

# 2014 考研数学线性代数基础班讲义

www.mxue365.com 非此独立账号下载均为倒卖

QQ:961978204

## 第一章 行列式

### 一、基本概念

定义 1.1 逆序—设  $i, j$  是一对不等的正整数, 若  $i > j$ , 则称  $(i, j)$  为一对逆序。

定义 1.2 逆序数—设  $i_1 i_2 \cdots i_n$  是  $1, 2, \cdots, n$  的一个排列, 该排列所含逆序总数称为该排列的逆序数, 记为  $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$ 。

定义 1.3 行列式—称  $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$  称为  $n$  阶行列式, 规定

$$D = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}。$$

定义 1.4 余子式与代数余子式—把行列式  $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$  中元素  $a_{ij}$  所在的  $i$  行元素和  $j$  列元素去掉, 剩下的  $n-1$  行和  $n-1$  列元素按照元素原来的排列次序构成的  $n-1$  阶行列式, 称为元素  $a_{ij}$  的余子式, 记为  $M_{ij}$ , 称  $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$  为元素  $a_{ij}$  的代数余子式。

### 二、几个特殊的高阶行列式

1、对角行列式— $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = a_1 a_2 \cdots a_n。$

2、上(下)三角行列式—

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}。$$

3、 $\begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix} = |A| \cdot |B|, \quad \begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix} = |A| \cdot |B|, \quad \begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = |A| \cdot |B|。$

4、范得蒙行列式—形如  $V(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$  称为  $n$  阶范得蒙行列式，且

$$V(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j)。$$

www.mxue365.com 非此独立账号下载均为倒卖

【注解】 $V(a_1, a_2, \dots, a_n) \neq 0$  的充分必要条件是  $a_1, a_2, \dots, a_n$  两两不等。

### 三、行列式的计算性质

(一) 把行列式转化为特殊行列式的性质

1、行列式与其转置行列式相等，即  $D = D^T$ 。

2、对调两行（或列）行列式改变符号。

3、行列式某行（或列）有公因子可以提取到行列式的外面。

推论 1 行列式某行（或列）元素全为零，则该行（或列）为零。

推论 2 行列式某两行（或列）相同，行列式为零。

推论 3 行列式某两行（或列）元素对应成比例，行列式为零。

4、行列式的某行（或列）的每个元素皆为两数之和时，行列式可分解为两个行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} + b_{i1} & a_{i2} + b_{i2} & \cdots & a_{in} + b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}。$$

5、行列式的某行（或列）的倍数加到另一行（或列），行列式不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} + ka_{j1} & a_{i2} + ka_{j2} & \cdots & a_{in} + ka_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}，其中  $k$  为任意常数。$$

【例题 1】设  $\alpha, \beta, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  为 4 维列向量，且  $|A| = |\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3| = 4$ ，

$|B| = |\beta, \gamma_1, 3\gamma_2, \gamma_3| = 21$ ，求  $|A + B|$ 。

【例题 2】用行列式性质 1~5 计算  $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix}$ 。

【例题 3】计算行列式  $D = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ 。

【例题 4】计算  $D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$ , 其中  $a_i \neq 0 (1 \leq i \leq n)$ 。

(二) 行列式降阶的性质

6、行列式等于行列式某行（或列）元素与其对应的代数余子式之积的和，即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} (i=1,2,\cdots,n),$$

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} (j=1,2,\cdots,n)。$$

7、行列式的某行（或列）元素与另一行（或列）元素的代数余子式之积的和为零。

【例题 1】用行列式按行或列展开的性质计算  $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix}$ 。

【例题 2】设  $D = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ , 求 (1)  $M_{21} + M_{22} + M_{23} + M_{24}$ ; (2)  $M_{31} + M_{32}$ 。

#### 四、行列式的应用—克莱姆法则

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \quad (I) \quad \text{及}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (II)$$

其中 (II) 称为非齐方程组, (I) 称为 (II) 对应的齐次方程组或 (II) 的导出方程组。

令  $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ ,  $D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ ,  $\cdots$ ,  $D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}$ , 其中  $D$  称为系数行列

式, 我们有

www.mxue365.com 非此独立账号下载均为倒卖

QQ:961978204

**定理 1**  $(I)$  只有零解的充分必要条件是  $D \neq 0$ ;  $(I)$  有非零解 (或者  $(I)$  有无穷多个解) 的充分必要条件是  $D = 0$ 。

**定理 2**  $(II)$  有唯一解的充分必要条件是  $D \neq 0$ , 且  $x_i = \frac{D_i}{D} (i=1,2,\cdots,n)$ ; 当  $D=0$  时,  $(II)$  要么无解, 要么有无穷多个解。

## 第二章 矩 阵

### 一、基本概念及其运算

#### (一) 基本概念

1、矩阵—形如  $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$  称为  $m$  行  $n$  列的矩阵, 记为  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ , 行数与列数相等的矩阵称为方阵, 元素全为零的矩阵称为零矩阵。

