动态规划专题

手把手一节课教会你动态规划

侯卫东



扫描二维码关注微信/微博 获取最新面试题及权威解答

微信: ninechapter

知乎专栏: http://zhuanlan.zhihu.com/jiuzhang

微博: http://www.weibo.com/ninechapter

官网: www.jiuzhang.com

版权声明

九章的所有课程均受法律保护,不允许录像与传播录像一经发现,将被追究法律责任和赔偿经济损失





讲师:侯卫东

清华大学毕业,全国算法竞赛金牌得主,参加过ACM国际大学生程序设计竞赛全球总决赛。斩获Google, Facebook, Microsoft, Uber, Dropbox等多家offer。拥有丰富的面试和面试官经验。

助教:

均获得过算法竞赛金奖刷题超过1000道

新学员问题



- 第一节课错过了怎么办
 - -报名下一期的《动态规划专题》第一节课免费试听即可
- 学员QQ群是什么, 怎么加
 - 缴费后, 九章账号**我的课程**里有**QQ**群号
 - -我也会在QQ群里
- 新学员必读常见问题解答
 - http://www.jiuzhang.com/qa/3/

如何使用Webinar?



- 可以提问
- 我和助教能看到所有的问题
- 每个同学只能看到自己提到的问题
- 我和助教会选择一些问题让大家都看见

在LintCode上解题



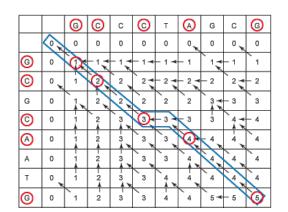
- 网址: <u>www.lintcode.com</u>
- LintCode需要单独先注册一个账户,不要使用九章的账号密码登录
- LintCode阶梯训练
 - https://www.lintcode.com/en/ladder/16/
 - 必须先完成上一节课的题目,才能继续下一节课



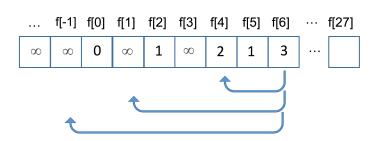
动态规划



- 科技公司面试必考算法
- 题目类型多,没有固定模板
- 难度属于中上



- 根据面试经验,一半失败的面试都与动态规划有关
- 必须掌握

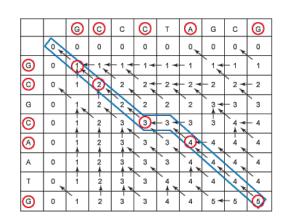


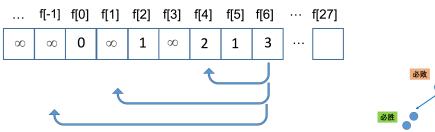


动态规划



- 并没有那么可怕
- 有规律可循
- 掌握其中的思想,举一反三







什么是动态规划

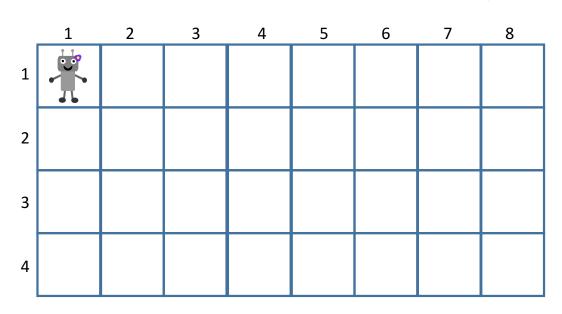


给定一个矩阵网格,一个机器人从左上角出发,每次可以向下或向右走一步

题A: 求有多少种方式走到右下角 题B: 输出所有走到右下角的路径

动态规划

递归



动态规划题目特点



1. 计数

- 有多少种方式走到右下角
- 有多少种方法选出k个数使得和是Sum

2. 求最大最小值

- 从左上角走到右下角路径的最大数字和
- 最长上升子序列长度

3. 求存在性

- 取石子游戏, 先手是否必胜
- 能不能选出k个数使得和是Sum



Coin Change

https://www.lintcode.com/en/problem/coin-change/ https://www.jiuzhang.com/solution/coin-change/

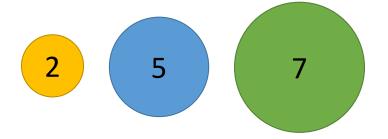
LintCode 669: Coin Change



- 你有三种硬币,分别面值2元,5元和7元,每种硬币都有足够多
- 买一本书需要27元
- 如何用最少的硬币组合正好付清, 不需要对方找钱

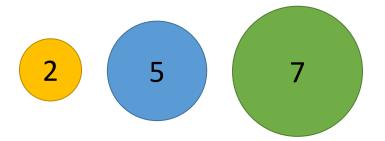
求最大最小值动态规划





- 最少硬币组合 → 尽量用面值大的硬币
- 7+7+7=21
- 21 + 5 = 26
- 呃。。。





- 改算法:尽量用大的硬币,最后如果可以用一种硬币付清就行
- 7+7+7=21
- 21 + 2 + 2 + 2 = 27
- 6枚硬币,应该对了吧。。。

正确答案: 7+5+5+5=27, 5枚硬币



动态规划组成部分一:确定状态

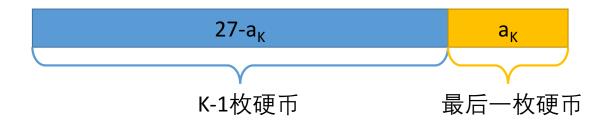


- 状态在动态规划中的作用属于定海神针
- 简单的说,解动态规划的时候需要开一个数组,数组的每个元素f[i]或者 f[i][j]代表什么
 - -类似于解数学题中, X, Y, Z代表什么
- 确定状态需要两个意识:
 - -最后一步
 - -子问题

