构造指数型函数

$$f_\alpha(t) = \sum_{j=1}^n A_j \cdot e^{s_j t}, \quad (5.1)$$

使得

$$f_a(iT) = f_i, \quad i = 0, 1, \dots, 2n - 1, \quad (5.2)$$

其中 T 为步长, $\{f_i\}$ 为给定的型值, 而 $\{A_j\}$ 和 $\{s_j\}$ 为待求的 $2n$ 个参数.

引入新的变量

$$z_j = e^{s_j T} \quad (j = 1, \dots, n).$$

并按下式定义变量 α_i :

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i z^i = (z - z_1) \cdots (z - z_n) \quad (\alpha_n = 1). \quad (5.3)$$

于是(5.1),(5.2)等价于

$$f_i = \sum_{j=1}^n A_j z_j^i \quad (i = 0, 1, \dots, 2n - 1). \quad (5.4)$$

由(5.3)和(5.4)可得方程组

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n f_{k+i} \alpha_i &= \sum_{i=0}^n \left[\sum_{j=1}^n A_j z_j^{k+i} \right] \alpha_i \\ &= \sum_{j=1}^n A_j z_j^k \left[\sum_{i=0}^n \alpha_i z_j^i \right] = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, n - 1). \end{aligned}$$

因为 $\alpha_n = 1$, 于是上述方程组可写为

$$\sum_{i=0}^{n-1} f_{k+i} \alpha_i = -f_{k+n} \quad (k = 0, 1, \dots, n - 1). \quad (5.5)$$

从中解出 $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ ($\alpha_n = 1$ 为已知). 然而依据(5.3)式, 求解高次代数方程

$$z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \cdots + \alpha_1 z + \alpha_0 = 0, \quad (5.6)$$

得到 n 个根 z_1, z_2, \dots, z_n . 最后按公式

$$s_j = \frac{1}{T} \ln z_j \quad (j = 1, \dots, n) \quad (5.7)$$

即可定出(5.1)中的指数 s_j 来. 再由(5.4)中前 n 个方程组成的方程组解出(5.1)中的各个系数 A_1, \dots, A_n .

以上就是 Prony 方法的概貌. 下面来讨论 Prony 方法与 Z 变换的关系.

所谓一个函数 $f(t)$ 的 Z 变换, 乃是

$$F(z) = f_0 + f_1 z^{-1} + \cdots + f_{2n-1} z^{-(2n-1)} + \cdots, \quad (5.8)$$

其中 $f_i = f(iT)$ ($i = 0, 1, \dots$). 按定义, 显然 e^{st} 的 Z 变换为

$$\mathcal{Z}\{e^{st}\} = \frac{z}{z - e^{sjT}} = \frac{z}{z - z_j}.$$

于是不难看出由(5.1)所给出的 $f_a(t)$ 的 Z 变换应具有形式

$$F_a^s(z) = \frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0}. \quad (5.9)$$

我们希望 $F_a^s(z)$ 恰为 $F^s(z)$ 的 Padé 逼近, 即使

$$\begin{aligned} a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z &= (z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0) \cdot \\ &(f_0 + f_1 z^{-1} + \dots + f_{2n-1} z^{-(2n-1)} + \dots). \end{aligned}$$

令两边从 z^n 至 $z^{-(n-1)}$ 的系数分别相等. 这样得到由 $2n$ 个方程组成的方程组

$$\left\{ \begin{array}{l} f_0 = a_n, \\ f_0 a_{n-1} + f_1 = a_{n-1}, \\ \dots \dots \dots \\ f_0 a_1 + f_1 a_2 + \dots + f_{n-2} a_{n-1} + f_{n-1} = a_1, \end{array} \right. \quad (5.10)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f_0 a_0 + f_1 a_1 + \dots + f_{n-1} a_{n-1} + f_n = 0, \\ f_1 a_0 + f_2 a_1 + \dots + f_n a_{n-1} + f_{n+1} = 0, \\ \dots \dots \dots \\ f_{n-1} a_0 + f_n a_1 + \dots + f_{2n-2} a_{n-1} + f_{2n-1} = 0. \end{array} \right. \quad (5.11)$$

不难发现, (5.11)与(5.5)是完全一样的. 所以在 Padé 逼近(5.9)中的 $\{\alpha_i\}$ 和由此确定的 $\{z_j\}$, $\{s_j\}$ 等恰为 Prony 方法中的那些同名参数.

再注意到

$$\mathcal{Z}\left\{ \sum_{j=1}^n A_j e^{sjt} \right\} = \sum_{j=1}^n \frac{A_j z}{z - z_j}.$$

因此在求出(5.11)中的各个 α_j 以后, 先按(5.10)求出各 a_j , 然后形成(5.9)中的有理函数 $F_a^s(z)$. 最后依据恒等式

$$\frac{1}{z} F_a^s(z) = \sum_{j=1}^n \frac{A_j}{z - z_j},$$

即可定出各个系数 A_1, A_2, \dots, A_n 来.

以上分析表明, Prony 方法从实质上讲, 是与某相应的 z 变换的 Padé 逼近相通的.

例 设 $f(t)$ 是单位方形脉冲

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{当 } 0 \leq t < 1, \\ \frac{1}{2}, & \text{当 } t = 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

取 $n=3, T=1/3$, 型值则为

$$f_0=1, f_1=1, f_2=1, f_3=1/2, f_4=0, f_5=0,$$

于是

$$\begin{aligned} F_a(z) &= \frac{a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z}{z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0} \\ &= 1 + z^{-1} + z^{-2} + \frac{1}{2} z^{-3} + f_6 z^{-6} + \dots \end{aligned}$$

与(5.11)相应的线性方程组为

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = -1/2, \\ a_0 + a_1 + \frac{1}{2} a_2 = 0, \\ a_0 + \frac{1}{2} a_1 = 0. \end{cases}$$

其解是 $a_0 = -1/2, a_1 = 1, a_2 = -1$. 于是 $F_a(z)$ 的分母为

$$z^3 - z^2 + z - \frac{1}{2}.$$

它的零点是

$$z_1 = 0.647\ 80, z_{2,3} = 0.176\ 10 \pm 0.860\ 72i.$$

$f_a(t)$ 的指数则为

$$s_1 = -1.302\ 54, s_{2,3} = -0.388\ 47 \pm 4.106\ 97i.$$

又由(5.10)得出

$$a_3 = 1, a_2 = 0, a_1 = 1.$$

这样一来, 应有

$$\frac{1}{z} F_a(z) = \frac{z^2 + 1}{(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)}.$$

将其展成部分分式, 求出

$$A_1 = 1.473\ 67,$$

$$A_{2,3} = -0.236\ 83 \mp 0.074\ 80i.$$

因此

$$\begin{aligned} f_a(t) &= 1.473\ 67 \cdot e^{-1.302\ 54t} \\ &\quad + 2\operatorname{Re}[(-0.236\ 83 - 0.074\ 80i)e^{(-0.388\ 47 + 4.106\ 97i)t}] \\ &= 1.473\ 67e^{-1.302\ 54t} \\ &\quad - 0.496\ 74e^{-0.388\ 47t} \cdot \cos(4.106\ 97t + 0.305\ 92). \end{aligned}$$

其逼近情况如图 5.1 所示.

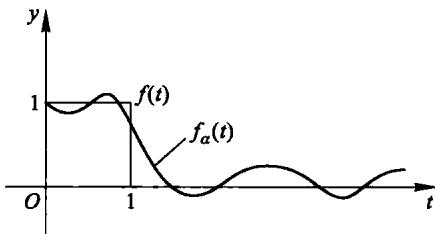


图 5.1

第六章习题

1. 设 $E(f) = \{t | f(t) \neq 0\}$, 而 X, Y 分别是连续函数空间 $C[a, b]$ 中的 m, n 维线性子空间. $x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)$ 和 $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ 分别是 X 和 Y 的两组基底. R_w 是满足下列两条条件的有理函数

$$x(t)/y(t) = \left(\sum_1^m a_i x_i(t) \right) / \left(\sum_1^n b_j y_j(t) \right)$$

所构成的类:

- (i) $E(y)$ 在 $[a, b]$ 中稠密;
- (ii) $f(t) = x(t)/y(t)$ 在 $E(y)$ 上一致连续.

若假定由 $y \in Y, y \not\equiv 0$ 即可推知 $E(y)$ 在 $[a, b]$ 中稠密. 试证类 R_w 是 $C[a, b]$ 中的一个封闭子集.

2. 设 $f(t) = x(t)/y(t)$ 满足上题中的条件 (i), 且它在 $E(y)$ 上有界, 则称 $f(t)$ 属于类 R_f . 对任意 $g(t) \in C[a, b]$, 记

$$\rho(g) = \inf_{f \in R_w} \max_{a \leq t \leq b} |g(t) - f(t)|.$$

试在由 $y \in Y, y \not\equiv 0$ 即可推知 $E(y)$ 于 $[a, b]$ 中稠密的假定下, 证明对任给 $g(t) \in C[a, b]$,

存在 $f(t) = x(t)/y(t) \in R_f$, 使得

$$|g(t) - f(t)| \leq \rho(g), \quad t \in E(y).$$

3. 设 $m(x) - n(x)y \equiv 0$, $m(x), n(x)$ 为多项式, 又设 $M(x)/N(x)$ 是由 $m(x)/n(x)$ 约去一切公因子后所得到的有理函数. 试证若

$$M(x_{j_r})/N(x_{j_r}) \neq y_{j_r}$$

对某 $r, 1 \leq r \leq n+1$ 成立, 则 $(x - x_{j_r})$ 是 $n(x)$ 的因子.

4. 试用辗转相除法把下述有理分式化为有限连分式:

$$\frac{2x^4 + 45x^3 + 381x^2 + 1353x + 1511}{x^3 + 21x^2 + 157x + 409}.$$

5. 设 $R_0(x)/R_1(x)$ 是不可约有理分式, 且设 $Q_k(x), R_k(x)$ 是由下述带余除法所确定:

$$\begin{cases} R_{k-1}(x) = R_k(x)Q_k(x) + R_{k+1}(x), \\ R_{k+1}(x) \text{ 次数} < R_k(x) \text{ 次数} \\ (k=1, 2, \dots), \end{cases}$$

则必有某正整数 n 存在, 使 $R_{n+1}(x) = 0$. 试指出

$$\frac{R_0(x)}{R_1(x)} = Q_1(x) + \frac{1}{Q_2(x)} + \frac{1}{Q_3(x)} + \dots + \frac{1}{Q_n(x)}.$$

6. 试求 $\cos x$ 的 [6/6] 级 Padé 逼近, 并将它表成下述形式:

$$\frac{p_0 + p_2 x^2 + p_4 x^4 + p_6 x^6}{1 + q_2 x^2 + q_4 x^4 + q_6 x^6}.$$

估计它与 $\cos x$ 在区间 $[-1, 1]$ 上的相对误差的上界.

7. 试用待定系数法确定下述连分式

$$R(x) = a_0 + \frac{x - x_1}{a_1} + \frac{x - x_2}{a_2} + \dots + \frac{x - x_n}{a_n} + \dots,$$

使其满足插值条件

$$R(x_j) = f(x_j) \quad (j=1, 2, \dots)$$

(Thiele 连分式插值).

8. 已知下述列表函数

x_i	0	1	2	3	4	5
$f(x_i)$	0.05	3.1	3.15	0.25	0.35	-0.05

试按 Prony 方法求 $f(x)$ 的指型逼近式.

第七章 样条逼近方法

借助于多项式来逼近，虽然有许多优点，但由于多项式乃幂级数的特例，其在一点附近的性质足以决定它的整体性质。然而自然界的许多现象，如物理或生物现象间的关系往往呈现互不关联、互相割裂的本性，亦即在不同区域内，它们的性状可以不完全相关。另一方面，从数学上讲，例如在多项式插值理论中，具有 n 个插值结点的一元插值多项式是一个 $n - 1$ 次的多项式，它可能有 $n - 3$ 个拐点。这对于比较平滑的函数来说就不那么理想了。

本章介绍的样条（函数）是一种分段多项式，各相邻段上的多项式之间又具有某种连接性质。因而它既保持了多项式的简单性和逼近的可行性，又在各段之间保持了相对独立的局部性质。数十年来的理论和实践表明，样条是一类特别有效的逼近工具。

§ 1 样条函数及其基本性质

设给定一组结点

$$-\infty = x_0 < x_1 < \cdots < x_N < x_{N+1} = +\infty \quad (1.1)$$

又设分段函数 $S(x)$ 满足条件：

1° 在每个区间 $[x_j, x_{j+1}]$ ($j = 0, \dots, N$) 上， $S(x)$ 是一个次数不超过 n 的实系数代数多项式；

2° $S(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上具有一直到 $n - 1$ 阶的连续导数，

则称 $y = S(x)$ 为 n 次样条函数。常把以(1.1)为结点的 n 次样条函数的总体记为 $S_n(x_1, x_2, \dots, x_N)$ 。 x_1, \dots, x_N 称为样条结点。

一个 $2n - 1$ 次样条函数 $y = S(x)$ ，如果其在区间 $(-\infty, x_1]$ 与 $[x_N, +\infty)$ 上的表达式都是 $n - 1$ 次多项式（此处不要求该两个 $n - 1$ 次多项式相同），则特别称之为 $2n - 1$ 次的自然样条函数。以(1.1)为结点的 $2n - 1$ 次自然样条函数的总体记为 $N_{2n-1}(x_1, x_2, \dots, x_N)$ 。显然

$$N_{2n-1}(x_1, x_2, \dots, x_N) \subset S_{2n-1}(x_1, x_2, \dots, x_N). \quad (1.2)$$

下面将给出样条函数类 $S_n(x_1, x_2, \dots, x_N)$ 中任一样条函数的一般表达式.

根据定义,任意给定的以(1.1)为结点的 n 次样条函数 $S(x) \in S_n(x_1, x_2, \dots, x_N)$,其在每个子区间 $[x_j, x_{j+1}]$ ($j = 0, \dots, N$) 上均为一个次数不超过 n 的多项式.特别地,它在子区间 $(-\infty, x_1]$ 内是一个次数不超过 n 的多项式.不妨设该多项式为 $p_n(x) \in P_n$.

今考虑 $S(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 上的表达式.由定义, $S(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 上的表达式仍为一个次数不超过 n 的多项式(以下简称为 n 次多项式).若设该 n 次多项式为 $q_n(x)$,并考虑下述 n 次多项式

$$\eta(x) = q_n(x) - p_n(x)$$

的性质.按 n 次样条函数的定义, $p_n(x)$ 与 $q_n(x)$ 在点 $x = x_1$ 处的值以及 1 阶、2 阶、一直到 $n-1$ 阶导数值皆相等:

$$p_n^{(i)}(x_1) = q_n^{(i)}(x_1) \quad (i = 0, \dots, n-1),$$

亦即

$$\eta^{(i)}(x_1) = 0 \quad (i = 0, \dots, n-1).$$

是故 $x = x_1$ 是 $\eta(x)$ 的 n 重根,即 $\eta(x)$ 含 $(x - x_1)^n$ 这个因子.由于 $\eta(x)$ 是一个 n 次多项式,所以存在某常数 c_1 ,使得

$$\eta(x) = c_1(x - x_1)^n, \tag{1.3}$$

亦即

$$q_n(x) = p_n(x) + c_1(x - x_1)^n. \tag{1.4}$$

它说明 $S(x)$ 在区间 $[x_1, x_2]$ 上的表达式恰为其前一区间 $(-\infty, x_1]$ 上的表达式加上 $(x - x_1)^n$ 的某一常数倍.这样一来, $S(x)$ 于 $(-\infty, x_2]$ 上的统一表达式应为

$$S(x) = \begin{cases} p_n(x), & -\infty < x \leq x_1, \\ p_n(x) + c_1(x - x_1)^n, & x_1 \leq x \leq x_2. \end{cases} \tag{1.5}$$

为把(1.5)写成一个统一的表达式,引入记号

$$x_+ = \max\{0, x\} = \begin{cases} x, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} \tag{1.6}$$

$$x_+^m = (x_+)^m,$$

则(1.5)所示的 $S(x)$ 又可紧凑地表示为

$$S(x) = p_n(x) + c_1(x - x_1)_+^n \quad (-\infty < x \leq x_2).$$

继续采用这种分析方法, 可得 $S(x)$ 于整个实轴上的表达式为

$$S(x) = p_n(x) + \sum_{j=1}^N c_j(x - x_j)_+^n \quad (-\infty < x < +\infty). \quad (1.7)$$

此即为下述定理所叙述的事实.

定理 1 任一 $S(x) \in S_n(x_1, x_2, \dots, x_N)$ 均可唯一地表现为

$$S(x) = p_n(x) + \sum_{j=1}^N c_j(x - x_j)_+^n \quad (-\infty < x < +\infty), \quad (1.8)$$

其中 $p_n(x) \in P_n$, $c_j (j = 1, \dots, N)$ 为实数.

显然, 由(1.8)式所给出的任一函数 $S(x)$ 必然满足 n 次样条函数的定义, 亦即 $S(x) \in S_n(x_1, x_2, \dots, x_N)$. 因而定理 1 可进一步写成

定理 2 为使 $S(x) \in S_n(x_1, x_2, \dots, x_N)$, 必须且只需存在 $p_n(x) \in P_n$ 和 N 个实数 c_1, c_2, \dots, c_N , 使得(1.8)式成立:

$$S(x) = p_n(x) + \sum_{j=1}^N c_j(x - x_j)_+^n \quad (-\infty < x < +\infty).$$

定理 1 和定理 2 说明函数系

$$1, x, x^2, \dots, x^n, (x - x_1)_+^n, \dots, (x - x_N)_+^n \quad (1.9)$$

构成 n 次样条函数类 $S_n(x_1, x_2, \dots, x_N)$ 的一组基底.

由(1.2)和定理 2 可知, 任一 $S(x) \in N_{2n-1}(x_1, x_2, \dots, x_N)$ 均可表为

$$S(x) = p_{n-1}(x) + \sum_{j=1}^N c_j(x - x_j)_+^{2n-1} \quad (-\infty < x < +\infty), \quad (1.10)$$

其中 $p_{n-1}(x) \in P_{n-1}$.

当然, 一函数 $S(x)$ 只是满足(1.10)还不足以保证它一定是一个自然样条函数. 因为它在 $[x_N, +\infty)$ 上是否仍为一个 $n-1$ 次的多项式尚不能保证, 为保证这点, 便必须要求 $S(x)$ 于 $[x_N, +\infty)$ 中的表达式

$$p_{n-1}(x) + \sum_{j=1}^N c_j(x - x_j)_+^{2n-1}$$

亦为一个 $n-1$ 次多项式, 即要求上述求和号这一项中 n 次以上的各方幂项之系数均为 0. 但

$$\sum_{j=1}^N c_j(x - x_j)_+^{2n-1} = \sum_{j=1}^N c_j \sum_{i=0}^{2n-1} \binom{2n-1}{i} x^i (-x_j)^{2n-1-i}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i=0}^{2n-1} \binom{2n-1}{i} x^i \sum_{j=1}^N c_j (-x_j)^{2n-1-i} \\
 &= \sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^{i-1} \binom{2n-1}{i} x^i \sum_{j=1}^N c_j x_j^{2n-1-i}.
 \end{aligned}$$

为保证上式中 x^n, \dots, x^{2n-1} 的系数均为 0, 即得

$$\sum_{j=1}^N c_j x_j^k = 0 \quad (k=0, 1, \dots, n-1). \quad (1.11)$$

这样我们就证明了如下定理:

定理 3 为使 $S(x) \in N_{2n-1}(x_1, x_2, \dots, x_N)$, 必须且只需存在 $p_{n-1}(x) \in P_{n-1}$ 和满足线性约束(1.11)的实数 c_1, c_2, \dots, c_N , 使得

$$S(x) = p_{n-1}(x) + \sum_{j=1}^N c_j (x - x_j)_+^{2n-1} \quad (-\infty < x < +\infty). \quad (1.12)$$

下面讨论样条函数的积分关系式.

定理 4 设 $S(x)$ 由(1.8)所给出, 其中 $n = 2k-1$, 且

$$a < x_1 < x_2 < \dots < x_N < b. \quad (1.13)$$

又设 $f(x)$ 满足下述三性质:

- 1° $f(x) \in C^{k-1}[a, b]$ 且 $f^{(k)}(x)$ 在每个开区间 (x_i, x_{i+1}) ($i = 0, \dots, N$) ($x_0 = a, x_{N+1} = b$) 内连续;
- 2° $f^{(k-r-1)}(x) S^{(k+r)}(x) = 0$ ($r = 0, 1, \dots, k-2; x = a, b$);
- 3° $f(a) S^{(2k-1)}(a+0) = f(b) S^{(2k-1)}(b-0) = 0$,

则

$$\int_a^b f^{(k)}(x) S^{(k)}(x) dx = (-1)^k (2k-1)! \sum_{i=1}^N c_i f(x_i). \quad (1.14)$$

证明 逐次采用分部积分法, 有

$$\begin{aligned}
 &\int_a^b f^{(k)}(x) S^{(k)}(x) dx \\
 &= \sum_{r=0}^{k-2} (-1)^r [f^{(k-r-1)}(b) S^{(k+r)}(b) - f^{(k-r-1)}(a) S^{(k+r)}(a)] \\
 &\quad + (-1)^{k-1} \int_a^b f'(x) S^{(2k-1)}(x) dx.
 \end{aligned} \quad (1.15)$$

按条件 2°, 上式右端的求和项等于 0. 因为 $S^{(2k-1)}(x)$ 是一个阶梯函数, 所以(1.15)右端积分可表为下面积分的和:

$$\eta_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} f'(x) dx = \eta_i [f(x_{i+1}) - f(x_i)], \quad (1.16)$$

其中 η_i 是 $S^{(2k-1)}(x)$ 在 (x_i, x_{i+1}) 中的值(为常数). 将(1.16)右端部分对 i 求和并重新整理各项, 得到

$$\sum_{i=1}^N f(x_i) [S^{(2k-1)}(x_i - 0) - S^{(2k-1)}(x_i + 0)] + \\ f(b) S^{(2k-1)}(b - 0) - f(a) S^{(2k-1)}(a + 0). \quad (1.17)$$

按条件 3°, 上式后两项为 0. 又由(1.8)逐项微分可知

$$S^{(2k-1)}(x_i + 0) - S^{(2k-1)}(x_i - 0) = (2k-1)! c_i \quad (1.18) \\ (i = 1, 2, \dots, N).$$

综合(1.15)~(1.18), 即得

$$\int_a^b f^{(k)}(x) S^{(k)}(x) dx = (-1)^{k-1} \int_a^b f'(x) S^{(2k-1)}(x) dx \\ = \sum_{i=1}^N f(x_i) [S^{(2k-1)}(x_i - 0) - S^{(2k-1)}(x_i + 0)] \\ = (-1)^k (2k-1)! \sum_{i=1}^N c_i f(x_i).$$

定理证毕.

推论 1 若在定理 4 的条件外, 再设 $f(x)$ 在 x_1, \dots, x_N 处皆为 0, 则

$$\int_a^b f^{(k)}(x) S^{(k)}(x) dx = 0.$$

推论 2 设样条结点由(1.13)给出, $S(x)$ 为由(1.10)给出的自然样条函数($n > 1$), 且设 $f(x) \in C^{n-1}[a, b]$, $f^{(n)}(x)$ 在每个区间 (x_i, x_{i+1}) 内连续($i = 0, \dots, N$) ($x_0 = a, x_{N+1} = b$), 则

$$\int_a^b f^{(n)}(x) S^{(n)}(x) dx = (-1)^n (2n-1)! \sum_{i=1}^N c_i f(x_i).$$

若还有 $f(x_i) = 0$ ($i = 1, \dots, N$), 则

$$\int_a^b f^{(n)}(x) S^{(n)}(x) dx = 0.$$

证明 因为 $S(x) \in N_{2n-1}(x_1, x_2, \dots, x_N)$, 从而 $S^{(n)}(x) \in S_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_N)$ 且

$$S^{(n)}(x) = 0, \quad x \leq x_1 \text{ 和 } x \geq x_N.$$

由定理 4 和推论 1 即可知推论 2 成立.

对于自然样条函数插值的存在、唯一性, 有下面的定理:

定理 5 设 $1 \leq n \leq N$, 则对任意给定的 y_1, y_2, \dots, y_N , 存在唯一的自然样条函数 $S(x) \in N_{2n-1}(x_1, x_2, \dots, x_N)$, 使得

$$S(x_j) = y_j \quad (j = 1, \dots, N). \quad (1.19)$$

证明 由定理 3, 为证本定理, 只需证明线性方程组

$$\begin{aligned} p_{n-1}(x_j) + \sum_{i=1}^N c_i (x_j - x_i)^{2n-1} &= y_j \quad (j = 1, \dots, N), \\ \sum_{i=1}^N c_i x_i^k &= 0 \quad (k = 0, \dots, n-1) \end{aligned} \quad (1.20)$$

对任意给定的 y_1, \dots, y_N 皆有唯一解. 由线性代数理论, 只需证明与(1.20)相应的齐次方程只有零解. 设

$$S_0(x) \in N_{2n-1}(x_1, \dots, x_N)$$

且满足

$$S_0(x_j) = 0 \quad (j = 1, \dots, N), \quad (1.21)$$

即设 $S_0(x)$ 相应表达式(见(1.12))系数满足与(1.20)相对应的齐次方程. 考虑

$$\sigma(S_0) = \int_a^b [S_0^{(n)}(x)]^2 dx,$$

其中 $[a, b]$ 满足(1.13)式. 于推论 2 中, 取 $f(x) = S(x) = S_0(x)$, 并利用(1.21)可知

$$\sigma(S_0) = \int_a^b [S_0^{(n)}(x)]^2 dx = 0,$$

于是

$$S_0^{(n)}(x) \equiv 0 \quad (a \leq x \leq b).$$

由此可知 $S_0(x)$ 是一个次数不超过 $n-1$ 的多项式.