(1) 若矩阵中所有元素都为零, 该矩阵称为零矩阵, 记为  $O$ 。

(2) 对  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ , 若  $m = n$ , 称  $A$  为  $n$  阶方阵。

(3) 称  $E = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$  为单位矩阵。

(4) 对称矩阵—设  $A = (a_{ij})_{n \times n}$ , 若  $a_{ij} = a_{ji} (i, j = 1, 2, \cdots, n)$ , 称  $A$  为对称矩阵。

(5) 转置矩阵—设  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ , 记  $A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ , 称  $A^T$  为矩阵  $A$  的转置

矩阵。

2、同型矩阵及矩阵相等—若两个矩阵行数与列数相同, 称两个矩阵为同型矩阵, 若两个矩阵为同型矩阵, 且对应元素相同, 称两个矩阵相等。

3、伴随矩阵—设  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  为  $n$  矩阵, 将矩阵  $A$  中的第  $i$  行和  $j$  列去掉, 余下的元素按照原来的元素排列次序构成的  $n-1$  阶行列式, 称为元素  $a_{ij}$  的余子式, 记为  $M_{ij}$ , 同时称  $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$  为元素  $a_{ij}$  的代数余子式,

这样矩阵中的每一个元素都有自己的代数余子式, 记  $A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$ , 称为矩阵  $A$  的伴随矩阵。

(二) 矩阵的三则运算

QQ:961978204

1、矩阵加减法—设  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$ , 则

$$A \pm B = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \cdots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \cdots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \cdots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{pmatrix}.$$

www.mxue365.com 非此独立账号下载均为倒卖

2、数与矩阵的乘法—设  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ , 则  $kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$ .

3、矩阵与矩阵的乘法:

设  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{pmatrix}$ , 则

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1s} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{ms} \end{pmatrix}, \text{ 其中 } c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \quad (i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,s).$$

【注解】(1)  $A \neq O, B \neq O$  推不出  $AB \neq O$ 。

(2)  $AB \neq BA$ 。

(3) 矩阵多项式可进行因式分解的充分必要条件是矩阵乘法可交换。

若  $AB = BA$ , 则  $A^2 - 3AB + 2B^2 = (A - B)(A - 2B)$ , 再如

$$A^2 - A - 6E = (A - 3E)(A + 2E).$$

(4) 方程组的三种形式

形式一: 基本形式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad (I) \quad \text{与} \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (II)$$

(I) (II) 分别称为齐次与非齐线性方程组。

$$\text{记 } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \text{则方程组 (I)、(II) 可改写为}$$

形式二：方程组的矩阵形式

$$AX = 0, \quad (I)$$

$$AX = b, \quad (II)$$

$$\text{令 } \alpha_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \cdots, \alpha_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \text{则有}$$

形式三：方程组的向量形式

$$x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \cdots + x_n \alpha_n = 0 \quad (I)$$

$$x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \cdots + x_n \alpha_n = b \quad (II)$$

www.mxue365.com 非此独立账号下载均为倒卖

## 二、矩阵的两大核心问题—矩阵的逆矩阵与矩阵的秩

### (一) 背景

初中数学问题：对一元一次方程  $ax = b (a \neq 0)$ ，其解有如下几种情况

(1) 当  $a \neq 0$  时， $ax = b$  两边乘以  $\frac{1}{a}$  得  $x = \frac{b}{a}$ 。

(2) 当  $a = 0, b = 0$  时，方程  $ax = b$  的解为一切实数。

(3) 当  $a = 0, b \neq 0$  时，方程  $ax = b$  无解。

(二) 矩阵形式的线性方程组解的联想：

对线性方程组  $AX = b$ ，其解有如下几种情况

(1) 设  $A$  为  $n$  阶矩阵，对方程组  $AX = b$ ，存在  $n$  阶矩阵  $B$ ，使得  $BA = E$ ，则  $X = Bb$ 。

(此种情况产生矩阵的逆阵理论)

(2) 设  $A$  为  $n$  阶矩阵，对方程组  $AX = b$ ，不存在  $n$  阶矩阵  $B$ ，使得  $BA = E$ ，方程组  $AX = b$  是否有解？

(3) 设  $A$  是  $m \times n$  矩阵，且  $m \neq n$ ，方程组  $AX = b$  是否有解？

(后两种情况取决于方程组的未知数个数与方程组约束条件的个数即矩阵的秩)

(三) 逆矩阵

1、逆矩阵的定义—设  $A$  为  $n$  阶矩阵，若存在  $B$ ，使得  $BA = E$ ，称  $A$  可逆， $B$  称为  $A$  的逆矩阵，记为  $B = A^{-1}$ 。

