10月3日冲刺Noip2019模拟赛3(B班)
解题报告

题一：动态逆序对

对于60%的数据：$1 \le n,q \le 100$。

- 直接模拟。每次交换之后，$O(n^2)$ 计算逆序对个数。
- 总时间复杂度 $O(n^3)$。

题一：动态逆序对

对于80%的数据： $1 \le n,q \le 1000$。

- 每次交换之后，用树状数组或归并排序 $O(n \log n)$ 计算逆序对个数。
- 总时间复杂度 $O(n^2 \log n)$。

题一：动态逆序对

对于100%的数据：$1 \le n,q \le 100000$。

- 一开始先用树状数组或归并排序求出逆序对个数 %2 的结果。
- 考虑交换 a[i], a[j] (i < j) 对答案有什么影响。
- 我们称逆序对 (a[i], a[j]) 包含了 a[i], a[j] 这两个数。
- 对于每个数 a[k]，分情况讨论包含 a[k] 的逆序对数会有什么变化。
- (1). k < i or k > j，那么原来在 a[k] 后面的数现在还在 a[k] 后面，原来在 a[k] 前面的数现在还在 a[k] 前面，所以包含 a[k] 的逆序对个数不会改变。
- (2). i < k < j，那么如果 a[i] < a[k]，那么包含 a[k] 的逆序对个数 + 1，否则 – 1。
- 同理，如果 a[j] > a[k]，那么包含 a[k] 的逆序对个数 + 1，否则 – 1。
- 我们只要求逆序对个数的奇偶性。
- 发现不管 a[i], a[j], a[k] 的大小关系是什么，都不会影响包含 a[k] 的逆序对个数的奇偶性。

题一：动态逆序对

对于100%的数据： $1 \le n,q \le 100000$。

- (3). $k = i$ 或 $k = j$。
- 显然逆序对数要么 $+1$，要么 -1。
- 所以当 $i < j$ 时，逆序对数的奇偶性改变。否则不变。
- 时间复杂度 $O(n \log n + q)$。

题二：树的统计

对于80%的数据，n≤1023，m≤1000。

- 对于每个询问 x, d，在树上从点 x 开始 dfs/bfs一遍，求出到每个点的距离。
- 然后把符合条件的点的权值加起来。
- 时间复杂度 $O(n^2)$。

题二：树的统计

对于100%的数据，n≤131071，m≤100000。

- 满二叉树深度很小，考虑从深度入手。
- 记 f[u][i] 表示 u 子树中深度为 i 的点的权值和。
- 记 dep[u] 表示 u 的深度，l, r 分别为 u 的左右子节点，显然有：
- f[u][dep[u]] = a[u]，f[u][i] = f[l][i] + f[r][i] (i > dep[u])。
- 将整棵树 dfs 一遍即可求得 f 数组。

题二：树的统计

对于100%的数据，$n \le 131071$，$m \le 100000$。

- 考虑怎么算答案。
- 对于询问 x, d，首先将 f[x][dep[x] + d] 加到答案里。
- 记 x 的父节点为 fa[x]，x 的兄弟节点为 y。
- 接下来要计算不在 x 的子树中的点的贡献。
- 假设点 v 满足 $x \to v$ 的距离为 d，且 v 不在 x 子树中。
- 如果 lca(x, v) = fa[x]，那么从 $x \to y$ 要走 2 条边，但是深度不变。
- 因此接下来只能再往下走 d – 2 步，也就是说 dep[v] 一定是 dep[x] + d – 2。
- 那么答案加上 f[y][dep[x] + d – 2]。
- 枚举 x 的所有祖先 u，如果 dep[x] – dep[u] = k，那么 dep[v] = dep[x] + d – 2k。
- 记 u 的左右子节点分别为 lu, ru。
- 若 x 在 lu 子树中，答案加上 f[ru][dep[x] + d – 2k]，否答案则加上 f[lu][dep[x] + d – 2k]。
- 时间复杂度 O(n log n)。

题三：宣传栏

对于70%的数据，$n \leq 2000$。

- 记 c[i] 表示宣传栏第 i 行的剩余长度，初始 c[1] ~ c[h] 均为 m。
- 对于每个告示 w[j]：枚举宣传栏的每一行，找到最小的 i 使得 $c[i] \geq w[j]$。
- 然后 c[i] –= w[j]。
- 时间复杂度 $O(n^2)$。

