

# 模拟赛 Day 4(B 组)

长乐一中 陈煜翔

# 良心出题人

- 这场模拟赛，无疑是善良的出题人无私的馈赠。
- 四道精心挑选的水题，涵盖了大家都会的基本算法。
- 你可以利用这场比赛，增强自己的信心。
- 出题人相信，这场美妙的模拟赛，可以给拼搏于NOI Au的逐梦之路上的你，提供一个有力的援助。

## A. 统计数字

- 记  $S(n)$  表示  $n$  的各位数字之和, 求  $[L, R]$  中满足  $S(n^2) = S(n) \times S(n)$  的  $n$  的个数。
- $1 \leq L \leq R \leq 10^9$

# 算法一

- 枚举  $[L, R]$  中的所有数，然后暴力判断。
- 时间复杂度  $O((R - L) \lg R^2)$ 。获得 30 分的优秀得分。
- 如果你有什么高端搜索欢迎上台分享。

## 算法二

- 我们发现,  $S(xy) \leq S(x)S(y)$ , 并且当且仅当  $x \times y$  没有发生进位的时候取等号。
- 因为如果发生进位, 原来可以贡献  $a$  的现在的贡献就变成了  $a - 9k(a - 10k + k)$ 。
- 不发生进位的一个必要条件就是每一位都不超过 3。
- 那么就可以暴力枚举, 时间复杂度为  $O(4^{10})$ , 可以获得满分, 可以获得满分。

# 算法三

- 有个东西叫做分段打表。
- 我们写个程序，打出数据范围内每个区间  $[1, k \cdot 10^6]$  的答案的表。
- 那么剩余部分的长度都是  $10^6$  级别了，直接暴力算出来。

## B. 数边方案

- 给一个简单无向连通图，求这张图有多少个生成树满足，树上每个点到 1 的距离等于原图中该点到 1 的最短距离。
- $n \leq 1000$

# 算法一

- 枚举生成树，暴力计算。
- 可以获得 30 分。



## 算法二

- 有一个东西叫做「最短路图」。
- 先跑一遍最短路。
- 「最短路图」就是将原图中满足  $dis(u) + w = dis(v)$  的边  $(u, v, w)$  保留下来构成的子图。
- 这个最短路图中，从 1 到点  $i$  的所有路径的长度都是  $dis(i)$ 。
- 因为边权是正整数，所以最短路图是一个有向无环图。
- 那么这个有向无环图的生成树都是合法的，枚举生成树的个数即可。
- 可以获得 50 分的高分。

# 算法三

- 实际上算法二已经很接近正解了。
- 算法二中，我们相当于给每个点选一个父亲，那么每个点可选的父亲总数就是它的入度，那么入度之积就是答案了。
- 那么先跑一遍最短路即可。
- 时间复杂度就是最短路的复杂度，这里只要用  $O(n^2)$  的 *Dijkstra* 即可。可以得到满分。

## C. 开根号

- 定义  $f(n) = \max\{k \mid \exists m \in \mathbb{N}^*, m^k = n\}$ , 求  $\sum_{i=l}^r f(i)$ 。
- $1 \leq L \leq R \leq 10^{18}$

# 算法一

- 枚举  $i, k$ , 暴力判断。
- 时间复杂度  $O((R - L) \log R)$ 。可以得到 20 分。

## 算法二

- 区间求和都可以转化为两个前缀相减，那么只考虑求  $[1, n]$  的答案。
- 我们换一个思路，考虑枚举  $k$ ，然后求  $[1, n]$  中  $f(i) = k$  的个数。
- 我们记  $p(k)$  表示  $[1, n]$  中开  $k$  次方后还是正整数的数的个数，那么  $p(k) = \lfloor n^{\frac{1}{k}} \rfloor$ 。
- 记  $g(k)$  表示  $[1, n]$  中  $f(i) = k$  的个数。
- 那么有

$$g(k) = p(k) - \sum_{k|d} g(d)$$

- 那么直接递推即可，可以获得满分。

## D. 旅行

- 给你一棵  $n$  个结点的树，树上的边有边权，记两点  $(u, v)$  之间经过的边数为  $cnt(u, v)$ 。
- 对于两个点  $u, v$ ，我们将  $u \rightarrow v$  的最短路径经过的边按顺序取出来，记作  $w_1, w_2, \dots, w_m$ ，那么定义**路径长度**  $dis(u, v)$  表示：

$$dis(u, v) = \sum_{i=1}^m (-1)^{i+1} w_i$$

- 现在请你回答，满足  $cnt(u, v)$  为奇数，并且  $u < v$  的所有  $dis(u, v)$  中， $dis(u, v)$  的第  $k$  小值是多少。

# 算法一

- 以每个点为起点  $dfs$ ，然后将所有符合条件的  $dis$  储存下来，最后排序，即可求出第  $k$  小。
- 时间复杂度  $O(n^2 \log n^2)$ 。可以获得 25~50 分。

## 算法二

- 我们发现，两点之间如果经过的边数为奇数，那么就一定有一个点深度是奇数，另一个点深度是偶数。
- 并且我们发现， $dis(u, v) = dis(u, 1) + dis(v, 1)$ 。
- 于是我们将所有点按照深度的奇偶性分类，那么问题转化为给两个序列  $\{a_i\}, \{b_i\}$ ，求  $a_i + b_j$  的第  $k$  小值。
- 这是个经典的问题，考虑将  $b$  排序，对每个  $a_i$  记一个指针  $p_i$ ，初值为 1，开始将  $a_i + b_1$  加入小根堆中。
- 每次取出小根堆的堆顶并删除，然后将对应的  $a_i$  的指针  $p_i$  向后移一位，将  $a_i + b_{p_i}$  再加入堆中。
- 重复  $k$  次即可。
- 时间复杂度  $O(n \log n)$ ，可以获得满分。



讲完了

祝大家 CSP2019 顺利

CZK NOI2020 Au 超稳