Ordinary Differential Equation

Kun Wang

2019.11.27-2020.01.29

Chapter 1

Basic concepts

微分方程
常微分方程
偏微分方程
线性常微分方程
非线性常微分方程

Chapter 2

The first order ODE

Chapter 3

The high order ODE

线性齐次二阶常系数常微分方程如

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{3.1}$$

假定其指数解为 $y = e^{\lambda x}$，带入式 (3.1) 中得

$$(\lambda^2 + a\lambda + b)e^{\lambda x} = 0$$

由于 $e^{\lambda x}$ 不恒等于 0，得如下方程

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \tag{3.2}$$

式 (3.2) 为微分方程 (3.1) 的特征方程。

式 (3.2) 的判别式 $\Delta = a^2 - 4b$,

$\Delta > 0$ 时方程 (3.2) 有两个实根 λ_1,λ_2，则 $y = e^{\lambda_1 x}$,$y = e^{\lambda_2 x}$ 均为微分方程的解，且两个解不相关。根据常微分方程解的理论，方程 (3.1) 的通解为

$$y = A_1 e^{\lambda_1 x} + A_2 e^{\lambda_2 x} \tag{3.3}$$

$\Delta = 0$ 时方程 (3.2) 有两个重实根 $\lambda_1 = \lambda_2$，则 $y = e^{\lambda_1 x}$,$y = e^{\lambda_2 x}$ 均为微分方程的解，且两个解相关。设方程另一不相关解为 $y = u(x)e^{\lambda_1 x}$，带入方程 (3.1) 得

$$u'' + (2\lambda_1 + a)u' + (\lambda_1^2 + a\lambda_1 + b)u = 0$$

由于 λ_1 为 $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ 的重根，故 $(2\lambda_1 + a) = 0$,$(\lambda_1^2 + a\lambda_1 + b) = 0$, 则 $u'' = 0$, 取特解 $u(x) = x$, 则方程 (3.1) 的通解为

$$y = (A_1 + A_2 x)e^{\lambda_1 x} \tag{3.4}$$

$\Delta < 0$ 时方程 (3.2) 有两个复根 $\lambda_1 = \alpha + \beta i$, $\lambda_2 = \alpha - \beta i$，则 $y = e^{\lambda_1 x}$,$y = e^{\lambda_2 x}$ 均为微分方程的解，根据欧拉公式，方程 (3.1) 的通解可化为

$$y = e^{\alpha x}(A_1 \cos\beta x + A_2 \sin\beta x) \tag{3.5}$$

Chapter 4

ODE group