最后一步



- 虽然我们不知道最优策略是什么,但是最优策略肯定是K枚硬币 $a_1, a_2, ..., a_K$ 面值加起来是27
- 所以一定有一枚**最后的**硬币: **a**_K
- 除掉这枚硬币, 前面硬币的面值加起来是27- a_K



最后一步



关键点1

我们不关心前面的K-1枚硬币是怎么拼出27- a_K的(可能有1种拼法,可能有100种拼法),而且我们现在甚至还不知道a_K和K,但是我们确定前面的硬币拼出了27- a_K

关键点2

因为是最优策略,所以拼出27-a_K的硬币数一定要最少,否则这就不是最优策略了



子问题



- 所以我们就要求:最少用多少枚硬币可以拼出27- a_K
- 原问题是最少用多少枚硬币拼出27
- 我们将原问题转化成了一个子问题,而且规模更小: 27- a_K
- 为了简化定义,我们设状态f(X)=最少用多少枚硬币拼出X



子问题



- 等等,我们还不知道最后那枚硬币a_K是多少
- 最后那枚硬币a_K只可能是2,5或者7
- 如果a_K是2, f(27)应该是f(27-2) + 1 (加上最后这一枚硬币2)
- 如果a_K是5, f(27)应该是f(27-5) + 1 (加上最后这一枚硬币5)
- 如果a_K是7, f(27)应该是f(27-7) + 1 (加上最后这一枚硬币7)
- 除此以外,没有其他的可能了
- 需要求最少的硬币数, 所以:

 $f(27) = min\{f(27-2)+1, f(27-5)+1, f(27-7)+1\}$

拼出27所需最少的硬币数

拼出25所需最少的硬币数,加上最后一枚硬币2

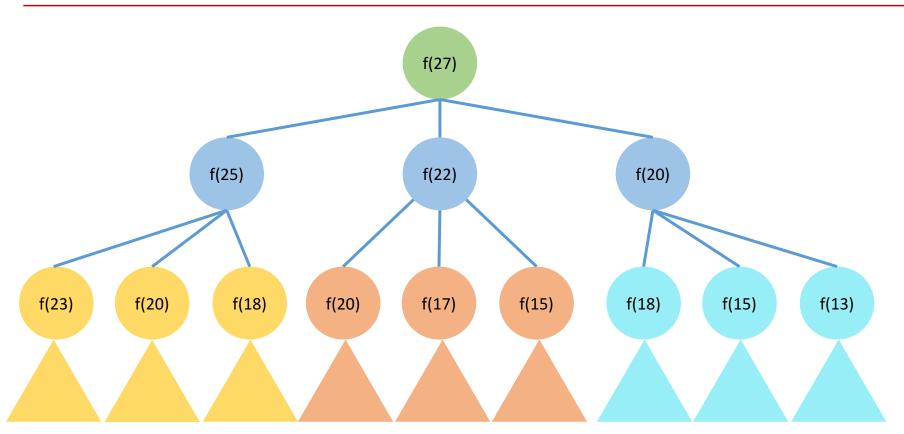
拼出22所需最少的硬币数,加上最后一枚硬币5

拼出20所需最少的硬币数,加上最后一枚硬币7

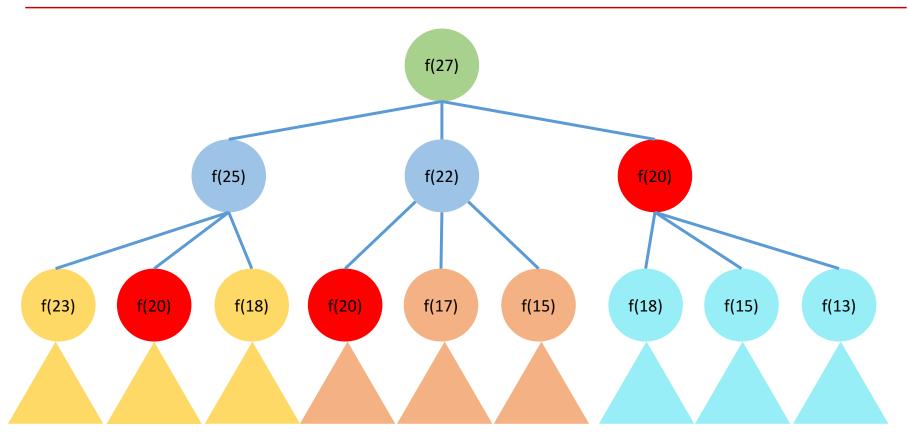


```
// f(X)=最少用多少枚硬币拼出X
int f(int X) {
  if (X == 0) return 0;
                                    #0元钱只要0枚硬币
  int res = MAX_VALUE;
                                    // 初始化用无穷大
  if (X \ge 2) {
                                    // 最后一枚硬币是2元
    res = Math.min(f(X - 2) + 1, res);
                                    #最后一枚硬币是5元
  if (X >= 5) {
    res = Math.min(f(X - 5) + 1, res);
                                    #最后一枚硬币是7元
  if (X >= 7) {
    res = Math.min(f(X - 7) + 1, res);
  return res;
```

