1. (10 分) 求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x-\int_0^x\sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t)}{x^3} \tag{1}$$

2. (10 分) 设函数 $f:[0,7]\to\mathbb{R}$ 为 $f(x)=x^3-6x^2+9x-1$。区间 $[a,b]$ 是 $f(x)$ 的严格单调区间，指的是 $0\le a<b\le 7$ 并且 f 限制在 $[a,b]$ 上是严格单调的。求出 $f(x)$ 的长度为最大的严格单调区间。

Q1.

等价无穷小转化 $\longrightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x-\int_0^x\sqrt{1+t^2}\,dt)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\int_0^x\sqrt{1+t^2}\,dt}{x^3}$

洛 $\longrightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1+x^2}}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x^2/(1+\sqrt{1+x^2})}{3x^2}=-\dfrac{1}{6}$

Q2.

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)\cdot(x-3)$ 故 $[0,1]$ 单调↑ $[1,3]$ 单调↓

$[3,7]$ 单调增 $\longrightarrow$ 长度最大为 $[3,7]$

3. (10 分) 设欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 中平面 T 的方程是 $2x-y+3z=6$。平面 T 与 x 轴、y 轴、z 轴的交点依次记为 A, B, C。以原点 $(0,0,0)$ 为中心，与平面 T 相切的球面记为 S。

(a) (5 分) 求三角形 $\triangle ABC$ 的面积。

(b) (5 分) 求平面 T 与球面 S 相切点的坐标。

4. (10 分) 设二元函数 $z=z(x,y)$ 是由方程 $F(x,y,z)=z^3+ze^x+y=0$ 所确定的隐函数。求 $z=z(x,y)$ 的函数值在点 $(0,2)$ 处下降最快的方向上的单位向量。

Q3.

(a). A、B、C 三点坐标为 $A(3,0,0)$ $B(0,-6,0)$ $C(0,0,2)$

$\vec{AB}=(-3,-6,0)$ $\vec{AC}=(-3,0,2)$ 于是 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|\vec{AB}\times\vec{AC}|=3\sqrt{14}$

(b). 设切点为 $P(x_0,y_0,z_0)$ 则 $\vec{OP}\parallel\vec{n}$，$\vec{n}$ 为平面 S 的法向量 故 $\vec{n}=(2,-1,3)$

于是设 $x_0=2t$ $y_0=-t$ $z_0=3t$，P 在平面 S 上故 $4t+t+9t=6$

$\therefore t=\frac{3}{7}$ 故切点为 $\left(\frac{6}{7},-\frac{3}{7},\frac{9}{7}\right)$

Q4 ① 下降最快的方向为负梯度方向

② 只需求 $z(x,y)$ 在 $(0,2)$ 处的梯度 → 首先 $z^3(x,y)+z(x,y)\cdot e^x+y=0 \cdots (1)$

上式分别对 x, y 求偏导可得
$$\begin{cases} 3\cdot z^2(x,y)\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\left(z(x,y)+\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cdot e^x=0 \cdots (2) \\ 3\cdot z^2(x,y)\cdot\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot e^x+1=0 \cdots (3) \end{cases}$$

(1) 中代入 $(x,y)=(0,2)$ 可得 $z(0,2)=-1$

(2) 中代入 $(x,y)=(0,2)$ 并结合 $z(0,2)=-1$ → $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x,y)=(0,2)}=\frac{1}{4}$

(3) 中代入 $(x,y)=(0,2)$ 并结合 $z(0,2)=-1$ → $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x,y)=(0,2)}=-\frac{1}{4}$

故所求为负梯度方向单位向量 $v=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

5. (10 分) 求二元函数 $f(x,y)=x^y$ 在点 $(1,1)$ 的二阶泰勒多项式。

6. (10 分) 设 D 是由直线 $x+y=2\pi$、x 轴和 y 轴所围成的有界闭区域。求 D 上的二元函数 $f(x,y)=\sin x+\sin y-\sin(x+y)$ 达到最大值的 D 中所有点。

