一元微积分 B 下复习题（一）

第四章答案

1、函数 $f(x)$ 具有三阶连续导数，如果 $f''(x)>0, x\in[a,b]$，则下列四项积分中，积分值确定为正数的积分为（ A ）.

（A）$I=\int_a^b[f'(b)-f'(x)]\mathrm{d}x$　　（B）$I=\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x$

（C）$I=\int_a^b[f(x)-f(a)]\mathrm{d}x$　　（D）$I=\int_a^b f'''(x)\mathrm{d}x$

2、极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})^2(1+\frac{2}{n})^2\cdots(1+\frac{n}{n})^2}=$（ B ）.

（A）$\int_0^1\ln^2 x\mathrm{d}x$　（B）$2\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}x$　（C）$\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}x$　（D）$\int_0^1\ln^2(1+x)\mathrm{d}x$

3、设 $f(x)=\int_0^{x^2}(2-u)\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u$，求 $\mathrm{d}(f(x))$.

解：$\mathrm{d}(f(x))=2(2-x^2)\mathrm{e}^{-x^2}x\mathrm{d}x$

4、已知 e^{-x} 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int\frac{f(\ln x)}{x}\mathrm{d}x=\underline{\frac{1}{x}+C}.$

5、设 $\int f(x)\mathrm{d}x=x^2+C$，则 $\int xf(1-x^2)\mathrm{d}x=\underline{-\frac{1}{2}(1-x^2)^2+C}$.

6、$\int_{-\pi}^{\pi}x^4\sin x\,\mathrm{d}x=\underline{0}$.

7、$\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_{\cos x}^{1}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t}{x^2}=\underline{\frac{1}{2\mathrm{e}}}$.

8、当 $x>0$ 时 $f(x)$ 连续，且 $\int_1^{x^2}f(t)\mathrm{d}t=x^2(1+x)$，则 $f(2)=\underline{1+\frac{3\sqrt{2}}{2}}$.

9、$\int\frac{\mathrm{d}x}{x(x^2+1)}=\underline{\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|1+x^2|+C}$.

10、反常积分 $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^q}$，当 $q\ \underline{\geq 1}$ 时，此积分发散.

11、$\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ __发散__________填（“收敛”或“发散”）.

12、函数 $y=\sqrt{a^2-x^2}$ 在区间 $[-a,a]$ 上的平均值为 $\underline{\frac{\pi}{4}a}$.

13、若 $f(x)=\mathrm{e}^{-x}$，则 $\int\frac{f'(\ln x)}{x}\mathrm{d}x=\underline{\frac{1}{x}+C}$.

14、极限 $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n})=\underline{\ln 2}$.

15、设 $\int_0^{x^2}xf(t)\mathrm{d}t$, 其中 $f(t)$ 是连续函数，则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\underline{\int_0^{x^2}f(t)\mathrm{d}t+2x^2f(x^2)}$.

16、$\int_{-2}^{2}(\sqrt{4-x^2}+\arctan x)\mathrm{d}x=\underline{2\pi}$.

17、广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}$ <u>发散</u>填（“收敛”或“发散”)

18、$\lim_{x\to1}\frac{\int_1^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}{\ln x}=\underline{\mathrm{e}}$.

19、$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}6\cos^4\theta\,\mathrm{d}\theta=\underline{\frac{9\pi}{4}}$.

20、　设函数 $f(x)$ 连续可导，则 $\int f'(ax+b)\mathrm{d}x=\underline{\frac{1}{a}f(ax+b)+C}$.

21、　设 $f(x)=x^2+x\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，则 $f(x)=\underline{x^2+\frac{2}{3}x.}$.

22、　$\int_{-1}^{1}[\ln(x^2+1)\sin x+x^2]\mathrm{d}x=\underline{2/3}$.

23、　$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)=\underline{\pi/4}$.

24、　$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)\mathrm{d}t]\mathrm{d}u}{x\sin^2 x}=\underline{\pi/12}$.

25、　讨论反常积分 $\int_0^1\frac{1}{x^3}\mathrm{d}x$ 的收敛性 <u>发散</u>.

26、若 $f(x)$ 的导函数是 $\sin x$，则 $f(x)$ 有一个原函数为 $\underline{-\sin x}$.

27、下列结论错误的是（　B　　）

（A）$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\mathrm{d}x=f(x)$　　　（B）$\int f'(x)\mathrm{d}x=f(x)$

（C）$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_1^x f(x)\mathrm{d}x=f(x)$　　　（D）$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=0$

28、 在下列等式中,正确的结果是(C).

（A） $\int f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)$ （B） $\int \mathrm{d}\,f(x) = f(x)$

（C） $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\,\mathrm{d}x = f(x)$ （D） $\mathrm{d}\int f(x) = f(x)$

29、由定积分的定义 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\dfrac{n}{n}}\right)$ 可表示为(B).

