Learning Notes of *Differential Geometry*

Kun Wang

2021 年 4 月 26 日-2021 年 5 月 24 日

1 Curved surface

正则参数曲面的定义：

$$\mathbf{r}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix} \tag{1}$$

满足：

1) $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ 有 3 次以上连续偏导数；

2) $\mathbf{r}_{,u} \times \mathbf{r}_{,v} \neq \mathbf{0}$。

容许参数变换：$u = u(\tilde{u}, \tilde{v}), v = v(\tilde{u}, \tilde{v})$, 满足

1) $u = u(\tilde{u}, \tilde{v}), v = v(\tilde{u}, \tilde{v})$ 有 3 次以上连续偏导数；

2) $\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(\tilde{u},\tilde{v})}\right| \neq 0$。

其中 $\mathbf{r}_{,u} \times \mathbf{r}_{,v}$ 指向曲面的正侧，$\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(\tilde{u},\tilde{v})}\right| > 0$ 为保持参数曲面定向不变的充要条件。

正则曲面定义：

定义 1.1 *S 是 E^3 中一张正则曲面，则 $S \subseteq E^3, \forall p \in S, \exists$ 点 p 的邻域 $V \in E^3$ 以及 $U \subseteq E^2$, 使得 $\mathbf{r} : U \mapsto V \cap S$ 为双射，且 $\mathbf{r}(u, v), (u, v) \in U$ 为正则参数曲面。*

切向量：曲面 S 上经过点 p 的任意一条连续可微曲线在该点的切向量为曲面 S 在点 p 的切向量。曲纹坐标线的切向量为 $\mathbf{r}_{,u}, \mathbf{r}_{,v}$. 曲面 S 上过点 p 的曲线 $\mathbf{r}(u(t), v(t))$ 的切向量为

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{r}_{,u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \mathbf{r}_{,v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \tag{2}$$

可以看出，点 p 处切向量是 $\mathbf{r}_{,u}$ 和 $\mathbf{r}_{,v}$ 的线性组合。由于 $\mathbf{r}_{,u}, \mathbf{r}_{,v}$ 是线性无关的，故曲面 S 在点 p 的全体切向量构成一个二维向量空间，称为曲面 S 在点 p 的切空间，记作 T_pS。空间 E^3 中经过点 p 由切向量 $\mathbf{r}_{,u}, \mathbf{r}_{,v}$ 张成的平面为曲面 S 在点 p 的**切平面**。其参数方程为

$$\mathbf{x}(\xi, \eta) = \mathbf{r}(u, v) + \xi\mathbf{r}_{,u} + \eta\mathbf{r}_{,v} \tag{3}$$

法向量：

$$\mathbf{n}(u, v) = \frac{\mathbf{r}_{,u} \times \mathbf{r}_{,v}}{\|\mathbf{r}_{,u} \times \mathbf{r}_{,v}\|} \tag{4}$$

E^3 中经过点 p 以法向量 $\mathbf{n}(u, v)$ 为方向向量的直线为曲面 S 在点 p 的法线，其参数方程为

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{r}(u, v) + t\mathbf{n}(u, v) \tag{5}$$

$\{\mathbf{r}(u,v),\ \mathbf{r}_{,u},\ \mathbf{r}_{,v},\ \mathbf{n}(u,v)\}$ 构成曲面 S 上的**自然标架**。一般来说 $\mathbf{r}_{,u}$，$\mathbf{r}_{,v}$ 不是正交向量。
第一基本形式
正则参数曲面 S 在点 $\mathbf{r}(u,v)$ 处的任意一个切向量表示为

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = \mathbf{r}_{,u}\mathrm{d}u + \mathbf{r}_{,v}\mathrm{d}v \tag{6}$$

因为 $\mathbf{r}_{,u}$，$\mathbf{r}_{,v}$ 不一定是正交向量，故切向量的内积一般不能表示为切向量在自然基底下坐标分量的平方和。如果知道自然基底的度量系数，切向量内积就可以表示为 $(\mathrm{d}u,\mathrm{d}v)$ 的二次型。

第一类基本量

$$\begin{aligned} E &= \mathbf{r}_{,u}\cdot\mathbf{r}_{,u} \\ F &= \mathbf{r}_{,u}\cdot\mathbf{r}_{,v} = \mathbf{r}_{,v}\cdot\mathbf{r}_{,u} \\ G &= \mathbf{r}_{,v}\cdot\mathbf{r}_{,v} \end{aligned} \tag{7}$$

给定容许参数变换，$u=u(\tilde{u},\tilde{v}), v=v(\tilde{u},\tilde{v})$，参数曲面的第一类基本量变为 $\tilde{E},\tilde{F},\tilde{G}$，根据变换