【例题 1】设  $A$  为  $n$  阶矩阵，且  $A^2 - A - 2E = O$ ，求  $A^{-1}, (A + E)^{-1}$ 。

【例题 2】设  $A$  为  $n$  阶矩阵，且  $A^k = O$ ，求  $(E - A)^{-1}$ 。

### 2、关于逆矩阵的两个问题

【问题 1】设  $A$  为  $n$  阶矩阵， $A$  何时可逆？

【问题 2】若  $A$  可逆，如何求  $A^{-1}$ ？

## 3、逆阵存在的充分必要条件

QQ:961978204

定理 设  $A$  为  $n$  阶矩阵, 则矩阵  $A$  可逆的充分必要条件是  $|A| \neq 0$ 。

## 4、逆阵的求法

(1) 方法一: 伴随矩阵法

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*。$$

(2) 初等变换法

$$(A|E) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (E|A^{-1})。$$

## 5、初等变换法求逆阵的思想体系

**第一步, 方程组的三种同解变形**

- (1) 对调两个方程;
- (2) 某个方程两边同乘以非零常数;
- (3) 某个方程的倍数加到另一个方程,

www.mxue365.com 非此独立账号下载均为倒卖

以上三种变形称为方程组的三种同解变形。

**第二步, 矩阵的三种初等行变换**

- (1) 对调矩阵的两行;
- (2) 矩阵的某行乘以非零常数倍;
- (3) 矩阵某行的倍数加到另一行,

以上三种变换称为矩阵的三种初等行变换。

若对矩阵的列进行以上三种变换, 称为矩阵的初等列变换, 矩阵的初等行变换和初等列变换统称为矩阵的初等变换。

**第三步, 三个初等矩阵及性质**

(1)  $E_{ij}$  — 将  $E$  的第  $i$  行与第  $j$  行或者单位矩阵  $E$  的第  $i$  列与第  $j$  列对调所得到的矩阵, 如

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = E_{23}。$$

性质: 1)  $|E_{ij}| = -1$ ; 2)  $E_{ij}^{-1} = E_{ij}$ ;

3)  $E_{ij}A$  即为矩阵  $A$  的第  $i$  行与第  $j$  行对调,  $AE_{ij}$  即为矩阵  $A$  的第  $i$  列与第  $j$  列对调, 即  $E_{ij}A$  是对  $A$  进行第一种初等行变换,  $AE_{ij}$  是对  $A$  进行第一种初等列变换。

(2)  $E_i(c) (c \neq 0)$  — 将  $E$  的第  $i$  行乘以非零常数  $c$  或  $E$  的第  $i$  列乘以非零常数  $c$  所得到的矩阵, 如

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} = E_3(-5)。$$

性质: 1)  $|E_i(c)| = c$ ; 2)  $E_i^{-1}(c) = E_i(\frac{1}{c})$ ;

3)  $E_i(c)A$  即为矩阵  $A$  的第  $i$  行非零常数  $c$ ,  $AE_i(c)$  即为矩阵  $A$  的第  $i$  列非零常数  $c$ , 即  $E_i(c)A$  为对  $A$  进

行第二种初等行变换,  $AE_i(c)$  为对  $A$  进行第二种初等列变换。

(3)  $E_{ij}(k)$  — 将  $E$  第  $j$  行的  $k$  倍加到第  $i$  行或  $E$  的第  $i$  列的  $k$  倍加到第  $j$  列所得到的矩阵。

性质:

1)  $E_{ij}(k)A$  即  $A$  第  $j$  行的  $k$  倍加到第  $i$  行,  $AE_{ij}(k)$  即  $A$  第  $i$  列的  $k$  倍加到第  $j$  列;

2)  $|E_{ij}(k)| = 1$ ; 3)  $E_{ij}^{-1}(k) = E_{ij}(-k)$ 。

第四步, 三个问题

[www.mxue365.com](http://www.mxue365.com) 非此独立账号下载均为倒卖

【问题 1】 设  $A$  是  $n$  阶可逆矩阵,  $A$  可都经过有限次初等行变换化为  $E$  ?

【问题 2】 设  $A$  是  $n$  阶不可逆矩阵,  $A$  是否可以经过有限次初等行变换化为  $\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$  ?

【问题 3】 设  $A$  是  $n$  阶不可逆矩阵,  $A$  是否可以经过有限次初等变换化为  $\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$  ?

QQ:961978204

第五步, 初等变换法求逆阵的理论

定理 1 设  $A$  是  $n$  阶可逆矩阵, 则  $A$  经过有限次初等行变换化为  $E$ , 且  $(A:E) \rightarrow (E:A^{-1})$ 。

定理 2 设  $A$  是  $n$  阶不可逆矩阵, 则存在  $n$  阶可逆矩阵  $P$  和  $Q$ , 使得  $PAQ = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ 。

6、逆矩阵的性质

(1)  $(A^{-1})^{-1} = A$ 。(2)  $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$ 。

(3)  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ , 更进一步  $(A_1A_2 \cdots A_n)^{-1} = A_n^{-1}A_{n-1}^{-1} \cdots A_1^{-1}$ 。

(4)  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ 。

(5)  $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$ 。

【例 1】 设可逆矩阵  $A$  的  $i, j$  行对调所得的矩阵为  $B$ 。

(1) 证明:  $B$  可逆。

(2) 求  $A^{-1}B$ 。

【例 2】 设  $A, B$  分别为  $m, n$  阶可逆矩阵,  $|A| = a, |B| = b$ , 求  $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^*$ 。