（A） $\int_0^1 (1+x)\,\mathrm{d}x$ （B） $\int_0^1 \sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x$ （C） $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ （D） $\int_1^2 \sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x$

30、下列选项中正确的是(D)

(A) $\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x < \int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$ (B) $\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x < \int_1^2 \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$

(C) $\int_1^{\mathrm{e}} \ln x\,\mathrm{d}x < \int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^2\mathrm{d}x$ (D) $\int_{\mathrm{e}}^{2\mathrm{e}} \ln x\,\mathrm{d}x < \int_{\mathrm{e}}^{2\mathrm{e}} (\ln x)^2\mathrm{d}x$

31、若 $\dfrac{\ln x}{x}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int xf'(x)\mathrm{d}x =$（ B ）

（A） $\dfrac{\ln x}{x}+C$ （B） $\dfrac{1-2\ln x}{x}+C$ （C） $\dfrac{1}{x}+C$ （D） $-\dfrac{1}{x}+C$

32、曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 与其过原点的切线及 y 轴所围成的图形面积为(C)

(A) $\int_1^{\mathrm{e}} (\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x$ (B) $\int_1^{\mathrm{e}} (\ln y - y\ln y)\mathrm{d}y$;

(C) $\int_0^1 (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}x)\,\mathrm{d}x$ (D) $\int_0^1 (\ln y - y\ln y)\mathrm{d}y$

33、下列广义积分收敛的是（ D ）.

（A）$\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \dfrac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$ （B） $\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \dfrac{1}{x\sqrt{\ln x}}\mathrm{d}x$ （C） $\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \dfrac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x$ （D） $\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \dfrac{1}{x\ln^2 x}\mathrm{d}x$

34、设 $F(x)$ 和 $G(x)$ 都是 $f(x)$ 的原函数,则（ B ）.

（A） $F(x)-G(x)=0$ （B） $F(x)-G(x)=C$ (C 为任意常数)

（C） $F(x)+G(x)=0$ （D） $F(x)+G(x)=C$ (C 为任意常数)

35、设 $f(x)$ 满足 $\int_0^1 f(tx)\,\mathrm{d}t = f(x)+x\sin x,\ f(0)=0$ 且有一阶导数，当 $x\neq 0$ 时，求 $f'(x)$.

解: 对积分 $\int_0^1 f(tx)\,\mathrm{d}t$ 作变换 $tx=u$,则 $\mathrm{d}t=\dfrac{\mathrm{d}u}{x}$ 原式可化为

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u = f(x)+x\sin x,$$

即 $\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u = x f(x) + x^2\sin x$,上式对 x 求导.

可得 $f'(x) = -x\cos x - 2\sin x, (x \neq 0)$。

36、计算 $I = \int_0^{2013\pi} x|\sin x|\,\mathrm{d}x$.

解：设 $x = 2013\pi - t$, 则 $I = \int_{2013\pi}^{0}(2013\pi - t)|\sin t|\,\mathrm{d}(2013\pi - t)$

$$= -\int_0^{2013\pi} t|\sin t|\,\mathrm{d}t + 2013\pi\int_0^{2013\pi}|\sin t|\,\mathrm{d}t$$

$$= -I + 2\times(2013)^2\pi$$

$\therefore I = (2013)^2\pi$.

37、$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{1+\sin x+\cos x}$.

解:原式= $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+2\cos^2\frac{x}{2}} = \dfrac{1}{2}\int\dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2\frac{x}{2}(1+\tan\frac{x}{2})}$

$$= \int\frac{\mathrm{d}(\tan\frac{x}{2})}{1+\tan\frac{x}{2}} = \ln\left|1+\tan\frac{x}{2}\right| + C$$

38、已知函数 $f(x) = 3x - \sqrt{1-x^2}\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x$, 求 $f(x)$.

解: 两边同时平方 $f^2(x) = (3x - \sqrt{1-x^2}\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x)^2$

两边同时求定积分

$$a = \int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 9x^2\,\mathrm{d}x - a\int_0^1 6x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x + a^2\int_0^1(1-x^2)\,\mathrm{d}x$$

$a = 3, 3/2$ $\qquad f(x) = 3x - 3\sqrt{1-x^2}$ $\qquad f(x) = 3x - \dfrac{3\sqrt{1-x^2}}{2}$

39、试求 $y'' = x$ 的经过点 $(0,1)$ 且在此点与直线 $y = \dfrac{x}{2}+1$ 相切的积分曲线.

