数的历史与发展

王介哲

优才教育

2019 年 3 月 20 日

你能想到那些简单的计数方式？

你能想到那些简单的计数方式？

- 绳子打结

你能想到那些简单的计数方式？

- 绳子打结
- 骨头穿孔

你能想到那些简单的计数方式？

- 绳子打结
- 骨头穿孔
- 泥板刻痕

你能想到那些简单的计数方式？

- 绳子打结
- 骨头穿孔
- 泥板刻痕
- ……

最早的数字

问题

最早的数字出现在什么时候？

- A 十万年前
- B 三万年前
- C 一万年前
- D 五千年前

最早的数字

问题

最早的数字出现在什么时候？

- A 十万年前
- B 三万年前
- C 一万年前
- D 五千年前

答案

(B)
数的第一次使用可以追溯到大约公元三万年前，迄今为止发现的最早的例子是在南非的一个洞穴里。

最早的数字

问题

最早的数字出现在什么时候？

- A 十万年前
- B 三万年前
- C 一万年前
- D 五千年前

答案

(B)

数的第一次使用可以追溯到大约公元三万年前，迄今为止发现的最早的例子是在南非的一个洞穴里。

图: 南非 · 甘果洞

谁说出的数字大？

一则笑话

谁说出的数字大？

两个匈牙利贵族决定做一次数数游戏——谁说出的数字最大谁赢。
“好，”一个贵族说，“你先说把！”
另一个绞尽脑汁想了好久，终于说出他所想到的最大数字：“3”。
现在轮到第一个动脑筋了。苦思冥想了更久，他表示弃权说：“你赢啦！”

——伽莫夫《从一到无穷大》

一则笑话

谁说出的数字大？

两个匈牙利贵族决定做一次数数游戏——谁说出的数字最大谁赢。
“好，”一个贵族说，“你先说把！”
另一个绞尽脑汁想了好久，终于说出他所想到的最大数字：“3”。
现在轮到第一个动脑筋了。苦思冥想了更久，他表示弃权说：“你赢啦！”
——伽莫夫《从一到无穷大》

问题

最大的数是多少？

古埃及

图: 莱因德数学纸草书，著于约公元前 1700 年

莱因德数学纸草书

总长 525 厘米、高 33 厘米，现藏大英博物馆。
纸草书的内容分两部分：前面是一个分数表，后面是 84 个数学问题和一段无法理解的话（也称为问题 85）。
问题涉及素数、合数和完全数，算术，几何，调和平均数以及简单筛法等概念，其中还有对 π 的简单计算，所得值为 3.1605。

古埃及

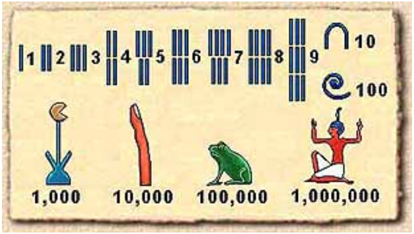
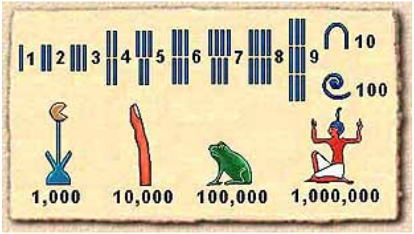


图: 古埃及数字

古埃及



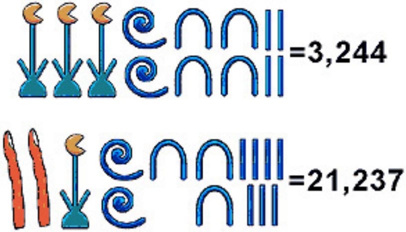
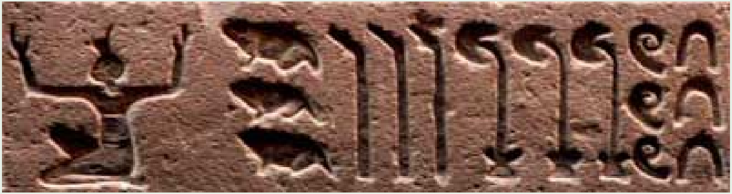