【例 3】 设可逆阵  $A$  的 1, 2 两行对调得矩阵  $B$ , 讨论  $A^*$  与  $B^*$  之间的关系。



【例 4】设  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} + a_{11} & a_{32} + a_{12} & a_{33} + a_{13} \end{pmatrix},$

$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$  则 ( )

(A)  $AP_1P_2 = B$

(B)  $AP_2P_1 = B$

(C)  $P_1P_2A = B$

(D)  $P_2P_1A = B$

【例 5】设  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$  且  $A^2 - AB = E,$  求  $B.$

(四) 矩阵的秩

1、矩阵秩的定义—设  $A$  是  $m \times n$  矩阵,  $A$  中任取  $r$  行和  $r$  列且元素按原有次序所成的  $r$  阶行列式, 称为  $A$  的  $r$  阶子式, 若  $A$  中至少有一个  $r$  阶子式不等于零, 而所有  $r+1$  阶子式 (如果有) 皆为零, 称  $r$  为矩阵  $A$  的秩, 记为  $r(A) = r.$

2、矩阵秩的求法—将  $A$  用初等行变换化为阶梯矩阵, 阶梯矩阵的非零行数即为矩阵  $A$  的秩。

【注解】

(1) 设  $A$  为  $m \times n$  矩阵, 则  $r(A) \leq \min\{m, n\}.$

(2)  $r(A) = 0$  的充分必要条件为  $A = O.$  [www.mxue365.com](http://www.mxue365.com) 非此独立账号下载均为倒卖

(3)  $r(A) \geq 1$  的充分必要条件为  $A \neq O.$

(4)  $r(A) \geq 2$  的充分必要条件是  $A$  至少有两行不成比例。

(5)  $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T,$  则  $r(\alpha) = \begin{cases} 1, & \alpha \neq O \\ 0, & \alpha = O \end{cases}.$

3、矩阵秩的性质

(1)  $r(A) = r(A^T) = r(AA^T) = r(A^T A).$

【例 1】设  $A$  是  $m \times n$  矩阵, 证明: 若  $A^T A = O,$  则  $A = O.$

(2)  $r(A \pm B) \leq r(A) + r(B).$

【例 2】设  $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, A = \alpha\alpha^T + \beta\beta^T,$  证明:  $r(A) \leq 2.$

(3)  $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\},$  等价于  $\begin{cases} r(AB) \leq r(A) \\ r(AB) \leq r(B) \end{cases}.$

(口诀: 即矩阵的乘法不会使矩阵的秩升高)

【例 3】设  $A, B$  分别为  $m \times n$  与  $n \times m$  矩阵, 且  $AB = E$ , 求  $r(A), r(B)$ 。

(4) 设  $A_{m \times n}, B_{n \times s}$ , 且  $AB = 0$ , 则  $r(A) + r(B) \leq n$ 。

【例 4】设  $A$  为可逆矩阵, 证明其逆矩阵唯一。

【例 5】设  $A^2 = A$ , 证明:  $r(A) + r(E - A) = n$ 。

(5) 设  $P, Q$  为可逆矩阵, 则  $r(A) = r(PA) = r(AQ) = r(PAQ)$ 。

$$(6) \quad r(A^*) = \begin{cases} n, r(A) = n \\ 1, r(A) = n - 1 (n \geq 2) \\ 0, r(A) < n - 1 \end{cases}$$

$$(7) \quad r \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \leq r(A) + r(B).$$

www.mxue365.com 非此独立账号下载均为倒卖

## 第三章 向 量

### 一、向量基本概念

1、向量— $n$  个实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  所构成的一个数组称为向量, 其中  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  称为  $n$  维行向量,  $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$  称为  $n$  维列向量, 构成向量的所有元素皆为零的向量称为零向量。

2、向量的内积:  $(\alpha, \beta) = \alpha^T \beta = \sum_{i=1}^n a_i b_i$ 。

【注解】(1)  $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha) = \alpha^T \beta$ ; (2)  $(\alpha, \alpha) = \sum_{i=1}^n a_i^2 = |\alpha|^2$ ;

(3)  $(\alpha, \beta + \gamma) = (\alpha, \beta) + (\alpha, \gamma)$ ; (4)  $(\alpha, k\beta) = (k\alpha, \beta) = k(\alpha, \beta)$ 。

(5) 当  $(\alpha, \beta) = 0$ , 即  $\sum_{i=1}^n a_i b_i = 0$  时, 称向量  $\alpha$  与  $\beta$  正交, 记为  $\alpha \perp \beta$ , 注意零向量与任何向量正交。

【注解】方程组的向量形式

齐次线性方程组可以表示为  $x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \dots + x_n \alpha_n = O$ ;

非齐线性方程组可以表示为  $x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \dots + x_n \alpha_n = b$ ,

$$\text{其中 } \alpha_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \dots, \alpha_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}。$$