题三：宣传栏

对于100%的数据，n≤200000。

- 对于每个 w[j]，考虑二分：
- 一开始 l = 1, r = n。
- 每次令 mid = (l + r) / 2。
- 如果 c[1] ~ c[mid] 的最大值 > w[j]，那么 r = mid， 否则 l = mid + 1。
- 考虑用线段树维护 c 数组的区间最大值，那么上述过程可以等价于：
- 从根节点开始走，如果左子节点存储的区间最大值 ≥ w[j]，那么往左子节点走，否则往右子节点走，走到叶子节点的时候就知道要贴在第几行了。
- 注意特判 -1 的情况：根节点存储的区间最大值 < w[j]。
- c[i] –= w[j] 就是单点修改。
- 时间复杂度 O(n log n)。

题四：种树

测试点1(30 分)：A=B=C。

- 显然答案是 A / 3 取下整。
- 例如：A = B = C = 100，那么你可以把草莓树种在 0，100，200，300，…
- 西瓜树种在 33，133，233，333，…
- 土豆树种在 66，166，266，366，…
- 如果你想不到这个最优方案，看样例也应该能猜出来吧。
- 每组测试数据时间复杂度 O(1)。

题四：种树

测试点2~4(60 分)：$A,B,C \le 500$。

- 枚举 x, y, z 的值（$0 < x < A$, $0 < y < B$, $0 < z < C$）然后算最近距离。
- 我们要对：草莓树和西瓜树的最近距离，草莓树和土豆树的最近距离，西瓜树和土豆树的最近距离取最小值。
- 考虑怎么求草莓树和西瓜树的最近距离（其它同理）：
- 我们要求 $\min|x + Ai - (y + Bj)|$（i, j 为任意整数）。
- 式子可以化为：$\min|x - y - (Bj - Ai)|$。
- 显然有： $Bj - Ai$ 一定是 $\gcd(A, B)$的倍数。
- 并且：对于每个 $\gcd(A, B)$ 的倍数 k，都可以找到 i, j 使得 $Bj - Ai = k$。
- （上述相关定理证明在PPT最后1页）。
- 那么我们就是要找到一个 $\gcd(A, B)$ 的倍数使得它与 $x - y$ 的差的绝对值最小。
- 这个最小的差的绝对值就是 $\min\{(x - y) \% \gcd(A, B), \gcd(A, B) - (x - y) \% \gcd(A, B)\}$。
- 令 $D = \max(A, B, C)$，时间复杂度 $O(D^3)$。

题四：种树

测试点5(10 分)：A,B,C≤2000。

- 可以发现，如果 $x = x0, y = y0, z = z0$，那么这和 $x = 0, y = y0 – x0, z = z0 – x0$ 是等价的。
- 所以我们不用枚举 x 了，每组数据时间复杂度 $O(D^2)$。

题四：种树

相关定理证明

- 证明：一定存在整数 x, y 使得 ax + by = gcd(a, b) 成立。
- 令 d = gcd(a, b)，则 a % d = b % d = 0。
- 设 s 是满足 [存在整数 x, y 使得 ax + by = gcd(a, b) 成立] 的最小正整数。
- 显然 s % d = 0。设 s = ai + bj。
- 令 q =$\lfloor\frac{a}{s}\rfloor$，则 r = a % s = a – $\lfloor\frac{a}{s}\rfloor$ * s = a – q(ai + bj) = a(1 – qi) + b(– qj)。
- 所以 r 也能写成 ax + by 的形式。
- 由 ：r = a % s，s 是满足 [存在整数 x, y 使得 ax + by = gcd(a, b) 成立] 的最小正整数

得出： 0 ≤ r < s。
- 由： r 也能写成 ax + by 的形式得出 r = 0。
- 所以 a % s = 0, 同理 b % s = 0。所以 s 一定是 d 的约数，也就是说 d % s = 0。
- 根据 s % d = 0 可知 s = d，也就是说满足 [存在整数 x, y 使得 ax + by = gcd(a, b) 成立] 的最小正整数就是 gcd(a, b)。