单值一型模糊系统输出公式满足梯度利普西茨条件的证明

2020.7.18

选择模糊规则中隶属函数均为高斯型隶属函数的单值一型模糊逻辑系统，此时模糊系统的输出公式为：

$$f = \frac{\sum_{i=1}^{M} y_i \prod_{j=1}^{n} \exp(-\frac{(x_j-\mu_{ij})^2}{2\sigma_{ij}^2})}{\sum_{i=1}^{M} \prod_{j=1}^{n} \exp(-\frac{(x_j-\mu_{ij})^2}{2\sigma_{ij}^2})} = \frac{b}{a} \tag{1}$$

其中M表示模糊规则的数目，n表示规则前件的个数，y_i表示第i条规则输出的后件，μ_{ij}与σ_{ij}表示第i条规则中第j个前件中隶属函数的参数，$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$表示模糊系统的一个输入。计算$f$对与$y_i$的一阶导数为：

$$f'_{y_i} = \frac{\prod_{j=1}^{n} \exp(-\frac{(x_j-\mu_{ij})^2}{2\sigma_{ij}^2})}{a} \tag{2}$$

则f对与y_i的二阶导数为：

$$f''_{y_i} = 0 \tag{3}$$

所以f对与y_i的二阶导数有界。计算f对与μ_{ij}的一阶导数为：

$$\begin{aligned} f'_{\mu_{ij}} &= \frac{y_i \prod_{j=1}^{n} \exp(-\frac{(x_j-\mu_{ij})^2}{2\sigma_{ij}^2})\frac{x_j-\mu_{ij}}{2\sigma_{ij}^2} a - b\prod_{j=1}^{n} \exp(-\frac{(x_j-\mu_{ij})^2}{2\sigma_{ij}^2})\frac{x_j-\mu_{ij}}{2\sigma_{ij}^2}}{a^2} && (4)\\ &= (y_i - \frac{b}{a})\frac{\prod_{j=1}^{n} \exp(-\frac{(x_j-\mu_{ij})^2}{2\sigma_{ij}^2})\frac{x_j-\mu_{ij}}{2\sigma_{ij}^2}}{a} && (5)\\ &= P_1 P_2 && (6)\end{aligned}$$

记$P_1 = (y_i - \frac{b}{a})$,$P_2 = \frac{\prod_{j=1}^{n} \exp(-\frac{(x_j-\mu_{ij})^2}{2\sigma_{ij}^2})\frac{x_j-\mu_{ij}}{2\sigma_{ij}^2}}{a}$. 计算$f$对与$\mu_{ij}$的二阶导数为：

$$f''_{\mu_{ij}} = (P_1P_2)' = P_1'P_2 + P_1P_2' \tag{7}$$

其中：

$$P_1' = -f'_{\mu_{ij}} \tag{8}$$

$$P_2' = \frac{\Big[\prod_{j=1}^{n} \exp(-\frac{(x_j-\mu_{ij})^2}{2\sigma_{ij}^2})(\frac{x_j-\mu_{ij}}{2\sigma_{ij}^2})^2 + \prod_{j=1}^{n} \exp(-\frac{(x_j-\mu_{ij})^2}{2\sigma_{ij}^2})\frac{-1}{2\sigma_{ij}^2}\Big]a - \Big[\prod_{j=1}^{n} \exp(-\frac{(x_j-\mu_{ij})^2}{2\sigma_{ij}^2})\frac{x_j-\mu_{ij}}{2\sigma_{ij}^2}\Big]^2}{a^2} \tag{9}$$

计算f对与σ_{ij}的一阶导数为：

$$f'_{\sigma_{ij}} = \frac{y_i \prod\limits_{j=1}^{n} \exp(-\frac{(x_j-\mu_{ij})^2}{2\sigma_{ij}^2})\frac{(x_j-\mu_{ij})^2}{\sigma_{ij}^3} a - b\prod\limits_{j=1}^{n} \exp(-\frac{(x_j-\mu_{ij})^2}{2\sigma_{ij}^2})\frac{(x_j-\mu_{ij})^2}{\sigma_{ij}^3}}{a^2} \tag{10}$$

$$= (y_i - \frac{b}{a})\frac{\prod\limits_{j=1}^{n} \exp(-\frac{(x_j-\mu_{ij})^2}{2\sigma_{ij}^2})\frac{(x_j-\mu_{ij})^2}{\sigma_{ij}^3}}{a} \tag{11}$$

$$= P_3P_4 \tag{12}$$

记$P_1 = (y_i - \frac{b}{a})$,$P_2 = \frac{\prod\limits_{j=1}^{n} \exp(-\frac{(x_j-\mu_{ij})^2}{2\sigma_{ij}^2})\frac{(x_j-\mu_{ij})^2}{\sigma_{ij}^3}}{a}$. 计算$f$对与$\sigma_{ij}$的二阶导数为：