又由(1.21), $S_0(x)$ 竟然在 $N(\geq n)$ 个互异点处为 0, 是故

$$S_0(x) \equiv 0.$$

定理证毕.

定理 5 从理论上指明了自然样条函数插值的存在唯一性. 这不仅有重大的理论意义, 而且在实际计算中有一定的指导意义.

下面介绍自然样条函数插值的所谓最光滑性质, 它是首先由 J.C.Holladay 于 1957 年给出的.

定理 6 设 $1 \leq n \leq N$, 且

$$a \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_N \leq b.$$

又设 $S(x) \in N_{2n-1}(x_1, x_2, \dots, x_N)$ 是满足插值条件

$$S(x_j) = y_j \quad (j = 1, \dots, N) \quad (1.22)$$

的自然样条函数, 则对任何满足(1.22)的函数 $f(x) \in C^n[a, b]$:

$$f(x_j) = y_j \quad (j = 1, \dots, N)$$

必有

$$\int_a^b [S^{(n)}(x)]^2 dx \leq \int_a^b [f^{(n)}(x)]^2 dx. \quad (1.23)$$

且等号仅当 $f(x) \equiv S(x)$ 时才成立.

证明 根据自然样条函数的定义,

$$S^{(n)}(x) = 0, \quad x \leq x_1 \text{ 或 } x \geq x_N.$$

为证(1.23), 只需证明

$$\int_{x_1}^{x_N} [S^{(n)}(x)]^2 dx \leq \int_{x_1}^{x_N} [f^{(n)}(x)]^2 dx.$$

显然

$$\begin{aligned} & \int_{x_1}^{x_N} [f^{(n)}(x)]^2 dx \\ &= \int_{x_1}^{x_N} [S^{(n)}(x)]^2 dx + \int_{x_1}^{x_N} [f^{(n)}(x) - S^{(n)}(x)]^2 dx \\ & \quad + 2 \int_{x_1}^{x_N} S^{(n)}(x) [f^{(n)}(x) - S^{(n)}(x)] dx. \end{aligned}$$

对上述右端第三个积分作分部积分, 得

$$2(-1)^{n-1} \sum_{j=1}^{N-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} S^{(2n-1)}(x) [f'(x) - S'(x)] dx.$$

按自然样条函数的定义, $S^{(2n-1)}(x)$ 在每个子区间 (x_j, x_{j+1}) 内为常数, 而按插值

条件; $f(x) - S(x)$ 又在该区间的两端 x_j 与 x_{j+1} 处为 0. 所以上述积分为 0, 即

$$\int_{x_1}^{x_N} [f^{(n)}(x)]^2 dx = \int_{x_1}^{x_N} [S^{(n)}(x)]^2 dx + \int_{x_1}^{x_N} [f^{(n)}(x) - S^{(n)}(x)]^2 dx. \quad (1.24)$$

从而不等式(1.23)成立.

最后, 若设(1.23)中的等号成立, 则由(1.24)可知

$$f^{(n)}(x) - S^{(n)}(x) \equiv 0 \quad (x_1 \leq x \leq x_N).$$

从而 $f(x) - S(x) \in P_{n-1}$ 为一个 $n-1$ 次多项式. 又由 $f(x)$ 及 $S(x)$ 所满足的插值条件, 这个 $n-1$ 次多项式在 $N (\geq n)$ 个互异点处为 0, 于是其必恒为 0, 即 $f(x) \equiv S(x)$. 定理 6 证毕.

若于定理 6 中取 $n=2$, 则(1.23)成为

$$\int_a^b [S''(x)]^2 dx \leq \int_a^b [f''(x)]^2 dx. \quad (1.25)$$

我们知道, 一个函数当其一阶导数较小时, 其二阶导数与其曲率值是很接近的:

$$y'' \approx \kappa = y''/(1+y'^2)^{3/2}.$$

而曲率小, 在几何上理解为“平滑”当然是很自然的. 因此常称自然样条函数插值是最光滑曲线插值.

下面给出在理论和应用中都十分有用的 Peano 定理.

设 L 表示对任意 $f(x) \in C^n[a, b]$ 定义的线性算子

$$L(f) = \sum_{r=0}^n \int_a^b f^{(r)}(x) d\mu_r(x), \quad (1.26)$$

其中 $\mu_r(x)$ 是有界变差函数.

定理 7(Peano) 设对一切 n 次多项式 $p(x) \in P_n$, 均有 $L(p)=0$, 则对所有 $f(x) \in C^{n+1}[a, b]$, $L(f)$ 恒可表示为

$$L(f) = \int_a^b f^{(n+1)}(t) K(t) dt, \quad (1.27)$$

其中

$$K(t) = \frac{1}{n!} L_x[(x-t)_+^n],$$

$L_x[(x-t)_+^n]$ 表示视其中 $(x-t)_+^n$ 为 x 的函数而被 L 作用后得到的结果.

证明 按带余项的 Taylor 公式

$$f(x) = \sum_{r=0}^n \frac{f^{(r)}(a)(x-a)^r}{r!} + \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt, \quad (1.28)$$

因为

$$\frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt = \frac{1}{n!} \int_a^b f^{(n+1)}(t)(x-t)_+^n dt.$$

又根据 $L(p)=0, p \in P_n$, 若以 L 作用于(1.28)的等式两边, 可得到

$$L(f) = \frac{1}{n!} L \int_a^b f^{(n+1)}(t)(x-t)_+^n dt.$$

按定理假设条件, 上述积分可以换序而成为

$$L(f) = \frac{1}{n!} \int_a^b f^{(n+1)}(t) L_x[(x-t)_+^n] dt.$$

定理证毕.

函数 $K(t) = \frac{1}{n!} L_x[(x-t)_+^n]$ 称为泛函 L 的 Peano 核.

推论 3 除定理 7 的假设外, 若核 $K(t)$ 在 $[a, b]$ 不变号, 则对一切 $f(x) \in C^{n+1}[a, b]$, 均有

$$L(f) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} L(x^{n+1}) \quad (a \leq \xi \leq b). \quad (1.29)$$

事实上, 对(1.27)右端应用第一积分中值定理, 则有

$$L(f) = f^{(n+1)}(\xi) \int_a^b K(t) dt \quad (a \leq \xi \leq b). \quad (1.30)$$

特别地, 若在上式中取 $f(x) = x^{n+1}$, 可知

$$L(x^{n+1}) = (n+1)! \int_a^b K(t) dt.$$

将之代入(1.30)即得(1.29).

下面讨论样条函数的插值问题: 给定点列

$$\xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_{N+n+1}, \quad (1.31)$$

试问对于任意给定的一组实数 $y_1, y_2, \dots, y_{N+n+1}$, 是否存在唯一的一个 n 次样条函数 $S(x) \in S_n(x_1, x_2, \dots, x_N)$, 使得

$$S(\xi_j) = y_j \quad (j=1, 2, \dots, N+n+1) ? \quad (1.32)$$

定理 8 对于 $k > 0$, 行列式

$$\left| (\xi_i - x_j)_+^k \right| = \begin{vmatrix} (\xi_1 - x_1)_+^k & (\xi_1 - x_2)_+^k & \cdots & (\xi_1 - x_m)_+^k \\ (\xi_2 - x_1)_+^k & (\xi_2 - x_2)_+^k & \cdots & (\xi_2 - x_m)_+^k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\xi_m - x_1)_+^k & (\xi_m - x_2)_+^k & \cdots & (\xi_m - x_m)_+^k \end{vmatrix} > 0, \quad (1.33)$$

必须且只需下述不等式均满足:

$$\xi_{i-k-1} < x_i < \xi_i \quad (i=1, 2, \dots, N). \quad (1.34)$$

证明 对 k 进行归纳. 当 $k=1$ 时, 按截断多项式的定义和行列式的运算规律即可知(1.33)与(1.34)的等价性.

今假定定理 8 对行列式 $\left| (\xi_i - x_j)_+^{k-1} \right|$ 已经建立, 而来证明对 $\left| (\xi_i - x_j)_+^k \right|$ 也成立. 这需用到恒等式

$$\left| (\xi_i - x_j)_+^k \right| = \int_{0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_N \leq 1} \cdots \int \left| (\xi_i - t_p)_+^0 \right| \left| (t_q - x_j)_+^{k-1} \right| dt_1 \cdots dt_N. \quad (1.35)$$

显然为使 $\left| (\xi_i - x_j)_+^k \right|$ 为正的, 当且仅当于具正测度的 $\{t_r\}$ 空间区域内 $\left| (\xi_i - t_p)_+^0 \right|, \left| (t_q - x_j)_+^{k-1} \right|$ 同取正值时才可能. 而由归纳法假定, 为使这两行列式是正的, 仅当下式成立:

$$\xi_{j-1} < t_j < \xi_j \quad (j=1, 2, \dots, N),$$

$$\text{即} \quad t_{j-k} < x_j < t_j \quad (j=1, 2, \dots, N),$$

$$\xi_{j-k-1} < x_j < \xi_j \quad (j=1, 2, \dots, N).$$

由归纳法即知定理 8 成立.

定理 8 是一条十分有用的定理. 利用它, 就不难解决一般样条函数的插值问题(1.32)了.

定理 9 对任意给定的 $y_1, y_2, \dots, y_{N+n+1}$, 插值问题(1.32)均有解, 必须且只需

$$\xi_i < x_i < \xi_{i+n+1} \quad (i=1, \dots, N). \quad (1.36)$$

并且在这种情况下(1.32)的解还是唯一的.

由定理 8 并注意在区间 $[\xi_1, \xi_{n+N+1}]$ 内, $S(x)$ 可表示为

$$\sum_{j=1}^{n+N+1} \alpha_j (x - \xi_j)_+^n,$$

此处 $\xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_{n+1} < \xi_1$ 且 $\xi_{n+j+1} = x_j$. 因为插值问题(1.32)是一个线性代数方程组, 它对任意 $\{y_j\}$ 都有唯一解, 必须且只需其相应系数行列式不等于 0. 于是由定理 8 可知, 为使对任意给定的一组 $y_1, y_2, \dots, y_{N+n+1}$, 插值问题(1.32)均有解, 必须且只需(1.34)形式的不等式成立. 再由 $\xi_{n+j+1} = x_j$ 等关系式, 可知此时必须且只需(1.36)成立. 定理 9 得证.

定理 9 从理论上完全解决了 n 次样条函数的插值问题解的存在性与唯一性问题. 它在理论和实际应用上都有重要的意义.

推论 4 给定插值结点

$$\xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_m,$$

考虑具有 N 个样条结点的 $n = m - N - 1$ 次样条函数, 其 N 个样条结点取自 ξ_2, \dots, ξ_{m-1} 之内, 则对任何一组 y_1, \dots, y_m , 插值问题(1.32)皆有唯一解.

事实上, 在上述推论的前提假设下, 条件(1.36)是自然满足的.

§ 2. B – 样条及其性质

设

$$\dots < x_{-2} < x_{-1} < x_0 < x_1 < \dots < x_v < \dots, \quad (2.1)$$

$x_v \rightarrow \pm \infty$ ($v \rightarrow \pm \infty$), n 为正整数.

定义

$$M_n(x; y) = n(y - x)_+^{n-1}. \quad (2.2)$$

视其中 x 为参数, 把 $M_n(x; y)$ 作为 y 的函数, 考虑其在 $y = x_0, x_1, \dots, x_n$ 处的 n 阶差商 $M_n(x; x_0, x_1, \dots, x_n)$:

$$\begin{aligned} M_n(x) &= M_n(x; x_0, x_1, \dots, x_n) \\ &= \sum_{v=0}^n \frac{n(x_v - x)_+^{n-1}}{\omega'(x_v)}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

其中 $\omega(x) = (x - x_0) \cdots (x - x_n)$.

显然 $M_n(x)$ 是一个以 x_0, \dots, x_n 为结点的 $n-1$ 次样条函数. 并且按截断多项式的定义, 当 $x > x_n$ 时, $M_n(x) \equiv 0$; 又当 $x < x_0$ 时, (2.3) 式右端中的截断号

“+”可以去掉,从而使 $M_n(x)$ 是一个 $n-1$ 次多项式的 n 阶差商. 于是由差商的性质可知, 此时也有 $M_n(x) \equiv 0$. 总之

$$M_n(x) \equiv 0, \text{ 当 } x \notin [x_0, x_n]. \quad (2.4)$$

由 Peano 定理, 若 $f(x) \in C^n$, 则

$$f(x_0, x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x_n} M_n(x; x_0, \dots, x_n) f^{(n)}(x) dx. \quad (2.5)$$

特别地, 若取 $f(x) = x^n$, 则可由上式推知

$$\int_{-\infty}^{\infty} M_n(x; x_0, \dots, x_n) dx = 1. \quad (2.6)$$

定理 10 $M_n^{(\nu)}(x) (\nu = 0, \dots, n-2)$ 在 (x_0, x_n) 内恰有 ν 个不同的零点. 特别地, 有

$$M_n(x) > 0, \text{ 当 } x \in (x_0, x_n).$$

证明 由(2.3)式, 知

$$M_n(x) = n(x_n - x)^{n-1} / \omega'(x_n) \quad (x_{n-1} < x < x_n).$$

因而在区间 (x_{n-1}, x_n) 内, $M_n(x) > 0$. 从而可以找到 3 个点 $x_0 < x^* < x_n$, 使 $M_n(x)$ 在其上的符号依次为 0, +, 0; 由中值定理, 又可找到 4 个点 $x_0 < x_1^* < x_2^* < x_n$, 使 $M'_n(x)$ 在其上的符号依次为 0, +, -, 0(变号一次); …… 最后, 我们可以找到 $n+1$ 个点 $x_0 < \bar{x}_1 < \bar{x}_2 < \dots < \bar{x}_{n-1} < x_n$, 使 $M_n^{(n-2)}(x)$ 在其上的符号依次为 0, +, -, +, -, …, 0(变号 $n-2$ 次). 另一方面, 由(2.3)式,

$$M_n^{(n-2)}(x) = (-1)^{n-2} n! \sum_{\nu=0}^n \frac{(x_\nu - x)_+}{\omega'(x_\nu)}$$

是一条以 $x = x_0, \dots, x_n$ 为顶点横坐标的折线. 该折线在两端点处 $y = 0$. 而且 $M_n^{(n-2)}(x_\nu) (\nu = 1, \dots, n-1)$ 不等于 0 且交错变号. 从而 $M_n^{(n-2)}(x)$ 恰好在 (x_0, x_n) 内有 $n-2$ 个单根.

因为 $M_n^{(\nu)}(x)$ 在 (x_0, x_n) 内至少有 ν 个互异的根, 若它的根多于 ν 个(重数计算在内), 则按 Rolle 定理可知 $M_n^{(n-2)}(x)$ 的根多于 $n-2$ 个(包括重数). 但这是不可能的, 定理证毕.

由(2.3)给出的 $M_n(x)$ 称为 B -样条函数.

对于等距结点情况, Schoenberg(1946)还给出了 B -样条的差分表达式. 对

于以 1 为步长的等距结点情况,他给出

$$M_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{2\sin(u/2)}{u} \right)^n e^{iux} du \\ = \frac{1}{(n-1)!} \delta^n x_+^n, \quad (2.7)$$

其中 δ^n 表示 n 阶中心差分.

$M_n(x)$ 的显式表达式为

$$(n-1)! M_n(x)$$

特别地，

$$M_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{当 } x < -1/2, \\ 1, & \text{当 } -1/2 < x < 1/2, \\ 0, & \text{当 } 1/2 < x, \end{cases}$$

此处还需加上 $M_1(\pm 1/2) = 1/2$ 的要求.

$$M_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{当 } x \leq -1, \\ x + 1, & \text{当 } -1 \leq x \leq 0, \\ -x + 1, & \text{当 } 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{当 } 1 \leq x. \end{cases}$$

$$M_3(x) = \begin{cases} 0, & \text{当 } x \leq -3/2, \\ \frac{1}{2} \left(x + \frac{3}{2} \right)^2, & \text{当 } -3/2 \leq x \leq -1/2, \\ \frac{1}{2} \left(x + \frac{3}{2} \right)^2 - \frac{3}{2} \left(x + \frac{1}{2} \right)^2, & \text{当 } -1/2 \leq x \leq 1/2, \\ \frac{1}{2} \left(-x + \frac{3}{2} \right)^2, & \text{当 } 1/2 \leq x \leq 3/2, \\ 0, & \text{当 } 3/2 \leq x. \end{cases}$$

$$M_4(x) = \begin{cases} 0, & \text{当 } x \leq -2, \\ \frac{1}{6} (x+2)^3, & \text{当 } -2 \leq x \leq -1, \\ \frac{1}{6} (x+2)^3 - \frac{4}{6} (x+1)^3, & \text{当 } -1 \leq x \leq 0, \\ \frac{1}{6} (-x+2)^3 - \frac{4}{6} (-x+1)^3, & \text{当 } 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{6} (-x+2)^3, & \text{当 } 1 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{当 } 2 \leq x. \end{cases}$$

它们的图形如下(图 2.1):

下面来讨论 $n-1$ 次样条函数类 $S_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_N)$ 的基函数问题. 由定理 1, $S_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_N)$ 有下述一组基函数:

$$1, x, \dots, x^{n-1}, (x-x_1)_+^{n-1}, \dots, (x-x_N)_+^{n-1}, \quad (2.9)$$

它们是由 $N+n$ 个函数组成的.

由于实际计算问题的需要, 下面来指出 B -样条的一个十分重要的性质, 即它们构成了 $S_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_N)$ 的更为方便的基底.

引理 设 $x_1 < x_2 < \dots < x_r$, 其中 $1 \leq r \leq n$, 则 $M_n(x; x_1, x_2, \dots, x_r)$ 在区间 $(-\infty, x_1)$ 中为一最高次项系数不为零的 $n-r$ 次多项式; $(-1)^{r-1} M_n(x_1, x_2, \dots, x_r; x)$ 在区间 $(x_r, +\infty)$ 中为一个最高次项系数不为零的 $n-r$ 次多项式, 并且

$$\begin{aligned} M_n(x; x_1, x_2, \dots, x_r) &= 0 \quad (x \geq x_r), \\ (-1)^{r-1} M_n(x_1, x_2, \dots, x_r; x) &= 0 \quad (x \leq x_1). \end{aligned} \quad (2.10)$$

证明 按 $M_n(x; y)$ 定义和差商公式,

$$M_n(x; x_1, x_2, \dots, x_r) = n \sum_{i=1}^r \frac{(x_i - x)_+^{n-1}}{\omega_r'(x_i)}, \quad (2.11)$$

其中

$$\omega_r(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_r).$$

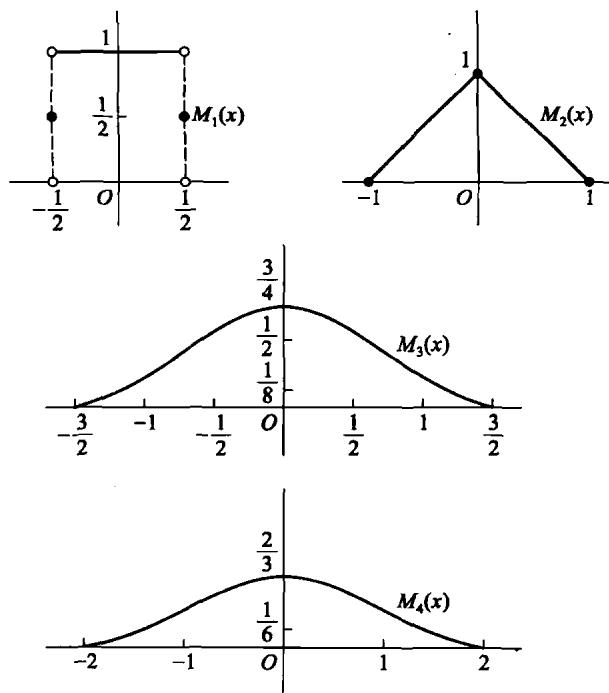


图 2.1

由截断多项式定义,当 $x \geq x_r$ 时(2.10)中的第一式成立.而当 $x \leq x_1$ 时,(2.11)中的截断号“+”可以去掉,因而此时 $M_n(x; x_1, x_2, \dots, x_r)$ 实为 x 的一个多项式,且其中 x^{n-j-1} 的系数是

$$n(-1)^{n-j-1} \binom{n-1}{j} \sum_{i=1}^r \frac{x_i^j}{\omega'_r(x_i)}.$$

不难发现, $\sum_{i=1}^r x_i^j / \omega'_r(x_i)$ 恰为 x^j 的 $r-1$ 阶差商.从而当 $j=0, 1, \dots, r-2$ 时,它们皆为0.但当 $j=r-1$ 时,它不为0.所以当 $x \leq x_1$ 时, $M_n(x; x_1, x_2, \dots, x_r)$ 是一最高次项系数不为0的 $n-r$ 次多项式.

同样,只需注意到

$$(-1)^r M_n(x_1, x_2, \dots, x_r; x) = n(-1)^{r-1} \sum_{i=1}^r \frac{(x-x_i)_{+}^{n-1}}{\omega'_r(x_i)},$$

则可推知引理的其他结论成立.证毕.

定理 11 设 $n \leq N$,且

$$x_1 < x_2 < \dots < x_N.$$

下述 $N+n$ 个样条函数构成 $S_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_N)$ 的一组基函数:

$$\begin{aligned} B_i(x) &= M_n(x; x_1, x_2, \dots, x_i) \quad (i=1, \dots, n); \\ B_{n+i}(x) &= M_n(x; x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n}) \quad (i=1, \dots, N-n); \\ B_{N+i}(x) &= (-1)^{n-i} M_n(x_{N-n+i}, x_{N-n+i+1}, \dots, x_N; x) \\ &\quad (i=1, \dots, n). \end{aligned} \quad (2.12)$$

证明 因为 $n-1$ 次样条函数类 $S_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_N)$ 中任意两个样条函数的随意线性组合都仍然属于 $S_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_N)$, 所以它是一个线性空间. 由于 $(x - x_i)_+^{n-1}$ 和 $(x_i - x)_+^{n-1}$ ($i = 1, \dots, N$) 都含于 $S_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_N)$ 中, 所以由 (2.12) 所示的 $N+n$ 个函数 $B_1(x), B_2(x), \dots, B_{N+n}(x)$ 也都是类 $S_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_N)$ 中的函数, 因为它们均由 $\{(x - x_i)_+^{n-1}\}$ 以及 $\{(x_i - x)_+^{n-1}\}$ 组合而成.

定理 1 已指明 $S_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_N)$ 是 $N+n$ 维的线性空间. 因此, 为证定理 11, 只需证明由 (2.12) 所示的 $N+n$ 个函数 $B_1(x), B_2(x), \dots, B_{N+n}(x)$ 线性无关就够了.