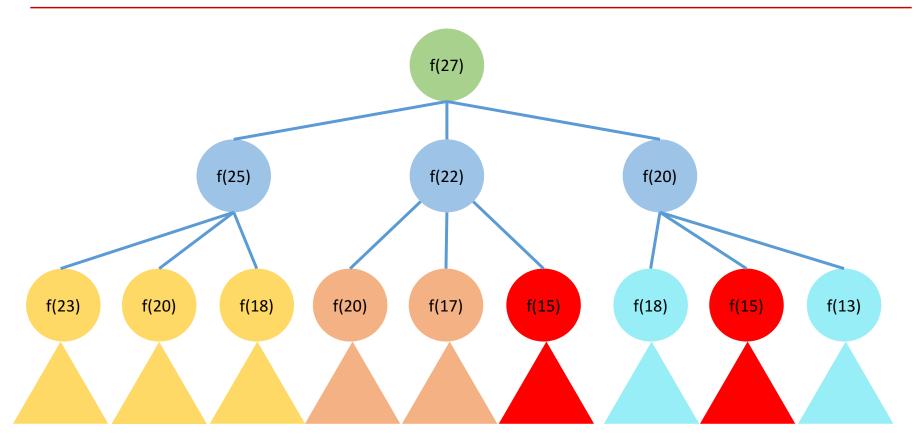














- 做了很多重复计算,效率低下
- 如何避免?
- 将计算结果保存下来, 并改变计算顺序

动态规划组成部分二:转移方程



- 设状态f[X]=最少用多少枚硬币拼出X
- 对于任意X,

 $f[X] = min\{f[X-2]+1, f[X-5]+1, f[X-7]+1\}$

拼出X所需最少 的硬币数 拼出X-2所需最少的硬币数,加上最后一枚硬币2

拼出X-5所需最少的硬币数,加上最后一枚硬币5

拼出X-7所需最少的硬币数,加上最后一枚硬币7

动态规划组成部分三:初始条件和边界情况



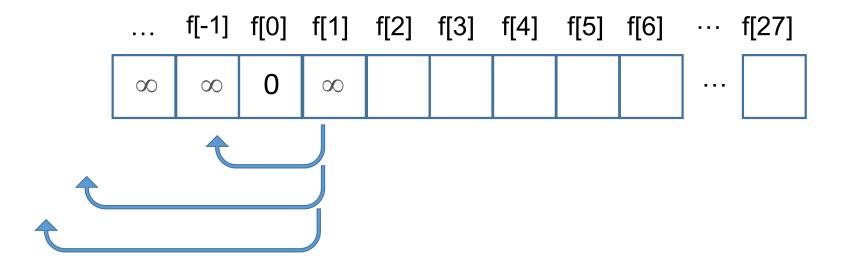
- f[X] = min{f[X-2]+1, f[X-5]+1, f[X-7]+1}
- 两个问题: X-2, X-5 或者X-7小于0怎么办?什么时候停下来?
- 如果不能拼出Y, 就定义f[Y]=正无穷 - 例如f[-1]=f[-2]=...=正无穷
- 所以f[1] =min{f[-1]+1, f[-4]+1,f[-6]+1}=正无穷, 表示拼不出来1
- 初始条件:f[0] = 0



- 拼出X所需要的最少硬币数: f[X] = min{f[X-2]+1, f[X-5]+1, f[X-7]+1}
- 初始条件:f[0] = 0
- 然后计算f[1], f[2], ..., f[27]
- 当我们计算到f[X]时, f[X-2], f[X-5], f[X-7]都已经得到结果了

