Classical Mechanics

Kun Wang

2019 年 5 月 14 日

1 牛顿力学

$$F_k = \frac{dp_k}{dt} \tag{1.1}$$

2 Lagrange 力学

2.1 基本概念 [1]

位形空间：位形是质点系各质点或连续体中各小单元的位置或位移的集合。位形坐标系所在空间就是位形空间。

约束：约束分类有理想约束和非理想约束，完整约束/非完整约束，稳定约束/不稳定约束。
理想约束: 在任何虚位移上，约束反力的元功之和为零的约束，反之约束反力元功之和不为零的约束为非理想约束。
稳定约束: 约束方程中不显含时间 t 的约束，反之显含时间 t 的约束为不稳定约束。
完整约束: 约束方程中不含速度或者速度可积分消掉的约束，约束方程中含有不可积分速度的为非完整约束。

虚功原理：

2.2 第一类 Lagrange 方程

Lagrange 乘子法：$3n$ 个自由度系统，s 个约束，选择 Lagrange 乘子，使得 s 个不独立的虚位移前括号中的项为零，剩余的 $3n-s$ 个独立的虚位移前括号中的项也都等于零。

2.3 第二类 Lagrange 方程

$$\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{d}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial q_k}\right) \tag{2.1}$$

2.3.1 Newton 方程推导 Lagrange 方程

2.3.2 d'Alembert 方程推导 Lagrange 方程

2.3.3 Newton 方程和 d'Alembert 方程的区别

Newton 方程中的力是所有作用力，包括主动力和约束力。d'Alembert 方程中只含有主动力。

$$L = T - V \tag{2.2}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k \tag{2.3}$$

2.4 Lagrange 方程首次积分

2.4.1 广义动量积分

L 与 q_k 无关，则有

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \tag{2.4}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = 0 \tag{2.5}$$

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = const \tag{2.6}$$

2.4.2 广义能量积分

1) 稳定约束下的 Hamilton 积分
L 与 t 无关，则有

$$\begin{aligned}\frac{dL}{dt} &= \frac{\partial L}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial q_k}\ddot{q}_k = \frac{\partial L}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k\right) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q_k}\dot{q}_k \\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k\right) - \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k}\right)\dot{q}_k = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k\right)\end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{q}_k\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L\right) = 0 \tag{2.8}$$

$$H(q-k, \dot{q}_k, t) = \dot{q}_k\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L = const \tag{2.9}$$

2.5 变分问题 Euler 方程

$$J = \int_A^B f(y, \dot{y}, x)dx \tag{2.10}$$

求上式的极值。

2.6 Hamilton 原理

参考文献

[1] 沈惠川, 李书民. 经典力学[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2006.