设有常数 c_1, c_2, \dots, c_{N+n} , 使

$$\begin{aligned} c_1 B_1(x) + \dots + c_n B_n(x) + c_{n+1} B_{n+1}(x) + \dots + c_N B_N(x) \\ + c_{N+1} B_{N+1}(x) + \dots + c_{N+n} B_{N+n}(x) \equiv 0 \quad (-\infty < x < +\infty) \end{aligned} \quad (2.13)$$

成立. 我们来证

$$c_1 = c_2 = \dots = c_{N+n} = 0. \quad (2.14)$$

按(2.4), (2.10)和(2.12), 在 $(-\infty, x_1)$ 上考虑(2.13)式可知

$$c_1 B_1(x) + c_2 B_2(x) + \dots + c_n B_n(x) \equiv 0 \quad (-\infty < x < x_1). \quad (2.15)$$

由引理, $B_1(x), B_2(x), \dots, B_n(x)$ 分别为最高次项系数不为 0 的 $n-1$ 次, $n-2$ 次, \dots , 0 次多项式. 因此, 由代数基本定理, 可推知

$$c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0. \quad (2.16)$$

同理, 由(2.4), (2.10), (2.12)和(2.13)可知

$$\begin{aligned} c_{N+1} B_{N+1}(x) + c_{N+2} B_{N+2}(x) + \dots + c_{N+n} B_{N+n}(x) &\equiv 0 \\ (x_N < x < +\infty). \end{aligned}$$

再根据引理以及代数基本定理, 也有

$$c_{N+1} = c_{N+2} = \dots = c_{N+n} = 0. \quad (2.17)$$

综合(2.13), (2.16)和(2.17), 得到

$$c_{n+1}B_{n+1}(x) + \cdots + c_N B_N(x) = 0 \quad (-\infty < x < +\infty). \quad (2.18)$$

又由(2.4)式可知 $B_{n+i}(x)$ 的支集(即使其取非零值的区间长度)有限, 所以当 $x_{N-1} < x < x_N$ 时, (2.18)式成为

$$c_N B_N(x) = 0 \quad (x_{N-1} < x < x_N). \quad (2.19)$$

根据定义

$$\begin{aligned} B_N(x) &= M_n(x; x_{N-n}, \dots, x_N) = n \sum_{i=N-n}^N \frac{(x_i - x)^{n-1}}{\omega'(x_i)} \\ &= n \frac{(x_N - x)^{n-1}}{\omega'(x_N)} \quad (x_{N-1} < x < x_N), \end{aligned}$$

其中 $\omega(x) = (x - x_{N-n}) \cdots (x - x_N)$. 特别地,

$$B_N\left(\frac{x_{N-1} + x_N}{2}\right) = n \frac{(x_N - x_{N-1})^{n-1}}{2^{n-1} \omega'(x_N)} \neq 0.$$

于是由(2.19)可推知

$$c_N = 0.$$

这样一来, (2.18)简化为

$$c_{n+1}B_{n+1}(x) + \cdots + c_{N-1}B_{N-1}(x) = 0 \quad (-\infty < x < +\infty). \quad (2.20)$$

与前面完全类似地, 考虑 (x_{N-2}, x_{N-1}) 区间上的(2.20)式, 则可推知 $c_{N-1} = 0$. 依此类推, 即可最后得到

$$c_{n+1} = c_{n+2} = \cdots = c_N = 0. \quad (2.21)$$

综合(2.16), (2.17)和(2.21)可知 $B_1(x), B_2(x), \dots, B_{N+n}(x)$ 线性无关.

由线性空间理论, $B_1(x), B_2(x), \dots, B_{N+n}(x)$ 构成空间 $S_{n-1}(x_1, \dots, x_N)$ 的一组基底. 定理证毕.

推论 5 设 $n \leq N$, 且

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_N,$$

则 B -样条函数

$$B_j(x) = M_n(x; x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+n}) \quad (j=1, 2, \dots, N-n)$$

线性无关. 于是满足

$$S(x) = 0, \text{只要 } x \notin (x_1, x_N)$$

的任一 $S(x) \in S_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_N)$, 均可唯一地表示为

$$S(x) = \sum_{j=1}^{N-n} c_j B_j(x). \quad (2.22)$$

对于自然样条函数类 $N_{2k-1}(x_1, x_2, \dots, x_N)$, 我们也可以引进新的基函数组. 设

$$M(x; y) = 2k(y - x)_+^{2k-1}.$$

与定理 11 完全类似地, 有如下定理:

定理 12 设 $N \geq 2k$, 且 $x_1 < x_2 < \dots < x_N$, 则下述 N 个自然样条函数构成自然样条函数类 $N_{2k-1}(x_1, x_2, \dots, x_N)$ 的一组基函数:

$$B_i(x) = M(x; x_1, x_2, \dots, x_{k+i}) \quad (i = 1, \dots, k),$$

$$B_{k+i}(x) = M(x; x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+2k}) \quad (i = 1, \dots, N-2k), \quad (2.23)$$

$$B_{N-k+i}(x) = (-1)^i M(x_{N-2k+i}, \dots, x_N; x) \quad (i = 1, \dots, k).$$

定理 13 若 $k \leq N < 2k$, $x_1 < x_2 < \dots < x_N$ 且多项式 $p_1(x), p_2(x), \dots, p_{2k-N}(x)$ 是 $2k-N-1$ 次多项式类的一组基底. 则下述 N 个自然样条函数构成 $N_{2k-1}(x_1, x_2, \dots, x_N)$ 的一组基函数:

$$B_i(x) = M(x; x_1, \dots, x_{k+i}) \quad (i = 1, \dots, N-k),$$

$$B_{N-k+i}(x) = p_i(x) \quad (i = 1, \dots, 2k-N), \quad (2.24)$$

$$B_{k+i}(x) = (-1)^{N-i} M(x_i, \dots, x_N; x) \quad (i = 1, \dots, N-k).$$

定理 12 与定理 13 请读者自行证明, 此处不拟列出.

定理 9 指出了样条函数插值问题(1.32)解存在并且唯一的充分必要条件: 插值结点(1.31)与样条结点 $x_1 < x_2 < \dots < x_N$ 之间, 必须满足位置分配关系(1.36), 即

$$\xi_i < x_i < \xi_{i+n+1} \quad (i = 1, \dots, N). \quad (2.25)$$

然而, 当(2.25)满足时, 为了求得满足插值条件(1.32)的样条函数 $S(x)$, 必须求解下述线性代数方程组

$$S(\xi_j) = \sum_{i=0}^n a_i \xi_j^i + \sum_{i=1}^N c_i (\xi_j - x_i)_+^n = y_j \\ (j = 1, 2, \dots, N+n+1). \quad (2.26)$$

容易看出该线性方程组的系数矩阵不是稀疏矩阵. 方程组(2.26)有时甚至是病态的.

为了避免出现以上不理想情况, 我们经常采用 B -样条作为 $S_n(x_1, x_2, \dots, x_N)$ 的基底, 转而来求解一个新的线性方程组

$$\sum_j c_j B_j(x_i) = y_i \quad (i = 1, \dots, N+n+1). \quad (2.27)$$

由于 $B_j(x)$ 的支集的有限性, 此时系数矩阵就不会出现以上的情况了.

§ 3 三次样条插值

三次样条插值问题, 除了可用 B -样条作为基函数来求解外, 还可用下述方法直接求得.

设给定一区间 $[a, b]$, 且

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b.$$

任意给定一组常数 y_0, y_1, \dots, y_N , 要求构造一个

$$S(x) \in S_3(x_0, x_1, \dots, x_N),$$

使得如下插值条件得以满足:

$$S(x_j) = y_j, \quad j = 0, 1, \dots, N, \quad (3.1)$$

今以 M_j 表示 $S''(x_j)$ ($j = 0, 1, \dots, N$). 由于 $S(x)$ 为分段 3 次多项式, 所以 $S''(x)$ 在区间 $[x_{j-1}, x_j]$ 上为一线性函数. 因而它可由过 (x_{j-1}, M_{j-1}) 与 (x_j, M_j) 两点的线性插值函数

$$S''(x) = M_{j-1} \frac{x_j - x}{h_j} + M_j \frac{x - x_{j-1}}{h_j} \quad (x_{j-1} \leq x \leq x_j) \quad (3.2)$$

所决定, 其中 $h_j = x_j - x_{j-1}$.

为了最后求出 $S(x)$ 在 $[x_{j-1}, x_j]$ 上的表达式, 只需对 (3.2) 式积分两次, 并定出积分常数就够了.

当 $x \in [x_{j-1}, x_j]$ 时

$$\begin{aligned} S(x) &= M_{j-1} \frac{(x_j - x)^3}{6h_j} + M_j \frac{(x - x_{j-1})^3}{6h_j} \\ &\quad + \left(y_{j-1} - \frac{M_{j-1}h_j^2}{6} \right) \frac{x_j - x}{h_j} + \left(y_j - \frac{M_jh_j^2}{6} \right) \frac{x - x_{j-1}}{h_j}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$S'(x) = -M_{j-1} \frac{(x_j - x)^2}{2h_j} + M_j \frac{(x - x_{j-1})^2}{2h_j} + \frac{y_j - y_{j-1} - \frac{M_j - M_{j-1}}{6}h_j}{h_j}. \quad (3.4)$$

由 (3.3) 可知, 为求 $S(x)$, 关键是设法确定各个 M_j ($j = 0, 1, \dots, N$). 而为了求得各个 M_j ($j = 0, 1, \dots, N$), 必须引用样条结点处的光滑连接条件

$$S'(x_j - 0) = S'(x_j + 0). \quad (3.5)$$

按(3.4)有

$$\begin{aligned} S'(x_j - 0) &= \frac{h_j}{6} M_{j-1} + \frac{h_j}{3} M_j + \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j}, \\ S'(x_j + 0) &= -\frac{h_{j+1}}{3} M_j - \frac{h_{j+1}}{6} M_{j+1} + \frac{y_{j+1} - y_j}{h_{j+1}}. \end{aligned}$$

由(3.5)可得连续性方程

$$\begin{aligned} &\frac{h_j}{6} M_{j-1} + \frac{h_j + h_{j+1}}{3} M_j + \frac{h_{j+1}}{6} M_{j+1} \\ &= \frac{y_{j+1} - y_j}{h_{j+1}} - \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j} \quad (j = 1, \dots, N-1). \end{aligned} \quad (3.6)$$

它给出了 $N+1$ 个未知数 M_j ($j = 0, 1, \dots, N$) 的 $N-1$ 个方程式, 由它尚不足以唯一确定 M_j ($j = 0, 1, \dots, N$). 尚须补充两个“边界条件”, 这有下述几种情形:

(1) 假定 $S'(a) = y'_0, S'(b) = y'_N$. 于是按前面公式, 可得方程

$$\begin{aligned} 2M_0 + M_1 &= \frac{6}{h_1} \left(\frac{y_1 - y_0}{h_1} - y'_0 \right), \\ M_{N-1} + 2M_N &= \frac{6}{h_N} \left(y'_N - \frac{y_N - y_{N-1}}{h_N} \right). \end{aligned} \quad (3.7)$$

(2) 假定 $M_0 = 0, M_N = 0$, 这相当于自然样条函数的条件.

无论(1)或(2), 均可概括为

$$\begin{cases} 2M_0 + \lambda_0 M_1 = d_0, \\ \mu_N M_{N-1} + 2M_N = d_N. \end{cases} \quad (3.8)$$

引入记号

$$\lambda_j = \frac{h_{j+1}}{h_j + h_{j+1}}, \quad \mu_j = 1 - \lambda_j \quad (j = 1, \dots, N-1), \quad (3.9)$$

则(3.6)可以改写为

$$\begin{aligned} \mu_j M_{j-1} + 2M_j + \lambda_j M_{j+1} &= 6 \frac{[(y_{j+1} - y_j)/h_{j+1}] - [(y_j - y_{j-1})/h_j]}{h_j + h_{j+1}} \\ &\quad (j = 1, \dots, N-1). \end{aligned} \quad (3.10)$$

所以由(3.8), (3.10)确定的线性方程组为

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_0 & & & \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & 0 \\ & \mu_2 & 2 & \lambda_2 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{N-2} & 2 & \lambda_{N-2} \\ 0 & & \mu_{N-1} & 2 & \lambda_{N-1} \\ & & \mu_N & 2 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{N-2} \\ M_{N-1} \\ M_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{N-2} \\ d_{N-1} \\ d_N \end{bmatrix}, \quad (3.11)$$

其中 $d_j (j = 1, 2, \dots, N-1)$ 表示(3.11)的右端项.

一个 n 次样条函数 $S(x) \in S_n(x_0, x_1, \dots, x_N)$ 如果满足条件

$$S^{(j)}(a+0) = S^{(j)}(b-0) \quad (j = 0, 1, \dots, n-1), \quad (3.12)$$

则称之为以 $b-a$ 为周期的 n 次周期样条函数. 显然, 对以 $b-a$ 为周期的 3 次周期样条函数来说, 应该要求(3.10)对 $j=N$ 的情况也成立. 如果再注意到这时的 $M_0=M_N$ 性质, 而把(3.10)中的 M_0 换成 M_N , 则相应于 3 次周期样条函数的方程组为

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & \mu_1 & \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & \mu_3 & 2 & \lambda_3 & 0 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & & & & 2 & \lambda_{N-2} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & & \mu_{N-1} & 2 & \lambda_{N-1} \\ \lambda_N & 0 & \cdots & 0 & & \mu_N & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ \vdots \\ M_{N-2} \\ M_{N-1} \\ M_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_{N-2} \\ d_{N-1} \\ d_N \end{bmatrix}, \quad (3.13)$$

其中

$$M_0 = M_N, \quad \lambda_N = \frac{h_1}{h_N + h_1}, \quad \mu_N = 1 - \lambda_N.$$

线性代数方程组(3.11)常可采用追赶法来求解. 而方程组(3.13)则可把 M_N 先作为参量, 求解其中前 $N-1$ 个方程中的 $N-1$ 个未知数 $M_1, M_2, \dots,$

M_{N-1} (其解依赖于 M_N), 然后代入最后一个方程以求出 M_N , 同时 M_1, M_2, \dots, M_{N-1} 也随之确定了.

为使读者使用方便, 下面简要介绍有关具体计算程序.

(3.11)是一个以三对角矩阵为系数矩阵的线性代数方程组, 其一般形式为

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & a_3 & b_3 & c_3 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & a_n & b_n & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

其计算程序为先形成 $\{q_k\}$ 和 $\{u_k\}$:

$$\begin{cases} p_k = a_k q_{k-1} + b_k & (q_0 = 0), \\ q_k = -c_k / p_k, & k = 1, \dots, n, \\ u_k = (d_k - a_k u_{k-1}) / p_k & (u_0 = 0), \end{cases} \quad (3.15)$$

然后按上述关系式逐一推算各 x_j 的值:

$$\begin{cases} x_k = q_k x_{k+1} + u_k & (k = 1, \dots, n-1), \\ x_n = u_n. \end{cases} \quad (3.16)$$

方程组(3.13)的一般形式为

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & a_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \\ c_n & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & a_n & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

其计算程序为先按(3.15)计算出 $\{p_k\}$, $\{q_k\}$ 和 $\{u_k\}$. 再按上述公式算出 $\{t_k\}$ 和 $\{v_k\}$:

$$\begin{cases} s_k = -a_k s_{k-1} / p_k & (s_0 = 1), \\ t_k = q_k t_{k+1} + s_k & (t_n = 1), \\ v_k = q_k v_{k+1} + u_k & (v_n = 0). \end{cases} \quad (3.18)$$

接着从方程

$$c_n(t_1 x_n + v_1) + a_n(t_{n-1} x_n + v_{n-1}) + b_n x_n = d_n \quad (3.19)$$

中解出 x_n . 最后由递推关系式

$$x_k = t_k x_n + v_k \quad (k=1, \dots, n-1) \quad (3.20)$$

逐个求出 x_{n-1}, \dots, x_1 .

应该指出, 此处在推导 3 次样条插值时, 乃是从其 2 阶导数为线性函数这一点出发的. 当然, 也可以从特殊形式的 Hermite 插值公式出发来建立 3 次样条插值的一类新的计算方案. 这一工作留给读者作为习题去完成.

下面介绍等距结点的 3 次自然样条函数 $S(x) \in N_3(x_1, \dots, x_N)$ 的一种计算表格. 此时

$$x_j = x_1 + (j-1)h, \quad h = x_2 - x_1 \quad (j=1, \dots, N).$$

而在区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上 $S(x)$ 的表达式为

$$\begin{aligned} S(x) &= \left(y_i - \frac{h^2}{6} M_i \right) \frac{x_{i+1} - x}{h} + \left(y_{i+1} - \frac{h^2}{6} M_{i+1} \right) \frac{x - x_i}{h} \\ &\quad + \frac{h^2}{6} M_i \left(\frac{x_{i+1} - x}{h} \right)^3 + \frac{h^2}{6} M_{i+1} \left(\frac{x - x_i}{h} \right)^3. \end{aligned} \quad (3.21)$$

相应连续性方程为

$$\frac{h^2}{6} M_{j+1} + 4 \frac{h^2}{6} M_j + \frac{h^2}{6} M_{j-1} = \delta^2 y_i \quad (j=2, \dots, N-1), \quad (3.22)$$

其中 $\delta^2 y_i$ 为 2 阶中心差分 $\delta^2 y_i = y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}$. 而 3 阶自然样条函数的边界条件为

$$M_1 = M_N = 0. \quad (3.23)$$

(3.22) 所示线性代数方程组为

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & & & & 0 \\ 1 & 4 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & 1 & 4 & 1 & 0 \\ & & & 1 & 4 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{h^2}{6} M_2 \\ \frac{h^2}{6} M_3 \\ \vdots \\ \frac{h^2}{6} M_{N-2} \\ \frac{h^2}{6} M_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta^2 y_2 \\ \delta^2 y_3 \\ \vdots \\ \delta^2 y_{N-2} \\ \delta^2 y_{N-1} \end{bmatrix}. \quad (3.24)$$

今将(3.24)最后一行的 $-1/4$ 倍加到倒数第二行,使倒数第二行的主对角线上方的元素为0.再从这个新的倒数第二行出发,把倒数第三行主对角线上方的元素变为0.一直这样做下去,即可将(3.24)变形为

$$\left[\begin{array}{ccccc} \alpha_{N-3} & 0 & & & 0 \\ 1 & \alpha_{N-4} & . & & \\ & . & . & . & \\ & . & . & . & \\ & . & . & . & \\ 0 & & 1 & \alpha_0 & \end{array} \right] \mathbf{M} = \left[\begin{array}{c} d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_{N-2} \\ d_{N-1} \end{array} \right], \quad (3.25)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \frac{h^2}{6} (M_2, M_3, \dots, M_{N-2}, M_{N-1})^T, \\ \alpha_j &= 4 - 1/\alpha_{j-1} \quad (j=1, 2, \dots), \quad \alpha_0 = 4, \\ d_{j-1} &= \delta^2 y_{j-1} - d_j / \alpha_{N-j-1} \quad (j=N-1, N-2, \dots, 3), \\ d_{N-1} &= \delta^2 y_{N-1}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

若定义

$$a_j = a_j / b_j, \quad (3.27)$$

则由(3.26)可推出递推关系式

$$\begin{aligned} a_{j+2} &= 4a_{j+1} - a_j \quad (j \geq -1, a_0 = 4, a_{-1} = 1), \\ b_{j+1} &= a_j. \end{aligned}$$

于是(3.27)又可以改写为

$$a_j = a_j / a_{j-1} \quad (j \geq 0). \quad (3.28)$$

又由(3.26)可推知

$$d_2 = \delta^2 y_2 + \sum_{r=3}^{N-1} (-1)^r \left(\frac{a_{N-r-2}}{a_{N-4}} \right) \delta^2 y_r,$$

即

$$a_{N-4} d_2 = \sum_{r=2}^{N-1} (-1)^r a_{N-r-2} \delta^2 y_r.$$

以之代入(3.25)的第一个等式,并注意(3.28),即可得到

$$a_{N-3} \left(\frac{h^2}{6} M_2 \right) = \sum_{r=2}^{N-1} (-1)^r a_{N-r-2} \delta^2 y_r. \quad (3.29)$$

由它算出 M_2 ,然后再由连续性方程(3.22)和边界条件(3.23)即可计算出其他各 M_j ($j = 3, 4, \dots, N-1$). 因为 $\frac{h^2}{6} M_j$ 出现在(3.21)中,若把它直接作为未知数就可以减少舍入误差并节省计算机的存贮量.

前若干个 a_j 的值可列表如下:

j	-1	0	1	2	3	4	5	6
a_j	1	4	15	56	209	780	2 911	10 864
j	7	8	9	10			11	
a_j	40 545	151 316	564 719	2 107 560			7 865 521	
j	12	13	14	15				
a_j	29 354 524	109 552 575	408 855 776	1 525 870 529				
j		16		17				
a_j		5 694 626 340		21 252 634 831				

例 给定型值点如下:

x	1	2	3,4	5	6	7	8	9	10
y	244.0	221.0	208.0	211.5	216.0	219.0	221.0	221.5	220.0

采用上述方法($h=1$),可求出

$$\frac{a_7}{6} M_2 = 40 545 \left(\frac{1}{6} M_2 \right) = 73 245.$$

其他 $\frac{a_7}{6} M_3, \dots, \frac{a_7}{6} M_9$ 等则可按递推关系 $\frac{a_7}{6} M_{j+1} = a_7 \delta^2 y_j - 4 \left(\frac{a_7}{6} M_j \right) + \left(\frac{a_7}{6} M_{j-1} \right)$ ($j=2, \dots, 9$)逐一计算出来. 而 $S(x)$ 在各子区间上的表达式也可随之用(3.21)表出.

例如在区间[1,2]上, $S(x)$ 的表达式为

$$S(x) = 1.806 511 2x^3 - 5.419 533 6x^2 - 19.386 977 6x + 76.$$

§4 多元样条

设 D 为二维欧氏空间 \mathbb{R}^2 中的给定区域. 以 P_k 记二元实系数代数多项式的集合:

$$P_k \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ p = \sum_{i=1}^k \sum_{j=0}^{k-i} c_{ij} x^i y^j \mid \text{诸 } c_{ij} \text{ 为实数} \right\}.$$

二元多项式 $p \in P_m$ 称为是不可约的, 如果(在复域中)除常数和该多项式本身外, 没有其他多项式可整除它. 代数曲线

$$\Gamma: l(x, y) = 0, \quad l(x, y) \in P_m$$

称为是不可约代数曲线, 如果 $l(x, y)$ 是不可约多项式. 显然, 任何直线都是不可约的代数曲线.

用有限条不可约代数曲线对区域 D 进行剖分 Δ . 则 D 被剖分为有限个子区域 D_1, \dots, D_N , 它们称作是 D 的胞腔. 相邻胞腔的公共边界线段称为网线, 网线的交点称为网点或顶点.

多元样条空间定义为

$$S_k^\mu(\Delta) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ s \in C^\mu(D) \mid s|_{D_i} \in P_k, i = 1, \dots, N \right\}.$$

按以上定义可知, 任一个样条

$$s \in S_k^\mu(\Delta)$$

均为在 D 上具有 μ 阶连续偏导数的分片 k 次多项式函数.

定理 14 设函数 $z = s(x, y)$ 在两相邻胞腔 D_i 和 D_j 上的表达式分别为 $z = p_i(x, y)$ 和 $z = p_j(x, y)$, 其中 $p_i, p_j \in P_k$. 为使

$$s(x, y) \in C^\mu(\overline{D_i \cup D_j}),$$

必须且只需存在多项式 $q_{ij} \in P_{k-(\mu+1)d}$, 使得

$$p_i(x, y) - p_j(x, y) = [l_{ij}(x, y)]^{\mu+1} q_{ij}(x, y), \quad (4.1)$$

其中

$$\Gamma_{ij}: l_{ij}(x, y) = 0$$

为 $\overline{D_i}$ 与 $\overline{D_j}$ 的公共网线, 且不可约多项式 $l_{ij}(x, y)$ 的次数为 d .

证明 先取 $\mu = 0$. 按定理所给条件, 如果 $s(x, y)$ 在 Γ_{ij} 上处处连续, 则

$$\eta(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} p_i(x, y) - p_j(x, y)$$

在 Γ_{ij} 上处处为 0. 于是 Γ_{ij} 上的任一点均为 $l_{ij}(x, y)$ 与 $\eta(x, y)$ 的公共零点. 因为 Γ_{ij} 上的点数无穷多, 根据本书第三章引述过的 Bezout 定理, $l_{ij}(x, y)$ 与 $\eta(x, y)$ 必有公共因子. 但 $l_{ij}(x, y)$ 为不可约多项式, 所以它必为 $\eta(x, y)$ 的因子, 即存在一个次数不超过 $k - d$ 的多项式 $q_1(x, y)$ (按 Bezout 定理, 它一般为复系数多项式), 使得

$$\eta(x, y) = p_i(x, y) - p_j(x, y) = l_{ij}(x, y) \cdot q_1(x, y).$$

由于 $\eta(x, y)$ 与 $l_{ij}(x, y)$ 为实系数多项式, 只需于上式两边取共轭复数, 即可指明 $q_1(x, y)$ 必亦为实系数多项式.

若取 $\mu = 1$. 根据 $\eta(x, y)$ 在 Γ_{ij} 上 1 阶偏导数处处为零的性质可知

$$\left(\frac{\partial q_1}{\partial x} \cdot l_{ij} + q_1 \cdot \frac{\partial l_{ij}}{\partial x} \right)_{\Gamma_{ij}} = \left(q_1 \cdot \frac{\partial l_{ij}}{\partial x} \right)_{\Gamma_{ij}} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial q_1}{\partial y} \cdot l_{ij} + q_1 \cdot \frac{\partial l_{ij}}{\partial y} \right)_{\Gamma_{ij}} = \left(q_1 \cdot \frac{\partial l_{ij}}{\partial y} \right)_{\Gamma_{ij}} = 0.$$

因为 l_{ij} 为不可约多项式, $\frac{\partial l_{ij}}{\partial x}$ 在 Γ_{ij} 上不能处处为零. 不然的话, 按 Bezout 定理, $\partial l_{ij}/\partial x$ 与 l_{ij} 必有公因子存在. 但 $\partial l_{ij}/\partial x$ 次数低于 l_{ij} 的次数, 因此势必 $\partial l_{ij}/\partial x$ 要除得尽 l_{ij} , 这与 l_{ij} 的不可约性相矛盾. 总之, 由前两式只能推出 $q_1(x, y)$ 在 Γ_{ij} 上处处为 0. 再一次运用 Bezout 定理, 知存在 $q_2 \in P_{k-2d}$, 使得

$$q_1(x, y) = l_{ij}(x, y) \cdot q_2(x, y),$$

是故

$$\eta(x, y) = p_i(x, y) - p_j(x, y) = [l_{ij}(x, y)]^2 \cdot q_2(x, y).$$

依此类推, 根据 $s(x, y)$ 于 $\overline{D_i \cup D_j}$ 上的 2 阶、3 阶、 \cdots 、 μ 阶偏导数的连续性, 最后可证得(4.1)式.