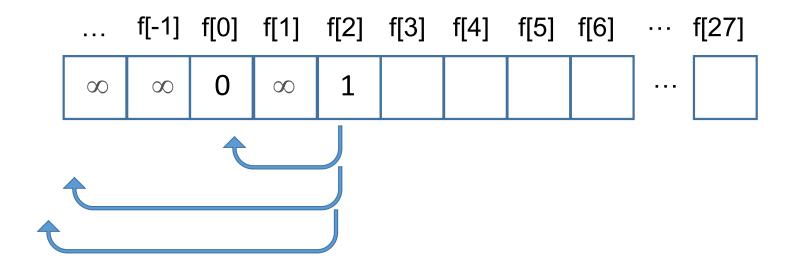


- f[X] = 最少用多少枚硬币拼出X
- **f[X]** = ∞ 表示无法用硬币拼出**X**



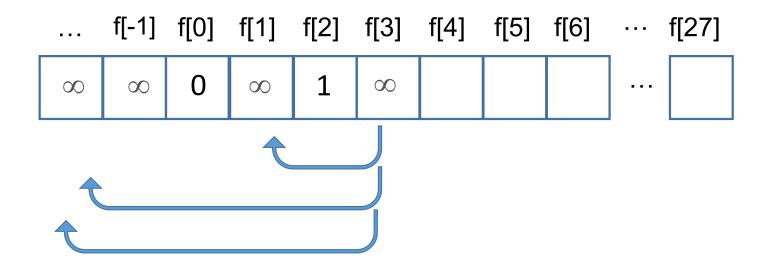


- f[X] = 最少用多少枚硬币拼出X
- **f[X]** = ∞ 表示无法用硬币拼出**X**



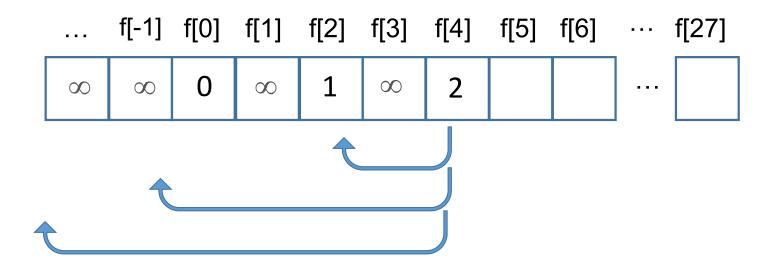


- f[X] = 最少用多少枚硬币拼出X
- **f[X]** = ∞ 表示无法用硬币拼出**X**



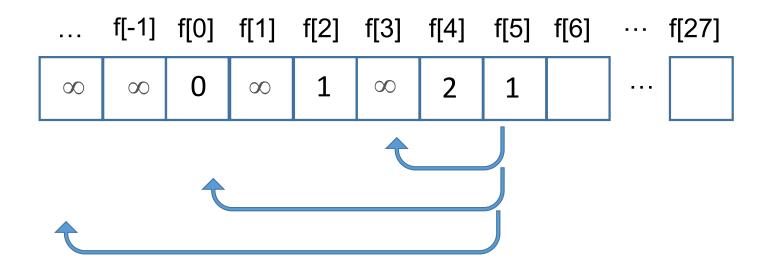


- f[X] = 最少用多少枚硬币拼出X
- **f[X]** = ∞ 表示无法用硬币拼出**X**



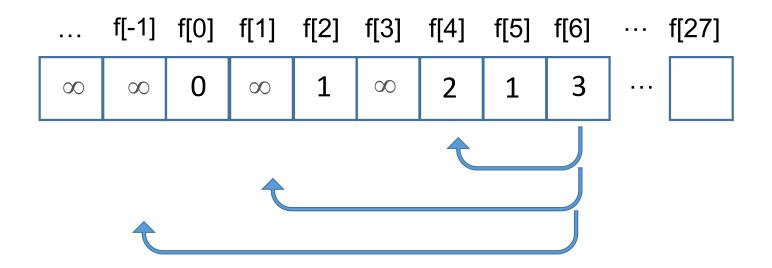


- f[X] = 最少用多少枚硬币拼出X
- **f[X]** = ∞ 表示无法用硬币拼出**X**



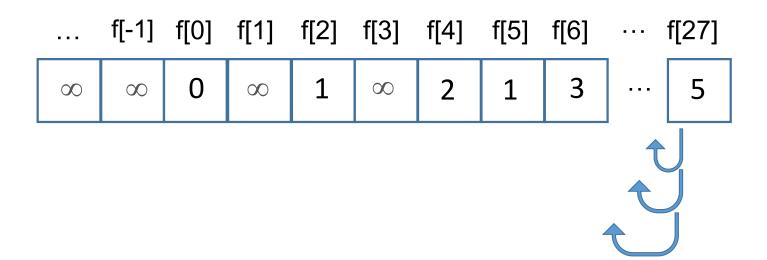


- f[X] = 最少用多少枚硬币拼出X
- **f[X]** = ∞ 表示无法用硬币拼出**X**





- f[X] = 最少用多少枚硬币拼出X
- **f[X]** = ∞ 表示无法用硬币拼出**X**





- 每一步尝试三种硬币,一共27步
- 与递归算法相比,没有任何重复计算
- 算法时间复杂度(即需要进行的步数): 27 * 3
- 递归时间复杂度:>>27*3

小结



- 求最值型动态规划
- 动态规划组成部分:
 - -1. 确定状态
 - •最后一步(最优策略中使用的最后一枚硬币 $\mathbf{a}_{\mathbf{k}}$)
 - 化成子问题(最少的硬币拼出更小的面值27-a_K)
 - -2. 转移方程
 - $f[X] = min\{f[X-2]+1, f[X-5]+1, f[X-7]+1\}$
 - -3. 初始条件和边界情况
 - f[0] = 0, 如果不能拼出Y, f[Y]=正无穷
 - -4. 计算顺序
 - f[0], f[1], f[2], ...
- 消除冗余, 加速计算





Unique Paths

http://www.lintcode.com/en/problem/unique-paths/
http://www.jiuzhang.com/solutions/unique-paths/

