

赛拟模PSC心良的86723zyxjf 解题要简

旷梯陈 中一乐长

讨论

- ▶ 出题人跑路了！让校花cyx背锅上阵。
- ▶ 看前几场的题目和得分情况，感觉我这场平均分可能是最高的？
- ▶ 不过细想这还是一场很有意思的模拟赛呢（阿克王~~君~~睿笑了）

题1：一道图论神(shui)题 简要题意

- ▶ 一个点带权图，求一个顺序把所有的点删掉
- ▶ 删掉一个点会为代价贡献与这个点相邻的、还未被删掉的点权和
- ▶ 求最小代价
- ▶ 图的规模和点权不超过 10^5

部分分做法

- ▶ 留坑
- ▶ 欢迎选手分享自己的做法

满分做法

- ▶ 按照点权从大到小删点即可
- ▶ 可以计算出每条边的贡献为这条边两端点点权的较小值
- ▶ 显然地，这是最优答案
- ▶ $O(n + m)$

题2：数组异或 简要题意

- ▶ 给定两个长度为 n 的数组 A 和 B
- ▶ 求数组 $C_k = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k A_i \text{ xor } B_j$
- ▶ $1 \leq n \leq 10^5$ ，数组的值在int范围内

50分: $N \leq 100$

- ▶ 枚举
- ▶ 我是不是很良心啊?

满分做法

- ▶ 考虑把xor运算拆位
- ▶ $C_k = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \sum_t 2^t \text{bit}(A_i, t) \text{ xor } \text{bit}(B_j, t)$
- ▶ $= \sum_t 2^t \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k [\text{bit}(A_i, t) \text{ xor } \text{bit}(B_j, t) = 1]$
- ▶ $= \sum_t 2^t (\sum_{i=1}^k [\text{bit}(A_i, t) = 1] \sum_{j=1}^k [\text{bit}(B_j, t) = 0] + \sum_{i=1}^k [\text{bit}(A_i, t) = 0] \sum_{j=1}^k [\text{bit}(B_j, t) = 1])$
- ▶ 上面 $\text{bit}(a, i)$ 为 a 二进制下第 i 位的值，最低位为第0位
- ▶ 对于每个 t 维护 $A_{1\dots k}$ 和 $B_{1\dots k}$ 中第 t 位分别为1和0的个数即可
- ▶ $O(n \log \text{val})$ ，可以获得满分

题3：侦探游戏 简要题意

- ▶ 给一个边带权图
- ▶ 现在要加一条0权边，边的端点未定
- ▶ 求所有 $\frac{n \times (n-1)}{2}$ 种加边方案下图的最小生成树边权和除以 $\frac{n \times (n-1)}{2}$ 的结果
- ▶ 点数不超过 2×10^4 ，边数不超过 10^5 ，边权不超过 10^6

20分: $n \leq 100$

- ▶ 暴力枚举
- ▶ 我是不是很良心啊!

60分做法: $n \leq 1000$

- ▶ 我们知道, 图加上一条边 (u, v, w) , 如果 w 小于原MST上 u 到 v 路径上的最大边权
- ▶ 那么在新的MST中这条新边会替换掉原MST上 u 到 v 路径上权值最大的边
- ▶ 而此题我们加上的边权为0, 故原MST上一定会有边被替换
- ▶ 故我们先求出原图的MST
- ▶ 问题可以转化成求对于所有点对 $1 \leq u < v \leq n$, u 到 v 路径上的最大边权之和
- ▶ 上面的结果除以 $\frac{n \times (n-1)}{2}$ 之后再用原MST边权和减掉即为答案
- ▶ $O(n^2)$, 可以拿到可观的60分

满分做法

- ▶ 考虑如何快速求对于所有点对 $1 \leq u < v \leq n$, u 到 v 路径上的最大边权之和
- ▶ 考虑一条权为 w 的边, 如果把MST上所有边权小于 w 的边都加进来
- ▶ 并且这条权为 w 的边加入后连通的点对数增加了 k
- ▶ 那么路径上最大边权为 w 的点对数就是 k
- ▶ 故用一个并查集, 按边权从小到大加边
- ▶ 每遇到一条边 (u, v, w) , 就把 $size_u \times size_v \times w$ 计入答案, 再合并 u, v 所属连通块
- ▶ 其中 $size_u$ 为 u 所属连通块大小
- ▶ $O(n + m \log m)$, 可以获得满分

题4：天上掉馅饼 简要题意

- ▶ 有 n 种宝物
- ▶ k 次，每次等概率随机掉落一种宝物
- ▶ 每种宝物有价值 P_i （可正可负）和先决宝物集合 S_i
- ▶ 每一次如果掉落第 i 种宝物，并且宝物集合 S_i 内的所有种类宝物都领过至少一次，那么你可以领取这个宝物，并获得 P_i 的价值
- ▶ 求最优策略下获得的期望价值
- ▶ $1 \leq k \leq 100, 1 \leq n \leq 15, 0 \leq |P_i| \leq 10^6$

部分分做法

- ▶ 留坑
- ▶ 欢迎选手分享自己的做法

满分做法

- ▶ 原题 [SCOI2008] 奖励关
- ▶ 右转 <https://www.luogu.org/blog/user29936/solution-p2473>
- ▶ 补充说明：此类期望DP题需要倒推的原因：如果 $f[i][S]$ 表示在第 i 轮到达状态 S 的期望，那么由于在第 i 轮到达的状态不一定是 S ，故正推时需要考虑在第 i 轮到达状态 S 的概率产生的影响，问题就变得复杂了

谢谢大家！



这种wc奖状我有好多张