反之, 如果(4.1)式成立, 则显然 $s(x, y) \in C^\mu(\overline{D_i \cup D_j})$.

按(4.1)式所确定的多项式 $q_{ij}(x, y)$ 称为内网线 $\Gamma_{ij}: l_{ij}(x, y) = 0$ 上的(从 D_j 到 D_i 的)光滑余因子. 称内网线 Γ_{ij} 上的光滑余因子存在, 即指形如(4.1)的等式成立.

相邻两胞腔 D_i 与 D_j 的公共网线为 $\Gamma_{ij} = \Gamma_{ji}: l_{ij}(x, y) = l_{ji}(x, y) = 0$. 由(4.1)式, Γ_{ij} 上的光滑余因子 $q_{ij}(x, y)$ 与 Γ_{ji} 上的光滑余因子 q_{ji} 满足关系式 $q_{ij}(x, y) = -q_{ji}(x, y)$.

设 A 为剖分 Δ 的任一给定的内网点. 按下列顺序将过 A 的所有内网线 $\{\Gamma_{ij}\}$ 所涉及的指标 i 和 j 做如下调整: 使当一动点沿以 A 为心的逆时针方向越过 Γ_{ij} 时, 恰好是从 D_j 跨入 D_i .

定义内网点 A 处的协调条件为

$$\sum_A [l_{ij}(x, y)]^{\mu+1} \cdot q_{ij}(x, y) \equiv 0, \quad (4.2)$$

其中 \sum_A 表示对一切以内网点 A 为一端点的内网线所求的和, 而 $q_{ij}(x, y)$ 为 Γ_{ij} 上的光滑余因子.

设 Δ 的所有内网点为 A_1, \dots, A_M . 整体协调条件定义为

$$\sum_{A_\nu} [l_{ij}^{(\nu)}(x, y)]^{\mu+1} \cdot q_{ij}^{(\nu)}(x, y) \equiv 0, \quad \nu = 1, \dots, M, \quad (4.3)$$

其中相应于内网点 A_ν 的协调条件之 $q_{ij}^{(\nu)}(x, y)$ 满足(4.2)中所作的规定.

定理 15 对给定的剖分 Δ , 函数 $s(x, y) \in S_k^{\mu}(\Delta)$, 必须而且只需 $s(x, y)$ 在每一条内网线上均有一光滑余因子存在, 并且满足由(4.3)所示的整体协调条件.

事实上, 各内网线上光滑余因子的存在性等价于该分片多项式的 C^1 光滑连接性质. 而各内网点处满足协调条件, 即整体协调条件又等价于该分片多项式函数在整个区域 D 上的单值性. 所以定理 15 必然成立. 请读者自行给出细节(留作习题).

以上定理表明, 多元样条的问题在一定意义上等价于由(4.3)所确定的代数问题. 而后者是一个关于诸光滑余因子中各系数间的一个齐次线性代数方程组问题.

如所知, 多元样条空间 $S_k^{\mu}(\Delta)$ 是一个线性空间. 对于各种特定的剖分 Δ , 如何找出 $S_k^{\mu}(\Delta)$ 的便于应用的基函数组, 是多元样条理论和应用的关键问题之一. 为此, 首先要求出样条空间 $S_k^{\mu}(\Delta)$ 的维数 $\dim S_k^{\mu}(\Delta)$. 因为样条空间的维数, 正是该空间基函数组中所含函数的个数.

遗憾的是, 多元样条空间的维数, 特别是当值 μ 与 k 接近时, 有时会严重依赖于剖分 Δ 的几何性质. 试考察多元样条空间

$$S_2^1(\Delta_{MS}),$$

其中 Δ_{MS} 是三角剖分(图 4.1).

可以算出下述维数公式

$$\dim S_2^1(\Delta_{MS}) = \begin{cases} 7, & \text{当且仅当 } AA', BB', CC' \text{ 三条直线共点,} \\ 6, & \text{其他情形.} \end{cases}$$

顺便指出, 对于给定的任意三角剖分 Δ 来说, 多元样条空间 $S_2^1(\Delta)$ 的维数问题至今仍是一个国际上尚未最终解决的难题.

若区域 D 的剖分 Δ 是由有限条贯穿区域 D 的直线切割而成的, 则称剖分 Δ 是贯穿剖分, 常记之为 Δ_c . 每一条贯穿区域 D 的直线称为贯穿线.

定理 16 设 Δ_c 为对区域 D 的贯穿剖分, 则如下维数公式成立

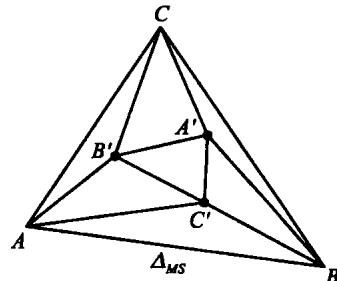


图 4.1

$$\dim S_k^\mu(\Delta_c) = \binom{k+2}{2} + L \cdot \binom{k-\mu+1}{2} + \sum_{i=1}^V d_k^\mu(n_i), \quad (4.4)$$

其中 L 为形成 Δ_c 的贯穿线数, V 为 Δ_c 中内网点数, n_i 是经过第 i 个内网点的贯穿线数, 而

$$d_k^\mu(n) = \frac{1}{2} \left(k - \mu - \left[\frac{\mu+1}{n-1} \right] \right)_+ + \left((n-1)k - (n+1)\mu + (n-3) + (n-1) \left[\frac{\mu+1}{n-1} \right] \right), \quad (4.5)$$

$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, $u_+ = \max(0, u)$.

根据定理 15 与贯穿剖分的特点可以证明定理 16. 此处从略. 请读者自行补证, 或参阅有关资料.

如下的三角剖分 $\Delta_{mn}^{(1)}$ 和 $\Delta_{mn}^{(2)}$ (图 4.2)

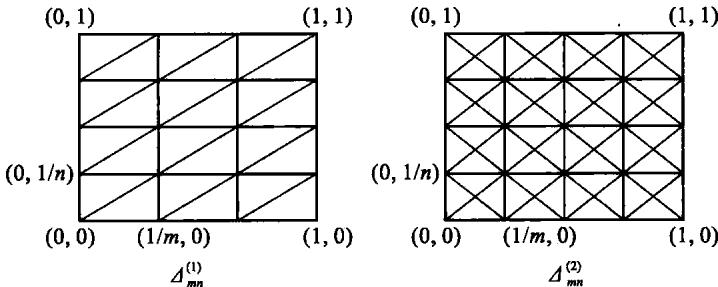


图 4.2

分别称为 1-型和 2-型三角剖分. 它们都是对矩形区域 $D = [0,1] \otimes [0,1]$ 的特殊的三角剖分, 也是贯穿剖分.

作为定理 16 的推论, 有

定理 17

$$\begin{aligned} \dim S_k^\mu(\Delta_{mn}^{(1)}) &= \binom{k+2}{2} + (2m+2n-3) \binom{k-\mu+1}{2} \\ &+ (m-1)(n-1) \left(k - \mu - \left[\frac{\mu+1}{2} \right] \right)_+ \cdot \left(k - 2\mu + \left[\frac{\mu+1}{2} \right] \right), \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \dim S_k^\mu(\Delta_{mn}^{(2)}) &= \binom{k+2}{2} + (3m+3n-4) \binom{k-\mu+1}{2} + mn \binom{k-2\mu}{2} \\ &+ \frac{1}{2}(m-1)(n-1) \left(k - \mu - \left[\frac{\mu+1}{3} \right] \right)_+ \cdot \left(3k - 5\mu + 3 \left[\frac{\mu+1}{3} \right] + 1 \right). \end{aligned} \quad (4.7)$$

对于给定剖分 Δ , 所有以 Δ 的网线为边的多边形的集合记为 Γ . 我们说 \mathcal{S}

$S_k^{\mu}(\Delta)$ 是一个具有局部支集的多元样条,如果存在 $\gamma \in \Gamma$,使得 S 在多边形 γ 的外部处处为 0. 此时 γ 称为是多元样条 S 的支集. 从数值分析和计算的角度考虑,最有兴趣的问题之一,是找出 $S_k^{\mu}(\Delta)$ 的由具有局部支集样条组成的基函数.

此处仅讨论 $S_k^{\mu}(\Delta_{mn}^{(1)})$ 和 $S_k^{\mu}(\Delta_{mn}^{(2)})$ 的具有局部支集样条基函数. 特别地, 我们仅讨论其中 $\mu=1$, 且 k 尽可能小的情形. 它们在实际问题中是最重要的.

由定理 16 可知, 要使 $S_k^{\mu}(\Delta)$ 中的具局部支集的样条得以存在, 则在其支集多边形各顶点处的网线(直线)数 n 必须满足如下基本不等式:

$$n > \frac{k+1}{k-\mu}. \quad (4.8)$$

因为只有满足(4.8), 在那个顶点处的协调条件解空间的维数 $d_k^{\mu}(n)$ 才大于 0.

由此可知, 在 $S_k^1(\Delta_{mn}^{(1)})$ 和 $S_k^1(\Delta_{mn}^{(2)})$ 中欲使具有局部支集的样条得以存在, 其分片多项式的最小次数 k 分别为 3 和 2. 以下仅讨论空间

$$S_3^1(\Delta_{mn}^{(1)}), \quad S_2^1(\Delta_{mn}^{(2)}).$$

空间 $S_3^1(\Delta_{mn}^{(1)})$.

按维数公式(4.6), 该空间的维数

$$\dim S_3^1(\Delta_{mn}^{(1)}) = 2(m+2)(n+2)-5. \quad (4.9)$$

在空间 $S_3^1(\Delta_{mn}^{(1)})$ 中有两个具有局部支集的样条 $B^1(x, y)$ 和 $B^2(x, y)$, 它们的支集分别为六边形 \mathcal{A}_1 和 \mathcal{A}_2 (图 4.3):

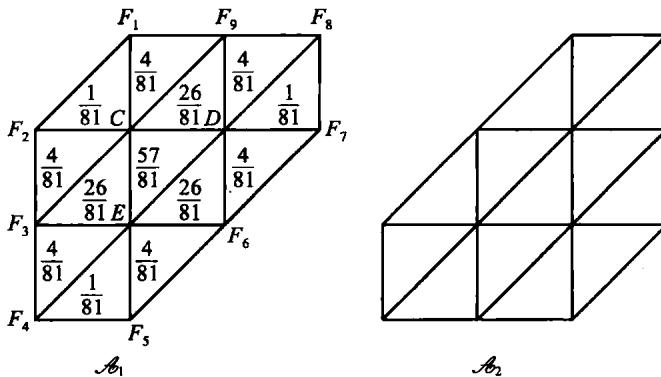


图 4.3

$B^1(x, y)$ 与 $B^2(x, y)$ 有如下关系:

$$B^2(x, y) = B^1(-x, -y). \quad (4.10)$$

我们可以给出 $B^1(x, y)$ 在支集 \mathcal{A}_1 各胞腔上的表达式. 因为在三角形上定义的任意一个 3 次多项式可由它在三个顶点处的值, 关于 x, y 的两个 1 阶偏导数值, 以及它在此三角形重心处的值所唯一确定. 若以一个 3 维向量表示

$B^1(x, y)$ 在某网点处的那三个值 $\left(B^1, \frac{\partial B^1}{\partial x}, \frac{\partial B^1}{\partial y}\right)$, 则 $B^1(x, y)$ 在诸网点的值为
 $C\left(\frac{1}{3}, 1, -1\right)$, $D\left(\frac{1}{3}, -1, 0\right)$, $E\left(\frac{1}{3}, 0, 1\right)$, $F_i(0, 0, 0)$,
 $i = 1, \dots, 9$.

而 $B^1(x, y)$ 在诸三角形重心处的值, 分别记在相应三角形中(见图). 从中不难发现某种意义上的对称性.

$B^2(x, y)$ 的值完全可由(4.10)所确定.

B^1 和 B^2 都是 $S_3^1(\Delta_{mn}^{(1)})$ 中具有最小局部支集的样条, 常称之为 B -样条.

考虑 B^1 和 B^2 的平移. 为此定义

$$B_{ij}^r(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} B^r(x - i/m, y - j/n), \quad r = 1, 2,$$

和下标集

$$\sigma_r \stackrel{\text{def}}{=} \{(i, j) \mid B_{ij}^r \text{ 在区域 } D \text{ 上不恒为 } 0\}.$$

容易算出 $\sigma_1 \cup \sigma_2$ 的基数为

$$2(m+2)(n+2)-2,$$

它比空间 $S_3^1(\Delta_{mn}^{(1)})$ 的维数还要多 3, 所以

$$\mathcal{B} \stackrel{\text{def}}{=} \{B_{ij}^1 \mid (i, j) \in \sigma_1\} \cup \{B_{ij}^2 \mid (i, j) \in \sigma_2\}$$

是线性相关的. 这表明二元样条空间中的 B -样条集合未必是线性无关的. 这与一元情况相比较, 有着本质的差别.

对于 $S_3^1(\Delta_{mn}^{(1)})$ 来讲, 可以证明

$$S_3^1(\Delta_{mn}^{(1)}) = \text{span}\{\mathcal{B}\}, \quad (4.11)$$

事实上, 按确定的规律从 \mathcal{B} 中删去某 3 个 B -样条后, 剩下的 B -样条是线性无关的. 不仅如此, 并且对 $r = 1, 2$ 均有

$$\sum_{(i,j) \in \sigma_r} B_{ij}^r(x, y) \equiv 1, \quad (x, y) \in D. \quad (4.12)$$

(4.12) 所表示的性质, 称为单位分解性质. 由于篇幅所限, 此处不能给出(4.11)的证明. 但(4.12)则可根据 $B_{ij}^r(x, y)$ 的定义而证得(留作习题).

定义下列变差缩减算子(拟插值算子)

$$(V^r f)(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{(i,j) \in \sigma_r} f\left(\frac{i}{m}, \frac{j}{n}\right) B_{ij}^r(x, y), \quad r = 1, 2. \quad (4.13)$$

显然它们是线性正算子. 可以证明, 对一切 $p \in P_1$, 均有

$$(V^r p)(x, y) \equiv p(x, y). \quad (4.14)$$

(4.14)的证明留作习题.

记剖分 $\Delta_{mn}^{(1)}$ 的直径为 δ_{mn} :

$$\delta_{mn} = \sqrt{\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2}}.$$

因为单位分解性质(4.12)成立,故不难用连续模数估计法证得如下定理:

定理 18 对任意给定的 $f(x, y) \in C(D)$, 均有如下的极限等式成立,

$$\lim_{\delta_{mn} \rightarrow 0} (V^r f)(x, y) = f(x, y), (x, y) \in D (r=1, 2), \quad (4.15)$$

并且上述极限关系式在 D 上一致成立.

(4.11)表示,为确定 $S_3^1(\Delta_{mn}^{(1)})$ 中的样条,只需根据已知条件去确定作为 \mathcal{B} 中诸元素线性组合的系数.而定理 18 表明,对任意给定的连续函数 $f(x, y) \in C(D)$,人们恒可利用拟插值算子 $(V^r f)(x, y)$ 来逼近.

空间 $S_2^1(\Delta_{mn}^{(2)})$.

区域 $D = [0, 1] \otimes [0, 1]$ 的 2-型三角剖分 $\Delta_{mn}^{(2)}$, 由下述剖分线所产生:

$$mx - i = 0, \quad ny - i = 0,$$

$$ny - mx - i = 0, \quad ny + mx - i = 0,$$

其中 $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

按维数公式(4.7),可知

$$\dim S_2^1(\Delta_{mn}^{(2)}) = (m+2)(n+2)-1. \quad (4.16)$$

在空间中有一个具有下述局部支集的样条 $B(x, y)$ (图 4.4).

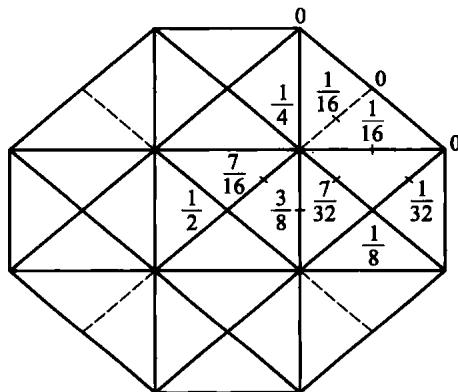


图 4.4

根据多项式插值理论,胞腔(三角形)上 2 次多项式可由该多项式在三角形三个顶点,以及三边中点上的值所唯一确定.事实上,上述六个点正是 2 次多项式插值的一组适定结点组.所以为表示上述具局部支集的样条(B -样条) $B(x,$

y), 只需指出诸胞腔上相应六点上的值即可. 为此, 我们在图中标出了 $B(x, y)$ 在各点上的相应值. 由于 B -样条 $B(x, y)$ 对于 x 轴, y 轴以及原点 O 均具对称性质, 其他各点上的值完全可按对称性来确定.

若置 $B(x, y)$ 的支集中心在原点 $(0, 0)$, 则由其平移可产生一系列 B -样条

$$B_{ij}(x, y) = B(mx - i + 1/2, ny - j + 1/2).$$

集合

$$A = \{B_{ij} \mid i = 0, \dots, m+1; j = 0, \dots, n+1\}$$

是 $S_2^1(\Delta_{mn}^{(2)})$ 的子集, 而其基数为 $(m+2)(n+2)$, 它比 $\dim S_2^1(\Delta_{mn}^{(2)})$ 多 1. 从而 A 是一个线性相关集合. 然而可以证明, 从 A 中任意删去一个 B -样条后, 其余的 B -样条是线性无关的, 亦即它们是空间 $S_2^1(\Delta_{mn}^{(2)})$ 的支架, 即

$$S_2^1(\Delta_{mn}^{(2)}) = \text{span}\{A\}.$$

容易证明

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} B_{ij}(x, y) &\equiv 1, \quad (x, y) \in D, \\ \sum_{i,j} (-1)^{i+j} B_{ij}(x, y) &\equiv 0, \quad (x, y) \in D. \end{aligned} \tag{4.17}$$

定义如下的拟插值算子(变差缩减算子) $V_{mn}: C(D) \rightarrow S_2^1(\Delta_{mn}^{(2)})$,

$$V_{mn}(f) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i,j} f\left(\frac{2i-1}{2m}, \frac{2j-1}{2n}\right) B_{ij}(x, y). \tag{4.18}$$

它是一个线性正算子. 还可定义另一拟插值算子

$$W_{mn}(f) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i,j} \lambda_{ij}(f) B_{ij}(x, y), \tag{4.19}$$

其中 $\lambda_{ij}(f)$ 是如下的线性泛函数:

$$\begin{aligned} \lambda_{ij}(f) &= 2f\left(\frac{2i-1}{2m}, \frac{2j-1}{2n}\right) - \frac{1}{4} \left\{ f\left(\frac{i}{m}, \frac{j}{n}\right) \right. \\ &\quad \left. + f\left(\frac{i-1}{m}, \frac{j}{n}\right) + f\left(\frac{i-1}{m}, \frac{j-1}{n}\right) + f\left(\frac{i}{m}, \frac{j-1}{n}\right) \right\}. \end{aligned}$$

$W_{mn}(f)$ 虽然不是一个线性正算子, 但它却有更高的逼近阶.

不难验明

$$\begin{aligned} V_{mn}(f) &\equiv f, \quad \text{当 } f = 1, x, y, xy; \\ W_{mn}(f) &\equiv f, \quad \text{当 } f \in P_2. \end{aligned} \tag{4.20}$$

采用通常的误差估计方法,即 Taylor 展开方法,可得到下述误差估计:

定理 19 设紧集 K 为包含 D 的开集 Ω 的闭包.

(i) 设 $f \in C(K)$, 则对所有 $m, n \geq N_0$, 有

$$\|f - V_{mn}(f)\|_D \leq \omega_K(f; \delta'_{mn});$$

(ii) 若 $f \in C^1(D)$, 则

$$\|f - V_{mn}(f)\|_D \leq \delta_{mn} \cdot \max\{\omega_D(f_1; \delta_{mn}/2), \omega_D(f_2; \delta_{mn}/2)\};$$

(iii) 若 $f \in C^2(D)$, 则

$$\|f - V_{mn}(f)\|_D \leq \frac{1}{4} \delta_{mn}^2 \cdot \|D^2 f\|,$$

其中

$$\delta_{mn} = \max\{1/m, 1/n\},$$

$$\delta'_{mn} = \frac{1}{2mn} \max\{\sqrt{9m^2 + n^2}, \sqrt{m^2 + 9n^2}\},$$

$$\begin{aligned} \omega_K(f; \delta) &= \sup\{|f(x, y) - f(u, v)| \mid (x, y), (u, v) \in K, \\ &\quad |(x, y) - (u, v)| < \delta\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D^2 f(x, y)((u_1, u_2), (v_1, v_2)) &= f_{11}(x, y)u_1v_1 + f_{12}(x, y)u_1v_2 + \\ &\quad f_{21}(x, y)u_2v_1 + f_{22}(x, y)u_2v_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_1 &= \partial f / \partial x, f_2 = \partial f / \partial y, f_{11} = \partial^2 f / \partial x^2, \\ f_{12} &= f_{21} = \partial^2 f / \partial x \partial y, f_{22} = \partial^2 f / \partial y^2. \end{aligned}$$

定理 20 设 $f \in C(K)$, 且 $m, n \geq N_0$. 当 $f \in C^2(D)$ 时,

$$\begin{aligned} \|f - W_{mn}(f)\|_D &\leq \frac{1}{2} \delta_{mn}^2 \cdot \max\{\omega_D(f_{11}; \delta_{mn}/2), \\ &\quad 2\omega_D(f_{12}; \delta_{mn}/2), \omega_D(f_{22}; \delta_{mn}/2)\}; \end{aligned}$$

当 $f \in C^3(D)$ 时,

$$\|f - W_{mn}(f)\|_D \leq \frac{1}{12} \delta_{mn}^3 \cdot \|D^3 f\|,$$

其中 $D^3 f(x, y) : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ 定义为

$$\begin{aligned} D^3 f(x, y)((u_1, u_2), (v_1, v_2), (w_1, w_2)) \\ = \sum_{i,j,k=1}^2 f_{ijk}(x, y)u_i v_j w_k, \end{aligned}$$

其中 f_{ijk} 表示 f 的 3 阶偏导数, 下标 i, j, k 当中任何一个等于 1 时是表示对 x 求导, 等于 2 时是表示对 y 求导.

在矩形区域 $D = [a, b] \otimes [c, d]$ 的非均匀矩形剖分的基础上, 再连接每一个小矩形(胞腔)的两条对角形所形成的三角剖分, 称为非均匀 2-型三角剖分, 仍记为 $\Delta_{mn}^{(2)}$. 采用光滑余因子协调法已经证明, 对于如此的剖分, 仍有相应的 S_2^1 ($\Delta_{mn}^{(2)}$) 中的 B -样条, 并有一套完全类似的结果. 这些结果是不能用一般的线性变换得到的, 为篇幅所限, 此处不作介绍, 有兴趣的读者可参阅相关文献和著作.

本节所介绍的多元样条空间 $S_3^1(\Delta_{mn}^{(1)})$ 和 $S_2^1(\Delta_{mn}^{(2)})$ (均匀与非均匀) 中的 B -样条基函数, 以及拟插值算子等有着广泛的应用.

第七章习题

- 试证若 n 次样条 $S(x) \in S_n(x_1, x_2, \dots, x_N)$ 满足条件

$$S(x) = 0, \quad \text{当 } x \notin (x_1, x_N),$$

则除 $S(x) \equiv 0$ ($-\infty < x < +\infty$) 外, 必有

$$N \geq n + 2.$$

- 对于以 1 为步长的等距结点情况, 利用(2.7)证明

$$\begin{aligned} M_{k+1}(x) &= \int_{x-1/2}^{x+1/2} M_k(t) dt, \\ M_k^{(\nu)}(x) &= \delta^\nu M_{k-\nu}(x), \quad 0 \leq \nu \leq k-1. \end{aligned}$$

- 证明定理 12.
- 证明定理 13.
- 证明定理 18.
- 证明(4.11).
- 证明(4.16).
- 证明(4.17).

