Structural Dynamics

Kun Wang

2019.10.05-2020.01.30

目录

Chapter 1

Time-Domain Analysis of Continuous Systems

1.1 Basis of partial differential equations

常系数二阶偏微分方程

$$a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0 \tag{1.1}$$

若 $b^2-4ac>0$ 则为双曲线型 (hyperbolic) 方程;
若 $b^2-4ac=0$ 则为抛物线型方程;
若 $b^2-4ac<0$ 则为椭圆型方程。

连续体振动问题中的波动方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{1.2}$$

其中 c 为波在物质中的传播速度。使用分离变量法可求得该微分方程的解。

令 $u(x,t)=X(x)\,T(t)$, 带入 (1.2) 得

$$c^2T(t)\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}-X(x)\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}=0$$

亦可写为

$$\frac{1}{X(x)}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2T(t)}\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}$$

由于等式两边变量不同，等式要成立，则等式两边必须均等于一常数，设为 $-\lambda$, 则可得

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}+\lambda X(x)=0 \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}+c^2\lambda T(x)=0 \tag{1.4}$$

表 1.1: general solution of 2-order ode

λ	$X(x)$
$\lambda < 0$	$X(x) = A_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + A_2 e^{\sqrt{\lambda}x}$
$\lambda = 0$	$X(x) = (A_1 + A_2 x)$
$\lambda > 0$	$X(x) = A_1 \sin\left(\sqrt{\lambda}x\right) + A_2 \cos\left(\sqrt{\lambda}x\right)$

这是两个常系数二阶常微分方程，根据常微分方程理论，式 (1.3) 的通解为 对于弦振动问题有约束条件 $u(0,t) = 0, u(l,t) = 0$。当 $\lambda \le 0$ 时，方程 (1.2) 无非平凡解 (不恒等于零的解)。故 λ 只能大于 0，不妨设 $\lambda = (\omega/c)^2$。则对于弦振动问题，由方程 (1.3) 及边界条件得

$$\sin\left(\frac{\omega l}{c}\right) = 0 \tag{1.5}$$

可得自然频率

$$\omega_n = \frac{n\pi c}{l},\ n = 1, 2, \cdots \tag{1.6}$$

方程 (1.3) 的解为

$$X_n\left(x\right) = A_n \sin\frac{n\pi x}{l},\ n = 1, 2, \cdots \tag{1.7}$$

根据式 (1.4)(1.6) 可得

$$T_n\left(t\right) = B_n \sin\left(\frac{n\pi c}{l}t + \varphi_n\right),\ n = 1, 2, \cdots \tag{1.8}$$

波动方程的解为

$$u\left(x,t\right) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi x}{l} \sin\left(\frac{n\pi c}{l}t + \varphi_n\right),\ n = 1, 2, \cdots \tag{1.9}$$

声波由多种单音振动组合而成，连续体的振动也是多种振动的合成，每种振动的波长为 $\frac{2l}{n}$, 振动周期为 $\frac{2l}{nc}$, 则波速即为 c。

1.2 一维弹性波动方程

1.2.1 弦的横向自由振动

assumptions: The transverse deflection is very small so that the length l of the string and the tension T are constant. The small deflection does not mean the small transverse motion but it meane the small deflection angle is small so $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ can be negelected.

假设弦的横向偏转很小，弦上取微元, 则其转角 θ 可近似为 $\theta = \sin\theta = \tan\theta$, 在横向方向上，根据 d'Alembert 原理可得

$$T\left(\theta + \frac{\partial \theta}{\partial x}\mathrm{d}x\right) - T\theta = \rho \mathrm{d}x \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \tag{1.10}$$

$\theta = \tan\theta = \frac{\partial v}{\partial x}$, 进一步得

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \tag{1.11}$$

记 $c = \sqrt{T/\rho}$, 即得式

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \tag{1.12}$$

弦两端加上固定约束，即 $v(0,t) = 0, v(l,t) = 0$。方程 (1.12) 是可使用分离变量法求解。根据 1.1节中理论，并设 $\lambda = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2$(对于该问题 $\lambda \leq 0$ 无非平凡解)，可得

$$\begin{cases} X(x) = A\cos\frac{\omega}{c}x + B\sin\frac{\omega}{c}x \\ T(t) = C\cos\omega t + D\sin\omega t \end{cases} \tag{1.13}$$

将边界条件带入，得

$$\begin{cases} X(0)T(t) = AT(t) = 0 \\ X(l)T(t) = \left(A\cos\frac{\omega}{c}l + B\sin\frac{\omega}{c}l\right)T(t) = 0 \end{cases} \tag{1.14}$$