3、线性相关与线性无关 [www.mxue365.com](http://www.mxue365.com) 非此独立账号下载均为倒卖 QQ:961978204

对线性方程组  $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = O$ ,

(1)  $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = O$  当且仅当  $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$  时成立, 即齐次线性方程组只有零解,

称向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$  线性无关;

(2) 若有不全为零的常数  $k_1, k_2, \cdots, k_n$ , 使得  $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = O$  成立, 即齐次线性方程组有非

零解, 称  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$  线性相关。

#### 4、向量的线性表示

对非齐线性方程组  $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = b$ ,

(1) 存在一组常数  $k_1, k_2, \cdots, k_n$ , 使得  $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = b$  成立, 即非齐线性方程组有解, 称  $\beta$  可

由  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$  线性表示;

(2) 若  $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = b$  不能成立, 即非齐线性方程组无解, 称  $\beta$  不可由  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$  线性表示。

#### 5、向量组的秩与矩阵的秩的概念

(1) 向量组的极大线性无关组与向量组的秩—设  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$  为一个向量组, 若  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$  中存在  $r$  个线性无关的子向量组, 但任意  $r+1$  个子向量组 (如果有) 线性相关, 称  $r$  个线性无关的子向量组为向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$  的一个极大线性无关组,  $r$  称为向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$  的秩。

【注解】(1) 若一个向量组中含有零向量, 则该向量组一定线性相关。

(2) 两个向量线性相关的充分必要条件是两向量成比例。

(3) 向量组的极大线性无关组不一定唯一。

6、向量组的等价—设  $A: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$  与  $B: \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$  为两个向量组, 若

$$\begin{cases} \alpha_1 = k_{11}\beta_1 + k_{12}\beta_2 + \cdots + k_{1n}\beta_n \\ \alpha_2 = k_{21}\beta_1 + k_{22}\beta_2 + \cdots + k_{2n}\beta_n \\ \cdots \\ \alpha_m = k_{m1}\beta_1 + k_{m2}\beta_2 + \cdots + k_{mn}\beta_n \end{cases},$$

则称向量组  $A: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$  可由向量组  $B: \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$  线性表示, 若两个向量组可以相互线性表示, 称两个向量组等价。

## 二、向量的性质

(一) 向量组的相关性与线性表示的性质

1、若  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$  线性相关, 则其中至少有一个向量可由其余向量线性表出。

2、设  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$  线性无关, 而  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \beta$  线性相关, 则  $\beta$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$  线性表出, 且表示方法唯一。

- 3、若一个向量组线性无关，则其中任意一个部分向量组也必然线性无关； QQ:961978204
- 4、若一个向量组的一个部分向量组线性相关，则此向量组一定线性相关；
- 5、设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  为  $n$  个  $n$  维向量，则  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性无关  $\Leftrightarrow |\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n| \neq 0$ 。
- 6、若一个向量组的个数多于维数。则此向量组一定线性相关。
- 7、若  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  为一个两两正交的非零向量组，则  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性无关。
- 8、设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  为两两正交的非零向量组，则  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性无关，反之不对。

**【例 1】** 设  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关， $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  线性相关，证明： $\alpha_4$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示。

**【例 2】** 设  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关，令  $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2, \beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3, \beta_3 = \alpha_3 + \alpha_1$ ，讨论  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  的相关性。

**【例 4】** 设  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  线性无关，令 www.mxue365.com 非此独立账号下载均为倒卖

$\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2, \beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3, \beta_3 = \alpha_3 + \alpha_4, \beta_4 = \alpha_4 + \alpha_1$ ，讨论  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$  的相关性。

(二) 向量组的秩的性质

- 1、设  $A: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, B: \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  为两个向量组，若  $A$  组可由  $B$  线性表出，则  $A$  组的秩不超过  $B$  组的秩。
- 2、等价的向量组由相等的秩。
- 3、矩阵的秩、矩阵的行向量组的秩、矩阵的列向量组的秩三者相等。

**【注解】** (1) 设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性无关， $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, b$  线性无关的充分必要条件是  $b$  不可由向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性表示，等价于  $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, b) = r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) + 1$ 。

(2) 设  $A: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, B: \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ ，若向量组  $A$  可由向量组  $B$  线性表示，而向量组  $B$  不可由向量组  $A$  线性表示，则  $r(A) < r(B)$ 。

## 第四章 方程组

### 一、线性方程组的基本概念

$$\text{方程组} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \quad (I), \text{称 } (I) \text{ 为 } n \text{ 元齐次线性方程组。}$$

$$\text{方程组} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (II) \text{称 } (II) \text{ 为 } n \text{ 元非齐线性方程组，方程组 } (I) \text{ 又称为方}$$

