2018-2019 学年第一学期一元微积分 B 下月考试卷答案

踏实学习，弘扬正气；诚信做人，诚实考试；作弊可耻，后果自负

教师_____班号_____专业_____班级_____学号_______ 姓名________

一、填空题（每题 6 分，共 24 分）

1. $\int \frac{\mathrm{d}x}{4+x^2}=$___ $\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}+C$ ______.

2. $\int_{-1}^{1}\frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x=$ ____0________.

3. $\lim\limits_{x\to a}\frac{x}{x-a}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=$____ $af(a)$ ________.（其中 $f(x)$ 连续）

4. 当 $p>1$时，反常积分$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$ ____收敛________（填“收敛”或“发散”）.

二、选择题（每题 5 分，共 40 分）

1. $\int f(x)\,\mathrm{d}x=3\mathrm{e}^{\frac{x}{3}}+C$，则 $f(x)=$（ D ）.

（A）$3\mathrm{e}^{\frac{x}{3}}$ （B）$9\mathrm{e}^{\frac{x}{3}}$ （C）$\mathrm{e}^{\frac{x}{3}}+C$ （D）$\mathrm{e}^{\frac{x}{3}}$.

2. 若函数 $f(x)$ 存在原函数，下列等式**错误**的是____B_______

（A）$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\,\mathrm{d}x=f(x)$ （B）$\int f'(x)\,\mathrm{d}x=f(x)$

（C）$\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x=f(x)\mathrm{d}x$ （D）$\int \mathrm{d}\,f(x)=f(x)+C$

3. $\int xf''(x)\mathrm{d}x=($ C $)$.

（A）$xf'(x)-\int f(x)\mathrm{d}x$ （B）$xf'(x)-f'(x)+C$

（C）$xf'(x)-f(x)+C$ （D）$f(x)-xf'(x)+C$

4. 设$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x, I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\sin x}\mathrm{d}x$，则（ B ）

（A）$I_2>1>I_1$ （B）$I_2>I_1>1$ （C）$1>I_2>I_1$ （D）$1>I_1>I_2$.

5. 设k为正整数，$F(x)=\int_0^x \mathrm{e}^{-t^4}\mathrm{d}t+\int_2^{\mathrm{e}^{kx}}\sqrt{t^4+1}\,\mathrm{d}t$ 的零点个数为(B).

（A）0 （B）1 （C）2 （D）无穷多.

6. 下列反常积分**发散**的是（　A　）.

（A）$\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x$　　（B）$\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$　　（C）$\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$　　（D）$\displaystyle\int_{2}^{+\infty}\frac{1}{x\ln^2 x}\mathrm{d}x$.

7. $\int_0^3 x^4\cdot\sqrt{9-x^2}\mathrm{d}x=$（　**B**　）

（A）$\dfrac{81}{32}\pi$　　（B）$\dfrac{729}{32}\pi$　　（C）$\dfrac{729}{62}\pi$　　（D）$\dfrac{256\pi}{15}$.

8. $\lim\limits_{x\to0^+}(\cos 2x)^{\cot x}=$（　A　）.

（A）1　　（B）0　　（C）e　　（D）$\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

三、解下列各题（每题 8 分，共 16 分）

1. 设 $F(x)$ 为的 $f(x)$ 一个原函数，且 $f(x)F(x)=\dfrac{1}{2}x\mathrm{e}^x$，已知 $F(0)=1$，$F(x)>0$，求 $f(x)$.

解：由题意，得 $F'(x)F(x)=\dfrac{1}{2}xe^x$，

即 $\left(\dfrac{1}{2}F^2(x)\right)'=\dfrac{1}{2}xe^x$　　②

从而　$F^2(x)=\int xe^x dx$，

即 $F^2(x)=\int xd(e^x)=(x-1)e^x+C$　　②【分部积分】

又　$F(0)=1$，得 $C=2$，且　$F(x)>0$，得 $F(x)=\sqrt{(x-1)e^x+2}$，　②

从而　$f(x)=F'(x)=\dfrac{xe^x}{2\sqrt{(x-1)e^x+2}}$。　②

2.计算 $\displaystyle\int_3^4\frac{3x+1}{x^2+3x-10}\mathrm{d}x$.

解：$\dfrac{3x+1}{x^2+3x-10}=\dfrac{2}{x+5}+\dfrac{1}{x-2}$　　②

原式=$\displaystyle\int_3^4\left(\frac{2}{x+5}+\frac{1}{x-2}\right)\mathrm{d}x=2\ln|x+5|\Big|_3^4+\ln|x-2|\Big|_3^4$ ④

$=2\ln 9\quad 5\,\mathrm{l}$ı　　②

四、（12 分）若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，①证明：$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)\mathrm{d}x$，

②计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^\alpha x}{\sin^\alpha x+\cos^\alpha x}\mathrm{d}x \quad (\alpha>0)$.

解：（1）设 $x=\frac{\pi}{2}-t \Rightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$ ②

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right)\mathrm{d}t \quad ②$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x \quad ②$$

（2）
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^\alpha x}{\sin^\alpha x+\cos^\alpha x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^\alpha x}{\sin^\alpha x+\cos^\alpha x}\mathrm{d}x \quad ②$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^\alpha x}{\sin^\alpha x+\cos^\alpha x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^\alpha x+\cos^\alpha x}{\sin^\alpha x+\cos^\alpha x}\mathrm{d}x \quad ②$$

$$=\frac{\pi}{4} \quad ②$$

五、（8 分）一个倒立的圆锥形水罐，底面半径为 2m，高度为 4m.假若用水泵以 2m^3/分的速率向水罐内抽水，试问当水深为 3m 时，水面上升的速度是多少？

解：V 表示 t 时刻水的体积；r 表示 t 时刻水的表面半径；h 表示 t 时刻水的深度。

$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h \quad (*)$ ②　　由相似三角形可推得 $\frac{r}{h}=\frac{2}{4}\Rightarrow r=\frac{h}{2}$ ② 带入*式

$V=\frac{1}{12}h^3$　　等式两边同时对 t 求导

$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\frac{\pi}{4}h^2\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\Rightarrow\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=\frac{4}{\pi h^2}.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ ②

代入 $h=3,\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=2$ 得到 $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=\frac{8}{9\pi}m/$分钟 ②