$$f''_{\sigma_{ij}} = (P_3P_4)' = P_3'P_4 + P_3P_4' \tag{13}$$

其中：

$$P_3' = -f'_{\sigma_{ij}} \tag{14}$$

$$P_4' = \frac{\Big[\prod\limits_{j=1}^{n} \exp(-\frac{(x_j-\mu_{ij})^2}{2\sigma_{ij}^2})\frac{(x_j-\mu_{ij})^4}{\sigma_{ij}^6} + \prod\limits_{j=1}^{n} \exp(-\frac{(x_j-\mu_{ij})^2}{2\sigma_{ij}^2})\frac{-3(x_j-\mu_{ij})^2}{\sigma_{ij}^4}\Big]a - \Big[\prod\limits_{j=1}^{n} \exp(-\frac{(x_j-\mu_{ij})^2}{2\sigma_{ij}^2})\frac{(x_j-\mu_{ij})^2}{\sigma_{ij}^3}\Big]^2}{a^2} \tag{15}$$

由模糊系统有规则得到的点火强度位于0 1之间，故分母$a > 0$,只要模糊规则中的前件参数σ_{ij}均为不趋于0的正数，故可以使得$\frac{1}{\sigma_{ij}}$均有界，不难看出f对与σ_{ij}的二阶导数以及f对与μ_{ij}的二阶导数公式中的各项均有界，所以f对与σ_{ij}的二阶导数以及f对与μ_{ij}的二阶导数有界。亦即：$f'' = (f''_{y_1}, \cdots, f''_{y_n}, f''_{\mu_{11}}, \cdots, f''_{\mu_{Mn}}, f''_{\sigma_{11}}, \cdots, f''_{\sigma_{Mn}})$ 有界。

为了证明单值一型模糊系统输出公式满足梯度利普西茨条件，首先引入几个性质。设Q是R^n的子集，用$C_L^{k,p}(Q)$表示具有后面两个性质的函数类:(1)若$f \in C_L^{k,p}(Q)$,则f在Q上是k阶连续可微的;(2)f的p阶导数在Q上是利普西茨连续的，利普西茨常数为L,即满足$||f^{(p)}(x) - f^{(p)}(x)|| \leq L||x-y||, (\forall x, y \in Q)$.

对于我们来说，最常用的函数类是$C_L^{1,1}(R^n)$,这类函数的梯度是利普西茨连续。由前面的定义，若$f \in C_L^{1,1}(R^n)$,则有:

$$||f^{(1)}(x) - f^{(1)}(x)|| \leq L||x-y||, (\forall x, y \in R^n) \tag{16}$$

下面介绍一个有助于证明的重要引理。

引理1. 设$f \in C_L^{2,1}(R^n)$,$C_L^{2,1}(R^n) \subset C_L^{1,1}(R^n)$当且仅当*:*

$$||f''(x)|| \leq L, \forall x \in R^n \tag{17}$$

证明. 事实上，对于$\forall x, y \in R^n$,有：

$$f'(y) = f'(x) + \int_0^1 f''(x + \tau(y-x))(y-x)d\tau \tag{18}$$

$$= f'(x) + \Big(\int_0^1 f''(x + \tau(y-x))d\tau\Big)(y-x) \tag{19}$$

因此，若条件$||f''(x)|| \le L, \forall x \in R^n$满足，则有：

$$||f'(y) - f'(x)|| = \Big|\Big|\Big(\int_0^1 f''(x + \tau(y-x))d\tau\Big)(y-x)\Big|\Big| \tag{20}$$

$$\le \Big|\Big|\int_0^1 f''(x + \tau(y-x))d\tau\Big|\Big| \cdot ||y-x|| \tag{21}$$

$$= \int_0^1 ||f''(x + \tau(y-x))||d\tau \cdot ||y-x|| \tag{22}$$

$$= L||y-x||. \tag{23}$$

反之，若$f \in C_L^{2,1}(R^n)$,则对于任意$s \in R^n$且$\alpha > 0$,我们有：

$$\Big|\Big|\Big(\int_0^\alpha f''(x + \tau s)d\tau\Big) \cdot s\Big|\Big| = ||f'(x + \alpha s) - f'(x)|| \le \alpha L||s|| \tag{24}$$

在上式两边同时除以α,再令$\alpha \to 0$,可以得到:$||f''(x)|| \le L, \forall x \in R^n$. □

由上述引理以及本文中所选择的单值一型模糊逻辑系统输出公式的二阶导数有界，故证明了单值一型模糊系统输出公式是满足梯度利普西茨条件的。