程组  $(II)$  对应的齐次线性方程组或者导出方程组。

## 二、线性方程组解的结构

QQ:961978204

1、设  $X_1, X_2, \dots, X_s$  为齐次线性方程组  $AX = O$  的解, 则  $k_1 X_1 + k_2 X_2 + \dots + k_s X_s$  为  $AX = O$  的解, 其中  $k_1, k_2, \dots, k_s$  为任意常数。特殊情形,  $X_1 + X_2$  及  $kX_1$  ( $k$  为任意常数) 都是  $AX = O$  的解。

2、设  $X_0$  为齐次线性方程组  $AX = O$  的解,  $\eta$  为非齐线性方程组  $AX = b$  的解, 则  $X_0 + \eta$  为方程组  $AX = b$  的解。

3、设  $\eta_1, \eta_2$  为非齐线性方程组  $AX = b$  的解, 则  $\eta_1 - \eta_2$  为  $AX = O$  的解。

4、设  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$  为  $AX = b$  的一组解, 则  $k_1 \eta_1 + k_2 \eta_2 + \dots + k_t \eta_t$  为  $AX = b$  的解的充分必要条件是  $k_1 + k_2 + \dots + k_t = 1$ 。

www.mxue365.com 非此独立账号下载均为倒卖

## 三、线性方程组解的基本定理

**定理 1** (1) 齐次线性方程组  $AX = O$  只有零解的充分必要条件是  $r(A) = n$ ;

(2) 齐次线性方程组  $AX = O$  有非零解 (或者无穷多个解) 的充分必要条件是  $r(A) < n$ 。

**定理 2** (1) 非齐线性方程组  $AX = b$  无解的充分必要条件是  $r(A) \neq r(\bar{A})$ 。

(2)  $AX = b$  有解的充分必要条件是  $r(A) = r(\bar{A})$ 。更进一步地, 当  $r(A) = r(\bar{A}) = n$  时, 方程组  $AX = b$  有唯一解; 当  $r(A) = r(\bar{A}) = r < n$  时, 方程组  $AX = b$  有无穷多个解。

## 四、线性方程组的通解

(一) 齐次线性方程组  $AX = O$  的基础解系与通解

**【例 1】** 求方程组  $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 8x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 7x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 + 5x_5 = 0 \\ x_1 - x_3 + x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$  的通解。

**【例 2】** 求方程组  $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 4x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases}$ 。

**【注解】** 齐次线性方程组基础解系的三大条件:

一个向量组为齐次线性方程组的基础解系的充分必要条件是

(1) 该向量组为方程组的解。(2) 该向量组线性无关。(3) 该向量组的向量个数与方程组自由变量个数相等。

(二) 非齐线性方程  $AX = b$  的通解

**【例 1】** 设方程组  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 \\ 1 & a & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$  无解, 求  $a$ 。

【例 2】 $a, b$  取何值时, 方程组 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ -x_2 + (a-3)x_3 - 2x_4 = b \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + ax_4 = -1 \end{cases}$$
 有解, 并求出其解。

【例 3】(1) 设  $A$  为  $n$  阶阵, 且  $A$  的各行元素之和为 0,  $R(A) = n-1$ , 则  $AX = 0$ , 求  $AX = 0$  的通解。

(2) 设  $A$  为  $n$  阶阵, 且  $|A| = 0, A_{ki} \neq 0$ , 求  $AX = 0$  的通解。

(3) 设  $AX = b$  为四元非齐方程组,  $R(A) = 3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  为其 3 个解向量, 且  $\alpha_1 = (1, 9, 9, 8)^T$ ,

$\alpha_2 + \alpha_3 = (1, 9, 9, 9)^T$ , 求  $AX = b$  的通解。

(4)  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  设为 4 维列向量组,  $\alpha_1, \alpha_2$  线性无关,  $\alpha_3 = 3\alpha_1 + 2\alpha_2$ , 且  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ , 求  $AX = 0$  的一个基础解系。

(5) 设  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4), \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  线性无关, 且  $\alpha_1 = 3\alpha_2 + \alpha_3, \beta = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_4$ ,

求  $AX = \beta$  的通解。

www.mxue365.com 非此独立账号下载均为倒卖

【例 3】设  $\alpha_i = \begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{in} \end{pmatrix} (i = 1, 2, \dots, r, r < n)$  为  $n$  维向量组, 且  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  线性无关,

$\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$  为  $\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{r1}x_1 + \dots + a_{rn}x_n = 0 \end{cases}$  的非零解, 问  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \beta$  线性相关性。

## 第五章 特征值与特征向量

### 一、基本概念

1、矩阵的特征值、特征向量—设  $A$  为  $n$  阶矩阵, 若存在  $\lambda$  和非零向量  $X$ , 使得  $AX = \lambda X$ , 称  $\lambda$  为矩阵  $A$  的特征值, 称  $X$  为矩阵  $A$  的属于特征值  $\lambda$  的特征向量。

【问题 1】设  $A$  为  $n$  阶矩阵, 如何求  $A$  的特征值?

【问题 2】设  $A$  为  $n$  阶矩阵,  $\lambda_0$  为  $A$  的特征值, 如何求矩阵  $A$  的属于  $\lambda_0$  的特征向量?