LintCode 114: Unique Paths



- 题意:
- 给定m行n列的网格,有一个机器人从左上角(0,0)出发,每一步可以向下或者向右走一步
- 问有多少种不同的方式走到右下角

0 1 2 3 4 5 6 7

0 1 2 3 4 5 6 7

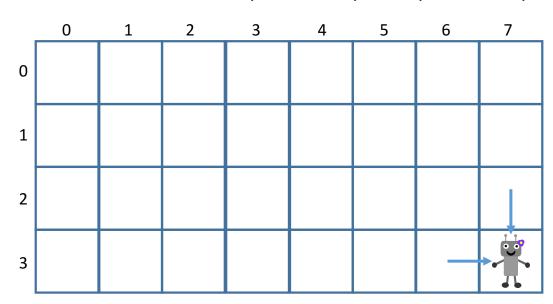
1 2 3 4 5 6 7

计数型动态规划

动态规划组成部分一:确定状态



- 最后一步:无论机器人用何种方式到达右下角,总有最后挪动的一步: - 向右或者向下
- 右下角坐标设为(m-1, n-1)
- 那么前一步机器人一定是在(m-2, n-1)或者(m-1, n-2)



子问题

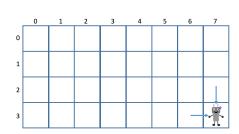


• 那么,如果机器人有**X**种方式从左上角走到(m-2,n-1),有**Y**种方式从左上角走到(m-1,n-2),则机器人有**X+Y**种方式走到(m-1, n-1)

思考:为什么是X+Y

• 问题转化为, 机器人有多少种方式从左上角走到(m-2, n-1)和(m-1, n-2)

• 原题要求有多少种方式从左上角走到(m-1, n-1)



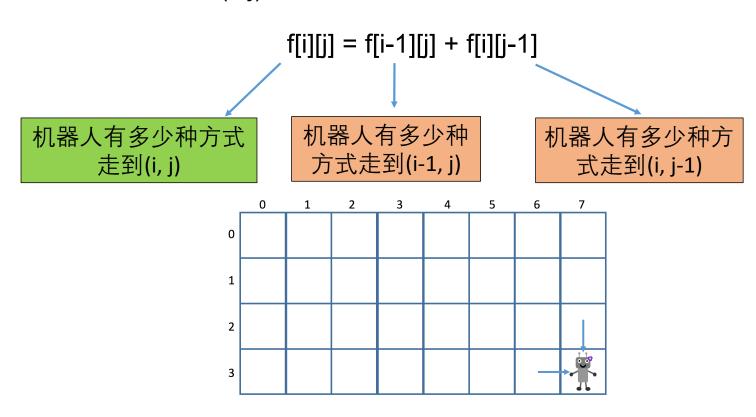
• 子问题

• 状态:设f[i][j]为机器人有多少种方式从左上角走到(i, j)

动态规划组成部分二:转移方程



• 对于任意一个格子(i, j)

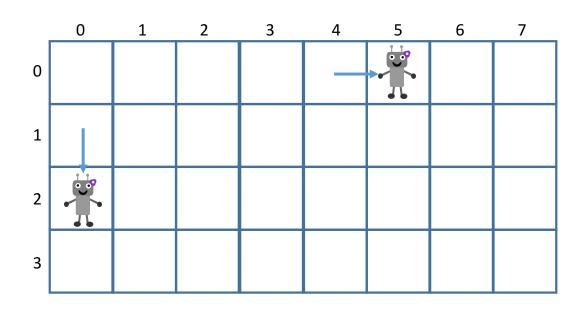


动态规划组成部分三:初始条件和边界情况



• 初始条件:f[0][0] = 1,因为机器人只有一种方式到左上角

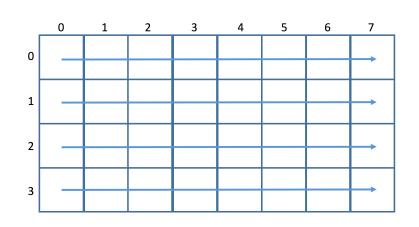
• 边界情况: i = 0 或 j = 0,则前一步只能有一个方向过来→f[i][j] = 1



动态规划组成部分四:计算顺序



- f[0][0] = 1
- 计算第0行:f[0][0],f[0][1],...,f[0][n-1]
- 计算第1行:f[1][0], f[1][1], ..., f[1][n-1]



• ...

