# Ordinary Differential Equation

Kun Wang

2019.11.27-2020.10.17

# Chapter 1

# Basic concepts

微分方程
常微分方程
偏微分方程
线性常微分方程
非线性常微分方程

# Chapter 2

# The first order ODE

特定形式的一阶方程已经有解析解。

1. 形如 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = f(x)g(x)$ 的可分离变量的方程。采用分离变量法求解。

2. 形如 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = g(y/x)$ 的齐次方程，使用变换 $y = ux$ 后使用分离变量法求解。

3. 形如 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x + p(x)y = q(x)$ 的一阶线性方程，先求得齐次解，再使用常数变易法，可求得通用解为
$$y = ce^{-\int p(x)\mathrm{d}x} + e^{-\int p(x)\mathrm{d}x} \int q(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x \tag{2.1}$$

4. 形如 $M(x,y)\mathrm{d}x + N(x,y)\mathrm{d}y = 0$ 的全微分方程，如果 $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$，则可找到函数 $u(x, y)$ 的全微分为 $\mathrm{d}u = M(x,y)\mathrm{d}x + N(x,y)\mathrm{d}y$, $u(x, y) = c$ 为方程的解。

5. 可解出 $y = f(x, y')$ 的隐方程，另 $p = y'$ 将方程变化为 $p, x$ 的常微分方程，再进一步求解。

6. 不显含 $x$ 的隐方程，引入参数 $y = \phi(t)$，$y' = \varphi(t)$，变换后求得 $x$ 和 $y$。

一阶微分方程初值问题 (Initial value problem)
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y),\ y(x_0) = y_0 \tag{2.2}$$

Lipschitz 条件：定义在区域 $D$ 上的函数 $f(x, y)$，如果存在常数 $L$，对任意 $(x, y_1), (x, y_2) \in D$ 均满足
$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \tag{2.3}$$
则称 $f(x, y)$ 在 $D$ 上满足 Lipschitz 条件。

解的存在性与唯一性：毕卡存在定理：$f(x, y)$ 在闭矩形区域上连续且关于 $y$ 满足 Lipschitz 条件，则初值问题在区间 $[x_0 - h, x_0 + h]$ 上有且仅有一个解。

上述定理可以推论出如果 $f(x, y)$ 存在连续的偏导数，则初值问题存在唯一解。

皮亚诺定理：如果 $f(x, y)$ 连续，则初值问题存在至少一个解。

解的延拓：$f(x, y)$ 在区域 $G(D \subset G)$ 内连续，则解可以延拓到区域 $D$。解可以延拓到区域边界，但是解函数去间不一定能覆盖到区域边界。

解对初值的连续性：$f(x, y)$ 在区域 $G$ 内连续且满足局部 Lipschitz 条件，则初值问题的解关于 $x$, $x_0$, $y_0$ 在定义区间内连续。

解对初值的可微性：$f(x, y)$ 和 $\partial f/\partial y$ 在区域 $G$ 内均连续，则解对 $x$, $x_0$, $y_0$ 在去间内是连续可微的。

# Chapter 3

# The high order ODE

线性齐次二阶常系数常微分方程如

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{3.1}$$

假定其指数解为 $y = e^{\lambda x}$，带入式 (3.1) 中得

$$(\lambda^2 + a\lambda + b)e^{\lambda x} = 0$$

由于 $e^{\lambda x}$ 不恒等于 0，得如下方程

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \tag{3.2}$$

式 (3.2) 为微分方程 (3.1) 的特征方程。

式 (3.2) 的判别式 $\Delta = a^2 - 4b$,

$\Delta > 0$ 时方程 (3.2) 有两个实根 $\lambda_1$,$\lambda_2$，则 $y = e^{\lambda_1 x}$,$y = e^{\lambda_2 x}$ 均为微分方程的解，且两个解不相关。根据常微分方程解的理论，方程 (3.1) 的通解为

$$y = A_1 e^{\lambda_1 x} + A_2 e^{\lambda_2 x} \tag{3.3}$$

$\Delta = 0$ 时方程 (3.2) 有两个重实根 $\lambda_1 = \lambda_2$，则 $y = e^{\lambda_1 x}$,$y = e^{\lambda_2 x}$ 均为微分方程的解，且两个解相关。设方程另一不相关解为 $y = u(x)e^{\lambda_1 x}$，带入方程 (3.1) 得

$$u'' + (2\lambda_1 + a)u' + (\lambda_1^2 + a\lambda_1 + b)u = 0$$

由于 $\lambda_1$ 为 $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ 的重根，故 $(2\lambda_1 + a) = 0$,$(\lambda_1^2 + a\lambda_1 + b) = 0$, 则 $u'' = 0$, 取特解 $u(x) = x$, 则方程 (3.1) 的通解为

$$y = (A_1 + A_2 x)e^{\lambda_1 x} \tag{3.4}$$

$\Delta < 0$ 时方程 (3.2) 有两个复根 $\lambda_1 = \alpha + \beta i, \lambda_2 = \alpha - \beta i$，则 $y = e^{\lambda_1 x}$,$y = e^{\lambda_2 x}$ 均为微分方程的解，根据欧拉公式，方程 (3.1) 的通解可化为

$$y = e^{\alpha x}(A_1 \cos\beta x + A_2 \sin\beta x) \tag{3.5}$$

# Chapter 4

# ODE group