2、特征多项式、特征方程—令  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ ,

称  $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$  为矩阵  $A$  的特征多项式,  $|\lambda E - A| = 0$  称为矩阵  $A$  的特征方程。

【注解】(1) 设  $A$  为实矩阵, 则  $A$  的特征值不一定是实数。

(2)  $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \text{tr}(A)$ 。

(3)  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n = |A|$ 。

www.mxue365.com 非此独立账号下载均为倒卖

(4)  $r(A) = n$  的充分必要条件是  $\lambda_i \neq 0 (1 \leq i \leq n)$ 。

【例 1】设  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ , 求  $A$  的特征值及每个特征值对应的线性无关的特征向量。

【例 2】设  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , 求  $A$  的特征值及每个特征值对应的线性无关的特征向量。

3、矩阵相似—设  $A, B$  为两个  $n$  阶阵, 若存在可逆阵  $P$ , 使得  $P^{-1}AP = B$ , 则称  $A$  与  $B$  相似, 记为  $A \sim B$ 。

【注解】

(1)  $A \sim A$ 。(2) 若  $A \sim B$ , 则  $B \sim A$ 。(3) 若  $A \sim B, B \sim C$ , 则  $A \sim C$ 。

(4)  $A \sim B \Rightarrow |\lambda E - A| = |\lambda E - B|$ , 反之不对。

(5)  $A \sim B \Rightarrow r(A) = r(B)$ , 反之不对。

(6)  $A \sim B \Rightarrow A^T \sim B^T; A^{-1} \sim B^{-1}$  (其中  $A, B$  可逆)。

(7) 若  $A \sim B$ , 则  $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$ ,  $|A| = |B|$ 。

4、矩阵的对角化—若一个矩阵和对角矩阵相似, 则称矩阵可以对角化, 设  $A$  是  $n$  阶矩阵, 所谓  $A$  可对角化, 即存在可逆矩阵  $P$ , 使得  $P^{-1}AP = \Lambda$ , 其中  $\Lambda$  为对角矩阵。

## 二、特征值与特征向量的性质

(一) 一般矩阵特征值与特征向量的性质

1、(重要性质) 不同特征值对应的特征向量线性无关。

2、设  $A$  为  $n$  阶矩阵,  $\lambda_0$  是矩阵  $A$  的特征值,  $X_0$  是矩阵  $A$  的对应于  $\lambda_0$  的特征向量, 则

(1) 若  $A$  可逆, 则  $\lambda_0^{-1}$  是矩阵  $A^{-1}$  的特征值,  $X_0$  是矩阵  $A^{-1}$  的对应于  $\lambda_0^{-1}$  的特征向量。

(2) 若  $A$  可逆, 则  $\frac{|A|}{\lambda_0}$  为矩阵  $A^*$  的特征值,  $X_0$  是矩阵  $A^*$  的对应于  $\frac{|A|}{\lambda_0}$  的特征向量。

(3) 设  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$  为一元  $n$  次多项式, 称

QQ:961978204

$f(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 E$  为关于矩阵  $A$  的矩阵多项式, 则有

$f(\lambda_0)$  为矩阵  $f(A)$  的特征值,  $X_0$  是矩阵  $f(A)$  的对应于  $f(\lambda_0)$  的特征向量。

3、矩阵  $A$  可对角化的充分必要条件是  $A$  有  $n$  个线性无关的特征向量。

(二) 实对称矩阵特征值特征向量的性质

1、设  $A$  为实对称阵, 则  $A$  的特征根都是实数。

2、设  $A$  为实对称阵, 则  $A$  的不同特征根对应的特征向量正交。

3、 $A$  可对角化  $\Leftrightarrow A$  有  $n$  个线性无关的特征向量。

4、设  $A$  为实对称阵,  $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$  为其特征根, 则存在正交阵  $Q$ , 使得

$$Q^T A Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

### 三、矩阵的对角化

(一) 非实对称矩阵

(二) 实对称矩阵

(二) 特征值、特征向量的求法

【思路分析】特征值的求法常见有三种方法:

(1) 公式法, 即通过  $|\lambda E - A| = 0$  求  $A$  的特征值。

(2) 定义法

(3) 关联矩阵法

【例 1】设矩阵  $A, B$  的每行元素之和分别为  $a, b$ , 其中  $A$  可逆。(1) 求  $A^{-1}$  的每行元素之和; (2) 求  $AB$  的每行元素之和。

【例 2】设  $A$  为  $n$  阶矩阵, 且  $A^2 + 2A = O$ , 求  $A$  的特征值。

【例 3】设  $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ , 且  $(\alpha, \beta) = 3$ , 令  $A = \alpha\beta^T$ , 求  $A$  的特征值及重数。

【例 4】 $A$  是三阶矩阵,  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关,

$A\alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_3, A\alpha_2 = \alpha_3 + \alpha_1, A\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$ , 求矩阵  $A$  的特征值。

(三) 矩阵对角化问题

【例 1】设  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  且  $ad - bc < 0$ , 证明  $A$  可对角化。



【例 2】设  $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}$ , 证明  $A$  不可以对角化。

【例 3】 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ , 求  $A$  的特征根、特征向量, 以及是否可以对角化?