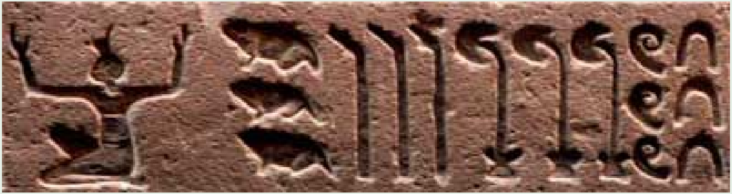
图: 古埃及数字

这是多少？



古埃及

这是多少？



答案

1,333,330

古埃及

图: 荷鲁斯之眼

古埃及

荷鲁斯之眼

荷鲁斯之眼顾名思义，它是鹰头神荷鲁斯的眼睛。
荷鲁斯的右眼象征完整无缺的太阳，依据传说，因荷鲁斯战胜赛特，右眼有著远离痛苦，战胜邪恶的力量。
荷鲁斯的左眼象征有缺损的月亮，依据传说，荷鲁斯后来将左眼献给欧西里斯，因而左眼亦有分辨善恶、捍卫健康与幸福的作用，亦使古埃及人也相信荷鲁斯的左眼具有复活死者的力量。

古埃及

图: 荷鲁斯之眼

古巴比伦

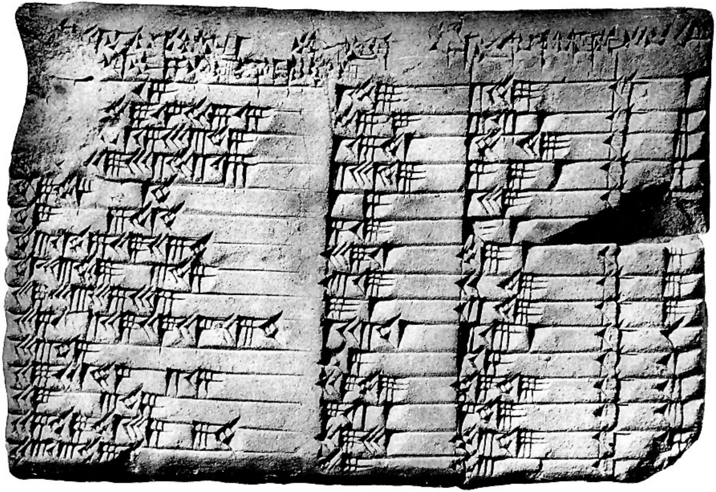


图: 普林顿 322，刻于约公元前 1800 年

古巴比伦

普林顿 322

普林顿 322 为古巴比伦的一个泥板，约 13 厘米宽，9 厘米高，2 厘米厚，现藏于哥伦比亚大学。
泥板上有一个四个行十五列和楔形文字组成的表格，表格列出了 15 组勾股数。

古巴比伦

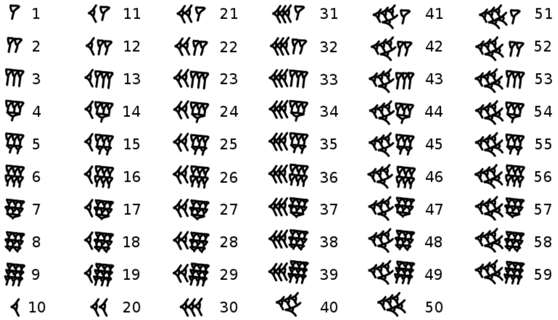

1 11 21 31 41 51
2 12 22 32 42 52
3 13 23 33 43 53
4 14 24 34 44 54
5 15 25 35 45 55
6 16 26 36 46 56
7 17 27 37 47 57
8 18 28 38 48 58
9 19 29 39 49 59
10 20 30 40 50

图: 巴比伦数字

古印度

०	१	२	३	४	५	६	७	८	९
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

图: 天城文数字

古中国

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
直式	〇	𝍠	𝍡	𝍢	𝍣	𝍤	𝍥	𝍦	𝍧	𝍨
横式	〇	𝍩	𝍪	𝍫	𝍬	𝍭	𝍮	𝍯	𝍰	𝍱

图: 算筹正数

古中国

图: 算筹正数

图: 负数

图: 算筹正数

图: 负数

图: 南宋正筹码

古中国

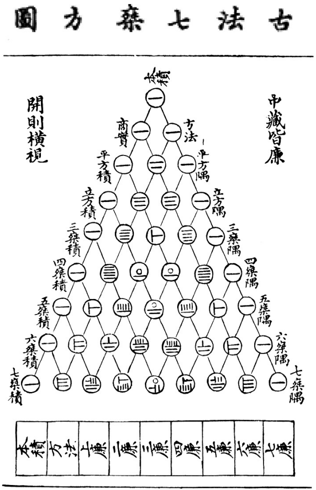


图: 杨辉三角

罗马数字

罗马数字共有 7 个:

罗马数字	I	V	X	L	C	D	M
数值	1	5	10	50	100	500	1000

罗马数字

罗马数字共有 7 个:

罗马数字	I	V	X	L	C	D	M
数值	1	5	10	50	100	500	1000

拼写规则

- 右加左减
- 加线乘千
- 数码限制

罗马数字

右加左减

罗马数字

右加左减

- 在较大的罗马数字的右边记上较小的罗马数字，表示大数加小数

罗马数字

右加左减

- 在较大的罗马数字的右边记上较小的罗马数字，表示大数加小数
- 在较大的罗马数字的左边记上较小的罗马数字，表示大数减小数

罗马数字

右加左减

- 在较大的罗马数字的右边记上较小的罗马数字，表示大数加小数
- 在较大的罗马数字的左边记上较小的罗马数字，表示大数减小数
- 左减的数字有限制，仅限于 I、X、C
  比如 45 不可以写成 VL，只能是 XLV

右加左减

- 在较大的罗马数字的右边记上较小的罗马数字，表示大数加小数
- 在较大的罗马数字的左边记上较小的罗马数字，表示大数减小数
- 左减的数字有限制，仅限于 I、X、C
  比如 45 不可以写成 VL，只能是 XLV
- 左减时不可跨越一个位值
  比如，99 不可以用 IC（100-1）表示，而是用 XCIX（[100-10]+[10-1]）表示。

加线乘千

罗马数字

加线乘千

- 在罗马数字的上方加上一条横线，表示将这个数乘以 1000，即是原数的 1000 倍

罗马数字

加线乘千

- 在罗马数字的上方加上一条横线，表示将这个数乘以 1000，即是原数的 1000 倍
- 同理，如果上方有两条横线，即是原数的 1000000（1000^2）倍

罗马数字

数码限制

罗马数字

数码限制

- 同一数码最多只能连续出现三次，如 40 不可表示为 XXXX，而要表示为 XL

罗马数字

数码限制

- 同一数码最多只能连续出现三次，如 40 不可表示为 XXXX，而要表示为 XL
- 例外：由于 IV 是古罗马神话主神朱庇特（即 IVPITER，古罗马字母里没有 J 和 U）的首字，因此有时用 IIII 代替 IV

右加左减

- 在较大的罗马数字的右边记上较小的罗马数字，表示大数加小数
- 在较大的罗马数字的左边记上较小的罗马数字，表示大数减小数
- 左减的数字有限制，仅限于 I、X、C
- 左减时不可跨越一个位值

加线乘千

- 在罗马数字的上方加上一条横线，表示原数的 1000 倍
- 同理，如果上方有两条横线，即是原数的 1000000 倍

数码限制

- 同一数码最多只能连续出现三次
- 例外：有时可以用 IIII 代替 IV

罗马数字

罗马数字 -> 数值:

答案:

罗马数字

罗马数字 -> 数值:

- VIII

答案:

罗马数字

罗马数字 -> 数值：

- VIII

答案：

- 8

罗马数字

罗马数字 -> 数值：

- VIII
- XIV

答案：

- 8

罗马数字

罗马数字 -> 数值：

- VIII
- XIV

答案：

- 8
- 14

罗马数字

罗马数字 -> 数值:

- VIII
- XIV
- LX

答案:

- 8
- 14

罗马数字

罗马数字 -> 数值:

- VIII
- XIV
- LX

答案:

- 8
- 14
- 60

罗马数字

罗马数字 -> 数值:

- VIII
- XIV
- LX
- XCIX

答案:

- 8
- 14
- 60

罗马数字

罗马数字 -> 数值:

- VIII
- XIV
- LX
- XCIX

答案:

- 8
- 14
- 60
- 99

罗马数字

罗马数字 -> 数值：

- VIII
- XIV
- LX
- XCIX
- CXCIX

答案：

- 8
- 14
- 60
- 99

罗马数字

罗马数字 -> 数值:

- VIII
- XIV
- LX
- XCIX
- CXCIX

答案:

- 8
- 14
- 60
- 99
- 199

罗马数字

罗马数字 -> 数值:

- VIII
- XIV
- LX
- XCIX
- CXCIX
- M$\overline{\text{V}}$

答案:

- 8
- 14
- 60
- 99
- 199

罗马数字

罗马数字 -> 数值:

- VIII
- XIV
- LX
- XCIX
- CXCIX
- M$\overline{\text{V}}$

答案:

- 8
- 14
- 60
- 99
- 199
- 4000

罗马数字

数值 -> 罗马数字 :

答案 :

罗马数字

数值 -> 罗马数字:

- 19

答案:

罗马数字

数值 -> 罗马数字：

- 19

答案：

- XIX

罗马数字

数值 -> 罗马数字:

- 19
- 145

答案:

- XIX

罗马数字

数值 -> 罗马数字:

- 19
- 145

答案:

- XIX
- CXLV

罗马数字

数值 -> 罗马数字：

- 19
- 145
- 361

答案：

- XIX
- CXLV

罗马数字

数值 -> 罗马数字：

- 19
- 145
- 361

答案：

- XIX
- CXLV
- CCCLXI

罗马数字

数值 -> 罗马数字:

- 19
- 145
- 361
- 1437

答案:

- XIX
- CXLV
- CCCLXI

罗马数字

数值 -> 罗马数字:

- 19
- 145
- 361
- 1437

答案:

- XIX
- CXLV
- CCCLXI
- MCDXXXVII

罗马数字

数值 -> 罗马数字：

- 19
- 145
- 361
- 1437
- 8191

答案：

- XIX
- CXLV
- CCCLXI
- MCDXXXVII

罗马数字

数值 -> 罗马数字:

- 19
- 145
- 361
- 1437
- 8191

答案:

- XIX
- CXLV
- CCCLXI
- MCDXXXVII
- $\overline{\text{V}}$MMMCXCI

罗马数字

数值 -> 罗马数字：

- 19
- 145
- 361
- 1437
- 8191
- 65537

答案：

- XIX
- CXLV
- CCCLXI
- MCDXXXVII
- $\overline{\text{V}}$MMMCXCI

罗马数字

数值 -> 罗马数字:

- 19
- 145
- 361
- 1437
- 8191
- 65537

答案:

- XIX
- CXLV
- CCCLXI
- MCDXXXVII
- $\overline{\mathrm{V}}\mathrm{MMMCXCI}$
- $\overline{\mathrm{LXV}}\mathrm{DXXXVII}$

为什么会存在负数？

为什么会存在负数？

1、日常生活需要

为什么会存在负数？

1、日常生活需要

- 建国以后北京历史最低温度：零下 27.4 °C（1966）

为什么会存在负数？

1、日常生活需要

- 建国以后北京历史最低温度：零下 27.4 °C（1966）　$\underline{-27.4\,^\circ\mathrm{C}}$

为什么会存在负数？

1、日常生活需要

- 建国以后北京历史最低温度：零下 27.4 °C（1966） <u>-27.4 °C</u>
- 中国大陆最低点（新疆吐鲁番艾丁湖洼地）海拔：海平面以下 154.31 米

为什么会存在负数？

1、日常生活需要

- 建国以后北京历史最低温度：零下 27.4 °C（1966） $\underline{-27.4\,°\mathrm{C}}$
- 中国大陆最低点（新疆吐鲁番艾丁湖洼地）海拔：海平面以下 154.31 米 $\underline{-154.31\mathrm{m}}$

为什么会存在负数？

1、日常生活需要

- 建国以后北京历史最低温度：零下 27.4 °C（1966） $\underline{-27.4\,°C}$
- 中国大陆最低点（新疆吐鲁番艾丁湖洼地）海拔：海平面以下 154.31 米 $\underline{-154.31m}$
- 2018 年 5 月 9 日上证指数：下跌 2.35 个点，收于 3159.15 个点

为什么会存在负数？

1、日常生活需要

- 建国以后北京历史最低温度：零下 27.4 °C（1966）　$\underline{-27.4\,^\circ\mathrm{C}}$
- 中国大陆最低点（新疆吐鲁番艾丁湖洼地）海拔：海平面以下 154.31 米　$\underline{-154.31\mathrm{m}}$
- 2018 年 5 月 9 日上证指数：下跌 2.35 个点，收于 3159.15 个点 $\underline{-2.35}$