- 计算第m-1行: f[m-1][0], f[m-1][1], ..., f[m-1][n-1]
- 答案是f[m-1][n-1]
- 时间复杂度(计算步数): O(MN), 空间复杂度(数组大小): O(MN)



课间休息



• 休息五分钟



Jump Game

http://www.lintcode.com/en/problem/jump-game/
http://www.jiuzhang.com/solutions/jump-game/

LintCode 116 Jump Game



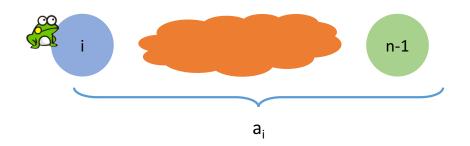
- 有n块石头分别在x轴的0, 1, ..., n-1位置
- 一只青蛙在石头0, 想跳到石头n-1
- 如果青蛙在第i块石头上,它最多可以向右跳距离ai
- 问青蛙能否跳到石头n-1
- 例子:
- 输入: a=[2, 3, 1, 1, 4]
- 输出:True
- 输入: a=[3, 2, 1, 0, 4]
- 输出: False

存在型动态规划

动态规划组成部分一:确定状态



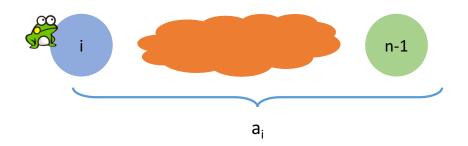
- 最后一步:如果青蛙能跳到最后一块石头n-1,我们考虑它跳的最后一步
- 这一步是从石头i跳过来, i<n-1
- 这需要两个条件同时满足:
 - 青蛙可以跳到石头i
 - -最后一步不超过跳跃的最大距离: $n-1-i <= a_i$



子问题



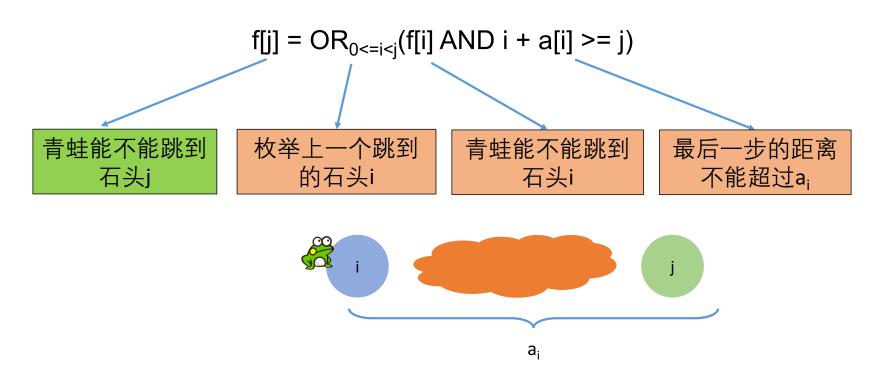
- 那么,我们需要知道青蛙能不能跳到石头i (i<n-1)
- 而我们原来要求青蛙能不能跳到石头n-1
- 子问题
- 状态:设f[j]表示青蛙能不能跳到石头j



动态规划组成部分二:转移方程



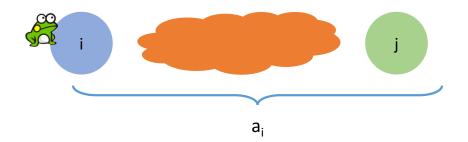
• 设f[j]表示青蛙能不能跳到石头j



动态规划组成部分三:初始条件和边界情况



- 设f[j]表示青蛙能不能跳到石头j
- 初始条件: f[0] = True, 因为青蛙一开始就在石头0



动态规划组成部分四:计算顺序



- 设f[j]表示青蛙能不能跳到石头j
- $f[j] = OR_{0 < i < j}(f[i] AND i + a[i] >= j)$
- 初始化f[0]=True
- 计算f[1], f[2], ..., f[n-1]
- 答案是f[n-1]
- 时间复杂度: O(N²), 空间复杂度(数组大小): O(N)





Maximum Product Subarray

http://www.lintcode.com/problem/maximum-product-subarray/http://www.jiuzhang.com/solutions/maximum-product-subarray/

LintCode 191 Maximum Product Subarray



- 题意:
- 给定a[0], ..., a[n-1]
- 找到最长的连续子序列i, i+1, i+2, ..., j, 使得a[i]*a[i+1]*...*a[j]最大
- 例子:
- 输入:[2, 3, -2, 4]
- 输出:6 (子序列2, 3: 2*3 = 6)

最值型动态规划

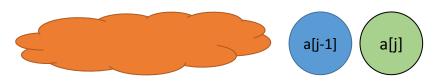
动态规划组成部分一:确定状态



- 最后一步:对于最优的策略(乘积最大),一定有最后一个元素a[j]
- 第一种情况:最优策略的序列就是{a[j]},答案是a[j]

a[j]

• 第二种情况,连续子序列长度大于1,那么最优策略中a[j]前一个元素肯定是a[j-1].

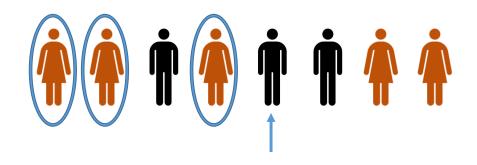


• 但是如果a[j]是正数,我们希望以a[j-1]结尾的连续子序列乘积**最大**;如果a[j]是负数,我们希望以a[j-1]结尾的连续子序列乘积**最小**

同时保留两个极值



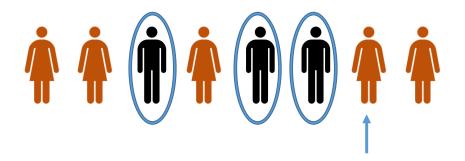
- 但是如果a[j]是正数,我们希望以a[j-1]结尾的连续子序列乘积**最大**;如果a[j]是负数,我们希望以a[j-1]结尾的连续子序列乘积**最小**
- 题目要求最大,为什么要同时保留以a[j-1]结尾最小和最大的乘积?