【例 4】设  $A$  为非零矩阵, 且存在正整数  $k$ , 使得  $A^k = O$ , 证明  $A$  不可以对角化。

【例 5】设  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & y \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  有三个线性无关的特征向量, 求  $x, y$  满足的条件。

【例 6】 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, AX = \beta$ , 有解但不唯一, (1) 求  $a$  的值; (2) 求可逆阵  $P$ , 使得  $P^{-1}AP$  为对角

阵; (3) 求正交阵  $Q$ , 使得  $Q^T A Q$  为对角阵。

www.mxue365.com 非此独立账号下载均为倒卖

(四) 求矩阵  $A$

【例 1】设  $A_{3 \times 3}, A\alpha_i = i\alpha_i (i=1,2,3), \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ , 求  $A$ 。

【例 2】设三阶实对称阵  $A$  的特征值分别为 1, 2, 3,  $A$  的属于特征值 1, 2 的特征向量分别为  $\alpha_1 = (-1, -1, 1)^T, \alpha_2 = (1, -2, -1)^T$ 。(1) 求  $A$  的属于特征值 3 的特征向量; (2) 求  $A$ 。

## 第六章 二次型及其标准型

### 一、基本概念

1、二次型—含  $n$  个变量  $x_1, x_2, \dots, x_n$  且每项皆为二次的齐次多项式

$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{11}x_1^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_i x_j$  称为二次型。

令  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ , 则  $f(X) = X^T A X$ 。矩阵  $A$  称为二次型的矩阵, 显然  $A^T = A$ ,

即二次型的矩阵都是对称矩阵, 矩阵  $A$  的秩称为二次型的秩。

2、标准二次型—只含有平方项不含交叉项的二次型称为标准二次型。

QQ:961978204

3、矩阵合同—设  $A, B$  为  $n$  阶矩阵, 若存在可逆矩阵  $P$ , 使得  $P^T A P = B$ , 称矩阵  $A$  与  $B$  合同, 记为  $A \cong B$ 。

4、二次型的标准化—设  $f(X) = X^T A X$  为一个二次型, 若经过可逆的线性变换  $X = P Y$  (即  $P$  为可逆矩阵) 把二次型  $f(X) = X^T A X$  化为

$$f(X) = X^T A X \stackrel{X=PY}{=} Y^T (P^T A P) Y = l_1 y_1^2 + l_2 y_2^2 + \cdots + l_m y_m^2, \text{ 称为二次型的标准化。}$$

5、规范二次型—二次型的标准型的系数为 1 和 -1 的标准型, 称为二次型的规范型。

## 二、二次型标准化方法

### (一) 配方法

【例 1】用配方法化二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 5x_2^2 - x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_2x_3$  为标准型。

【例 2】用配方法化二次型  $f(x_1, x_2) = x_1x_2$  为标准型。

### (二) 正交变换法

(1) 求  $A$  的特征值  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 。

www.mxue365.com 非此独立账号下载均为倒卖

(2) 求  $A$  的线性无关的特征向量  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 。

(3) 将  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  进行施密特正交化和规范化得  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ , 令  $Q = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ 。

(4)  $f = X^T A X \stackrel{X=QY}{=} Y^T (Q^T A Q) Y = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$ 。

【例 1】用正交变换法化  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3$  为标准型。

【例 2】设  $f(x_1, x_2, x_3) = 4x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3$ 。

(1) 写出二次型的矩阵形式; (2) 用正交变换法求二次型的标准型, 写出正交阵。

## 三、正定矩阵与正定二次型

1、正定二次型定义—若对任意的  $X \neq O$  总有  $X^T A X > 0$ , 称  $X^T A X$  为正定二次型,  $A$  称为正定矩阵。

2、正定二次型的判别法

方法一: 定义法

【例 1】设  $A, B$  都是  $n$  阶正定矩阵, 证明:  $A + B$  为正定矩阵。

【例 2】设  $P$  为可逆矩阵,  $A = P^T P$ , 证明:  $A$  为正定矩阵。

【例 3】设  $A$  为  $m$  阶实对称正定阵,  $B$  为  $m \times n$  实阵, 证明:  $B^T A B$  是正定矩阵的充分必要条件是  $r(B) = n$ 。

方法二: 特征值法

【例 1】设  $A$  为正定矩阵, 证明:  $A^{-1}$  为正定矩阵。

【例 2】设  $A$  为正定矩阵，证明： $|E + A| > 1$ 。

方法三：顺序主子式法

$A$  是实对称矩阵，则  $A$  正定的充要条件是  $a_{11} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots, |A| > 0$ 。

【例 1】设二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 + 2tx_1x_2 + 2x_1x_3$  为正定二次型，求  $t$  的范围。

www.mxue365.com 非此独立账号下载均为倒卖