为什么会存在负数？

1、日常生活需要

- 建国以后北京历史最低温度：零下 27.4 °C（1966）　$\underline{-27.4\,°C}$
- 中国大陆最低点（新疆吐鲁番艾丁湖洼地）海拔：海平面以下 154.31 米　$\underline{-154.31m}$
- 2018 年 5 月 9 日上证指数：下跌 2.35 个点，收于 3159.15 个点 $\underline{-2.35}$
- 支出，负资产……

为什么会存在负数？

2、数学的对称性

2、数学的对称性

正整数具有如下运算规律：

1. 加法交换律： $a+b=b+a$
2. 加法结合律： $(a+b)+c=a+(b+c)$
3. 乘法交换律： $a\times b=b\times a$
4. 乘法分配率： $a\times(b+c)=a\times b+a\times c$
5. 加法单位元： $a+0=0+a=0$
6. 乘法零元： $a\times 0=0\times a=0$

为什么会存在负数？

2、数学的对称性

正整数具有如下运算规律：

1. 加法交换律：$a+b=b+a$
2. 加法结合律：$(a+b)+c=a+(b+c)$
3. 乘法交换律：$a\times b=b\times a$
4. 乘法分配率：$a\times(b+c)=a\times b+a\times c$
5. 加法单位元：$a+0=0+a=0$
6. 乘法零元：$a\times 0=0\times a=0$

问题

什么数满足：$\boxed{?}+1=0$

为什么会存在负数？

解方程：

$$x + 1 = 0$$

为什么会存在负数？

解方程：

$$
\begin{aligned}
x + 1 &= 0 \\
x &= 0 - 1
\end{aligned}
$$

为什么会存在负数？

解方程：

$$\begin{aligned} x+1&=0\\ x&=0-1\\ x&=-1 \end{aligned}$$

省去 0

为什么会存在负数？

解方程：

$$\begin{aligned} x+1&=0 \\ x&=0-1 \\ x&=-1 \end{aligned}$$

省去 0

定义

负整数 设 a 为整数，则

$$-a=0-a$$

为什么会存在负数？

解方程：

$$\begin{aligned} x+1&=0 \\ x&=0-1 \\ x&=-1 \end{aligned} \quad \text{省去 } 0$$

定义

负整数 设 a 为整数，则

$$-a=0-a$$

对于负分数，我们可以作同样的定义。

负数的运算法则

负数的运算法则

加减法

负数的运算法则

加减法

1. $a + (-b) = a + (0 - b) = (a + 0) - b = a - b$

负数的运算法则

加减法

1. $a + (-b) = a + (0 - b) = (a + 0) - b = a - b$
2. $-a + b = (-a) + b = b + (-a) = b - a$

负数的运算法则

加减法

1. $a+(-b)=a+(0-b)=(a+0)-b=a-b$
2. $-a+b=(-a)+b=b+(-a)=b-a$
3. $-a+(-b)=(-a)+(-b)=(-a)-b=0-a-b=0-(a+b)=-(a+b)$

负数的运算法则

加减法

1. $a+(-b)=a+(0-b)=(a+0)-b=a-b$
2. $-a+b=(-a)+b=b+(-a)=b-a$
3. $-a+(-b)=(-a)+(-b)=(-a)-b=0-a-b=0-(a+b)=-(a+b)$
4. $a-(-b)=a-(0-b)=a-0+b=a+b$

负数的运算法则

加减法

1. $a + (-b) = a + (0 - b) = (a + 0) - b = a - b$
2. $-a + b = (-a) + b = b + (-a) = b - a$
3. $-a+(-b) = (-a)+(-b) = (-a)-b = 0-a-b = 0-(a+b) = -(a+b)$
4. $a - (-b) = a - (0 - b) = a - 0 + b = a + b$
5. $-a - (-b) = -a + b = b - a$

负数的运算法则

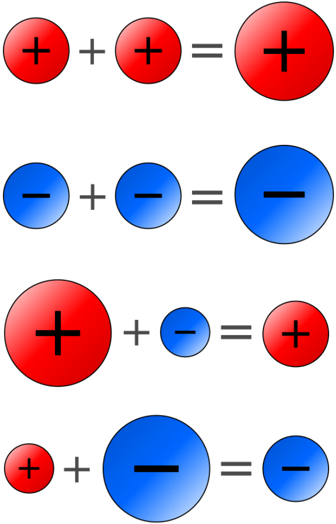
加减法

1. $a + (-b) = a + (0 - b) = (a + 0) - b = a - b$
2. $-a + b = (-a) + b = b + (-a) = b - a$
3. $-a+(-b) = (-a)+(-b) = (-a)-b = 0-a-b = 0-(a+b) = -(a+b)$
4. $a - (-b) = a - (0 - b) = a - 0 + b = a + b$
5. $-a - (-b) = -a + b = b - a$