第八章 曲线、曲面生成与逼近

本章讲述曲线、曲面生成与逼近的一些常用方法。从原则上讲，本书前面有关章节介绍的插值与逼近的理论与方法均可用于曲面、曲线的生成与逼近。这些内容本章自然不必重复。以下介绍一些其他方法以及相关的理论。本章所涉及的领域常被称为计算几何或计算机辅助几何设计。

§ 1 简单的数据预处理方法

通常给定的用以生成与逼近曲线、曲面的表列数据，由于观测等各类因素的影响，包含一定的误差。所以人们常常需要对这些给定的数据进行适当的处理。

采用样条和最小二乘法，可以较好地处理这些数据。本节将介绍一些比较简单、实用的处理数据方法。

设

$$u_1, u_2, \dots, u_n, \dots \quad (u_i = u(i))$$

是一组观测数据，它们是当自变量取为等距时由观测所得的数据。从上列数据的差分表的不规则性可知它们不能用多项式等来逼近。所以人们需设法对以上数据进行修改，使修正后的数据

$$u'_1, u'_2, \dots, u'_n, \dots$$

符合我们的要求。

1. Woothouse 公式

该方法的基本思想是，为修正 u_0 处的值，取

$$u_{-7}, u_{-6}, \dots, u_{-1}, u_0, u_1, \dots, u_6, u_7,$$

分别由 $(u_{-7}, u_{-2}, u_3), (u_{-6}, u_{-1}, u_4), (u_{-5}, u_0, u_5), (u_{-4}, u_1, u_6)$ 和 (u_{-3}, u_2, u_7) 作 5 条 2 次多项式插值，并取这 5 条抛物线于 $x=0$ 处值的算术平均值作为 $u_0 = u(0)$ 的修正值，即

$$u'_0 = \frac{[5]^3}{125} (-3u_{-1} + 7u_0 - 3u_1),$$

一般

$$u'_x = \frac{[5]^3}{125} (-3u_{x-1} + 7u_x - 3u_{x+1}), \quad (1.1)$$

其中 $[\cdot]$ 表示所谓的“离中和”：

$$[2m+1]u_x = u_{x-m} + \cdots + u_x + \cdots + u_{x+m}, \quad (1.2)$$

且

$$[\cdot]^{k+1}u = [\cdot]([\cdot]^k u).$$

2. Lidstone 公式

从 Woothouse 公式, 可总结出一个普遍原则.

记

$$\Delta u_x = u_{x+1} - u_x.$$

需寻求一个恰当的磨光公式, 使得

$$f\{\Delta, [\cdot]\}u_x = u_x + \text{高阶差分},$$

其中 $[\cdot]$ 是离中和, 则磨光值取为

$$u'_x = f\{\Delta, [\cdot]\}u_x.$$

关键是选取函数 $f\{\Delta, [\cdot]\}$.

根据差分算子和位移算子等的定义,

$$\delta u_0 = u_{1/2} - u_{-1/2}, \quad \delta^2 u_0 = u_1 - 2u_0 + u_{-1}, \quad E = 1 + \Delta = e^D,$$

其中 E 为位移算子, D 为微分(求导)算子. 取 $\phi = \frac{1}{2i}D$, 则得

$$\delta^2 = E - 2 + E^{-1} = -4\sin^2 \phi,$$

$$\begin{aligned} [2m+1]u_0 &= u_{-m} + \cdots + u_{-1} + u_0 + u_1 + \cdots + u_m \\ &= \{e^{-2m\phi} + \cdots + e^{-2\phi} + 1 + e^{2\phi} + \cdots + e^{2m\phi}\}u_0 \\ &= \{1 + 2\cos 2\phi + \cdots + 2\cos 2m\phi\}u_0 \\ &= \frac{\sin(2m+1)\phi}{\sin\phi}u_0, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} [n]u_0 &= \frac{\sin n\phi}{\sin \phi} u_0 \\ &= \left\{ n - \frac{n(n^2-1^2)}{3!} \sin^2 \phi + \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{5!} \sin^4 \phi + \dots \right\} u_0. \end{aligned}$$

即可得

$$\frac{[n]}{n!} u_0 = u_0 - \frac{n^2-1^2}{2^2 \cdot 3!} \delta^2 u_0 + \frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{2^4 \cdot 5!} \delta^4 u_0 + \dots.$$

由此可推出

$$\frac{[p_1][p_2][p_3]}{p_1 \cdot p_2 \cdot p_3} u_0 = u_0 + \frac{\sum_i (p_i^2 - 1)}{24} \delta^2 u_0 + O(\delta^4 u_0).$$

移项得 Lidstone 公式

$$u'_0 = \frac{[p_1][p_2][p_3]}{p_1 \cdot p_2 \cdot p_3} \left\{ 1 - \frac{\delta^2}{24} \sum_i (p_i^2 - 1) \right\} u_0. \quad (1.3)$$

若取 $p_1 = p_2 = 5, p_3 = 7$, 则得到 Spencer 公式

$$u'_0 = \frac{[5][5][7]}{175} \{ 1 - 4\delta^2 \} u_0. \quad (1.4)$$

其 21 项公式为

$$\begin{aligned} u'_0 &= \frac{1}{360} \{ 60u_0 + 57(u_{-1} + u_1) + 47(u_{-2} + u_2) \\ &\quad + \dots - (u_{-10} + u_{10}) \}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

3. 最小二乘法

取以 u_0 为中心位置的数据

$$u_{-n}, u_{-n+1}, \dots, u_0, \dots, u_{n-1}, u_n,$$

并按最小二乘法求 j 次多项式 $u(x)$, 则取

$$u'_0 = u(x) \Big|_{x=0}.$$

经常采用的是下述特例:

(1) 取 $j = 1$, 则

$$u'_0 = \frac{1}{2n+1} \{ u_0 + (u_1 + u_{-1}) + \dots + (u_n + u_{-n}) \}. \quad (1.6)$$

(2) 取 $j=2,3$, 则

$$u'_0 = p_n u_n + p_{n-1} u_{n-1} + \cdots + p_{-n} u_{-n}, \quad (1.7)$$

其中

$$p_s = 3 \cdot \frac{3n^2 + 3n - 1 - 5s^2}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}, \quad s = -n, \dots, 1, \dots, n.$$

4. 二维数据的处理

借助于二维 Taylor 展开公式, 我们可以处理二维矩形网格点上的数据.

设已给定一组二维数据

$$u_{i,j} = u(ih, jh), \quad i, j = 0, \pm 1, \dots, \quad (1.8)$$

则有如下的 13 点磨光公式:

$$u'_{0,0} = \frac{1}{11} \left\{ 3u_{0,0} + 2\sum_1 + \sum_2 - \sum_3 \right\}, \quad (1.9)$$

其中

$$\sum_1 = u_{1,0} + u_{0,1} + u_{-1,0} + u_{0,-1},$$

$$\sum_2 = u_{1,1} + u_{-1,1} + u_{-1,-1} + u_{1,-1},$$

$$\sum_3 = u_{2,0} + u_{0,2} + u_{-2,0} + u_{0,-2}.$$

若 $u_{0,0}$ 是一个边界点, 例如在数据(1.8)中, 我们只知

$$u_{i,j}, \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$

则有如下的 9 点边界磨光公式:

$$u'_{0,0} = \frac{1}{8} \left\{ 3u_{0,0} + 2\sum'_1 + \sum'_2 - \sum'_3 \right\}, \quad (1.10)$$

其中

$$\sum'_1 = u_{1,0} + u_{0,1} + u_{0,-1},$$

$$\sum'_2 = u_{1,1} + u_{1,-1},$$

$$\sum'_3 = u_{2,0} + u_{0,2} + u_{0,-2}.$$

为验证公式(1.9)和(1.10), 只需将公式右端所涉及的诸 $u_{i,j}$ 在 $u_{0,0}$ 点作 Taylor 展开即可. 有关细节请读者自行给出.

§ 2 累加弦长法

如前所述,3次样条插值是一类比较简单而有效的曲线生成和逼近的方法.由于3次样条的力学背景是无限长细梁在集中荷载作用下的弯曲变形曲线,其中一个条件是小挠度,即 $|y'|$ 不大.然而实际问题中经常会遇到大挠度曲线的逼近问题.为解决此类问题,人们想出来许多种办法.其中一类最有效的方法是将曲线参数化.例如分段研究3次参数曲线

$$\begin{cases} x = \alpha_0 + \alpha_1 t + \frac{1}{2} \alpha_2 t^2 + \frac{1}{6} \alpha_3 t^3, \\ y = \beta_0 + \beta_1 t + \frac{1}{2} \beta_2 t^2 + \frac{1}{6} \beta_3 t^3. \end{cases} \quad (2.1)$$

首先遇到的问题是,以什么作为(2.1)中的参数?一个最容易想到的参数是曲线的长度 s .遗憾的是,曲线(2.1)的弧长 s 不能作为它的参数.事实上,假如取 $t = s$,则由

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \equiv 1$$

可知

$$\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} \equiv 0,$$

亦即

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (\alpha_3^2 + \beta_3^2) t^3 + \frac{3}{2} (\alpha_2 \alpha_3 + \beta_2 \beta_3) t^2 \\ & + (\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \alpha_1 \alpha_3 + \beta_1 \beta_3) t + (\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2) \equiv 0, \end{aligned}$$

所以

$$\alpha_2 = \beta_2 = \alpha_3 = \beta_3 = 0.$$

它表明曲线(2.1)已退化为直线.因此用弧长作为参数时,曲线(2.1)只能表示直线.所以必须另寻其他参数.本节讲述用弦长作为参数的所谓累加弦长法,其大意是:设给定直角坐标系中的 $n+1$ 个点

$$P_i = (x_i, y_i), \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

记

$$\begin{aligned} l_j &= [(x_j - x_{j-1})^2 + (y_j - y_{j-1})^2]^{1/2}, \quad j = 1, \dots, n, \\ t_i &= \sum_{j=1}^i l_j, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad t_0 = 0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

则形成了一个对参数轴 t 的一个剖分 $\Delta: 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$.

对于这样的剖分 Δ , 分别以 x_i 和 y_i ($i = 0, 1, \dots, n$) 为数据, 构造两个 3 次插值样条 $x(t)$ 和 $y(t)$. 而参数曲线

$$\mathbf{P}(t) = (x(t), y(t))$$

称为是累加弦长 3 次参数样条曲线. 该曲线在诸结点处的每个分量均达到 C^2 连续, 即切线和曲率皆连续. 注意, 当人们采用参数 t 时, 按上述参数 t 的取法可知, $x(t)$ 与 $y(t)$ 对于 t 的导数值均不大, 即符合小挠度的要求. 利用通常 3 次样条插值的算法可以分别求得 $x(t)$ 和 $y(t)$.

若将累加弦长 3 次样条曲线方程写成向量形式, 例如记 P_{i-1} 与 P_i 间的参数曲线为

$$\mathbf{P}_i(t) = \mathbf{R}_3^{(i)} t^3 + \mathbf{R}_2^{(i)} t^2 + \mathbf{R}_1^{(i)} t + \mathbf{R}_0^{(i)}, \quad t_{i-1} \leq t \leq t_i, \quad (2.3)$$

其中弦长 $l_i = \overline{P_{i-1} P_i}$ 参数轴上结点的坐标 $t_i = \sum_{j=1}^i l_j$, $i = 1, \dots, n$, 而

$$\mathbf{P}_i(t_{i-1}) = P_{i-1}, \quad \mathbf{P}_i(t_i) = P_i.$$

要求在 P_i 处保证 1 阶和 2 阶向量连续, 即要求

$$\begin{aligned} \mathbf{P}'(t_i - 0) &= \mathbf{P}'(t_i + 0) \equiv \mathbf{m}_i, \\ \mathbf{P}''(t_i - 0) &= \mathbf{P}''(t_i + 0) \equiv \mathbf{M}_i, \end{aligned} \quad (2.4)$$

其中 \mathbf{m}_i 与 \mathbf{M}_i 为待求向量. 类似于普通 3 次样条插值的计算方法, 在 P_i 处的光滑连接性可推出关系式

$$\begin{aligned} l_i \mathbf{M}_i &= -2(3\mathbf{e}_i - \mathbf{m}_{i-1} - 2\mathbf{m}_i), \\ l_{i+1} \mathbf{M}_i &= 2(3\mathbf{e}_{i+1} - 2\mathbf{m}_i - \mathbf{m}_{i+1}). \end{aligned}$$

从而得到如下连续性方程

$$\begin{aligned} \lambda_i \mathbf{m}_{i-1} + 2\mathbf{m}_i + \mu_i \mathbf{m}_{i+1} &= 3(\lambda_i \mathbf{e}_i + \mu_i \mathbf{e}_{i+1}), \\ i &= 1, \dots, n-1, \end{aligned} \quad (2.5)$$

其中

$$\lambda_i = \frac{l_{i+1}}{l_i + l_{i+1}}, \quad \mu_i = \frac{l_i}{l_i + l_{i+1}}, \quad \mathbf{e}_i = \frac{1}{l_i} \overrightarrow{P_{i-1} P_i}.$$

也可得到关于 \mathbf{M} 的连续性方程

$$\begin{aligned} \mu_i \mathbf{M}_{i-1} + 2\mathbf{M}_i + \lambda_i \mathbf{M}_{i+1} &= 6(\mathbf{e}_{i+1} - \mathbf{e}_i) / (l_i + l_{i+1}), \\ i &= 1, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (2.6)$$

(2.5)或(2.6)中分别加上端点的两个条件后,即可求得诸 \mathbf{M} 和 \mathbf{m} .

在求出诸 \mathbf{M} 和 \mathbf{m} 后,介于 P_{i-1} 与 P_i 间的参数曲线方程为

$$\mathbf{P}_i(t) = [1, t - t_{i-1}, (t - t_{i-1})^2, (t - t_{i-1})^3] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_0^{(i)} \\ \boldsymbol{\alpha}_1^{(i)} \\ \boldsymbol{\alpha}_2^{(i)} \\ \boldsymbol{\alpha}_3^{(i)} \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

$$t_{i-1} \leq t \leq t_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

其中

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_0^{(i)} \\ \boldsymbol{\alpha}_1^{(i)} \\ \boldsymbol{\alpha}_2^{(i)} \\ \boldsymbol{\alpha}_3^{(i)} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_i \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{i-1} \\ \mathbf{P}_i \\ \mathbf{m}_{i-1} \\ \mathbf{m}_i \end{bmatrix} = \mathbf{B}_i \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{i-1} \\ \mathbf{P}_i \\ \mathbf{M}_{i-1} \\ \mathbf{M}_i \end{bmatrix}, \quad (2.8)$$

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3/l_i^2 & 3/l_i^2 & -2/l_i & -1/l_i \\ 2/l_i^3 & -2/l_i^3 & 1/l_i^2 & 1/l_i^2 \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/l_i & 1/l_i & -l_i/3 & -l_i/6 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/6l_i & 1/6l_i \end{bmatrix}, \quad (2.10)$$

而 \mathbf{P}_i 表示 $P_i(x_i, y_i)$ 的位置向量 ($i = 0, \dots, n$).

从累加弦长 3 次参数曲线的表达式(2.7),(2.8),(2.9)和(2.10)中不难发现,它们仅仅依赖于诸型值点 P_i 的位置和弦长 l_i 这样一批几何量,而与坐标系的选择无关.

有关累加弦长 3 次参数曲线的进一步讨论此处不拟展开.

类似于本节中的讨论,请读者建立累加弦长 2 次参数曲线的插值算法(留作习题).

§ 3 Bézier 方法

n 次 Bézier 曲线定义为

$$\mathbf{C}(u) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(u) \mathbf{P}_i, \quad 0 \leq u \leq 1, \quad (3.1)$$

其中基函数组 $\{B_{i,n}(u)\}$ 为 n 次 Bernstein 多项式的基函数组

$$B_{i,n}(u) = \binom{n}{i} u^i (1-u)^{n-i}, \quad (3.2)$$

而(3.1)中的几何系数 $\{\mathbf{P}_i\}$ 称为控制点。注意在(3.1)中, $u \in [0,1]$ 。

从 Bézier 曲线的定义(3.1)可知,由它表示的曲线的形状只与 $\{\mathbf{P}_i\}_{i=0}^n$ (控制多边形)的位置有关,而与坐标系的选取无关,即它具有几何不变性。这是一条很重要的性质。

例 1 当 $n=1$ 时,Bézier 曲线为

$$\mathbf{C}(u) = (1-u) \mathbf{P}_0 + u \mathbf{P}_1.$$

它表明 1 次 Bézier 曲线恰为以 \mathbf{P}_0 和 \mathbf{P}_1 为两端的一直线段。

例 2 当 $n=2$ 时,Bézier 曲线为

$$\mathbf{C}(u) = (1-u)^2 \mathbf{P}_0 + 2u(1-u) \mathbf{P}_1 + u^2 \mathbf{P}_2.$$

它是一条从 \mathbf{P}_0 到 \mathbf{P}_2 的抛物线(图 3.1)。

由 $\{\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2\}$ 组成的多边形称为控制多边形。 $\mathbf{P}_0 = \mathbf{C}(0)$, $\mathbf{P}_2 = \mathbf{C}(1)$. 该曲线的端点处的切向

量分别平行于 $\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0$ 和 $\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1$. 不难看出这条曲线含于三角形 $\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2$ 中。

例 3 当 $n=3$ 时,Bézier 曲线为(图 3.2, 图 3.3, 图 3.4)

$$\mathbf{C}(u) = (1-u)^3 \mathbf{P}_0 + 3u(1-u)^2 \mathbf{P}_1 + 3u^2(1-u) \mathbf{P}_2 + u^3 \mathbf{P}_3.$$

不难看出下列性质:(i)控制折线近似于该曲线的形状;(ii) $\mathbf{P}_0 = \mathbf{C}(0)$, $\mathbf{P}_3 = \mathbf{C}(1)$;(iii) 端点处的切线方向分别平行于 $\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0$ 和 $\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2$;(iv) 曲线包含于所有控制点的凸包中,即具有凸包性质;(v) 变差缩小性质:任何给定的直线与该曲线的交点数均不超过它与该曲线控制多边形的交点数;(vi) 开始($u=0$), 曲线随 $\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2$ 的方向转动,

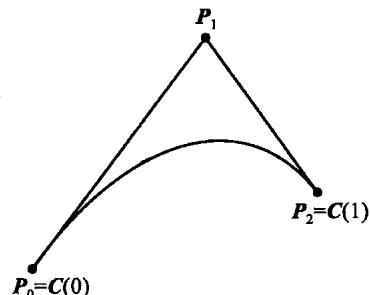


图 3.1

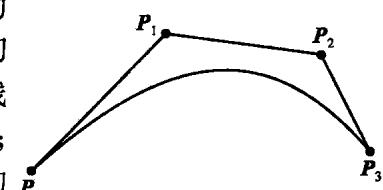


图 3.2

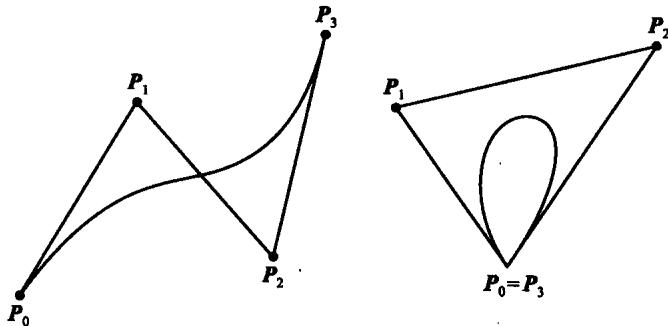


图 3.3

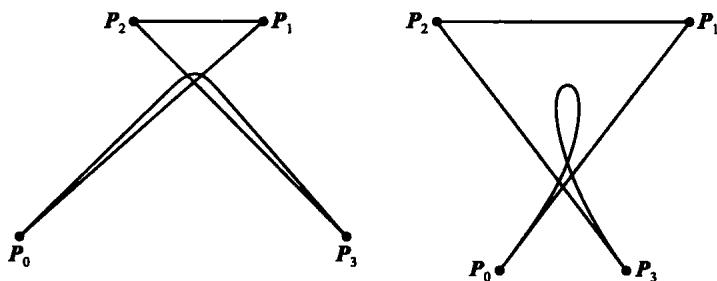


图 3.4

而在 $u=1$ 处, 曲线随 $P_1P_2P_3$ 的方向转动; (vii) 控制折线的一个回路, 未必会导致曲线也有回路(图 3.4).

基函数 $\{B_{i,n}(u)\}$ 具有如下性质:

(1) 非负性:

$$B_{i,n}(u) \geq 0, \quad \text{对一切 } i, n, \quad 0 \leq u \leq 1; \quad (3.3)$$

(2) 单位分解性:

$$\sum_{i=0}^n B_{i,n}(u) \equiv 1, \quad 0 \leq u \leq 1; \quad (3.4)$$

(3)

$$B_{0,n}(0) = B_{n,n}(1) = 1; \quad (3.5)$$

(4) $B_{i,n}(u)$ 在 $u = i/n$ 处取到它在 $[0,1]$ 上的最大值;

(5) 对称性: 对任意 n , 多项式集合 $\{B_{i,n}(u)\}$ 中每一个函数关于 $u=1/2$ 是对称的;

(6) 递推关系:

$$B_{i,n}(u) = (1-u)B_{i,n-1}(u) + uB_{i-1,n-1}(u), \quad (3.6)$$

当 $i < 0$ 或 $i > n$ 时, 定义 $B_{i,n}(u) \equiv 0$;

(7) 导数:

$$B'_{i,n}(u) = \frac{d}{du} B_{i,n}(u) = n(B_{i-1,n-1}(u) - B_{i,n-1}(u)), \quad (3.7)$$

其中约定 $B_{-1,n-1}(u) \equiv B_{n,n-1}(u) \equiv 0$.

关系式(3.6)指出了计算 Bernstein 多项式在 u 处值的方法. 事实上, 它可采取列表的方法来求得, 而表中第 n 列上的诸元素依次由 $\{B_{i,n}(u)\}$ 给出. 此处不拟列出.

根据(3.7), 可以求得 Bézier 曲线导数的一般表达式

$$\begin{aligned} C'(u) &= \frac{d}{du} \left(\sum_{i=0}^n B_{i,n}(u) \mathbf{P}_i \right) = \sum_{i=0}^n B'_{i,n}(u) \mathbf{P}_i \\ &= \sum_{i=0}^n n(B_{i-1,n-1}(u) - B_{i,n-1}(u)) \mathbf{P}_i \\ &= n \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(u) (\mathbf{P}_{i+1} - \mathbf{P}_i). \end{aligned} \quad (3.8)$$

特别地, 在端点处有

$$\begin{aligned} C'(0) &= n(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0), \quad C''(0) = n(n-1)(\mathbf{P}_0 - 2\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2), \\ C'(1) &= n(\mathbf{P}_n - \mathbf{P}_{n-1}), \quad C''(1) = n(n-1)(\mathbf{P}_n - 2\mathbf{P}_{n-1} + \mathbf{P}_{n-2}). \end{aligned} \quad (3.9)$$

从(3.8)可知, n 次 Bézier 曲线的导数是一条 $n-1$ 次 Bézier 曲线. 而(3.9)表明, 在 $u=0$ 和 $u=1$ 两端点的导数是对称的. 在一个端点处的 k 阶导数, 只依赖于从这个端点算起的 $k+1$ 个控制点.

2 次 Bézier 曲线

$$C(u) = \sum_{i=0}^2 B_{i,2}(u) \mathbf{P}_i$$

也可以写成

$$\begin{aligned} C(u) &= (1-u)^2 \mathbf{P}_0 + 2u(1-u) \mathbf{P}_1 + u^2 \mathbf{P}_2 \\ &= (1-u)[(1-u)\mathbf{P}_0 + u\mathbf{P}_1] + u[(1-u)\mathbf{P}_1 + u\mathbf{P}_2], \end{aligned}$$

所以 2 次 Bézier 曲线 $C(u)$ 也可以由两条 1 次 Bézier 曲线的线性插值而得到. 一般地, 如用 $\mathbf{C}_n(\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_n)$ 表示一条 n 次 Bézier 曲线, 则由(3.6)有

$$\mathbf{C}_n(\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_n) = (1-u)\mathbf{C}_{n-1}(\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_{n-1}) + u\mathbf{C}_{n-1}(\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n). \quad (3.10)$$

固定 $u = u_0$, 并用 $\mathbf{P}_{0,i}$ 记 \mathbf{P}_i , 则由(3.10)式可得到如下的计算 n 次 Bézier 曲线上点 $\mathbf{C}(u_0) = \mathbf{P}_{n,0}(u_0)$ 的递推算法:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k,i}(u_0) &= (1 - u_0)\mathbf{P}_{k-1,i}(u_0) + u_0\mathbf{P}_{k-1,i+1}(u_0), \\ k &= 1, 2, \dots, n; i = 0, 1, \dots, n-k. \end{aligned} \quad (3.11)$$

这就是所谓的 de Casteljau 算法. 请读者自己给出 $n=2$ 和 $n=3$ 时, 该算法的几何解释, 并绘出相应的图形(留作习题).

任一条 n 次 Bézier 曲线 $\mathbf{C}(u) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(u) \mathbf{P}_i$, 均可以表示成同它等价的 $n+1$ 次 Bézier 曲线, 即可求得一组 $\{\mathbf{P}_i^{(1)}\}_{i=0}^{n+1}$, 使得

$$\sum_{i=0}^n B_{i,n}(u) \mathbf{P}_i = \sum_{i=0}^{n+1} B_{i,n+1}(u) \mathbf{P}_i^{(1)}. \quad (3.12)$$

为确定诸 $\mathbf{P}_i^{(1)}, i=0, \dots, n$, 用 $u + (1-u) \equiv 1$ 乘(3.12)式左端, 并比较两端系数, 可得

$$\mathbf{P}_i^{(1)} = \frac{1}{n+1} [i\mathbf{P}_{i-1} + (n-i+1)\mathbf{P}_i], \quad i=0, 1, \dots, n+1, \quad (3.13)$$

$$\mathbf{P}_{-1} = \mathbf{P}_{n+1} = \mathbf{O}.$$

(3.12)~(3.13) 称为 Bézier 曲线的升阶公式. 当 $n=3$ 时, 升阶公式引起的控制多边形的变化如图 3.5 所示.

