拉格朗日对偶性

W.J.Z

拉格朗日对偶性通常解决约束最优化问题，通过解对偶问题来求出原始问题的解。

1 原始问题

设 $f(x)$ $c_i(x), h_j(x)$ R^n 上的连续可微函数，约束最优化问题为：

$$\underset{x\varepsilon R^n}{min} f\left(x\right) \tag{1}$$

$$s.t. \quad c_i(x) \leq 0, i = 1, 2, \ldots, k \tag{2}$$

$$c_j \leq 0, j = 1, 2, \ldots, l \tag{3}$$

引入拉格朗日函数

$$L\left(x, \alpha, \beta\right) = f\left(x\right) + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i c_i\left(x\right) + \sum_{j=1}^{l} \beta_i h_j\left(x\right) \tag{4}$$

$\alpha_i \geq 0$ 考虑 x 的函数

$$\Theta_P(x) = \underset{\alpha,\beta;\alpha_i \geq 0}{max} L\left(x, \alpha, \beta\right) \tag{5}$$

P 表示原始问题。
假设给定某个 x，如果 x 违反原始问题的约束条件，使 $c_i(x) > 0$ 或 $h_j \neq 0$ 则：

$$\Theta_P(x) = \underset{\alpha,\beta;\alpha_i \geq 0}{max} L\left(x, \alpha, \beta\right) = +\infty \tag{6}$$

如果 x 满足约束条件公式 2和 3的话，由公式 4和 5可知：

$$\Theta_P\left(x\right) = \begin{cases} f(x) & x \text{ 满足原始问题约束} \\ +\infty & \text{其他} \end{cases}$$

所以考虑极小化问题

$$\underset{x}{min}\,\Theta_P(x) = \underset{x}{min}\,\underset{\alpha,\beta;\alpha_i\geq 0}{max}\,L(x,\alpha,\beta) \tag{7}$$

它与原始问题最优解等价，即它们有相同的解。定义原始问题的最优解为：

$$p^* = \underset{x}{min}\,\Theta_P(x) \tag{8}$$

2 对偶问题

广义拉格朗日函数的极大极小问题：

$$\underset{\alpha,\beta;\alpha_i\geq 0}{max}\,\theta_D(\alpha,\beta) = \underset{\alpha,\beta;\alpha_i\geq 0}{max}\,\underset{x}{min}\,L(x,\alpha,\beta) \tag{9}$$

将广义拉格朗日函数的极大极小问题表示为约束最优化问题：

$$\underset{\alpha,\beta}{max}\,\theta_D(\alpha,\beta) = \underset{\alpha,\beta}{max}\,\underset{x}{min}\,L(x,\alpha,\beta) \tag{10}$$

$$s.t. \quad \alpha_i \geq 0, \quad i = 1,2,\ldots,k \tag{11}$$

定义对偶问题的最优解：

$$d^* = \underset{\alpha,\beta;\alpha_i\geq 0}{max}\,\theta_D(\alpha,\beta) \tag{12}$$

3 原始问题和对偶问题的关系

定理 1：

$$d^* = \underset{\alpha,\beta}{max}\,\underset{x}{min}\,L(x,\alpha,\beta) \leq= \underset{x}{min}\,\underset{\alpha,\beta;\alpha_i\geq 0}{max}\,L(x,\alpha,\beta) = p^* \tag{13}$$

定理 2：假设 $f(x)$ 函数和 $c_i(x)$ 是凸函数，$h_j(x)$ 是放射函数，并且假设不等式约束 $c_j(x)$ 是严格可行的，则存在 x^*,α^*,β^*, 使得 x^* 是原始问题的解，α^*,β^* 释对偶问题的解，并且：

$$p^* = d^* = L\{x^*,\alpha^*,\beta^*\} \tag{14}$$

定理 3：定理 2 的充分必要条件为 KKT 条件：

$$\bigtriangledown_x L(x^*,\alpha^*,\beta^*) = 0 \tag{15}$$

$$\alpha_i^* c_i\left(x^*\right) = 0, \quad i = 1, 2, ..., k \tag{16}$$

$$c_j\left(x^*\right) \leq 0 \quad i = 1, 2, ..., k \tag{17}$$

$$\alpha_i^* \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, k \tag{18}$$

$$h_j\left(x^*\right) = 0 \quad j = 1, 2, \ldots, l \tag{19}$$