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{,\tilde{u}} &= \mathbf{r}_{,u}\frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} + \mathbf{r}_{,v}\frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} \\ \mathbf{r}_{,\tilde{v}} &= \mathbf{r}_{,u}\frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} + \mathbf{r}_{,v}\frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \end{aligned} \tag{8}$$

可得

$$\begin{aligned} \tilde{E} = \mathbf{r}_{,\tilde{u}}\cdot\mathbf{r}_{,\tilde{u}} &= \left(\frac{\partial u}{\partial \tilde{u}},\ \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}}\right)\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} \\ \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} \end{pmatrix} \\ \tilde{F} = \mathbf{r}_{,\tilde{u}}\cdot\mathbf{r}_{,\tilde{v}} &= \left(\frac{\partial u}{\partial \tilde{u}},\ \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}}\right)\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} \\ \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \end{pmatrix} \\ \tilde{F} = \mathbf{r}_{,\tilde{v}}\cdot\mathbf{r}_{,\tilde{u}} &= \left(\frac{\partial u}{\partial \tilde{v}},\ \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}}\right)\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} \\ \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{9}$$

即

$$\begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{pmatrix} = \mathbf{J}^T \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \mathbf{J} \tag{10}$$

其中

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} \\ \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \end{pmatrix} \tag{11}$$

即第一类基本量在容许参数变换下仅差一个合同变换。

切向量内积为

$$I = \mathrm{d}\mathbf{r}\cdot\mathrm{d}\mathbf{d} = (\mathrm{d}u,\ \mathrm{d}v)\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{d}u \\ \mathrm{d}v \end{pmatrix} \tag{12}$$

二次微分式 I 称作曲面 S 的**第一基本形式**，与曲面参数选取无关。因为根据式(8)，

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\mathbf{r} &= \mathbf{r}_{,u}\mathrm{d}u + \mathbf{r}_{,v}\mathrm{d}v \\ &= \mathbf{r}_{,u}\left(\frac{\partial u}{\partial \tilde{u}}\mathrm{d}\tilde{u} + \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}}\mathrm{d}\tilde{v}\right) + \mathbf{r}_{,v}\left(\frac{\partial v}{\partial \tilde{u}}\mathrm{d}\tilde{u} + \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}}\mathrm{d}\tilde{v}\right) \\ &= \left(\mathbf{r}_{,u}\frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} + \mathbf{r}_{,v}\frac{\partial v}{\partial \tilde{u}}\right)\mathrm{d}\tilde{u} + \left(\mathbf{r}_{,u}\frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} + \mathbf{r}_{,v}\frac{\partial v}{\partial \tilde{v}}\right)\mathrm{d}\tilde{v} \\ &= \mathbf{r}_{,\tilde{u}}\mathrm{d}\tilde{u} + \mathbf{r}_{,\tilde{v}}\mathrm{d}\tilde{v} \end{aligned} \tag{13}$$

即一次微分式(6)与参数选取无关，故 I 为一次微分式的内积也与参数选取无关。

第一类基本量在容许参数变换下差一个合同变换，但是第一类基本形式却保持不变。

正则曲面上参数曲线的弧长可以用第一类基本量表示，给定参数曲线 $\mathbf{r}(u(t), v(t))$, 曲线切向量为

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(u(t), v(t))}{\mathrm{d}t} = \mathbf{r}_{,u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \mathbf{r}_{,v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \tag{14}$$

曲线弧长为

$$s = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\|\mathrm{d}t = \int_a^b \sqrt{E\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)^2 + 2F\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + G\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)}\mathrm{d}t \tag{15}$$

在参数曲面上取曲线 $u, u + \mathrm{d}u, v, v + \mathrm{d}v$ 围成的面积微元，其面积为

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\sigma &= \|\mathbf{r}_{,u} \times \mathbf{r}_{,v}\|\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \|\mathbf{r}_{,u}\|\|\mathbf{r}_{,v}\| \sin\angle\left(\mathbf{r}_{,u}, \mathbf{r}_{,v}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\ &= \sqrt{EG}\sqrt{1-\left(\frac{F}{\sqrt{EG}}\right)^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \sqrt{EG-F^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v \end{aligned} \tag{16}$$

正则参数曲面面积：

$$A = \iint_D \sqrt{EG-F^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v \tag{17}$$

容许参数变换不改变正则参数曲面面积公式的形式，即

$$A = \iint_D \sqrt{EG-F^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \iint_D \sqrt{\tilde{E}\tilde{G}-\tilde{F}^2}\mathrm{d}\tilde{u}\mathrm{d}\tilde{v} \tag{18}$$