Q5.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=y\cdot x^{y-1} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=y\cdot(y-1)\cdot x^{y-2} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=x^{y-1}+y\cdot x^{y-1}\cdot \ln x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=x^{y}\cdot \ln x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=x^{y}\cdot(\ln x)^2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=y\cdot x^{y-1}\cdot \ln x+x^{y-1}$$

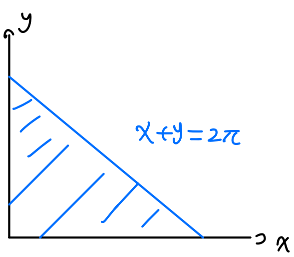
故 $f(x,y)$ 在点 $(1,1)$ 处的梯度向量与海瑟矩阵分别为 $g=(1,0)^t$ $H=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$

故 $f(x,y)=\underline{f(1,1)+(x-1,y-1)\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{2}(x-1,y-1)\cdot\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\cdot(x-1,y-1)}+o(\Delta^2)$

于是二阶泰勒多项式为 $P(x,y)=1+(x-1)+(x-1)\cdot(y-1)=xy-y+1$

Q6.

区域 D 形如



对于 $f(x,y)=\sin x+\sin y-\sin(x+y)$ ←— 和差化积

$$=2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}-\sin(x+y)$$

固定 $x+y$ 则由于 $0\le x+y\le 2\pi \longrightarrow 0\le\frac{x+y}{2}\le\pi$ $\therefore \sin\frac{x+y}{2}\ge 0$ 原式关于 $\cos\frac{x-y}{2}$ ↑

由于定有 $-\pi\le\frac{x-y}{2}\le\pi$ 故当 $x-y=0$ 时 $\cos\frac{x-y}{2}=1$ 原式取最大值

$\therefore f(x,y)$ 在 $x=y$ 时取到最大值 —→ 考虑 $f(t)=2\sin t-\sin 2t \quad (0\le t\le\pi)$

$f'(t)=2\cos t-2\cos 2t=2\cos t-4\cos^2 t+2=2(1+2\cos t)(1-\cos t)$

$\therefore t=\frac{2\pi}{3}$ 时取 max $\longrightarrow$ 当且仅当 $(x,y)=(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3})$ 时 $f(x,y)$ 取最大值

Q7.

7. (10 分)

(a) (2 分) 举例说明：当 z 是 (x, y) 的函数，也是 (t, u) 的函数时，x 恒等于 t 推不出 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 恒等于 $\frac{\partial z}{\partial t}$ 。

(b) (8 分) 给定方程

$$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = z^2, \tag{2}$$

作变量代换

$$x = t, \quad y = \frac{t}{1+tu}, \quad z = \frac{t}{1+tW} \tag{3}$$

证明：

$$\frac{\partial W}{\partial t} = 0 \tag{4}$$

(a) 取 $z(x,y) = x + \frac{x}{y}$ 于是令 $u = \frac{x}{y}$，$t = x$ 则 z 还可表示为 $z(t,u) = t + u$

但在两种表示形式下 $\longrightarrow$ $\frac{\partial z}{\partial x} = 1 + \frac{1}{y}$ $\quad \frac{\partial z}{\partial t} = 1$

(b). $z = \frac{t}{1+tW} \rightarrow W = \frac{t-z}{tz} = \frac{1}{z} - \frac{1}{t}$ 于是 $\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{-\frac{\partial z}{\partial t}}{z^2} + \frac{1}{t^2}$

其中 $\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{(1+tu) - tu}{(1+tu)^2}$

$= \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{1}{(1+tu)^2}$ 由于 $x^2 \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = z^2$

代入 $x = t$ $\quad y = \frac{t}{1+tu}$ 则应有 $z^2 = t^2 \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{t^2}{(1+tu)^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{(x,y) = (t, \frac{t}{1+tu})}$

即 $t^2 \cdot \frac{\partial z}{\partial t} = z^2$ 故 $\frac{\partial W}{\partial t} = 0$

$\square$.

Q8.

