# Structural Dynamics

Kun Wang

2019.10.05-2019.10.05

## 1 Time-Domain Analysis of Continuous Systems

### 1.1 Basis of partial differential equations

常系数二阶偏微分方程

$$a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \tag{1}$$

若 $b^2 - 4ac > 0$ 则为双曲线型 (hyperbolic) 方程;
若 $b^2 - 4ac = 0$ 则为抛物线型方程;
若 $b^2 - 4ac < 0$ 则为椭圆型方程。

连续体振动问题中的波动方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{2}$$

其中 $c$ 为波在物质中的传播速度。使用分离变量法可求得该微分方程的解。

令 $u(x,t) = X(x)T(t)$, 带入 (2) 得

$$c^2 T(t)\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} - X(x)\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = 0$$

亦可写为

$$\frac{1}{X(x)}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2 T(t)}\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}$$

由于等式两边变量不同，等式要成立，则等式两边必须均等于一常数，设为 $-\lambda$, 则可得

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \lambda X(x) = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + c^2 \lambda T(x) = 0 \tag{4}$$

这是两个常系数二阶常微分方程，根据常微分方程理论，式 ( 3 ) 的通解为

表 1: general solution of 2-order ode

| $\lambda$ | $X(x)$ |
|---|---|
| $\lambda < 0$ | $X(x) = A_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + A_2 e^{\sqrt{\lambda}x}$ |
| $\lambda = 0$ | $X(x) = (A_1 + A_2 x)$ |
| $\lambda > 0$ | $X(x) = A_1 \sin\left(\sqrt{\lambda}x\right) + A_2 \cos\left(\sqrt{\lambda}x\right)$ |

对于弦振动问题有约束条件 $u(0,t) = 0, u(l,t) = 0$。当 $\lambda \leq 0$ 时，方程 (2) 无非平凡解 (不恒等于零的解)。故 $\lambda$ 只能大于 0，不妨设 $\lambda = (\omega/c)^2$。则对于弦振动问题，由方程 (3) 及边界条件得

$$\sin\left(\frac{\omega l}{c}\right) = 0 \tag{5}$$

可得自然频率

$$\omega_n = \frac{n\pi c}{l},\ n = 1, 2, \cdots \tag{6}$$

方程 (3) 的解为

$$X_n(x) = A_n \sin\frac{n\pi x}{l},\ n = 1, 2, \cdots \tag{7}$$

根据式 (4)(6) 可得

$$T_n(t) = B_n \sin\left(\frac{n\pi c}{l}t + \varphi_n\right),\ n = 1, 2, \cdots \tag{8}$$

波动方程的解为

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi x}{l} \sin\left(\frac{n\pi c}{l}t + \varphi_n\right),\ n = 1, 2, \cdots \tag{9}$$

声波由多种单音振动组合而成，连续体的振动也是多种振动的合成，每种振动的波长为 $\frac{2l}{n}$, 振动周期为 $\frac{2l}{nc}$, 则波速即为 $c$。

## 1.2 弦的横向自由振动

假设弦的横向偏转很小，弦上取微元, 则其转角 $\theta$ 可近似为 $\theta = \sin\theta = \tan\theta$, 在横向方向上，根据 d'Alembert 原理可得

$$T\left(\theta + \frac{\partial \theta}{\partial x}\mathrm{d}x\right) - T\theta = \rho \mathrm{d}x \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \tag{10}$$

$\theta = \tan\theta = \frac{\partial v}{\partial x}$, 进一步得

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \tag{11}$$

记 $c = \sqrt{T/\rho}$, 即得式 (2)。

## 1.3 弹性杆的轴向自由振动

取弹性杆内微元，截面处轴向内力为 $P$，其惯性力为 $\rho A \mathrm{d}x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, 根据 d'Alembert 原理可得

$$P + \frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x - P = \rho A \mathrm{d}x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{12}$$

根据应力应变关系 $\sigma_x = E\epsilon_x$，又 $P = \sigma_x A$, 有 $P = EA\epsilon_x = EA\frac{\partial u}{\partial x}$, 上式化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\rho}{E}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{13}$$

则波在弹性杆中传播速度为 $c = \sqrt{E/\rho}$。式 (13) 可用分离变量法求解，但是该方程会有不同的边界条件，对于固定边界有 $u(0,t) = 0$, 自由边界有 $P = 0$, 即 $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$。对于弹性杆可能存在三种边界条件，(1) 两端固定；(2) 一端固定，一端自由；(3) 两端自由三种不同的边界条件得到三种不同的解。

## 1.4 圆柱杆的自由扭转振动

假设圆柱杆截面没有翘曲，弹性杆截面扭矩为

$$T = GI_p \frac{\partial \theta}{\partial x} \tag{14}$$

其中 $G$ 为剪切刚度，$I_p$ 为截面扭转惯量。取微元，有

$$\left(T+\frac{\partial T}{\partial x}\mathrm{d}x\right)-T=\rho I_p\mathrm{d}x\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} \tag{15}$$

将式 (14) 带入式 (15) 中得

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}=\frac{\rho}{G}\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} \tag{16}$$

则波动传播速度为 $c=\sqrt{G/\rho}$。式 (16) 与式 (13) 形式相同，其解也类似。

## 1.5 Euler-Bernoulli 梁的横向自由振动