北京大学 23/24 学年第 1 学期
高数 B 期末试题

1. (10 分) 求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(x-\int_0^x\sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t\right)}{x^3} \tag{1}$$

2. (10 分) 设函数 $f:[0,7]\to\mathbb{R}$ 为 $f(x)=x^3-6x^2+9x-1$。区间 $[a,b]$ 是 $f(x)$ 的严格单调区间，指的是 $0\leq a<b\leq 7$ 并且 f 限制在 $[a,b]$ 上是严格单调的。求出 $f(x)$ 的长度为最大的严格单调区间。

3. (10 分) 设欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 中平面 T 的方程是 $2x-y+3z=6$。平面 T 与 x 轴、y 轴、z 轴的交点依次记为 A, B, C。以原点 $(0,0,0)$ 为中心，与平面 T 相切的球面记为 S。

   (a) (5 分) 求三角形 $\triangle ABC$ 的面积。

   (b) (5 分) 求平面 T 与球面 S 相切点的坐标。

4. (10 分) 设二元函数 $z=z(x,y)$ 是由方程 $F(x,y,z)=z^3+ze^x+y=0$ 所确定的隐函数。求 $z=z(x,y)$ 的函数值在点 $(0,2)$ 处下降最快的方向上的单位向量。

5. (10 分) 求二元函数 $f(x,y)=x^y$ 在点 $(1,1)$ 的二阶泰勒多项式。

6. (10 分) 设 D 是由直线 $x+y=2\pi$、x 轴和 y 轴所围成的有界闭区域。求 D 上的二元函数 $f(x,y)=\sin x+\sin y-\sin(x+y)$ 达到最大值的 D 中所有点。

7. (10 分)

   (a) (2 分) 举例说明：当 z 是 (x,y) 的函数，也是 (t,u) 的函数时，x 恒等于 t 推不出 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 恒等于 $\frac{\partial z}{\partial t}$。

   (b) (8 分) 给定方程

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=z^2, \tag{2}$$

   作变量代换

$$x=t,\quad y=\frac{t}{\sqrt{1+tu}},\quad z=\frac{t}{1+tW} \tag{3}$$

   证明：

$$\frac{\partial W}{\partial t}=0 \tag{4}$$

8. (15 分)

   (a) (3 分) 证明：任取 $x\in\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$，有

$$2\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}=\int_0^{2x\sqrt{1-x^2}}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} \tag{5}$$

   (b) (12 分) 证明：任取 $x\in\left(-\frac{1}{\sqrt[4]{6}},\frac{1}{\sqrt[4]{6}}\right)$，有

$$2\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^4}} = \int_0^{\frac{2x\sqrt{1-x^4}}{1+x^4}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^4}} \tag{6}$$

9. (15 分) 设函数 $P(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，$P(0)=0$，$P(1)=1$，$P(x)$ 在开区间 $(0,1)$ 内可导，并且在每点处导数 $P'(x)$ 都为正数。任意取定正实数 A，正实数 B，正整数 n。

   证明：在开区间 $(0,1)$ 内存在严格递增的 $n+1$ 个实数 $\theta_0,\theta_1,\ldots,\theta_n$ 使得

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{P'(\theta_k)} \frac{n!}{k!(n-k)!} A^{n-k} B^k \tag{7}$$

   并且

$$0 < \theta_0 < \theta_1 < \cdots < \theta_n < 1 \tag{8}$$