2016-2017 学年第二学期几何与多元微积分(B 上)A 卷答案

一、填空题（每题 4 分，共 24 分）

1. 当 $x<-\frac{1}{2}$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{2x}$ 收敛.

2. 已知 $\mathbf{r}(t)=\cos(2t)\mathbf{i}-2t^2\mathbf{j}+\frac{3}{1+t^2}\mathbf{k}$,，则 $\int_0^1 \mathbf{r}(t)\mathrm{d}t=(\frac{1}{2}\sin 2)\mathbf{i}-\frac{2}{3}\mathbf{j}+\frac{3\pi}{4}\mathbf{k}$.

3. 点 $P(1,2,3)$ 到平面 $x-3y+z-1=0$ 的距离为 $\frac{3}{\sqrt{11}}$.

4. 球面 $x^2+y^2+z^2-2x+4y-5z=0$ 的球心为 $(1,-2,\frac{5}{2})$，半径为 $\frac{3\sqrt{5}}{2}$.

5. 函数 $f(x,y)=\frac{\ln(2-x^2-y^2)}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$ 的收敛域为 $\left\{(x,y)\middle|1<x^2+y^2<2\right\}$.

6. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}=\frac{1}{2}$.

二、选择题（每题 4 分，共 24 分）

1. 下列级数收敛的是（ C ）.

（A）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}$　（B）$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$　（C）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$　（D）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3-2^n}{1+2^n}$.

2. 下列说法<u>错误</u>的是（ B ）.

（A）$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)$ 发散.

（B）若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

（C）级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 必收敛.

（D）若 $a_n>0$，且 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)^{a_n}$ 发散.

3. 下列函数在点$(0,0)$处是连续的为（ A ）.

（A） $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$

（B） $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$

（C） $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4-y^2}{x^4+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$

（D） $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{|xy|} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$.

4. 幂级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(x-1)^n}{\ln n}$的收敛半径为（ A ）.

（A） 1 （B） 2 （C） $\dfrac{1}{2}$ （D） 4.

5. 方程$2x^2+2y^2=z^2$表示的是（ D ）.

（A）单叶双曲面 （B）双叶双曲面 （C）椭球面 （D）圆锥面.

6. 常力$\mathbf{F}=3\mathbf{i}+3\mathbf{j}+2\mathbf{k}$，从点$P(1,1,0)$到点$Q(6,6,0)$运动所作的功为（ B ）.

（A） 15 （B） 30 （C） 24 （D） 25 .

三、 计算下列各题（每题 6 分，共 24 分）

1、判断级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}+\dfrac{n}{2^n}\right)$的敛散性. 若收敛，是条件收敛还是绝对收敛.

解： $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$是条件收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n}$绝对收敛（根植或比值判别法）

所判断的级数为条件收敛.

2、设$\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$为单位向量，且满足$\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=\mathbf{0}$, 求$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}$.

解： $(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})\cdot\mathbf{a}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}=\mathbf{0}$, 同理可得$(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})\cdot\mathbf{b}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{c}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{0}$,

$(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})\cdot\mathbf{c}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{c}\cdot\mathbf{c}=\mathbf{0}$, 三式相加可得 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}=-\dfrac{3}{2}$.

3、求函数 $z=xy+x^y$ 在点 $(1,1)$ 的所有二阶导数.

解： $z_x=y+yx^{y-1}$， $z_y=x+x^y\ln x$， $z_{xx}=y(y-1)x^{y-2}\big|_{x=1,y=1}=0$

$z_{xy}=1+x^{y-1}+yx^{y-1}\ln x\big|_{x=1,y=1}=2$， $z_{yy}=x^y\ln^2 x\big|_{x=1,y=1}=0$.

4、求曲线 $\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2+1} \\ x=1 \end{cases}$ 在点 $(1,1,\sqrt{3})$ 处的切线与 y 轴的正向的夹角.

解： $z_y=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+1}}\Big|_{x=1,y=1,z=\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\tan\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$， 夹角为 $\dfrac{\pi}{6}$.

四、(8 分) 将曲线方程 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ y=x \end{cases}$ 转化为参数方程，并计算其弧长.

解： 将 $y=x$ 代入 $x^2+y^2+z^2=a^2$， 得 $2x^2+z^2=a^2\Rightarrow\dfrac{x^2}{(\frac{a}{\sqrt{2}})^2}+\dfrac{z^2}{a^2}=1$

参数方程为 $\begin{cases} x=\dfrac{a}{\sqrt{2}}\cos t \\ y=\dfrac{a}{\sqrt{2}}\cos t \quad (0\le t\le 2\pi) \\ z=a\sin t \end{cases}$ ，

$x'(t)=-\dfrac{a}{\sqrt{2}}\sin t, y'(t)=-\dfrac{a}{\sqrt{2}}\sin t, z'(t)=a\cos t$

$\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}=\sqrt{a^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t}=a$

弧长为 $\int_0^{2\pi} a\mathrm{d}t=2\pi a$.

五、(8 分) 求过点 $(1,2,1)$， 且与直线 $\begin{cases} x+2y-z+1=0 \\ x-y+z-1=0 \end{cases}$ 及直线 $\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y+2}{-1}=-z$ 都平行的平面方程.

解：直线$\begin{cases} x+2y-z+1=0 \\ x-y+z-1=0 \end{cases}$的方向向量为$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i}-2\mathbf{j}-3\mathbf{k}$

所求平面的法平面为$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$，所以所求平面方程为

$(x-1)-(y-2)+(z-1)=0$ ，

即 $x-y+z=0$

六、（8 分）小王沿着盘山公路开车行进，已知汽车的运动轨迹位置为 $\mathbf{r}(t)=26\cos t\,\mathbf{i}+26\sin t\,\mathbf{j}+3t\,\mathbf{k}$, 求（1）汽车的速度和加速度向量（2）汽车在任何时刻的速率（3）求此运动轨迹投影到 xoy 平面的投影曲线方程.

解：（1） $\mathbf{r}'(t)=-26\sin t\,\mathbf{i}+26\cos t\,\mathbf{j}+3\mathbf{k}$, $\mathbf{r}''(t)=-26\cos t\,\mathbf{i}-26\sin t\,\mathbf{j}+0\mathbf{k}$,

（2） $|\mathbf{r}'(t)|=\sqrt{(26)^2+9}=\sqrt{685}$.

（3）投影曲线$\begin{cases} x^2+y^2=26^2 \\ z=0 \end{cases}$.

七、（4 分）设 $f(x,y)=\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^6}}$，求 $f'_x(0,0), f'_y(0,0)$.

解： $f'_{+x}(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{(\Delta x)^2}}-1}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\mathrm{e}^{|\Delta x|}-1}{\Delta x}=1$

$f'_{-x}(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{(\Delta x)^2}}-1}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\mathrm{e}^{-\Delta x}-1}{\Delta x}=-1$.

所以在（0，0）点关于 x 的偏导不存在.

$f'_y(0,0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{(\Delta y)^6}}-1}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\mathrm{e}^{(\Delta y)^3}-1}{\Delta y}=0$.

所以在（0，0）点关于 y 的偏导存在为 0.