采用把 n 次 Bézier 曲线 $\sum_{i=0}^n B_{i,n}(u) \mathbf{P}_i$ 乘 $\sum_{j=0}^r B_{j,r}(u) \equiv 1$ 的办法, 也可使之升阶为一条 $n+r$ 次 Bézier 曲线

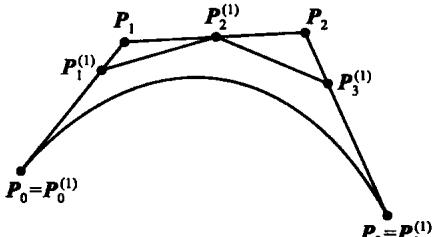


图 3.5

$$\sum_{i=0}^n B_{i,n}(u) \mathbf{P}_i = \sum_{i=0}^{n+r} B_{i,n+r}(u) \mathbf{P}_i^{(r)}, \quad (3.14)$$

其中 $\mathbf{P}_i^{(r)}$ 为

$$\mathbf{P}_i^{(r)} = \sum_{j=0}^r \binom{i}{j} \binom{n+r-i}{n-j} \mathbf{P}_j / \binom{n+r}{n}, \quad i=0, 1, \dots, n+r. \quad (3.15)$$

用 \mathbf{Q}_r 记由 $\mathbf{P}_i^{(r)} (i=0, 1, \dots, n+r)$ 所构成的控制多边形, 则当 r 趋于 $+\infty$ 时, \mathbf{Q}_r 收敛于由(3.14)给出的 n 次 Bézier 曲线

$$\mathbf{C}(u) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(u) \mathbf{P}_i.$$

概括起来,Bézier 曲线方法具有很强的几何特征. 方程(3.9)连同凸包性质, 以及变差缩小性质等使得 Bézier 曲线适合于曲线的交互式设计. 控制点使设计者可直观地控制曲线的形状. de Casteljau 算法不仅舍入误差小, 而且直观上可将其看做是曲线附近一些点之间线性插值的简单重复. Bézier 方法的不便之处在于点的计算效率不高.

以下介绍有理 Bézier 曲线. 如所知, 多项式虽然有很多方便之处, 但也有许多的曲线、曲面是不能用多项式精确表示的. 例如圆、椭圆、双曲线、圆柱体、圆锥体和球等. 作为例子, 我们可以证明 xy 平面上的以原点为心的单位圆周是不能用多项式坐标函数来表示的. 若不然, 假定

$$\begin{aligned}x(u) &= a_0 + a_1 u + \cdots + a_n u^n, \\y(u) &= b_0 + b_1 u + \cdots + b_n u^n.\end{aligned}$$

则由 $x^2 + y^2 - 1 = 0$, 推出如下的关系式

$$\begin{aligned}(a_0^2 + b_0^2 - 1) + 2(a_0 a_1 + b_0 b_1)u + (a_1^2 + 2a_0 a_2 + b_1^2 + 2b_0 b_2)u^2 + \cdots \\+ (a_{n-1}^2 + 2a_{n-2} a_n + b_{n-1}^2 + 2b_{n-2} b_n)u^{2n-2} \\+ 2(a_n a_{n-1} + b_n b_{n-1})u^{2n-1} + (a_n^2 + b_n^2)u^{2n} &\equiv 0.\end{aligned}$$

从而所有的 a_i 和 b_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 恒为 0, 即

$$x(u) = a_0, \quad y(u) = b_0,$$

此与假设矛盾.

如同人们知道的那样, 所有的圆锥曲线(包括圆、椭圆、双曲线、抛物线等)都可用作为两多项式之比的有理函数表示出来, 即它们可表示为

$$x(u) = \frac{X(u)}{W(u)}, \quad y(u) = \frac{Y(u)}{W(u)}, \quad (3.16)$$

其中 $X(u)$, $Y(u)$ 和 $W(u)$ 为多项式. 注意上式中两有理函数具有相同的分母 $W(u)$.

例如, 以原点为心、以 1 为半径的圆可表示为

$$x(u) = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad y(u) = \frac{2u}{1+u^2}.$$

再如, 以 $(0, 4/3)$ 为中心, 以 y 轴为实轴的双曲线可表示为

$$x(u) = \frac{-1+2u}{1+2u-2u^2}, \quad y(u) = \frac{4u(1-u)}{1+2u-2u^2}.$$

至于抛物线,它可用有理分式的特例——多项式表示出来.

为研究一般情形,定义 n 次有理 Bézier 曲线

$$\mathbf{C}(u) = \frac{\sum_{i=0}^n B_{i,n}(u) \omega_i \mathbf{P}_i}{\sum_{i=0}^n B_{i,n}(u) \omega_i}, \quad 0 \leq u \leq 1, \quad (3.17)$$

其中 $\{B_{i,n}(u)\}$ 仍是 Bernstein 基函数, $\{\omega_i\}$ 是一批称为权(系数)的数, 而 $\mathbf{P}_i = (x_i, y_i, z_i), i = 0, 1, \dots, n$. 除非特别声明, 恒假定 $\omega_i > 0 (i = 0, 1, \dots, n)$. 因而

$$W(u) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(u) \omega_i > 0, \quad 0 \leq u \leq 1.$$

为讨论方便, 常记

$$\mathbf{C}(u) = \sum_{i=0}^n R_{i,n}(u) \mathbf{P}_i, \quad 0 \leq u \leq 1, \quad (3.18)$$

其中

$$R_{i,n}(u) = \frac{B_{i,n}(u) \omega_i}{\sum_{j=0}^n B_{j,n}(u) \omega_j}. \quad (3.19)$$

上述的 $\{R_{i,n}(u)\}$ 是这类曲线的有理基函数.

按 $R_{i,n}(u)$ 的定义和 Bernstein 基的性质, 可知它们具有如下性质:

(1) 非负性:

$$R_{i,n}(u) \geq 0, \text{ 对一切 } i, n \text{ 和 } 0 \leq u \leq 1;$$

(2) 单位分解性:

$$\sum_{i=0}^n R_{i,n}(u) \equiv 1, \quad 0 \leq u \leq 1;$$

$$(3) R_{0,n}(0) = R_{n,n}(1) = 1;$$

$$(4) R_{i,n}(u) \text{ 在 } [0,1] \text{ 上达到一个最大值};$$

(5) 若 $\omega_0 = \dots = \omega_n = 1$, 则 $R_{i,n}(u) \equiv B_{i,n}(u) (i = 0, 1, \dots, n)$, 即 $R_{i,n}(u)$ 是 $B_{i,n}(u)$ 的推广.

有理 Bézier 曲线具有下列几何性质:

(1) 凸包性: 它们包含在由控制点 $\{\mathbf{P}_i\}$ 形成的凸包中;

(2) 变换不变性: 在对控制点组进行旋转、平移、按比例伸缩等变换下, 有理

Bézier 曲线不变;

- (3) 变差缩小性:与多项式型 Bézier 曲线的叙述相同;
- (4) 端点插值条件:

$$C(0) = P_0, \quad C(1) = P_n;$$

(5) 端点处的导数:在端点 $u=0$ ($u=1$) 处的 k 阶导数, 依赖于起首(最后) $k+1$ 个控制点和权系数. 特别地, $C'(0)$ 和 $C'(1)$ 分别平行于 $P_1 - P_0$ 和 $P_n - P_{n-1}$;

(6) 多项式 Bézier 曲线是有理 Bézier 曲线的特例.

例 4 考虑有理 Bézier 圆弧.

$$C(u) = (x(u), y(u)) = \left(\frac{1-u^2}{1+u^2}, \frac{2u}{1+u^2} \right), \quad 0 \leq u \leq 1$$

表示单位圆的四分之一(图 3.6(a)).

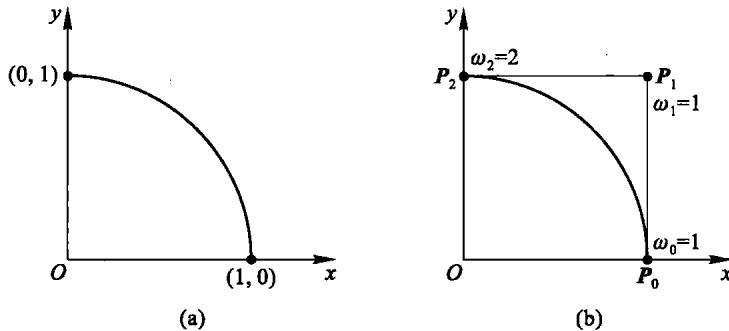


图 3.6

按性质(4)和(5), $P_0 = (1, 0)$, $P_1 = (1, 1)$, 而 $P_2 = (0, 1)$ (图 3.6(b)). 为得到该段圆弧的 2 次有理 Bézier 表达式, 先看分母 $W(u)$, 它可写成

$$\begin{aligned} W(u) &= 1 + u^2 = \sum_{i=0}^2 B_{i,2}(u) \omega_i \\ &= (1-u)^2 \omega_0 + 2u(1-u) \omega_1 + u^2 \omega_2, \end{aligned}$$

分别代入 $u=0$, $u=1$ 和 $u=2$, 可得 $\omega_0=1$, $\omega_2=2$, $\omega_1=1$. 所以最后可得它的 2 次有理 Bézier 表达式.

具有(3.12)型坐标函数的有理曲线有一种优美的几何解释, 因而产生效率高的处理方法和紧凑的数据存储. 这种思想是采用齐次坐标来把 n 维空间中的有理曲线作为 $n+1$ 维空间中的多项式曲线来表示. 设 $P=(x, y, z)$ 是 3 维欧氏

空间中的一点，则 P 可被写作 4 维空间中的点

$$\begin{aligned} P^w &= (wx, wy, wz, w) \\ &= (X, Y, Z, W), \quad w \neq 0. \end{aligned}$$

现在 P 可以从 P^w 的所有坐标被它第 4 个坐标 W 去除，即从原点把 P^w 映射到超平面 $W=1$ 上而得到。图 3.7 给出了 2 维情形的图示，其中 $P = (x, y)$ 。用 H 表示这种映射，这是一种以原点为中心的透视映射：

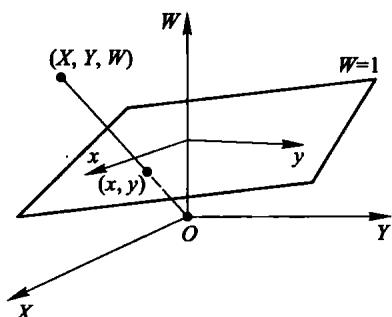


图 3.7 按齐次坐标表示
欧氏空间的点

$$P = H\{P^w\} = H\{(X, Y, Z, W)\} = \begin{cases} \left(\frac{X}{W}, \frac{Y}{W}, \frac{Z}{W}\right), & \text{若 } W \neq 0, \\ \text{方向}(X, Y, Z), & \text{若 } W = 0. \end{cases} \quad (3.20)$$

注意对任意 $x, y, z, w_1, w_2 (w_1 \neq w_2)$,

$$\begin{aligned} H\{P^{w_1}\} &= H\{(w_1 x, w_1 y, w_1 z, w_1)\} = (x, y, z) \\ &= H\{(w_2 x, w_2 y, w_2 z, w_2)\} = H\{P^{w_2}\}. \end{aligned}$$

现在对给定的控制点组 $\{P_i\}$ 和权 $\{w_i\}$ ，构造带权控制点组 $P_i^w = (w_i x_i, w_i y_i, w_i z_i, w_i)$ 。然后定义 4 维空间中的非有理(多项式)Bézier 曲线

$$C^w(u) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(u) P_i^w. \quad (3.21)$$

再用透视映射 H 作用于 $C^w(u)$ ，则得出相应的有理 Bézier 曲线(3.13)。写出(3.21)的坐标函数，得到

$$\begin{aligned} X(u) &= \sum_{i=0}^n B_{i,n}(u) w_i x_i, \quad Y(u) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(u) w_i y_i, \\ Z(u) &= \sum_{i=0}^n B_{i,n}(u) w_i z_i, \quad W(u) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(u) w_i. \end{aligned}$$

置这条曲线在 3 维空间中，有

$$x(u) = \frac{X(u)}{W(u)} = \frac{\sum_{i=0}^n B_{i,n}(u) w_i x_i}{\sum_{i=0}^n B_{i,n}(u) w_i},$$

$$y(u) = \frac{Y(u)}{W(u)} = \frac{\sum_{i=0}^n B_{i,n}(u) w_i y_i}{\sum_{i=0}^n B_{i,n}(u) w_i},$$

$$z(u) = \frac{Z(u)}{W(u)} = \frac{\sum_{i=0}^n B_{i,n}(u) w_i z_i}{\sum_{i=0}^n B_{i,n}(u) w_i}.$$

采用向量记号,则有

$$\mathbf{C}(u) = (x(u), y(u), z(u))$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sum_{i=0}^n B_{i,n}(u) w_i (x_i, y_i, z_i)}{\sum_{i=0}^n B_{i,n}(u) w_i} \\ &= \frac{\sum_{i=0}^n B_{i,n}(u) w_i \mathbf{P}_i}{\sum_{i=0}^n B_{i,n}(u) w_i}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

所以我们是在 4 维空间中处理非有理形式,再利用映射 H 把结果安置到 3 维空间中.

前面讲述的 Bézier 曲线(多项式型或有理型)是一条整体曲线. 因为一个多项式(有理分式也如此)的次数太高会影响其保形性能, 所以通常人们总是采用分段较低次曲线来逼近整条曲线. 也就是说, 在理论和应用上, 人们还需探讨 Bézier 曲线段之间的连接问题, 即讨论 Bézier 样条曲线的问题. 为此, 只需讨论相邻两条 Bézier 曲线的光滑拼接问题.

以多项式 Bézier 曲线的拼接为例. 设

$$\mathbf{C}_1(u) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(u) \mathbf{P}_i \quad \text{和} \quad \mathbf{C}_2(u) = \sum_{i=0}^m B_{i,m}(u) \mathbf{Q}_i, \quad 0 \leq u \leq 1$$

分别为 n 次和 m 次的 Bézier 曲线. 显然 $\mathbf{C}_1(u)$ 与 $\mathbf{C}_2(u)$ C^0 拼接(即连续相连)的充要条件为

$$\mathbf{C}_1(1) = \mathbf{C}_2(0), \text{ 即 } \mathbf{P}_n = \mathbf{Q}_0. \quad (3.23)$$

所谓 $\mathbf{C}_1(u)$ 与 $\mathbf{C}_2(u)$ 1 阶几何连续(GC^1 连续), 乃指它们不仅连续相连(即 C^0

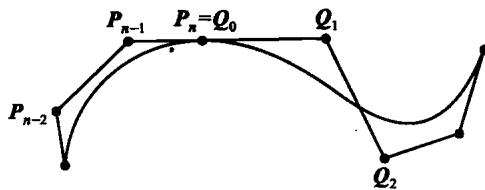


图 3.8

连续, 或 GC^0 连续), 而且在相连接处有相同的切矢方向, 所以 $C_1(u)$ 与 $C_2(u)$ GC^1 光滑拼接的充要条件为

$$P_n = Q_0 \quad \text{且} \quad C'_1(1) = \alpha C'_2(0), \quad \alpha > 0,$$

即

$$\begin{cases} P_n = Q_0, \\ n(P_n - P_{n-1}) = \alpha m(Q_1 - Q_0). \end{cases} \quad (3.24)$$

(3.24) 中的第二个式子的几何意义为 $P_{n-1}, P_n (= Q_0), Q_1$ 共线.

我们不加证明地指出, $C_1(u)$ 与 $C_2(u)$ 2 阶几何拼接的充要条件为

$$\begin{cases} P_n = Q_0, \\ n(P_n - P_{n-1}) = \alpha m(Q_1 - Q_0), \alpha > 0, \\ n(n-1)(P_{n-1} - P_{n-2}) = \eta \cdot n(n-1)(Q_1 - Q_0) - \alpha^2 m(m-1)(Q_2 - Q_1), \end{cases} \quad (3.25)$$

其中

$$\eta = \alpha \frac{m}{n} + \alpha^2 \frac{m(m-1)}{n(n-1)} - \beta \frac{m}{n(n-1)}, \quad \beta \text{ 任意.}$$

采用张量积技巧, 可以形成如下的 Bézier 曲面

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_{i,n}(u) B_{j,m}(v) P_{i,j}, \quad 0 \leq u, v \leq 1. \quad (3.26)$$

对于固定的 $u = u_0$,

$$C_{u_0}(v) = S(u_0, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_{i,n}(u_0) B_{j,m}(v) P_{i,j}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{j=0}^m B_{j,m}(v) \left(\sum_{i=0}^n B_{i,n}(u_0) \mathbf{P}_{i,j} \right) \\
 &= \sum_{j=0}^m B_{j,m}(v) \mathbf{Q}_j(u_0),
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

其中

$$\mathbf{Q}_j(u_0) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(u_0) \mathbf{P}_{i,j}, \quad j = 0, \dots, n$$

是在该曲面上的 Bézier 曲线.

Bézier 曲面(3.26)具有以下性质:

(i) 非负性: 对一切 i, j, u, v , 有

$$B_{i,n}(u) B_{j,m}(v) \geq 0;$$

(ii) 单位分解性: 对一切 u 和 v , 有

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_{i,n}(u) B_{j,m}(v) \equiv 1;$$

(iii) 凸包性: $\mathbf{S}(u, v)$ 包含于它的控制点组的凸包中;

(iv) 变换不变性;

(v) 曲面插值于 4 个角落(cornor)上的控制点;

(vi) 曲面(3.26)不具有变差缩小性质.

de Casteljau 算法(3.11)也可以推广到 Bézier 曲面的情形. 注意(3.27), 设 (u_0, v_0) 已固定. 对于确定的 j_0 ,

$$\mathbf{Q}_{j_0}(u_0) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(u_0) \mathbf{P}_{i,j_0}$$

是应用 de Casteljau 算法到第 j_0 行控制点 $\{\mathbf{P}_{i,j_0}\}, i = 0, \dots, n$ 所求得的点. 因此应用 de Casteljau 算法 $(m+1)$ 次, 产生 $\mathbf{C}_{u_0}(v)$; 并且再一次应用 de Casteljau 算法到 $\mathbf{C}_{u_0}(v), (v=v_0)$, 则得到 $\mathbf{C}_{u_0}(v_0) = \mathbf{S}(u_0, v_0)$. 这需要 $(m+1)[n(n+1)+m]/2$ 次线性插值. 完全对称地, 可先采用 de Casteljau 算法 $(n+1)$ 次计算 $\mathbf{C}_{u_0}(u)$, 再计算 $\mathbf{C}_{v_0}(u_0) = \mathbf{S}(u_0, v_0)$. 这需要 $(n+1)[m(m+1)+n]/2$ 次线性插值. 因此, 当 $n > m$ 时, 应先计算 $\mathbf{C}_{v_0}(u)$, 再计算 $\mathbf{C}_{v_0}(u_0)$; 否则应先计算 $\mathbf{C}_{u_0}(v)$, 再计算 $\mathbf{C}_{u_0}(v_0)$.

我们也可以引入有理 Bézier 曲面. 此处不拟进一步介绍.

§ 4 B - 样条方法

为了介绍 B -样条方法, 需要进一步讨论 B -样条. 以前所介绍的 B -样条定义是按截断多项式的差商给出的. 在应用上更为方便的 B -样条定义是由递推公式给出的.

设 $U = \{u_0, \dots, u_m\}$ 是一不减的实数序列, 即 $u_i \leq u_{i+1}, i = 0, \dots, m-1$. 以 U 作为样条结点, p 次的第 i 个 B -样条基函数 $N_{i,p}(u)$ 定义为

$$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1, & \text{当 } u_i \leq u < u_{i+1}, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} \quad (4.1)$$

$$N_{i,p}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) + \frac{u_{i+p+1} - u}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u),$$

此处约定, 当上式中出现 $0/0$ 形式的商时, 规定其比值为 0.

注意到以下事实:

- (i) $N_{i,0}(u)$ 是阶梯函数, 它在半开区间 $[u_i, u_{i+1})$ 之外处处为 0;
- (ii) 当 $p > 0$ 时, $N_{i,p}(u)$ 是两个 $(p-1)$ 次 B -样条基的线性组合;
- (iii) 为计算 B -样条基, 需要给定结点向量 U 和次数 p ;
- (iv) $N_{i,p}(u)$ 定义在整个实轴上, 但一般只用到它在 $[u_0, u_m]$ 上的性质;
- (v) 半开区间 $[u_i, u_{i+1})$ 称为第 i 结点支撑. 因为结点未必都不相同, 所以其长度可以是 0;
- (vi) p 次函数的计算可按下述表格来实现

	$N_{0,0}$			
		$N_{0,1}$		
$N_{1,0}$			$N_{0,2}$	
				$N_{0,3}$
		$N_{1,1}$		
$N_{2,0}$			$N_{1,2}$	
				$N_{1,3}$
		$N_{2,1}$		
$N_{3,0}$			$N_{2,2}$	\vdots
				$N_{3,1}$
	$N_{4,0}$			\vdots

在不致引起误解时,常用 $N_{i,p}$ 表示 $N_{i,p}(u)$.

考察 $N_{i,2}(u)$, 可知

$$N_{0,2} = \begin{cases} (1-u)^2, & 0 \leq u < 1, \\ 0, & \text{别处,} \end{cases}$$

$$N_{1,2} = \begin{cases} 2u(1-u), & 0 \leq u < 1, \\ 0, & \text{别处,} \end{cases}$$

$$N_{2,2} = \begin{cases} u^2, & 0 \leq u < 1, \\ 0, & \text{别处.} \end{cases}$$

所以在区间 $[0,1]$ 内, $N_{i,2}$ 是 2 次 Bernstein 多项式的基函数. 因此, 具有

$$U = \underbrace{\{0, \dots, 0\}}_{p+1}, \underbrace{\{1, \dots, 1\}}_{p+1}$$

型结点向量的 B -样条的表达式是 Bézier 表达式的一种推广.

以下列出 B -样条基函数的若干重要性质, 它们在刻画 B -样条曲线和曲面的几何特征时很有用.

性质 1 局部支集性:

$$N_{i,p}(u) = 0, \quad u \notin [u_i, u_{i+p+1}).$$

性质 2 在任意给定的 $[u_j, u_{j+1})$ 内, 最多有 $p+1$ 个 $N_{i,p}$ 是非零的, 它们分别是 $N_{j-p,p}, \dots, N_{j,p}$. 例如, 在 $[u_3, u_4)$ 内非零的 0 阶 B -样条仅有 $N_{3,0}$; 而非零的 3 次 B -样条为 $N_{0,3}, \dots, N_{3,3}$.

性质 3 非负性:

$$N_{i,p}(u) \geq 0, \quad \text{对一切 } i, p \text{ 和 } u.$$

可对 p 用归纳法证明(留作习题).

性质 4 单位分解性:

$$\sum_{j=i-p}^i N_{j,p}(u) = 1, \quad u \in [u_i, u_{i+1}).$$

将公式

$$\begin{aligned} \sum_{j=i-p}^i N_{j,p}(u) &= \sum_{j=i-p}^i \frac{u - u_j}{u_{j+p} - u_j} N_{j,p-1}(u) \\ &\quad + \sum_{j=i-p}^{i-1} \frac{u_{j+p+1} - u}{u_{j+p+1} - u_{j+1}} N_{j+1,p-1}(u) \end{aligned}$$

右端第二个和变更为从 $i-p$ 到 $i-p+1$ 求和, 并注意 $N_{i-p,p-1}(u) = N_{i+1,p-1}(u) = 0$, 有

$$\begin{aligned}\sum_{j=i-p}^i N_{j,p}(u) &= \sum_{j=i-p+1}^i \left(\frac{u-u_j}{u_{j+p}-u_j} + \frac{u_{j+p}-u}{u_{j+p}-u_j} \right) N_{j,p-1}(u) \\ &= \sum_{j=i-p+1}^i N_{j,p-1}(u).\end{aligned}$$

依此类推, 可知

$$\sum_{j=i-p}^i N_{j,p}(u) = \cdots = \sum_{j=i}^i N_{j,0}(u) = 1.$$

性质 5 在一个结点支撑内部, $N_{i,p}(u)$ 的所有导数存在. 在一个结点处, $N_{i,p}(u)$ 是 $p-k$ 次连续可微的, 此处 k 是该结点的重数. 所以增加次数, 则增加连续性, 而增加结点的重数, 则降低连续性.

性质 6 除 $p=0$ 的情形外, $N_{i,p}(u)$ 恰好达到一个最大值.

