2018-2019 学年第一学期一元微积分(B 上)月考试卷答案

踏实学习，弘扬正气；诚信做人，诚实考试；作弊可耻，后果自负

教师______班号______专业______班级______学号________姓名________

一、　填空题（每题 5 分，共 30 分）

1. 设函数 $f(x+\frac{1}{x})=\frac{x^2}{x^4+1}$，则 $f(x)=$ $\underline{\frac{1}{x^2-2}}$.

2. 函数 $y=\arcsin x$ 的值域为 $\underline{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n-1}{3^n-1}=\underline{0}$.

4. $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x-a}}=0.(a>0)$

5. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{\tan(3x+x^2)}=\frac{5}{3}$.

二、选择题（每题 5 分，共 40 分）

1. 函数 $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ 是（ A ）.

（A）奇函数　（B）偶函数　（C）非奇非偶函数　（D）周期函数.

2. 下列结论<u>正确</u>的是（ A ）.

(A) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\mathrm{e}^x}{x}=-1$.　　(B) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=1$.

(C) $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+\frac{1}{x})^x=\mathrm{e}$.　　(D) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+n)^{\frac{1}{n}}=\mathrm{e}$.

3. 以下说法中<u>正确</u>的有(C)个.

（I）奇函数 $f(x)$ 的图形关于原点对称.

（II）函数 $f(x)$ 为奇函数，则 $f(0)=0$.

（III）奇函数 $f(x)$ 存在反函数 $f^{-1}(x)$，则 $f^{-1}(x)$ 也是奇函数.

(IV) $f(x)=\arctan x$ 是奇函数.

（A）1.　　　　（B）2.　　　　（C）3.　　　　（D）4.

4. 以下说法中**错误**的是(C).

（A）数列$\{a_n\}$，则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$.

（B）数列$\{a_n\}$，若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 则$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$.

（C）数列$\{a_n\}$，若$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$, 则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.

（D）数列$\{a_n\}$收敛于a，则数列$\{a_n\}$必有界.

5. $x=1$是$f(x)=\dfrac{e^x-e}{x(x-1)}$的（ A ）间断点.

（A）可去间断点.　　　　（B）无穷间断点.
（C）跳跃间断点.　　　　（D）振荡间断点.

6. $x\to 0$时，$\sqrt[3]{x^2+\sqrt{x}}$与（ B ）是同阶无穷小.

（A）$x^{\frac{1}{2}}$　　　　（B）$x^{\frac{1}{6}}$　　　　（C）$x^{\frac{1}{3}}$　　　　（D）x

7. 直角坐标系下方程$x^2+(y-3)^2=9$转化为极坐标方程为（ C ）.

（A）$r=3\sin\theta$.　　　　（B）$r=6\cos(2\theta)$.

（C）$r=6\sin\theta$.　　　　（D）$r=6\cos\theta$..

8. 曲线$y=e^{\frac{1}{x^2}}\arctan\dfrac{x^2-x-2}{(x-1)(x+2)}$有（ C ）渐近线

（A）0.　　　　（B）1.　　　　（C）2.　　　　（D）3.

三、解下列各题（每题 8 分，共 24 分）

1. 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{2}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}\right)$.

解：$\dfrac{1}{n^2+n}+\dfrac{2}{n^2+n}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}\le\dfrac{1}{n^2+1}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}\le\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{2}{n^2+1}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+1}$ 3 分

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+1}+\cdots+\frac{n}{n^2+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+1}=\frac{1}{2}$$ 2 分

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n}+\frac{2}{n^2+n}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n}=\frac{1}{2}$$ 2 分

由两边夹法则，所求极限为$\frac{1}{2}$. 1 分

2. 讨论极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x}}+2}{2e^{\frac{1}{x}}+1}$是否存在.

解：$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}+2}{2e^{\frac{1}{x}}+1}=\frac{1}{2}$. 3 分

$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{e^{\frac{1}{x}}+2}{2e^{\frac{1}{x}}+1}=\frac{2}{1}=2$ 3 分，

在 0 点左右极限不同，所求极限不存在。 2 分

3.求参数a,b,c使得函数$f(x)=\begin{cases} a+x^2 & x<0 \\ b & x=0 \\ \frac{\ln(c+x)}{x} & x>0 \end{cases}$在$x=0$处连续.

解：$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(c+x)}{x}$ 存在，$\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(c+x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\frac{\ln(c+x)}{x}\cdot x\right]=0$

而$\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(c+x)=\ln c\Rightarrow \ln c=0\Rightarrow c=1$ 3 分

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(x^2+a\right)=a$ 1 分

由已知，$f(x)$在$x=0$处连续$\Rightarrow a=b$ 1 分

$b=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$ 2 分

所以$a=1$. 1 分

四、(6 分) 连续函数$f(x)$在$[a,b]$上恒不为零，则$f(x)$在$[a,b]$区间上不变号.这个结论正确吗？对你的回答给出理由.

答：结论正确. 2 分

反证法，假设$f(x)$在$[a,b]$区间上变号，不妨设$\exists\xi_1,\xi_2\in[a,b]$，使得

$f(\xi_1)\cdot f(\xi_2)<0$. 则由零点定理，连续函数 $f(x)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上，存在点 $\xi\in[a,b]$, 有 $f(\xi)=0$. 2 分 与已知条件矛盾，所以连续函数 $f(x)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上恒不为零，则 $f(x)$ 在 $\left[a,b\right]$ 区间上不变号. 2 分