Classical Mechanics

Kun Wang

2019 年 5 月 16 日

1 牛顿力学

$$F_k = \frac{dp_k}{dt} \tag{1.1}$$

2 Lagrange 力学

2.1 基本概念 [1]

位形空间：位形是质点系各质点或连续体中各小单元的位置或位移的集合。位形坐标系所在空间就是位形空间。

约束：约束分类有理想约束和非理想约束，完整约束/非完整约束，稳定约束/不稳定约束。
理想约束: 在任何虚位移上，约束反力的元功之和为零的约束，反之约束反力元功之和不为零的约束为非理想约束。
稳定约束: 约束方程中不显含时间 t 的约束，反之显含时间 t 的约束为不稳定约束。
完整约束: 约束方程中不含速度或者速度可积分消掉的约束，约束方程中含有不可积分速度的为非完整约束。

虚功原理：

2.2 第一类 Lagrange 方程

Lagrange 乘子法：$3n$ 个自由度系统，s 个约束，选择 Lagrange 乘子，使得 s 个不独立的虚位移前括号中的项为零，剩余的 $3n-s$ 个独立的虚位移前括号中的项也都等于零。

2.3 第二类 Lagrange 方程

$$\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{d}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial q_k}\right) \tag{2.1}$$

2.3.1 Newton 方程推导 Lagrange 方程

2.3.2 d’Alembert 方程推导 Lagrange 方程

2.3.3 Newton 方程和 d’Alembert 方程的区别

Newton 方程中的力是所有作用力，包括主动力和约束力。d’Alembert 方程中只含有主动力。

$$L = T - V \tag{2.2}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_k}=Q_k \tag{2.3}$$

2.4 Lagrange 方程首次积分

2.4.1 广义动量积分

L 与 q_k 无关，则有

$$\frac{\partial L}{\partial q_k}=0 \tag{2.4}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}=0 \tag{2.5}$$

$$p_k=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}=const \tag{2.6}$$

2.4.2 广义能量积分

1) 稳定约束下的 Hamilton 积分
L 与 t 无关，则有

$$\begin{aligned}\frac{dL}{dt}&=\frac{\partial L}{\partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial L}{\partial q_k}\ddot{q}_k=\frac{\partial L}{\partial q_k}\dot{q}_k+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k\right)-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q_k}\dot{q}_k\\&=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k\right)-\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q_k}-\frac{\partial L}{\partial q_k}\right)\dot{q}_k=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k\right)\end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{q}_k\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}-L\right)=0 \tag{2.8}$$

$$H(q-k,\dot{q}_k,t)=\dot{q}_k\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}-L=const \tag{2.9}$$

2.5 变分问题 Euler 方程

2.5.1 Euler-Lagrange 方程

$$J=\int_A^B f(x,y,\dot{y})dx \tag{2.10}$$

求上式的极值。
变分法基本预备定理：如果函数 $f(x)$ 在域 $[x_1,x_2]$ 上连续且对于只满足某些一般条件 1) 一阶或若干阶可微分；2) 在域 $[x_1,x_2]$ 的端点处为 0；3)$\|\delta y(x)\|<\epsilon$ 或 $\|\delta y(x)\|$ 和 $\|\delta y'(x)<\epsilon\|$ 的任意函数 $\delta y(x)$，有

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\delta y(x)dx=0$$

则在域 $[x_1,x_2]$ 上有 $f(x)=0$。
泛函取极值的必要条件是泛函的变分等于 0。
微分变分可对易:$\delta(dx)=d(\delta x)$

$$
\begin{aligned}
\Delta J &= \int_A^B f(x, y+\delta y, (y+\delta y)')dx - \int_A^B f(x, y, \dot{y})dx \\
&= \int_A^B f(x, y+\delta y, \dot{y}+\delta \dot{y})dx - \int_A^B f(x, y, \dot{y})dx
\end{aligned}
$$

将上式按泰勒公式展开有 $\Delta J = \delta J + \delta^2 J + \cdots$
一阶变分 $\delta J = \int_A^B \left(\frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\delta \dot{y}\right)dx$
二阶变分 $\delta^2 J = \int_A^B \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\delta y^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial \dot{y}}\delta y \delta \dot{y} + \frac{\partial^2 f}{\partial \dot{y}^2}\delta \dot{y}^2\right)dx$
使用分部积分法 (integration by parts) 将 $\delta \dot{y}$ 转变为 δy 有

$$
\begin{aligned}
\delta J &= \int_A^B \left(\frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\delta \dot{y}\right)dx \\
&= \int_A^B \frac{\partial f}{\partial y}\delta y dx + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\delta y\Big|_A^B - \int_A^B \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right)\delta y dx
\end{aligned}
$$

由于 δy 在 A, B 处取 0，故有

$$
\begin{aligned}
\delta J &= \int_A^B \frac{\partial f}{\partial y}\delta y dx - \int_A^B \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right)\delta y dx \\
&= \int_A^B \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right)\right)\delta y dx
\end{aligned}
$$

根据泛函取极值得必要条件 $\delta J = 0$ 有

$$
\delta J = \int_A^B \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right)\right)\delta y dx = 0 \tag{2.11}
$$

根据变分法基本预备定理有

$$
\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right) = 0 \tag{2.12}
$$

上式便是变分原理的 Euler-Lagrange 方程。

2.5.2 含多个未知函数泛函的变分

$$
J = \int_A^B f(x, y_1, y_2, \cdots, \dot{y}_1, \dot{y}_2, \cdots)dx \tag{2.13}
$$

$$
\delta J = \int_A^B \left(\frac{\partial f}{\partial y_i}\delta y_i - \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i}\delta \dot{y}_i\right)dx = 0
$$

使用分部积分可得

$$
\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i}\right) = 0 \tag{2.14}
$$

记 $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \cdots, y_n]^T$,$\dot{\mathbf{y}} = [\dot{y}_1, \dot{y}_2, \cdots, \dot{y}_n]^T$。上式写成向量的形式为

$$
\frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{\mathbf{y}}}\right) = \mathbf{0} \tag{2.15}
$$

2.6 Hamilton 原理

Lagrangian $L = T - U = L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$
Hamilton 函数 $H = \int_{t_1}^{t_2} L dt$
Hamilton 原理 (Hamilton principle):$\delta H = 0$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right) = \mathbf{0} \tag{2.16}$$

参考文献

[1] 沈惠川, 李书民. 经典力学[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2006.