以下说明重结点的作用. 考虑图 4.1 中的函数 $N_{0,2}, N_{1,2}, N_{2,2}, N_{3,2}, N_{4,2}, N_{5,2}$ 和 $N_{6,2}$:

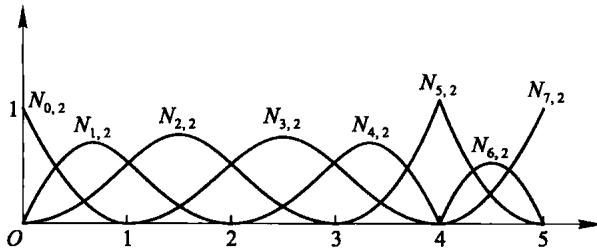


图 4.1 非零 2 阶基函数, $U = \{0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5\}$.

按(4.1)和性质 1, 这些函数的结点支撑分别为 $N_{0,2}: \{0, 0, 0, 1\}$, $N_{1,2}: \{0, 0, 1, 2\}$, $N_{2,2}: \{0, 1, 2, 3\}$, $N_{3,2}: \{1, 2, 3, 4\}$, $N_{4,2}: \{2, 3, 4, 5\}$ 和 $N_{5,2}: \{3, 4, 4, 5\}$. 因而所谓结点的重数, 可以按两种不同的方式来理解: 一是理解为结点向量 U 中, 一个结点的重复次数; 二是理解为一个结点关于特定基函数的重数. 例如 $u=0$ 在上面提到的结点向量 U 内重数是 3. 然而关于函数 $N_{0,2}, N_{1,2}, N_{2,2}$ 和 $N_{5,2}$, 结点 $u=0$ 的重数分别是 3, 2, 1 和 0. 按性质 5, 这些函数在 $u=0$ 处的连续性各不相同: $N_{0,2}$ 不连续, $N_{1,2} C^0$ 连续, $N_{2,2} C^1$ 连续, $N_{5,2}$ 和它的各阶导数在 $u=0$ 处皆为 0.

对次数 p 采用归纳法, 可以证明如下关于 B -样条的导数公式

$$N'_{i,p} = \frac{p}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) - \frac{p}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u) \quad (4.2)$$

(留作习题).

反复应用公式(4.2), 得到

$$N_{i,p}^{(k)}(u) = p \left[\frac{N_{i,p-1}^{(k-1)}}{u_{i+p} - u_i} - \frac{N_{i+1,p-1}^{(k-1)}}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} \right], \quad (4.3)$$

其中 $N_{i,p}^{(k)}$ 表示 $N_{i,p}(u)$ 的 k 阶导数。 $N_{i,p}^{(k)}$ 也可按下列公式来计算：

$$N_{i,p}^{(k)} = \frac{p!}{(p-k)!} \sum_{j=0}^k a_{k,j} N_{i+j, p-k}, \quad (4.4)$$

其中

$$a_{0,0} = 1,$$

$$a_{k,0} = \frac{a_{k-1,0}}{u_{i+p-k+1} - u_i},$$

$$a_{k,j} = \frac{a_{k-1,j} - a_{k-1,j-1}}{u_{i+p+j-k+1} - u_{i+j}}, \quad j = 1, \dots, k-1,$$

$$a_{k,k} = \frac{-a_{k-1,k-1}}{u_{i+p+1} - u_{i+k}}.$$

应该指出，(4.4)中的 k 应不超过 p ；系数表达式中，当分母所含结点的差分为 0 时，相应的比值定义为 0。还需指出的是，形如下述的结点向量

$$U = \{\underbrace{0, \dots, 0}_{p+1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{p+1}\}$$

产生 p 次 Bernstein 多项式。

下面讨论 B -样条曲线。 p 次 B -样条曲线定义为

$$\mathbf{C}(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) \mathbf{P}_i, \quad a \leq u \leq b, \quad (4.5)$$

此处 $\{\mathbf{P}_i\}$ 是控制点， $\{N_{i,p}(u)\}$ 是定义在非周期且非均匀结点向量

$$U = \{\underbrace{a, \dots, a}_{p+1}, u_{p+1}, \dots, u_{m-p-1}, \underbrace{b, \dots, b}_{p+1}\}$$

上的 p 次样条基函数。除特殊声明外，恒假定 $a=0, b=1$ 。由 $\{\mathbf{P}_i\}$ 所形成的多边形，称为控制多边形。为计算给定 u 值所对应的 B -样条曲线上的一点：需先找出包含 u 的结点支撑；计算非零基函数；非零基函数的值乘以相应的控制点。

例 1 设结点向量 $U = \{0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5\}$, $p=2$ 。求该 2 次 B -样条曲线在 $u=5/2$ 处的值。因为 $u \in [u_4, u_5]$ ，且

$$N_{2,2}\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{8}, \quad N_{3,2}\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{6}{8}, \quad N_{4,2}\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{8}.$$

乘相应的控制点即得

$$\mathbf{C}\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{8} \mathbf{P}_2 + \frac{6}{8} \mathbf{P}_3 + \frac{1}{8} \mathbf{P}_4.$$

B-样条曲线(4.5)的性质:

性质 1 若 $n = p$, 且 $U = \{0, \dots, 0, 1, \dots, 1\}$, 则 $\mathbf{C}(u)$ 是一条 Bézier 曲线.

性质 2 $\mathbf{C}(u)$ 是一条分段多项式曲线, 它的次数 p 、控制点数 $n + 1$ 和结点数 $m + 1$ 之间有关系式

$$m = n + p + 1.$$

性质 3 端点插值性:

$$\mathbf{C}(0) = \mathbf{P}_0, \quad \mathbf{C}(1) = \mathbf{P}_n.$$

性质 4 仿射不变性. 仿射变换是通过应用它到控制点组上来变换曲线的. 设 r 是 3 维欧氏空间 \mathbf{R}^3 中的点. 仿射变换 $\Phi: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ 为

$$\Phi(r) = Ar + V,$$

其中 A 是 3×3 矩阵, V 是一个向量. 仿射不变性可从 $N_{i,p}(u)$ 的单位分解性推出. 设 $r = \sum \alpha_i \mathbf{P}_i$, $\mathbf{P}_i \in \mathbf{R}^3$, 且 $\sum \alpha_i = 1$. 则

$$\begin{aligned}\Phi(r) &= \Phi(\sum \alpha_i \mathbf{P}_i) = A(\sum \alpha_i \mathbf{P}_i) + V \\ &= \sum \alpha_i A \mathbf{P}_i + \sum \alpha_i V \\ &= \sum \alpha_i (A \mathbf{P}_i + V) = \sum \alpha_i \Phi(\mathbf{P}_i).\end{aligned}$$

性质 5 强凸包性: 该曲线包含于它的控制多边形的凸包中. 事实上, 若 $u \in [u_i, u_{i+1})$, $p \leq i < m - p - 1$, 则 $\mathbf{C}(u)$ 在控制点 $\mathbf{P}_{i-p}, \dots, \mathbf{P}_i$ 的凸包中. 它可从 $N_{i,p}(u)$ 的非负性、单位分解性, 以及

$$N_{j,p}(u) = 0, \quad j < i - p \text{ 或 } j > i, \quad u \in [u_i, u_{i+1})$$

推出. 图 4.2 指出了如何构造一条 2 次曲线, 使之保持有一段直线.

因为 $\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3$ 和 \mathbf{P}_4 共线, 所以强凸包性质保证了该曲线从 $\mathbf{C}(2/5)$ 到 $\mathbf{C}(3/5)$ 一段为直线.

性质 6 局部修改方法: 移动控制点 \mathbf{P}_i , 只能改变 $\mathbf{C}(u)$ 在区间 $[u_i, u_{i+p+1})$ 内的曲线段. 事实上, 因为当 $u \notin [u_i, u_{i+p+1})$ 时 B -样条 $N_{i,p}(u) = 0$. 所以 \mathbf{P}_i 的移动影响不到其他地方(图 4.3). 这条性质使人们便于局部修改 B -样条曲线.

性质 7 控制折线是 B -样条曲线的分段线性逼近. 采取结点插入或阶的提升方法可以改善这种逼近.

性质 8 变差缩小性质: 任何平面与该曲线的交点, 均不多于它与控制多边形的交点. 对于 2 维情形, 此处所说的“平面”一词应改为“直线”.

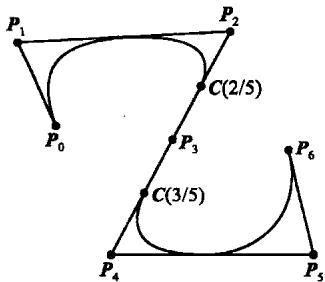


图 4.2 2 次 B -样条曲线,
 $U = \{0,0,0,0,1/5,2/5,$
 $3/5,4/5,1,1,1\}$.

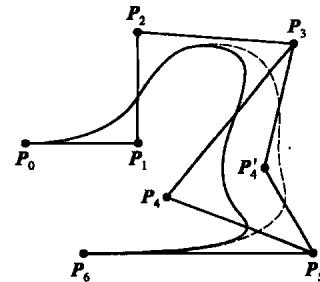


图 4.3 $U = \{0,0,0,0,1/4,1/2,3/4,1,$
 $1,1,1\}$ 上的 3 次曲线. P_4 移至 P'_4 , 只影
 响区间 $[1/4, 1)$ 内曲线

性质 9 连续性和可微性. 因 $C(u)$ 是诸 B -样条的线性组合, 所以可推论出它的连续性和可微性. 这就是说, 在结点区间内部, $C(u)$ 无穷次连续可微; 在一个 k 重结点处, $C(u)$ 至少 $p - k$ 次连续可微.

性质 10 采用重复控制点的办法有时可以得到有用的结果. 如在图 4.4 所示 2 次曲线中, 利用了二重控制点 $P_2 = P_3$. 而图 4.5 中的两条 3 次曲线, 它们具有相同的控制点、包括同样的二重控制点, 但它们的结点向量不同.

性质 11 B -样条曲线的导数. 以 $C^{(k)}(u)$ 记 $C(u)$ 的 k 阶导数. 因为 B -样条曲线是 B -样条的线性组合, 所以对指定的 u ,

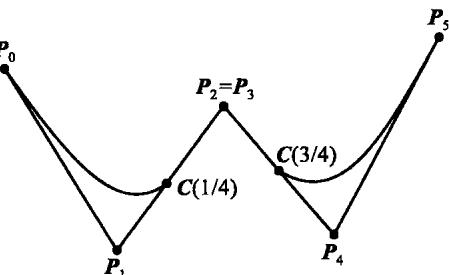


图 4.4 $U = \{0,0,0,1/4,1/2,3/4,$
 $1,1,1\}$, 2 次曲线, $P_2 = P_3$ 是
 二重控制点

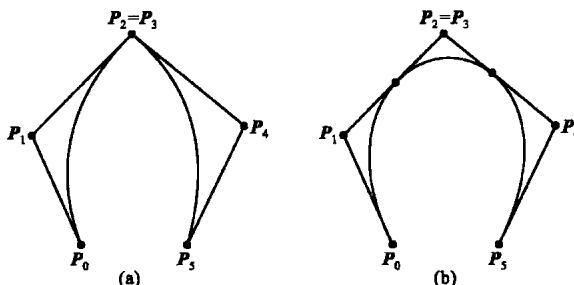


图 4.5 具有重控制点 $P_2 = P_3$ 的 3 次曲线:
 (a) $U = \{0,0,0,0,1/2,1/2,1,1,1,1\};$
 (b) $U = \{0,0,0,0,1/4,3/4,1,1,1,1\}.$

$$\mathbf{C}^{(k)}(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}^{(k)}(u) \mathbf{P}_i. \quad (4.6)$$

人们可以求得定义于结点向量

$$U = \{\underbrace{0, \dots, 0}_{p+1}, u_{p+1}, \dots, u_{m-p-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{p+1}\}$$

上的 p 次 B -样条曲线的导数。根据 B -样条 $N_{i,p}(u)$ 的导数公式，经整理可得到

$$\begin{aligned} \mathbf{C}'(u) &= \sum_{i=0}^n N'_{i,p}(u) \mathbf{P}_i \\ &= p \frac{N_{0,p-1}(u) \mathbf{P}_0}{u_p - u_0} + p \sum_{i=0}^{n-1} N_{i+1,p-1}(u) \frac{\mathbf{P}_{i+1} - \mathbf{P}_i}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} \\ &\quad - p \frac{N_{n+1,p-1}(u) \mathbf{P}_n}{u_{n+p+1} - u_{n+1}}, \end{aligned}$$

其首项和末项均呈 $0/0$ 形式，因而按定义它们为 0，是故

$$\mathbf{C}'(u) = \sum_{i=0}^{n-1} N_{i+1,p-1}(u) \mathbf{Q}_i,$$

此处

$$\mathbf{Q}_i = p \frac{\mathbf{P}_{i+1} - \mathbf{P}_i}{u_{i+p+1} - u_{i+1}}. \quad (4.7)$$

如果在 U 中删去第一个和最末一个结点，则产生一个新的结点向量

$$U' = \{\underbrace{0, \dots, 0}_p, u_{p+1}, \dots, u_{m-p-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_p\},$$

它含有 $m-1$ 个结点。不难验证，在 U' 上计算 B -样条 $N_{i+1,p-1}(u)$ ，等于在 U 上计算 $N_{i,p-1}(u)$ 。所以

$$\mathbf{C}'(u) = \sum_{i=0}^{n-1} N_{i,p-1}(u) \mathbf{Q}_i, \quad (4.8)$$

其中 $N_{i,p-1}(u)$ 在 U' 上计算。从而 $\mathbf{C}'(u)$ 是一条 $p-1$ 次 B -样条曲线。

注 注意到 p 次 Bézier 曲线是结点向量 $U = \{0, \dots, 0, 1, \dots, 1\}$ （没有内部结点）上的 B -样条曲线。由(4.7)可知 $\mathbf{Q}_i = p(\mathbf{P}_{i+1} - \mathbf{P}_i)$, $i = 0, \dots, n-1$ 。因为 $n = p$ ，且 $N_{i,p-1}(u) = B_{i,n-1}(u)$ 是 Bernstein 多项式，所以(4.8)等价于(3.8)。

B -样条曲线在两端的 1 阶导数由下式给出：

$$\begin{aligned} \mathbf{C}'(0) &= \mathbf{Q}_0 = \frac{p}{u_{p+1}} (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0), \\ \mathbf{C}'(1) &= \mathbf{Q}_{n+1} = \frac{p}{1-u_{m-p-1}} (\mathbf{P}_n - \mathbf{P}_{n-1}). \end{aligned} \quad (4.9)$$

因为 $\mathbf{C}'(u)$ 仍是一条 B -样条曲线, 反复应用(4.7)和(4.8)即可得到 B -样条曲线的高阶导数. 设 $\mathbf{P}_i^{(0)} = \mathbf{P}_i$, 记

$$\mathbf{C}(u) = \mathbf{C}^{(0)}(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) \mathbf{P}_i^{(0)},$$

则

$$\mathbf{C}^{(k)}(u) = \sum_{i=0}^{n-k} N_{i,p-k}(u) \mathbf{P}_i^{(k)}, \quad (4.10)$$

其中

$$\mathbf{P}_i^{(k)} = \begin{cases} \mathbf{P}_i, & k=0, \\ \frac{p-k+1}{u_{i+p+1}-u_{i+k}} (\mathbf{P}_{i+1}^{(k-1)} - \mathbf{P}_i^{(k-1)}), & k>0, \end{cases}$$

而诸 $N_{i,p-k}(u)$ 在结点向量 $U^{(k)}$ 上计算,

$$U^{(k)} = \left\{ \underbrace{0, \dots, 0}_{p-k+1}, u_{p+1}, \dots, u_{m-p+1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{p-k+1} \right\}.$$

利用一般公式(4.10), 还可以算出端点处的 2 阶导数公式:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^{(2)}(0) &= \frac{p(p-1)}{u_{p+1}} \left[\frac{\mathbf{P}_0}{u_{p+1}} - \left(\frac{1}{u_{p+1}} + \frac{1}{u_{p+2}} \right) \mathbf{P}_1 + \frac{\mathbf{P}_2}{u_{p+2}} \right], \\ \mathbf{C}^{(2)}(1) &= \frac{p(p-1)}{1-u_{m-p-1}} \left[\frac{\mathbf{P}_n}{1-u_{m-p-1}} - \left(\frac{1}{1-u_{m-p-1}} + \frac{1}{1-u_{m-p-2}} \right) \mathbf{P}_{n-1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mathbf{P}_{n-2}}{1-u_{m-p-2}} \right]. \end{aligned} \quad (4.11)$$

同 Bézier 曲线一样, B -样条曲线之间也有光滑连接问题. 请读者根据以上讨论的方法和结果, 给出相应的条件(留作习题).

可以在理论上没有任何困难地定义张量积型的 B -样条曲面

$$\mathbf{S}(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) \mathbf{P}_{i,j}, \quad (4.12)$$

它涉及两方向的控制点网 $\{\mathbf{P}_{i,j}\}$, 两个结点向量

$$U = \{ \underbrace{0, \dots, 0}_{p+1}, u_{p+1}, \dots, u_{r-p-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{p+1} \},$$

$$V = \{ \underbrace{0, \dots, 0}_{q+1}, v_{q+1}, \dots, v_{s-q-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{q+1} \},$$

以及两个一元 B -样条的乘积.

采用矩阵和向量的紧凑形式, $\mathbf{S}(u, v)$ 可写成

$$\mathbf{S}(u, v) = [N_{k,p}(u)]^T [\mathbf{P}_{k,l}] [N_{l,q}(v)], \quad (4.13)$$

$$i-p \leq k \leq i, \quad j-q \leq l \leq j,$$

其中 $[N_{k,p}(u)]^T$ 是 $1 \times (p+1)$ 行向量, $[N_{l,q}(v)]$ 是 $(q+1) \times 1$ 列向量, 而 $[\mathbf{P}_{k,l}]$ 是 $(p+1) \times (q+1)$ 的控制点矩阵. 关于 B -样条曲面的详细讨论, 此处从略.

例 2 设 $p = q = 2$, 且

$$\mathbf{S}(u, v) = \sum_{i=0}^4 \sum_{j=0}^5 N_{i,2}(u) N_{j,2}(v) \mathbf{P}_{i,j},$$

$$U = \{0, 0, 0, 2/5, 3/5, 1, 1, 1\},$$

$$V = \{0, 0, 0, 1/5, 1/2, 4/5, 1, 1, 1\}.$$

我们来计算 $\mathbf{S}(1/5, 3/5)$. 因为 $1/5 \in [u_2, u_3], 3/5 \in [v_4, v_5]$, 由(4.13)可知

$$\mathbf{S}\left(\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right) = \begin{bmatrix} N_{0,2}\left(\frac{1}{5}\right) & N_{1,2}\left(\frac{1}{5}\right) & N_{2,2}\left(\frac{1}{5}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{0,2} & \mathbf{P}_{0,3} & \mathbf{P}_{0,4} \\ \mathbf{P}_{1,2} & \mathbf{P}_{1,3} & \mathbf{P}_{1,4} \\ \mathbf{P}_{2,2} & \mathbf{P}_{2,3} & \mathbf{P}_{2,4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{2,2}\left(\frac{3}{5}\right) \\ N_{3,2}\left(\frac{3}{5}\right) \\ N_{4,2}\left(\frac{3}{5}\right) \end{bmatrix}.$$

例 3 3 次 B -样条曲线.

设对参数轴的剖分是均匀的, 特别地, 不妨设它们的分点为整数点 $0, 1, \dots$. 第 j 段上 3 次 B -样条曲线可写成

$$\mathbf{C}_j(u) = \sum_{i=0}^3 N_{i,3}(u) \mathbf{P}_{j+i}. \quad (4.14)$$

虽然 B -样条 $N_{i,3}(u)$ 的支集由四个区间组成, 但为计算方便, 将其在各段上的表达式均化归到 $u \in [0, 1]$ 上, 于是有

$$[N_{0,3}(u) \ N_{1,3}(u) \ N_{2,3}(u) \ N_{3,3}(u)]$$

$$= [u^3 \ u^2 \ u \ 1] \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad 0 \leq u \leq 1.$$

从而 $C_j(u)$ 可写成

$$C_j(u) = [u^3 \ u^2 \ u \ 1] \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_j \\ P_{j+1} \\ P_{j+2} \\ P_{j+3} \end{bmatrix} \quad (0 \leq u \leq 1). \quad (4.15)$$

$C_j(u)$ ($0 \leq u \leq 1$) 在起点和终点处的位置、切矢和二阶导矢依次为

$$\begin{aligned} C_j(0) &= \frac{1}{6} (P_j + 4P_{j+1} + P_{j+2}), \\ C_j(1) &= \frac{1}{6} (P_{j+1} + 4P_{j+2} + P_{j+3}), \\ C'_j(0) &= \frac{1}{2} (P_{j+2} - P_j), \quad C'_j(1) = \frac{1}{2} (P_{j+3} - P_{j+1}), \end{aligned} \quad (4.16)$$

和

$$\begin{aligned} C''_j(0) &= P_j - 2P_{j+1} + P_{j+2}, \\ C''_j(1) &= P_{j+1} - 2P_{j+2} + P_{j+3}. \end{aligned}$$

由一般 B -样条曲线的性质可知,以上 3 次 B -样条曲线段具有可局部修改的性质; $C_j(u)$ 包含在由 P_j, P_{j+1}, P_{j+2} 和 P_{j+3} 形成的凸包内.根据凸包性,只需取相邻的四个控制点 P_j, P_{j+1}, P_{j+2} 和 P_{j+3} 共线,则由它们所确定的 3 次 B -样条曲线段即为直线段.还可采取将 P_j 和 P_{j+1} 均取为二重控制点的方法使 3 次 B -样条曲线段为直线段.不仅如此,为使 3 次 B -样条曲线在 P_{j+2} 处具有“尖点”,只需把 P_{j+2} 取作三重控制点(即重复取 3 次)即可(参见图 4.6).

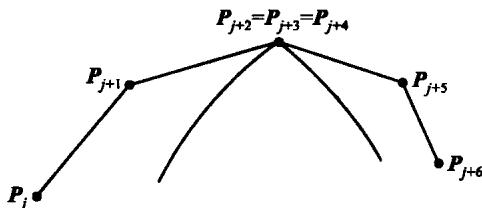


图 4.6

用3次 B -样条曲线(4.15)还可作插值型曲线. 问题的提法是: 给定 n 个型值点 $V_0, V_1 \cdots, V_{n-1}$, 求一条3次 B -样条曲线, 使之通过这 n 个型值点. 设所求得的3次 B -样条曲线的控制点为 \mathbf{P}_i ($i = 0, 1, \cdots, n+1$). 按条件, $C_{j-1}(1) = C_j(0) = V_j$, $j = 1, 2, \cdots, n-2$, 所以所欲求的控制点 $\{\mathbf{P}_i\}$ 应满足关系式

$$\frac{1}{6}\mathbf{P}_j + \frac{2}{3}\mathbf{P}_{j+1} + \frac{1}{6}\mathbf{P}_{j+2} = V_j, \quad j = 0, 1, \cdots, n-1. \quad (4.17)$$

注意在(4.17)中, 有 $n+2$ 个未知量 $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \cdots, \mathbf{P}_{n+1}$, 但只有 n 个方程, 因而需外加两个边界条件. 当曲线为封闭曲线时, 应取 $\mathbf{P}_{n+1} = \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_n = \mathbf{P}_0$; 否则, 可取 $\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_{n+1} = \mathbf{P}_n$.

有关3次 B -样条曲线的进一步讨论此处从略.

§ 5 非均匀有理 B -样条(NURBS)

非均匀有理 B -样条(Non Uniform Rational B -Spline, 简称 NURBS)方法是当今国际上最流行的方法. p 次 NURBS 曲线定义为

$$\mathbf{C}(u) = \frac{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) w_i \mathbf{P}_i}{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) w_i}, \quad a \leq u \leq b, \quad (5.1)$$

其中 $\{\mathbf{P}_i\}$ 是控制点, 它们形成一个控制多边形, $\{w_i\}$ 是权(系数), 而 $\{N_{i,p}(u)\}$ 是定义在非周期的非均匀结点向量

$$U = \underbrace{\{a, \cdots, a, u_{p+1}, \cdots, u_{m-p-1}, b, \cdots, b\}}_{p+1}$$

上的 p 次 B -样条基函数组. 除非特别声明, 我们恒假定 $a = 0, b = 1$, 并且对一切 $i, w_i > 0$, 记

$$R_{i,p}(u) = \frac{N_{i,p}(u) w_i}{\sum_{j=0}^n N_{j,p}(u) w_j}, \quad (5.2)$$

则(5.1)可表示成

$$\mathbf{C}(u) = \sum_{i=0}^n R_{i,p}(u) \mathbf{P}_i, \quad (5.3)$$

上述 $\{R_{i,p}(u)\}$ 是有理基函数, 它们在 $u \in [0,1]$ 上是分片有理函数.