同时保留两个极值



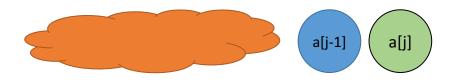
- 但是如果a[j]是正数,我们希望以a[j-1]结尾的连续子序列乘积**最大**;如果a[j]是负数,我们希望以a[j-1]结尾的连续子序列乘积**最小**
- 题目要求最大,为什么要同时保留以a[j-1]结尾最小和最大的乘积?



子问题



- 可以同时做两个问题:求以a[j]结尾的连续子序列的最大乘积和以a[j]结 尾的连续子序列的最小乘积
- 两种情况都需要求以a[j-1]结尾的乘积最大/小连续子序列
- 化为子问题
- 状态:设f[j] =以a[j]结尾的连续子序列的最大乘积,设g[j] =以a[j]结尾的连续子序列的最小乘积



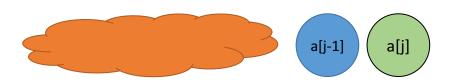
动态规划组成部分二:转移方程



• f[j] =以a[j]结尾的连续子序列的最大乘积

 $f[j] = max{a[j], max{a[j]*f[j-1], a[j]*g[j-1]}| j>0}$

以a[j]结尾的连续子序 列的最大乘积 情况1:子序列 就是a[j]本身 情况2:以a[j-1]结尾的连续子序 列的最大/最小乘积,乘上a[j]



动态规划组成部分二:转移方程

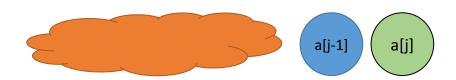


• g[j] =以a[j]结尾的连续子序列的最小乘积

 $g[j] = min\{a[j], min\{a[j]*f[j-1], a[j]*g[j-1]\}| j>0\}$

以a[j]结尾的连续子序 列的最小乘积 情况1:子序列 就是a[j]本身

情况2:以a[j-1]结尾的连续子序 列的最大/最小乘积,乘上a[j]



动态规划组成部分三:初始条件和边界情况



 $f[j] = max{a[j], max{a[j]*f[j-1], a[j]*g[j-1]}| j>0}$

以a[j]结尾的连续子序 列的最大乘积 情况1:子序列 就是a[j]本身 情况2:以a[j-1]结尾的连续子序 列的最大/最小乘积,乘上a[j]

- 情况2必须满足:-j>0,即a[j]前面至少还有一个元素
- 初始条件:空

动态规划组成部分四:计算顺序



- f[j] =以a[j]结尾的连续子序列的最大乘积
- g[j] =以a[j]结尾的连续子序列的最小乘积
- 计算f[0], g[0], f[1], g[1], f[2], g[2],..., f[n-1], g[n-1]
- 答案是max{f[0], f[1], f[2], ..., f[n-1]}
- 算法时间复杂度O(n)





四个组成部分

- 确定状态
 - 研究最优策略的最后一步
 - 化为子问题
- 转移方程
 - 根据子问题定义直接得到
- 初始条件和边界情况
 - 细心, 考虑周全
- 计算顺序
 - 利用之前的计算结果

课程FAQ



- 是否涵盖所有的动态规划考题类型 - 是
- 常见动态规划类型
 - 坐标型动态规划 (20%) 重点
 - 序列型动态规划 (20%) 重点
 - 划分型动态规划 (20%)
 - 重点 重点
 - 区间型动态规划 (15%)
 - 背包型动态规划 (10%)
 - -最长序列型动态规划 (5%)
 - -博弈型动态规划 (5%)
 - 综合性动态规划 (5%)

课程FAQ



- 我需要什么基础才可以上这个班
 - 写一门基础语言,写过二三十道题,想对动态规划有透彻了解
- 上完这门课我能学到什么
 - 对于面试中常见动态规划题目能迅速判断并找到解题要领
 - 对于动态规划变种题能找到解题的突破口并轻松解决
 - 可以对动态规划算法进行时间和空间上的优化
 - -面试中将不再有你不会做的动态规划题

课程安排



第一讲:动态规划入门

第三讲:序列型动态规划

第五讲:区间和背包型动态规划

第七讲:难题专场

第二讲:坐标型动态规划

第四讲:划分型动态规划

第六讲: 双序列型动态规划

课表和时间



- 链接:
 - http://www.jiuzhang.com/course/12/#schedule
- 美东时间
 - 每周六、日下午4:30
- 美西时间
 - 每周六、日下午1:30
- 北京时间
 - 每周日、一上午4:30