证明：给定容许参数变换 $u = u(\tilde{u}, \tilde{v}), v = v(\tilde{u}, \tilde{v})$，根据式(10)可得

$$\det\begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{pmatrix} = \tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2 = J^2 \det\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = J^2\left(EG - F^2\right)$$

即

$$\sqrt{\tilde{E}\tilde{G}-\tilde{F}^2} = J\sqrt{EG-F^2}$$

其中

$$J = \det(\mathbf{J})$$

带入

$$A = \iint_D \sqrt{EG-F^2}J\mathrm{d}\tilde{u}\mathrm{d}\tilde{v}$$

得

$$A = \iint_D \sqrt{\tilde{E}\tilde{G}-\tilde{F}^2}\mathrm{d}\tilde{u}\mathrm{d}\tilde{v}$$

故参数曲面面积不随参数变换而变化。

正交参数曲线网

定理 1.1 假定正则参数曲面 $S : \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ 上有两个处处线性无关的连续可微的切向量场，$\mathbf{a}(u, v), \mathbf{b}(u, v), \forall p \in S, \exists U_p \subseteq S$ 以及在在 U 上的新的参数系 $(\tilde{u}, \tilde{v})$，使得新参数曲线的切向量 $\mathbf{r}_{,\tilde{u}}$, $\mathbf{r}_{,\tilde{v}}$ 分别与 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 平行，即 $\mathbf{r}_{,\tilde{u}}//\mathbf{a}$, $\mathbf{r}_{,\tilde{v}}//\mathbf{b}$。

定理 1.2 给定正则参数曲面 $S : \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ 上一点 p，必然存在一个点 p 的领域 $U(p) \subseteq S$，以及新的参数 $(\tilde{u}, \tilde{v})$, 使得新参数曲线的切向量是正交的，即 $(\tilde{u}, \tilde{v})$ 是曲面 S 在 U 上的正交参数系。

证明：正则参数曲面 $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)$ 参数曲线的切向量作 Schmidt 正交化。

$$\mathbf{e}_1=\frac{\mathbf{r}_{,u}}{\|\mathbf{r}_{,u}\|}=\frac{1}{\sqrt{E}}\mathbf{r}_{,u}$$

$$\mathbf{b}=\mathbf{r}_{,v}+\lambda\mathbf{e}_1$$

$$\mathbf{b}\cdot\mathbf{e}_1=0$$

$$\lambda=-\mathbf{r}_{,v}\cdot\mathbf{r}_{,u}/\|\mathbf{r}_{,u}\|=-\frac{F}{\sqrt{E}}$$

$$\mathbf{b}=\mathbf{r}_{,v}-\frac{F}{E}\mathbf{r}_{,u}$$

$$\mathbf{e}_2=\frac{\mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|}=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left(\sqrt{E}\mathbf{r}_{,v}-\frac{F}{\sqrt{E}}\mathbf{r}_{,u}\right)$$

得到曲面 S 正交向量场 $\mathbf{e}_1$，$\mathbf{e}_2$。记

$$\begin{cases}\mathbf{e}_1=a_1(u,v)\mathbf{r}_{,u}+a_2(u,v)\mathbf{r}_{,v}\\ \mathbf{e}_2=b_1(u,v)\mathbf{r}_{,u}+b_2(u,v)\mathbf{r}_{,v}\end{cases}$$

$a_1(u,v),a_2(u,v),b_1(u,v),b_2(u,v)$ 均为连续可微函数，且 $a_1^2+a_2^2\neq 0, b_1^2+b_2^2\neq 0, \begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\neq 0$ 因为根据引理，存在 $\lambda(u,v)\neq 0,\mu(u,v)\neq 0$，使得 [1]

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\tilde{u}&=\lambda\left(b_2\mathrm{d}u-b_1\mathrm{d}v\right)\\ \mathrm{d}\tilde{v}&=\mu\left(-a_2\mathrm{d}u+a_1\mathrm{d}v\right)\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix}\mathrm{d}\tilde{u}\\ \mathrm{d}\tilde{v}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda b_2 & -\lambda b_1\\ -\mu a_2 & \mu a_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{d}u\\ \mathrm{d}v\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\mathrm{d}u\\ \mathrm{d}v\end{bmatrix}=\frac{1}{\lambda\mu\left(a_1b_2-a_2b_1\right)}\begin{bmatrix}\mu a_1 & \lambda b_1\\ \mu a_2 & \lambda b_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{d}\tilde{u}\\ \mathrm{d}\tilde{v}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r}_{,\tilde{u}}=\mathbf{r}_{,u}\frac{\partial u}{\partial\tilde{u}}+\mathbf{r}_{,v}\frac{\partial v}{\partial\tilde{u}}=\frac{1}{\lambda\left(a_1b_2-a_2b_1\right)}\left(a_1\mathbf{r}_{,u}+a_2\mathbf{r}_{,v}\right)//\mathbf{e}_1$$