规律

负号 $\approx$ 减号

负数的运算法则



负数的运算法则

乘法

负数的运算法则

乘法

1. $a \times (-b) = a \times (0 - b) = a \times 0 - a \times b = 0 - a \times b = -a \times b$

负数的运算法则

乘法

1. $a \times (-b) = a \times (0 - b) = a \times 0 - a \times b = 0 - a \times b = -a \times b$
2. $(-a) \times b = b \times (-a) = -b \times a = -a \times b$

负数的运算法则

乘法

1. $a \times (-b) = a \times (0 - b) = a \times 0 - a \times b = 0 - a \times b = -a \times b$
2. $(-a) \times b = b \times (-a) = -b \times a = -a \times b$
3. $(-a) \times (-b) = -a \times (-b) = -(-a \times b) = a \times b$

负数的运算法则

乘法

1. $a \times (-b) = a \times (0 - b) = a \times 0 - a \times b = 0 - a \times b = -a \times b$
2. $(-a) \times b = b \times (-a) = -b \times a = -a \times b$
3. $(-a) \times (-b) = -a \times (-b) = -(-a \times b) = a \times b$
4. $(-a) \div b = -a \div b$

负数的运算法则

乘法

1. $a \times (-b) = a \times (0 - b) = a \times 0 - a \times b = 0 - a \times b = -a \times b$
2. $(-a) \times b = b \times (-a) = -b \times a = -a \times b$
3. $(-a) \times (-b) = -a \times (-b) = -(-a \times b) = a \times b$
4. $(-a) \div b = -a \div b$
5. $a \div (-b) = -a \div b$

负数的运算法则

乘法

1. $a \times (-b) = a \times (0 - b) = a \times 0 - a \times b = 0 - a \times b = -a \times b$
2. $(-a) \times b = b \times (-a) = -b \times a = -a \times b$
3. $(-a) \times (-b) = -a \times (-b) = -(-a \times b) = a \times b$
4. $(-a) \div b = -a \div b$
5. $a \div (-b) = -a \div b$
6. $(-a) \div (-b) = a \div b$

负数的运算法则

乘法

1. $a \times (-b) = a \times (0 - b) = a \times 0 - a \times b = 0 - a \times b = -a \times b$
2. $(-a) \times b = b \times (-a) = -b \times a = -a \times b$
3. $(-a) \times (-b) = -a \times (-b) = -(-a \times b) = a \times b$
4. $(-a) \div b = -a \div b$
5. $a \div (-b) = -a \div b$
6. $(-a) \div (-b) = a \div b$

规律

负负得正，奇负偶正

注意

正负是相对的！

我们学过那些数？

我们学过那些数？

- 自然数
- 整数
- 小数
- 分数
- π

还记得小数的分类吗？

还记得小数的分类吗？

$$
\text{小数}\begin{cases}\text{有限小数}\\[2ex]\text{无限小数}\end{cases}
$$

还记得小数的分类吗？

$$
\text{小数}\begin{cases}\text{有限小数} \\ \text{无限小数}\begin{cases}\text{无限循环小数} \\ \text{无限不循环小数}\end{cases}\end{cases}
$$

还记得小数的分类吗？

$$\text{小数}\begin{cases}\text{有限小数} \\ \text{无限小数}\begin{cases}\text{无限循环小数} \\ \text{无限不循环小数}\end{cases}\end{cases}$$

$\boxed{\text{有理数}}$

还记得小数的分类吗？

$$\text{小数}\begin{cases}\text{有限小数} \\ \text{无限小数}\begin{cases}\text{无限循环小数} \\ \text{无限不循环小数} \longrightarrow \boxed{\text{无理数}}\end{cases}\end{cases}$$

$$\boxed{\text{有理数}}$$

还记得小数的分类吗？

$$\text{小数}\begin{cases}\text{有限小数}\\ \text{无限小数}\begin{cases}\text{无限循环小数}\\ \text{无限不循环小数}\end{cases}\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{有限小数}\\ \text{无限循环小数}\end{array}\right\}\boxed{\text{有理数}}$$

$$\text{无限不循环小数}\longrightarrow\boxed{\text{无理数}}$$

$$\left.\begin{array}{l}\boxed{\text{有理数}}\\ \boxed{\text{无理数}}\end{array}\right\}\boxed{\text{实数}}$$