章	内容	北京时间	美东时间	美西时间
1	动态规划入门 Introduction to Dynamic Programming	2017/09/17 04:30:00	2017/09/16 16:30:00	2017/09/1 13:30:00
2	动态规划初探+坐标型动态规划+位操作型动态规划 A Peek into Dynamic Programming + Dynamic Programming on Coordinates + Bit operation	2017/09/24 04:30:00	2017/09/23 16:30:00	2017/09/2 13:30:00
3	序列型动态规划 Dynamic Programming on Sequences	2017/09/25 04:30:00	2017/09/24 16:30:00	2017/09/2 13:30:00
4	划分型,博弈型和背包型动态规划 Dynamic Programming on Partitioning, Game Theory, and Backpack	2017/10/01 04:30:00	2017/09/30 16:30:00	2017/09/3 13:30:00
5	背包动态规划和区间型动态规划 Dynamic Programming on Knapsack and Intervals	2017/10/02 04:30:00	2017/10/01 16:30:00	2017/10/0 13:30:00
6	双序列动态规划 Dynamic Programming on Double Sequence	2017/10/08 04:30:00	2017/10/07 16:30:00	2017/10/0 13:30:00
7	动态规划难题专场 Special Class on Hard Problems in Dynamic Programming	2017/10/09 04:30:00	2017/10/08 16:30:00	2017/10/0

为什么要报名上直播课



- 全网唯一动态规划面试专题课
- 内容总是最新
 - -结合实时面试趋势
 - 讲解实时热门真题
- 每周定时定量,起到督促作用
 - 克服懒惰心理
- 学习积极性更高
- 讲师助教实时答疑
 - 及时清扫障碍

你可以获得哪些学员权限



- LintCode专属阶梯训练题
- · 九章QA发问权限
 - -助教老师100%回答
- 九章QA课程与内推板块浏览权限
 - -最新最热面试题面经实时分享
 - 让九章老学员帮你内推各大公司
- · 九章课程QQ群
 - 与同学们实时交流学习问题
 - 随时@老师@助教答疑解惑
 - -认识更多志同道合的朋友, 一起打鸡血

付款方式?

九章官网登录→我的课程
Paypal和支付宝付款
付费之后即可开启LintCode阶梯训练权限,有效期一年
使用支付宝的同学请至少提前1小时付款,否则可能耽误上课

付款截止日期:第二节课之前







✔ 您已经成功报名《动态规划专题班》

下一步:请在课程开始时,通过我的课程界面中的"进入课堂"按钮上课。提前5-15分钟进入课堂可先与老师一起互动交流。

1. 参加免费在线课程试听

您可以在左上角我的课程中找到"进入课堂"的按钮。请在课程开始前的5-15分钟进入课堂。免费用户暂时无法下载课件,但可以查看预习资料。您可以在课堂上通过文字的方式向老师提问。

2. 付费参加完整课程

在后续课程中,您可以通过学员专属QQ群,官网QA板块与老师,助教以及同学交流。及时解决课后问题,与更多志同道合的同学一起学习、讨论和进步。获取更多最新最及时的求职咨询。

₽付费参加完整课程

课程信息

开课时间:9/16/2017, 1:30:00 PM 添加课表到本地日历

本次课为免费试听课 FREE, 如果你错过了本节,也可以在下一期开课时补

- 课程学时:每节课 2 小时,总共 14 课时
- 先修技能:任何一门计算机语言,最好是Java, Python, C++;需先修《九章算法班》
- 课程安排:本期课程时间安排,详见下文完整课程时间表。下期开课时间未定,一旦时间 确定,将第一时间在官网公布。 查看完整课程表
- 课程版本:V2.0 查看课程更新日志

怎样获得优惠价 1899¥ / 299\$?

營三人一起学:拉上其他两个小伙伴(或者更多)一起报名,在付款备注中填写对方的邮

●分享到微信:关注九章的微信ninechapter。在`菜单栏->分享优惠`中找到《动态规划 专题班》的宣传文,分享到微信朋友圈,或超过20人的微信群,截图并发给九章算法公

が分享到微博:关注九章算法微博账号(搜索"九章算法"),分享《动态规划专题班》的最 近一期课程宣传文并 @ 九章算法。



关注微信公众号 订阅最新开课通知



扫码微信小程序 获取一手求职资讯

分享到: 🚮 新浪微博 🕑 微信 🙏 人人网 in LinkedIn 🔣 Facebook 🚹 更多 🕡

付款方式



请选择支付方式	
付款方式* 推荐使用支付宝,价格更优惠,最高. ② 支付宝 ③ Paypal	立滅150元!
请填写相关信息	As Annah MICHIGOLOGIA CON A
对课程所教授内容的自我评价 *	参加本期课程的目的 *
○ 考金価	○ 找宝职工作 ○ 找实习
○ 行一点參與 ○ 比较熟练,但想获得更多提高	○ 单纯提高技术水平
	○ 手式旋阀1X小小干
○ 已经精通,寻求其他知识和信息	
○已经精通,寻求其他知识和信息	
付款信息、备注留言	此——列出这些学员注册课程时的邮箱,我们将会——确认。如果你在社交网站分享了我们的授课信 chapter的或者微博@九章算法的除外)。您也可以再这里向老师提问,或备注任何需要告知我们的信



优惠码的获得?

关注微信"九章算法" 点击右下角"课程优惠"按照提示操作



版权声明

九章的所有课程均受法律保护,不允许录像与传播录像一经发现,将被追究法律责任和赔偿经济损失



请提问