按(5.2)定义的 $R_{i,p}(u)$ 具有与 $N_{i,p}(u)$ 相对应的下列性质:

(一) 非负性:

$$R_{i,p}(u) \geq 0, \quad \text{对所有的 } i, p, \text{ 和 } u \in [0,1];$$

(二) 单位分解性:

$$\sum_{i=0}^n R_{i,p}(u) = 1, \quad \text{对所有 } u \in [0,1];$$

(三)

$$R_{0,p}(0) = R_{n,p}(1) = 1;$$

(四) 当 $p > 0$ 时, 所有的 $R_{i,p}(u)$ 均在区间 $[0,1]$ 上取到一个最大值;

(五) 局部支集性:

$$R_{i,p}(u) = 0, \quad u \notin [u_i, u_{i+1}).$$

而且在任意给定的结点支撑内, 最多有 $p+1$ 个 $R_{i,p}(u)$ 是非 0 的(一般地, 在 $[u_i, u_{i+1})$ 内 $R_{i-p,p}(u), \dots, R_{i,p}(u)$ 是非 0 的);

(六) 在一个结点支撑内部, $R_{i,p}(u)$ 是一个分母不为 0 的有理函数, 因而它存在各阶导数. 在一个结点处, $R_{i,p}(u)$ 是 $p-k$ 次连续可微的, 此处 k 是该结点的重数;

(七) $N_{i,p}(u)$ 是 $R_{i,p}(u)$ 的特殊情形. 事实上, 只需取所有的权系数 $\{w_i\}$ 为同一个非零正常数, 则可知 $R_{i,p}(u) = N_{i,p}(u)$, 对一切 i 均成立.

从以上七条性质可以推出 NURBS 曲线的下述几何特征:

(i) $\mathbf{C}(0) = \mathbf{P}_0, \mathbf{C}(1) = \mathbf{P}_n$;

(ii) 仿射不变性:NURBS 曲线在透视投影下是不变的. 这条性质在计算机图形学中很有用;

(iii) 强凸包性:若 $u \in [u_i, u_{i+1})$, 则 $\mathbf{C}(u)$ 位于控制点 $\mathbf{P}_{i-p}, \dots, \mathbf{P}_i$ 的凸包内;

(iv) 在结点支撑上, $\mathbf{C}(u)$ 无穷次可微, 在 k 重结点处 $\mathbf{C}(u)$ 是 $p-k$ 次可微的;

(v) 变差缩小性:任何平面与 NURBS 曲线的交点数不多于该平面与控制多边形的交点数. 对于 2 维 NURBS 曲线来说, 本性质中的“平面”一词应改为“直线”一词;

(vi) 无内结点的 NURBS 曲线是有理 Bézier 曲线, 因为此时 $N_{i,p}(u)$ 恰为

$B_{i,n}(u)$. 将(5.1)(5.2)与(3.14)(3.15)相比较, 并注意性质(七), 可知 NURBS 曲线是非有理 B -样条曲线、有理和非有理 Bézier 曲线的推广;

(vii) 局部逼近性: 由性质(五)可知, 当移动控制点 P_i , 或者改变权系数 w_i 时, 只有在区间 $u \in [u_i, u_{i+p+1}]$ 上的那段曲线会受到影响.

这种局部逼近性质对于交互式设计是非常重要的. 利用 NURBS 曲线, 人们可以同时利用控制点的移动和权系数的修改来获得局部的形状控制. 从定性上讲, 假定 $u \in [u_i, u_{i+1}]$; 如果 w_i 增加(减小), 则 $C(u)$ 移至更接近(远离) P_i 的位置, 因而该曲线被拉向(推离) P_i . 此外, 对于固定的 u 而言, 曲线 $C(u)$ 的运动是沿着一条直线进行的(参见图 5.1).

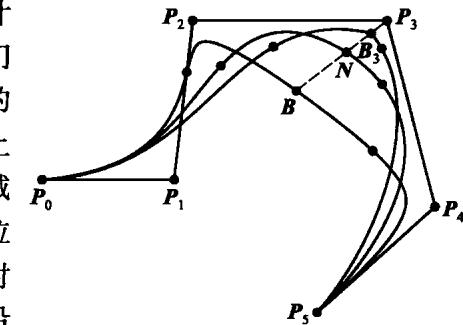


图 5.1 权系数 w_3 的修正, 但 u 固定

设 $B = C(u; w_3 = 0)$, $N = C(u; w_3 = 1)$, 则由 B 和 N 两点所决定的直线通过 P_3 , 而且对任意的 $0 < w_3 < +\infty$, $B_3 = C(u; w_3)$ 必落在 B 和 P_3 两点的线段上.

如同有理 Bézier 曲线的情形那样, 齐次坐标也可以作为表示 NURBS 曲线的有效方法.

设 H 是由(3.16)给出的透射映射. 对于给定的控制点集 $\{P_i\}$ 和权系数 $\{w_i\}$, 构造带权控制点

$$\bar{P}_i^w = (w_i x_i, w_i y_i, w_i z_i, w_i).$$

则在 4 维空间中确定的非有理(即分段多项式) B -样条曲线为

$$C^w(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) \bar{P}_i^w. \quad (5.4)$$

应用透射映射 H 到 $C^w(u)$, 则得到相应的有理 B -样条曲线(在 3 维空间中分段有理)

$$\begin{aligned} C(u) &= H\{C^w(u)\} = H\left\{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) \bar{P}_i^w\right\} \\ &= \frac{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) w_i P_i}{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) w_i} = \sum_{i=0}^n R_{i,p}(u) P_i. \end{aligned}$$

严格地讲, $C^w(u)$ 不是有理曲线, 但它和 $C(u)$ 都被称做 NURBS 曲线.

例 4 设

$$\begin{aligned} U &= \{0, 0, 0, 1, 2, 3, 3, 3\}, \\ \{w_0, w_1, w_2, w_3, w_4\} &= \{1, 4, 1, 1, 1\}, \\ \{\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4\} &= \{(0, 0), (1, 1), (3, 2), (4, 1), (5, -1)\}. \end{aligned}$$

计算在 $u=1$ 时该 B -样条曲线上的点. 此时显然 $u=1$ 在结点支撑 $[u_3, u_4]$ 中, 且

$$\begin{aligned} N_{3,0}(1) &= 1, \quad N_{2,1}(1) = \frac{2-1}{2-1}N_{3,0}(1) = 1, \\ N_{3,1}(1) &= \frac{1-1}{2-1}N_{3,0}(1) = 0, \quad N_{1,2}(1) = \frac{2-1}{2-0}N_{2,1}(1) = \frac{1}{2}, \\ N_{2,2}(1) &= \frac{1-0}{2-0}N_{2,1}(1) = \frac{1}{2}, \quad N_{3,2}(1) = 0. \end{aligned}$$

所以

$$\mathbf{C}^w(1) = \frac{1}{2}\mathbf{P}_1^w + \frac{1}{2}\mathbf{P}_2^w = \frac{1}{2}(4, 4, 4) + \frac{1}{2}(3, 2, 1) = \left(\frac{7}{2}, 3, \frac{5}{2}\right).$$

经投影得到

$$\mathbf{C}(1) = \left(\frac{7}{5}, \frac{6}{5}\right).$$

为求 NURBS 曲线 $\mathbf{C}(u)$ 的导数, 引入 $\mathbf{A}(u)$ 如下:

$$\mathbf{C}(u) = \frac{w(u)\mathbf{C}(u)}{w(u)} \xrightarrow{\text{def}} \frac{\mathbf{A}(u)}{w(u)}.$$

$\mathbf{A}(u)$ 是(5.1)的分子, 它是一个坐标为 $\mathbf{C}^w(u)$ 前 3 个坐标的向量值函数.

容易算出

$$\mathbf{C}'(u) = \frac{\mathbf{A}'(u) - w'(u)\mathbf{C}(u)}{w(u)}. \quad (5.5)$$

因为 $\mathbf{A}(u)$ 和 $w(u)$ 表示 $\mathbf{C}^w(u)$ 的坐标, 利用(4.7)和(4.8), 可以算出它们的 1 阶导数. 还可进一步算出

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{(k)}(u) &= w(u)\mathbf{C}^{(k)}(u) + \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} w^{(i)}(u)\mathbf{C}^{(k-i)}(u), \\ \mathbf{C}^{(k)}(u) &= \frac{\mathbf{A}^{(k)}(u) - \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} w^{(i)}(u)\mathbf{C}^{(k-i)}(u)}{w(u)}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

在端点处,有

$$\mathbf{A}'(0) = \frac{p}{u_{p+1}} (\mathbf{w}_1 \mathbf{P}_1 - \mathbf{w}_0 \mathbf{P}_0),$$

$$\mathbf{w}'(0) = \frac{p}{u_{p+1}} (\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_0).$$

从而有

$$\mathbf{C}'(0) = \frac{p}{u_{p+1}} \cdot \frac{\mathbf{w}_1}{\mathbf{w}_0} (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0),$$

$$\mathbf{C}'(1) = \frac{p}{1 - u_{m-p-1}} \frac{\mathbf{w}_{n-1}}{\mathbf{w}_n} (\mathbf{P}_n - \mathbf{P}_{n-1}).$$

非均匀有理 B -样条(NURBS)之所以会成为现今流行的一套方法,其中一个重要原因是它能精确表示圆锥曲线段,而后者是计算机辅助几何设计和计算机辅助制造(CAD/CAM)中最重要的曲线.

先从曲线段两端切向量不平行的情形开始讨论.因为圆锥曲线是2次曲线,所以考虑它的2次NURBS曲线表示

$$\mathbf{C}(u) = \sum_{i=0}^2 R_{i,p}(u) \mathbf{P}_i,$$

其中的有理基函数定义在结点向量 $U = \{0, 0, 0, 1, 1, 1\}$ 上.这时,这些基函数正是有理 Bézier 曲线的基函数,所以这条2次NURBS曲线是

$$\mathbf{C}(u) = \frac{(1-u)^2 \mathbf{w}_0 \mathbf{P}_0 + 2u(1-u) \mathbf{w}_1 \mathbf{P}_1 + u^2 \mathbf{w}_2 \mathbf{P}_2}{(1-u)^2 \mathbf{w}_0 + 2u(1-u) \mathbf{w}_1 + u^2 \mathbf{w}_2}. \quad (5.7)$$

可以证明,表达式(5.7)表示的是一条圆锥曲线,并且对一条特定的曲线段来说,圆锥曲线形状因子(CSF)

$$\text{CSF} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbf{w}_1^2}{\mathbf{w}_0 \mathbf{w}_2} \quad (5.8)$$

是常数.CSF的值确定了一特定圆锥曲线:

$$\text{CSF} \begin{cases} < 1, & \text{对应椭圆,} \\ = 1, & \text{对应抛物线,} \\ > 1, & \text{对应双曲线.} \end{cases}$$

在许多应用中,两端的权系数取为1,而中间的权系数(\mathbf{w}_1)则用来描述曲线簇.这种选择对获得一段圆弧是特别有用的.对于圆弧来讲,需要求:

- (i) $\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2$ 是等腰三角形;

(ii) 如果 $w_0 = w_2 = 1$, 则

$$w_1 = \frac{|\mathbf{P}_0 - \mathbf{P}_2|}{2|\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0|} = \frac{e}{f},$$

除非

$$\text{CSF} = e^2/f^2,$$

其中 e 和 f 如图 5.2 所示.

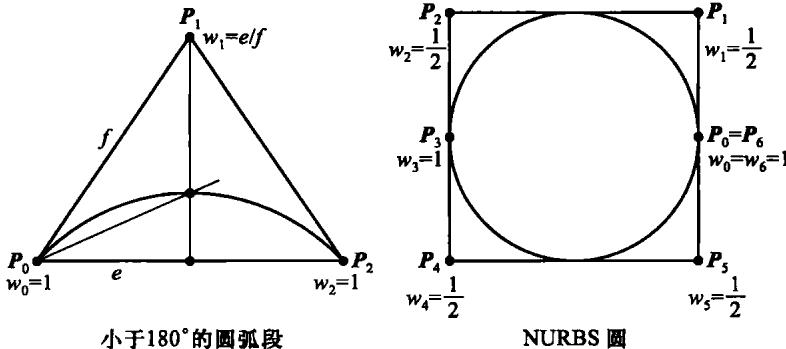


图 5.2

在构造圆锥曲线段的过程中, 可能出现两种特殊情形:

- (1) 曲线段是一半椭圆(圆), 即两端点处切线平行;
- (2) 曲线段位于控制三角形外面.

半椭圆可采用无穷远控制点来确定. 曲线形如

$$\mathbf{C}(u) = \frac{(1-u)^2 \mathbf{P}_0 + u^2 \mathbf{P}_2 + 2u(1-u)\mathbf{V}}{(1-u)^2 + u^2},$$

此处 \mathbf{V} 是一个平行于端点切向量的方向向量. 为避免利用方向向量, 可以添加结点以得到“正常的”控制点组.

若弧是位于控制三角形外面的椭圆, 则可利用一个负的权系数而将它表示为一段相互补的弧(见图 5.3). 在 $u = 1/2$ 处添加一个结点以消去这个负的权系数, 并建立一个新的控制多边形, 使得这段弧落在其凸包中.

我们可将多个弧段连在一起, 以得到整个圆锥曲线. 例如整个圆可以由四条圆弧组成(图 5.2). 这时圆弧有下面的表达式

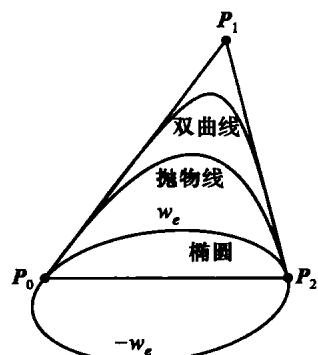


图 5.3

$$\mathbf{C}(u) = \sum_{i=0}^6 R_{i,p}(u) \mathbf{P}_i,$$

此处控制点组组成一个正方形,且

$$U = \left\{ 0, 0, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, 1, 1 \right\},$$

$$\{w_0, \dots, w_6\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 \right\}.$$

整个椭圆可由圆经过仿射变换而得到.因为 NURBS 曲线的仿射映射可由变换控制点而让权系数不改变来实现,所以椭圆可以用上面的结点向量和权系数,借助于一个外接矩形来作图.

Bézier 曲线段的形状不变因子可以推广到 2 次 NURBS 曲线上.其实有下述表达式成立:

$$\text{CSF} = (u_{i+3} - u_{i+1})(u_{i+2} - u_i)w_i^2 / [(u_{i+2} - u_{i+1})w_{i-1} + (u_{i+1} - u_i)w_i][(u_{i+3} - u_{i+2})w_i + (u_{i+2} - u_{i+1})w_{i+1}].$$

类似地,可以引入张量积型的 NURBS 曲面

$$S(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) w_{i,j} \mathbf{P}_{i,j}}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) w_{i,j}}, \quad 0 \leq u, v \leq 1, \quad (5.9)$$

其中 $\{\mathbf{P}_{i,j}\}$ 形成一个双方向控制网, $\{w_{i,j}\}$ 是权系数,而 $\{N_{i,p}(u)\}$ 和 $\{N_{j,q}(v)\}$ 是非有理 B-样条基函数,它们分别定义在结点向量

$$U = \underbrace{\{0, \dots, 0\}}_{p+1}, u_{p+1}, \dots, u_{r-p-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{p+1}$$

和

$$V = \underbrace{\{0, \dots, 0\}}_{q+1}, u_{q+1}, \dots, u_{s-q-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{q+1}$$

上,其中 $r = n + p + 1, s = m + q + 1$.

引进分片有理基函数

$$R_{i,j}(u, v) = \frac{N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) w_{i,j}}{\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m N_{k,p}(u) N_{l,q}(v) w_{k,l}}, \quad (5.10)$$

则曲面(5.9)可表示为

$$\mathbf{S}(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j}(u, v) \mathbf{P}_{i,j}. \quad (5.11)$$

函数 $R_{i,j}(u, v)$ 的重要性质, 大体同非有理基函数 $N_{i,p}(u) \cdot N_{j,q}(v)$ 是同样的. 请读者参考 B -样条曲面的性质来写出它们(留作习题).

应该指出的是, 对于 NURBS 曲面来说, 变差缩小性质不成立.

采用齐次坐标表示 NURBS 曲面是很方便的, 即

$$\mathbf{S}^w(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) \mathbf{P}_{i,j}^w, \quad (5.12)$$

此处 $\mathbf{P}_{i,j}^w = \{w_{i,j}x_{i,j}, w_{i,j}y_{i,j}, w_{i,j}z_{i,j}, w_{i,j}\}$, 则

$$\mathbf{S}(u, v) = H\{\mathbf{S}^w(u, v)\}. \quad (5.13)$$

$\mathbf{S}^w(u, v)$ 与 $\mathbf{S}(u, v)$ 通称 NURBS 曲面. 严格地说, $\mathbf{S}^w(u, v)$ 在 4 维空间中是一个张量积型的分片多项式曲面. $\mathbf{S}(u, v)$ 在 3 维空间中是一分片有理曲面. 因为 $R_{i,j}(u, v)$ 不是一元 B -样条基函数的张量积, 所以 $\mathbf{S}(u, v)$ 不是张量积型的曲面.

有关 NURBS 的进一步讨论可参考 G. Farin 的《NURB Curves and Surfaces》, A. K. Peters, Wellesley, Massachusetts, 1994.

第八章习题

1. 试建立累加弦长 2 次参数样条曲线的相应理论和计算方法.
2. 试给出 de Casteljau 算法的几何解释.
3. 设 u_0 给定, $\mathbf{C}^w(u)$ 是多项式 Bézier 曲线. 利用 de Casteljau 算法可以得到 $\mathbf{C}^w(u_0)$, 而且 $\mathbf{C}(u_0) = H\{\mathbf{C}^w(u_0)\}$. 试利用这种算法计算由图 3.6(b) 给出的有理 Bézier 圆弧 $\mathbf{C}(u)$ 在 u_0 处的值.
4. 设 $n = 3, m = 2$. 考虑由控制网

$$\begin{aligned} \{\mathbf{P}_{i,0}\} &= \{(0,0,0), (3,0,3), (6,0,3), (9,0,0)\}, \\ \{\mathbf{P}_{i,1}\} &= \{(0,2,2), (3,2,5), (6,2,5), (9,2,2)\}, \\ \{\mathbf{P}_{i,2}\} &= \{(0,4,0), (3,4,3), (6,4,3), (9,4,0)\} \end{aligned}$$

定义的非有理 Bézier 曲面. 试利用 de Casteljau 算法计算曲面上的点 $\mathbf{S}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$.

5. 设 $U = \{u_0 = 0, u_1 = 0, u_2 = 0, u_3 = 1, u_4 = 2, u_5 = 3, u_6 = 4, u_7 = 4, u_8 = 5, u_9 = 5, u_{10} = 5\}$ 且 $p = 2$. 试计算零次、1 次、2 次 B -样条基函数.
6. 试画出 $U = \{0, 0, 0, 1/5, 2/5, 3/5, 4/5, 4/5, 1, 1, 1\}$ 上的 2 次 B -样条曲线, 并指出该

曲线在 $u=4/5$ 处有一个尖点.

7. 设 $U = \{0, 0, 0, 0, 1/4, 1/2, 3/4, 1, 1, 1, 1\}$, 且 $\{w_0, w_1, \dots, w_6\} = \{1, 1, 1, 3, 1, 1, 1\}$. 试写出相应的 3 次 NURBS 曲线.

8. 设

$$S^w(u, v) = \sum_{i=0}^7 \sum_{j=0}^4 N_{i,0}(u) N_{j,2}(v) P_{i,j}^w,$$

其中

$$[P_{i,j}^w] = \begin{bmatrix} (0,2,4,1) & (0,6,4,2) & (0,2,0,1) \\ (4,6,8,2) & (12,24,12,6) & (4,6,0,2) \\ (4,2,4,1) & (8,6,4,2) & (4,2,0,1) \end{bmatrix}, \quad i=2,3,4; j=1,2,3,$$

$$U = \{0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5\},$$

且

$$V = \{0, 0, 0, 1, 2, 3, 3, 3\}.$$

试计算该曲面在 $(u, v) = (5/2, 1)$ 处的值.

9. 设 $U = \{0, 0, 0, 1/3, 2/3, 1, 1, 1\}$, $\{w_0, \dots, w_4\} = \{1, 4, 1, 1, 1\}$. 试利用 B-样条的递推公式计算 2 次有理基函数 $R_{i,2}(u)$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$. 假设 $\{P_0, \dots, P_4\} = \{(0,0), (1,1), (3,2), (4,1), (5, -1)\}$ 是 xy 平面上的控制点组. 计算在区间 $u \in [1/3, 2/3]$ 内表示曲线 $C(u)$ 的有理坐标函数 $x(u)$ 和 $y(u)$.

10. 设

$$S^w(u, v) = \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 N_{i,1}(u) N_{j,1}(v) P_{i,j}^w,$$

其中

$$\{P_{0,0}, P_{1,0}, P_{0,1}, P_{1,1}\} = \{(0,0,1), (0,1,3), (2,1,1), (2,0,3)\},$$

$$\{w_{0,0}, w_{1,0}, w_{0,1}, w_{1,1}\} = \{2, 1, 1, 1\},$$

且

$$U = V = \{0, 0, 1, 1\}.$$

试导出四个有理基函数 $R_{i,j}(u, v)$, $0 \leq i, j \leq 1$ 和曲面 $S(u, v)$ 的有理坐标函数 $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$.

主要参考书目

1. Lorentz G G. 函数逼近论[M]. 谢庭藩,施咸亮译. 上海:上海科学技术出版社,1981.
2. Davis P J. Interpolation and Approximation[M]. New York: Blaisdell Publishing Company, A Division of Ginn and Company, 1963.
3. Ahierzer N E. 逼近论讲义[M]. 程民德等译. 北京:科学出版社,1957.
4. de Boor C. A Practical Guide to Splines[M]. New York: Springer-Verlag, 1978.
5. Piegl L, Tiller W. The NURBS Book[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1997.
6. 徐利治,王仁宏,周蕴时. 函数逼近的理论与方法[M]. 上海:上海科学技术出版社,1983.
7. 徐利治,周蕴时,何天晓. 高维数值积分选讲[M]. 合肥:安徽教育出版社,1985.
8. 苏步青,刘鼎元. 计算几何[M]. 上海:上海科学技术出版社,1981.
9. 王仁宏,等. 多元样条函数及其应用[M]. 北京:科学出版社,1994.
10. 王仁宏,梁学章. 多元函数逼近[M]. 北京:科学出版社,1988.
11. 吴宗敏. 散乱数据拟合的模型、方法和理论[M]. 北京:科学出版社,2007.
12. Wendland H. Scattered Data Approximation. Cambridge: Cambridge University Press, 2005.

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任；构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人进行严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话 (010)58581897 58582371 58581879

反盗版举报传真 (010)82086060

反盗版举报邮箱 dd@hep.com.cn

通信地址 北京市西城区德外大街 4 号 高等教育出版社法务部

邮政编码 100120

Numerical Approximation

第一版荣获教育部 2002 年全国普通高等学校优秀教材一等奖



ISBN 978-7-04-034832-3

A standard linear barcode representing the ISBN 978-7-04-034832-3.

9 787040 348323 >

定价 32.10 元

[General Information]

SS号=13108787

封面

书名

版权

前言

目录

第一章 Weierstrass定理与线性算子逼近

- 1 Weierstrass第一定理
- 2 Weierstrass第二定理
- 3 线性正算子与Korovkin定理

第一章习题

第二章 一致逼近

- 1 Borel存在定理
- 2 最佳逼近定理
- 3 Tchebyshev最小零偏差多项式及其应用
- 4 最佳一致逼近的收敛速度估计
- 5 函数的构造性理论
- 6 代数多项式逼近理论中的有关结果

第二章习题

第三章 插值方法

- 1 Lagrange插值多项式
- 2 Newton插值多项式
- 3 插值多项式余项
- 4 有限差分计算
- 5 等距结点上的插值公式
- 6 Hermite插值多项式
- 7 多元插值方法
- 8 径向基函数插值

第三章习题

第四章 平方逼近

- 1 最小二乘法
- 2 空间 $L^2(\Omega)$
- 3 直交函数系与广义Fourier级数
- 4 直交函数结构公式
- 5 直交多项式的一般性质
- 6 直交多项式级数的收敛性

7 几种特殊的直交多项式

8 多元直交多项式

第四章习题

第五章 数值积分

1 数值积分的一般概念

2 Newton-Cotes公式

3 Romberg方法

4 Euler-Maclaurin公式

5 Gauss型求积公式

6 Gauss公式和Mehler公式

7 三角精度与周期函数的求积公式

8 奇异积分的计算

9 高维求积公式

10 n维单纯形上的求积公式

第五章习题

第六章 非线性逼近

1 非线性一致逼近

2 有理函数插值

3 Padé 逼近

4 有理逼近的一些算法

5 Prony指型函数逼近方法

第六章习题

第七章 样条逼近方法

1 样条函数及其基本性质

2 B-样条及其性质

3 三次样条插值

4 多元样条

第七章习题

第八章 曲线、曲面生成与逼近

1 简单的数据预处理方法

2 累加弦长法

3 Bézier方法

4 B-样条方法

5 非均匀有理B-样条 (NURBS)

第八章习题

主要参考书目

封底