能不能给“有理数”下个定义？

能不能给“有理数”下个定义？

注意：有限小数 $\to$ 整数或分数，无限循环小数 $\to$ 分数；

能不能给“有理数”下个定义？

注意：有限小数 $\rightarrow$ 整数或分数，无限循环小数 $\rightarrow$ 分数；

$$\text{整数} = \frac{\text{整数}}{1}, \quad \text{分数} = \frac{\text{整数}}{\text{整数}}$$

能不能给"有理数"下个定义？

注意：有限小数 $\to$ 整数或分数，无限循环小数 $\to$ 分数；

$$\text{整数} = \frac{\text{整数}}{1}, \quad \text{分数} = \frac{\text{整数}}{\text{整数}}$$

定义

有理数 能表示为整数之比的数。

能不能给“有理数”下个定义？

注意：有限小数 $\to$ 整数或分数，无限循环小数 $\to$ 分数；

$$\text{整数} = \frac{\text{整数}}{1},\quad \text{分数} = \frac{\text{整数}}{\text{整数}}$$

定义

有理数 能表示为整数之比的数。

$$\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\\ \\ \text{分数}\end{cases}$$

能不能给“有理数”下个定义？

注意：有限小数 $\to$ 整数或分数，无限循环小数 $\to$ 分数；

$$\text{整数} = \frac{\text{整数}}{1},\quad \text{分数} = \frac{\text{整数}}{\text{整数}}$$

定义

有理数 能表示为整数之比的数。

$$\text{有理数}\begin{cases}\text{整数} & 0, 1, 4, -3, \dfrac{6}{6}, \dfrac{40}{8}, 600\%, \cdots \\ \\ \text{分数} & \end{cases}$$

能不能给“有理数”下个定义？

注意：有限小数 $\to$ 整数或分数，无限循环小数 $\to$ 分数；

$$\text{整数} = \frac{\text{整数}}{1}, \quad \text{分数} = \frac{\text{整数}}{\text{整数}}$$

定义

有理数 能表示为整数之比的数。

$$\text{有理数}\begin{cases}\text{整数} & 0, 1, 4, -3, \dfrac{6}{6}, \dfrac{40}{8}, 600\%, \cdots \\ \text{分数} & \dfrac{1}{2}, \dfrac{4}{6}, -\dfrac{7}{12}, 3.14, -0.05, \cdots\end{cases}$$

如何将有理数分类？

如何将有理数分类？

$$有理数\begin{cases}整数\\ \\ 分数\end{cases}$$

如何将有理数分类？

$$
\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数}\\ 0\\ \text{负整数}\end{cases}\\ \\ \text{分数}\end{cases}
$$

如何将有理数分类？

$$
\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数}\\ 0\\ \text{负整数}\end{cases}\\ \text{分数}\begin{cases}\text{正分数}\\ \text{负分数}\end{cases}\end{cases}
$$

如何将有理数分类？

$$
\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数}\\ 0\\ \text{负整数}\end{cases}\\ \text{分数}\begin{cases}\text{正分数}\\ \text{负分数}\end{cases}\end{cases}
\qquad\qquad
\text{有理数}\begin{cases}\text{正有理数}\\ 0\\ \text{负有理数}\end{cases}
$$

如何将有理数分类？

$$
\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数}\\ 0\\ \text{负整数}\end{cases}\\ \text{分数}\begin{cases}\text{正分数}\\ \text{负分数}\end{cases}\end{cases}
\qquad
\text{有理数}\begin{cases}\text{正有理数}\begin{cases}\text{正整数}\\ \text{正分数}\end{cases}\\ 0\\ \text{负有理数}\end{cases}
$$

如何将有理数分类？

$$
\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数}\\0\\\text{负整数}\end{cases}\\\text{分数}\begin{cases}\text{正分数}\\\text{负分数}\end{cases}\end{cases}
\qquad
\text{有理数}\begin{cases}\text{正有理数}\begin{cases}\text{正整数}\\\text{正分数}\end{cases}\\0\\\text{负有理数}\begin{cases}\text{负整数}\\\text{负分数}\end{cases}\end{cases}
$$