解:由已知 $\begin{cases} y'' = x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ $\qquad y' = \dfrac{1}{2}x^2 + C_1$ $\qquad C_1 = \dfrac{1}{2}$

$$y=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x+C_2 \qquad C_2=1 \quad y=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x+1$$

40、计算 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

解：令 $x=t^6 \Rightarrow \mathrm{d}x=6t^5\mathrm{d}t$

$$原式=\int\frac{6t^5}{t^3+t^2}\mathrm{d}t=6\int\frac{(t^3+1)-1}{1+t}\mathrm{d}t=6\int(t^2-t+1-\frac{1}{1+t})\mathrm{d}t$$

$$=6(\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2+t-\ln|1+t|)+c=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln\left|1+\sqrt[6]{x}\right|+C$$

41、计算. $\int_0^{\pi}\sqrt{\sin x-\sin^3 x}\mathrm{d}x$

$$=\int_0^{\pi}\sqrt{\sin x\cdot\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\sqrt{\sin x}\,|\cos x|\,\mathrm{d}x$$

解：原式 $=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin x}\cos x\mathrm{d}x-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sqrt{\sin x}\cos x\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\sin^{\frac{3}{2}}x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{2}{3}\sin^{\frac{3}{2}}x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{4}{3}$

42、用递推式计算 $I_n=\int_0^{+\infty}x^n\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}x\ (n\in N,a>0)$.

解：设 $I_n=\int_0^{+\infty}-\frac{1}{a}x^n\mathrm{d}e^{-ax}=-\frac{1}{a}x^n\mathrm{e}^{-ax}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}\frac{1}{a}\mathrm{e}^{-ax}nx^{n-1}\mathrm{d}x$

$$=\frac{n}{a}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}x^{n-1}\mathrm{d}x=\frac{n}{a}I_{n-1}$$

$$I_n=\frac{n}{a}I_{n-1}=\frac{n}{a}\cdot\frac{n-1}{a}\cdot I_{n-2}=\frac{n}{a}\cdot\frac{n-1}{a}\cdots\frac{2}{a}I_1$$

$$I_1=\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}x=\frac{1}{a^2}$$

$$I_n=\frac{n!}{a^{n+1}}.$$

43、设 $f(x)$ 是 e^{2x} 的一个原函数，且 $f(0)=1$。$F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，$F(0)=1$，求 $F(x)$.

解：$f(x)=\int\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+C_1, f(0)=1\Rightarrow C_1=\frac{1}{2}, f(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+\frac{1}{2}$

$$F(x)=\int(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+\frac{1}{2})\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x}+\frac{1}{2}x+C_2, F(0)=1\Rightarrow C_2=\frac{3}{4}\ F(x)=\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x}+\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}$$

44、利用定积分的定义计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}+\frac{2}{n}\sin\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n}{n}\sin\frac{n}{n}\right)\frac{1}{n}$.

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}+\frac{2}{n}\sin\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n}{n}\sin\frac{n}{n}\right)\frac{1}{n}=\int_0^1 x\sin x\mathrm{d}x$

$=(-x\cos x+\sin x)\mid_0^1=-\cos 1+\sin 1$

45、求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{\sin x}\ln(1+t)\mathrm{d}t}{\int_{\cos x}^1(1-\mathrm{e}^{-t})\mathrm{d}t}$.

解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{\sin x}\ln(1+t)\mathrm{d}t}{\int_{\cos x}^1(1-\mathrm{e}^{-t})\mathrm{d}t}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)\cos x}{(1-\mathrm{e}^{-\cos x})\sin x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{(1-\mathrm{e}^{-\cos x})}=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-1}}$

46、判断无穷限积分 $\int_0^{+\infty}x^2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ 是否收敛，若收敛，求其值.

解：$\int_0^{+\infty}x^2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-\int_0^{+\infty}x^2 de^{-x}=-x^2\mathrm{e}^{-x}\mid_0^{+\infty}+2\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$

$=-\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\mathrm{e}^{-x}-2x\mathrm{e}^{-x}\mid_0^{+\infty}+2\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$

$=-2\mathrm{e}^{-x}\mid_0^{+\infty}=2$

47、计算 $\int\frac{x+5}{x^2-6x+13}\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^2-6x+13)}{x^2-6x+13}+8\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-6x+13}=\frac{1}{2}\ln\left|x^2-6x+13\right|+8\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-3)^2+4}$$

解：原式 $=\frac{1}{2}\ln\left|x^2-6x+13\right|+2\int\frac{\mathrm{d}x}{(\frac{x-3}{2})^2+1}=\frac{1}{2}\ln\left|x^2-6x+13\right|+4\int\frac{\mathrm{d}(\frac{x-3}{2})}{(\frac{x-3}{2})^2+1}$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|x^2-6x+13\right|+4\arctan\frac{x-3}{2}+C$$

48、略

49、略

50、略