$$\mathbf{r}_{,\tilde{v}}=\mathbf{r}_{,u}\frac{\partial u}{\partial\tilde{v}}+\mathbf{r}_{,v}\frac{\partial v}{\partial\tilde{v}}=\frac{1}{\mu\left(a_1b_2-a_2b_1\right)}\left(b_1\mathbf{r}_{,u}+b_2\mathbf{r}_{,v}\right)//\mathbf{e}_2$$

即 $\mathbf{r}_{,\tilde{u}}\perp\mathbf{r}_{,\tilde{v}}$，得证。

切映射

给定两个参数曲面，他们的参数方程为

$$\begin{aligned}S_1:\mathbf{r}&=\mathbf{r}_1\left(u_1,v_1\right),\left(u_1,v_1\right)\in D_1\\ S_2:\mathbf{r}&=\mathbf{r}_2\left(u_2,v_2\right),\left(u_2,v_2\right)\in D_2\end{aligned}$$

其中 D_1,D_2 为 E_2 中两个区域。映射

$$\sigma:u_2=f\left(u_1,v_1\right),\ v_2=g\left(u_1,v_1\right)\tag{19}$$

将 D_1 中的点映射到 D_2 中，因为 $D_1\to S_1$，$D_2\to S_2$ 为双射，故映射 σ 也将 S_1 上的点映射到 S_2 上。如果(19)中函数是连续可微的，则称映射 $\sigma:S_1\to S_2$ 是连续可微的。

[1]此处陈维桓的《微分几何》书中是先证明了给定一个处处线性无关且连续可微的切向量场，在曲面上一点的邻域内存在参数系，使得新参数坐标线的切向量与给定的线性无关的切向量场平行，那么根据该定理，只要能构造一个正交的切向量场，那么就存在新的正交参数系。在证明该定理的时候先得到充分条件，然后构造如下微分式，将定理的证明转化为证明该微分式的存在性，下列形式的微分式一般无法直接想到，那就先假设存在一个容许参数变换，导出该微分式的形式，这时就要用到书中的引理来逆推假设的存在性。

定义 1.2 假定映射 $\sigma：S_1 \to S_2$ 是 3 次以上连续可微的，则映射 σ 在每一点 $p \in S_1$ 诱导出从切空间 T_pS_1 到切空间 $T_{\sigma(p)}S_2$ 的一个线性映射 $\sigma_{*p}：T_pS_1 \to T_{\sigma(p)}S_2$，称此映射为由映射 σ 在点 p 的切空间 T_pS_1 上诱导的切映射。

曲面 S_1 上曲线 C_1:$\mathbf{r}_1(u_1(t), v_1(t))$，$t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ 经 σ 映射到 S_2 上得到一条连续可微曲线 C_2: $\mathbf{r}_2(f(u_1(t), v_1(t)), g(u_1(t), v_1(t)))$，$t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$. C_2 的切向量为

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_2}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{2,u_2} & \mathbf{r}_{2,v_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial u_1} & \frac{\partial f}{\partial v_1} \\ \frac{\partial g}{\partial u_1} & \frac{\partial g}{\partial v_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t} \end{bmatrix}$$

定义一种切映射

$$\sigma_{*p}\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_1}{\mathrm{d}t}|_{t_0}\right) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_2}{\mathrm{d}t}|_{t_0} \tag{20}$$

即

$$\sigma_{*p}\left(\mathbf{r}_{1,u_1}\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} + \mathbf{r}_{1,v_1}\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t}\right) = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{2,u_2} & \mathbf{r}_{2,v_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial u_1} & \frac{\partial f}{\partial v_1} \\ \frac{\partial g}{\partial u_1} & \frac{\partial g}{\partial v_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t} \end{bmatrix} \tag{21}$$

亦可表示为

$$\sigma_{*p}\begin{pmatrix} \mathbf{r}_{1,u_1} \\ \mathbf{r}_{1,v_1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{2,u_2} & \mathbf{r}_{2,v_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial u_1} & \frac{\partial f}{\partial v_1} \\ \frac{\partial g}{\partial u_1} & \frac{\partial g}{\partial v_1} \end{bmatrix} \tag{22}$$

保长对应

保角对应