8. (15 分)

(a) (3 分) 证明：任取 $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$，有

$$2\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^{2x\sqrt{1-x^2}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} \tag{5}$$

(b) (12 分) 证明：任取 $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt[4]{6}}, \frac{1}{\sqrt[4]{6}}\right)$，有

$$2\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^4}} = \int_0^{\frac{2x\sqrt{1-x^4}}{1+x^4}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^4}} \tag{6}$$

(a). 由对称性 只需证 $x \in [0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ 时结论成立 于是 $x\sqrt{1-x^2}$ 在 $x \in [0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ 上单调递增

故 $$\int_0^{2x\sqrt{1-x^2}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \xrightarrow{\text{换元令 } t = 2u\cdot\sqrt{1-u^2}} \int_0^x \frac{(2-4u^2)/\sqrt{1-u^2}}{\sqrt{1-4u^2+4u^4}}\, du$$

$$= \int_0^x \frac{(2-4u^2)}{1-2u^2} \cdot \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = 2\int_0^x \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \xrightarrow[\text{表示为 } t]{\text{重新把变量}} 2\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

(b). 同理只需对 $x \in [0, \frac{1}{\sqrt[4]{6}})$ 给出证明 设 $f(x) = \frac{x\cdot\sqrt{1-x^4}}{1+x^4}$

于是 $$f'(x) = \frac{x^8-6x^4+1}{(1+x^4)^2\cdot\sqrt{1-x^4}}$$ 故当 $x \in [0, \frac{1}{\sqrt[4]{6}})$ 时 $f(x)$ 单调增

于是 $$\int_0^{\frac{2x\cdot\sqrt{1-x^4}}{1+x^4}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} \xrightarrow{\text{换元令 } t = \frac{2u\cdot\sqrt{1-u^4}}{1+u^4}} \int_0^x \frac{2(u^8-6u^4+1)^2/(1+u^4)^2\cdot\sqrt{1-u^4}}{(u^8-6u^4+1)^2/(1+u^4)^2}\, du$$

$$= 2\int_0^x \frac{du}{\sqrt{1-u^4}} = 2\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$$ □.

Q9.

9. (15 分) 设函数 $P(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，$P(0)=0$，$P(1)=1$，$P(x)$ 在开区间 $(0,1)$ 内可导，并且在每点处导数 $P'(x)$ 都为正数。任意取定正实数 A，正实数 B，正整数 n。

证明：在开区间 $(0,1)$ 内存在严格递增的 $n+1$ 个实数 $\theta_0,\theta_1,\ldots,\theta_n$ 使得

$$(A+B)^n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{P'(\theta_k)}\frac{n!}{k!(n-k)!}A^{n-k}B^k \tag{7}$$

并且

$$0<\theta_0<\theta_1<\cdots<\theta_n<1 \tag{8}$$

① 对原式变形只需证 $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{p'(\theta_k)}\cdot C_n^k\cdot\left(\frac{A}{A+B}\right)^{n-k}\cdot\left(\frac{B}{A+B}\right)^k=1$

记 $w_k=C_n^k\cdot\left(\frac{A}{A+B}\right)^{n-k}\cdot\left(\frac{B}{A+B}\right)^k$ $(k=0,1,\cdots n)$ 则 $\sum_{k=0}^{n}w_k=1$

由介值原理 存在 $0=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n+1}=1$ 使得

$f(x_0)=0$ $\quad f(x_1)=w_0$ $\quad f(x_2)=w_0+w_1$ $\quad f(x_3)=w_0+w_1+w_2$ $\cdots$ $f(x_{n+1})=\sum_{k=0}^{n}w_k=1$

于是 $1=\underline{\frac{x_1-x_0}{f(x_1)-f(x_0)}}\cdot w_0+\underline{\frac{x_2-x_1}{f(x_2)-f(x_1)}}\cdot w_1+\cdots+\underline{\frac{x_{n+1}-x_n}{f(x_{n+1})-f(x_n)}}\cdot w_n$

分别应用拉格朗日即可