由于时间的任意性，要求得非平凡解 (non-trival solution)，必有

$$\sin\frac{\omega l}{c} = 0 \tag{1.15}$$

即

$$\frac{\omega l}{c} = n\pi \tag{1.16}$$

可得固有频率 (natrual frequency)

$$\omega_n = \frac{n\pi c}{l} \tag{1.17}$$

相应的模态振型 (mode shape) 为

$$\phi_n(x) = A_n \sin\frac{\omega_n}{c}x = A_n\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{1.18}$$

弦振动的解为所有解的线性组合，即

$$
\begin{aligned}
v(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) T_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{l} \left(C \cos \frac{n\pi c}{l} t + D \sin \frac{n\pi c}{l} t \right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \left(\frac{n\pi c}{l} t + \alpha_n \right)
\end{aligned}
\tag{1.19}
$$

该解与琴弦振动发出声音由许多单音组合起来类似，每个频率为系统的固有频率，对应的振型为固有振型。

弦上点的振动会带动邻近点的振动，这种振动的传播即为波动。弦上每一点的振动频率均相同，所以波传播频率等于振动频率。弦内弹性波的波长为 $\lambda_n = \frac{2l}{n}$，波传播速度为 $\frac{\lambda_n \omega_n}{2\pi} = c$，故 c 为波传播速度。

1.2.2 弹性杆的轴向自由振动

取弹性杆内微元，截面处轴向内力为 P，其惯性力为 $\rho A \mathrm{d}x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, 根据 d'Alembert 原理可得

$$
P + \frac{\partial P}{\partial x} \mathrm{d}x - P = \rho A \mathrm{d}x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1.20}
$$

根据应力应变关系 $\sigma_x = E\epsilon_x$，又 $P = \sigma_x A$, 有 $P = EA\epsilon_x = EA\frac{\partial u}{\partial x}$, 上式化为

$$
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1.21}
$$

该式与式 (1.12) 相同，波在弹性杆中传播速度为 $c = \sqrt{E/\rho}$。式 (1.21) 可用分离变量法求解。

在弹性杆两端施加不同的约束，相同的偏微分方程可得到不同的结果。考虑如下三种边界条件

(1) 两端固定 $u(0,t) = 0, u(l,t) = 0$；

(2) 一端固定，一端自由，自由端无外力，即无应变，$u(0,t) = 0, \frac{\partial u}{\partial x}|(l,t) = 0$；

(3) 两端自由 $\frac{\partial u}{\partial x}||(0,t) = 0, \frac{\partial u}{\partial x}|(l,t) = 0.$

类似弦振动问题，微分方程的通解为

$$
u(x,t) = \left(A \cos \frac{\omega}{c} x + B \sin \frac{\omega}{c} x \right) \sin(\omega t + \alpha) \tag{1.22}
$$

将**第一种边界条件**带入得

固有频率

$$
\omega_n = \frac{n\pi c}{l},
$$

对应模态振型为

$$\phi_n(x) = A_n \sin \frac{n\pi x}{l},$$

方程解为

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{l} \sin\left(\frac{n\pi c}{l} t + \alpha_n\right)$$

将**第二种边界条件**带入得

固有频率

$$\omega_n = \frac{(2n-1)\pi c}{2l},$$

对应模态振型为

$$\phi_n(x) = A_n \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2l},$$

方程解为

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2l} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi c}{2l} t + \alpha_n\right)$$

将**第三种边界条件**带入得

固有频率

$$\omega_n = \frac{n\pi c}{l},$$

对应模态振型为

$$\phi_n(x) = A_n \cos \frac{n\pi x}{l},$$

方程解为

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos \frac{n\pi x}{l} \sin\left(\frac{n\pi c}{l} t + \alpha_n\right)$$

从以上结果看出，固有频率和固有振型和结构参数和边界条件有关，结构得振动响应不光和结构参数和边界条件有关，还和结构初始状态 (初值) 有关。

1.2.3 圆柱杆的自由扭转振动

假设圆柱杆截面没有翘曲，弹性杆截面扭矩为

$$T = GI_p \frac{\partial \theta}{\partial x} \tag{1.23}$$

其中 G 为剪切刚度，I_p 为截面扭转惯量。取微元，有

$$\left(T+\frac{\partial T}{\partial x}\mathrm{d}x\right)-T=\rho I_p\mathrm{d}x\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} \tag{1.24}$$

将式 (1.23) 带入式 (1.24) 中得

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}=\frac{\rho}{G}\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} \tag{1.25}$$

则波动传播速度为 $c=\sqrt{G/\rho}$。式 (1.25) 与式 (1.21) 相同，其解也相同。

1.3 Euler-Bernoulli 梁的横向自由振动

1.4 方形薄板的自由振动

1.5 模态振型的特性

1.5.1 Orthogonality

1.5.2 Scaling

1.5.3 Expasion theorm

1.5.4 Rayley quotient