2016-2017 学年第二学期几何与多元微积分(B 下)月考答案

一、填空题（每题 6 分，共 36 分）

1. 设 $z = xe^y + \ln(x^2 + y^2)$，则 $\mathrm{d}z\big|_{(1,0)} = \underline{3\mathrm{d}x + \mathrm{d}y}$.

2. 设函数 f 具有一阶连续偏导数，$z = f(x^2 - y^2, x)$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \underline{2x \cdot f_1' + f_2'}$.

3. 曲线 $x = t, y = t^2, z = t^3$ 在点 $(1,1,1)$ 处的切向量为 $\underline{(1,2,3)}$.

4.已知函数 $u = \cos(xy) + \sin(yz)$ 在点 $P(2,0,-3)$ 处的梯度为 $\underline{(0,-3,0)}$.

5. $\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \int_{2}^{3} (\arctan x \cdot \cos y)\mathrm{d}y = \underline{0}$.

6. 曲面 $x^2 - 2y^2 + 3z^2 = 2$ 在点 $(1,1,1)$ 处的切平面方程为 $\underline{x - 2y + 3z - 2 = 0}$.

二、选择题（每题 5 分，共 20 分）

1. 函数 $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$ 在点 $(1,1)$ 处的方向导数的最大值为（ B ）.

（A）1　　（B）$\sqrt{2}$　　（C）2　　（D）$\sqrt{3}$.

2. 设函数 $z = z(x,y)$，由方程 $F(\dfrac{y}{x}, \dfrac{z}{x}) = 0$ 确定，其中 F 为可微函数，且 $F_2' \neq 0$ 则

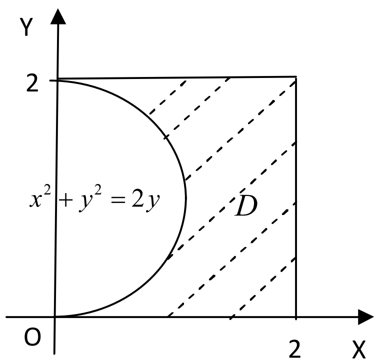
$x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} =$ （ C ）.

（A）x　　（B）y　　（C）z　　（D）xy.

3. 区域 D 由 $x^2 + y^2 = 2y, x = 2, y = 2$ 及 x 轴围成，如图阴影部分所示，

则 $\iint\limits_D y\mathrm{d}\sigma =$ （ B ）.

（A）$2 - \dfrac{\pi}{2}$　（B）$4 - \dfrac{\pi}{2}$　（C）$4 - \pi$　（D）$4 + \dfrac{\pi}{2}$.



4. 设 xoy 平面上区域 D 是由直线 $x = 0, y = 0, x + y = \dfrac{1}{2}$ 及 $x + y = 1$ 所围成，

$I_1 = \iint\limits_D \ln(x+y)\mathrm{d}\sigma, I_2 = \iint\limits_D (x+y)^2\mathrm{d}\sigma, I_3 = \iint\limits_D (x+y)\mathrm{d}\sigma$，则正确的是（ A ）.

（A） $I_1 < I_2 < I_3$ （B） $I_1 < I_3 < I_2$ （C） $I_3 < I_2 < I_1$ （D） $I_2 < I_1 < I_3$.

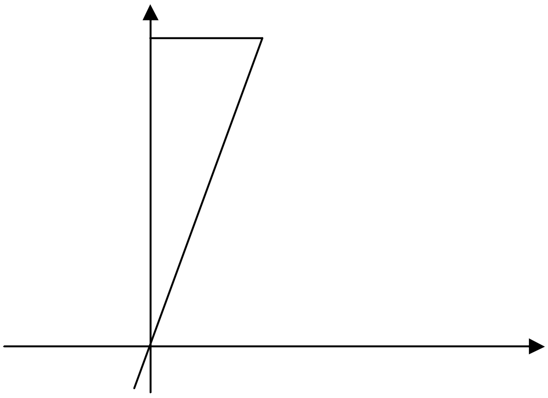
5.曲面 $z = xy$ 位于柱体 $x^2 + y^2 = 1$ 的面积可表示为如下（ D ）的二次积分.

（A） $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 xy\mathrm{d}y$ （B） $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 \sqrt{1+x^2+y^2}\mathrm{d}y$

（C） $\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1+x^2+y^2}\mathrm{d}y$ （D） $\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1+x^2+y^2}\mathrm{d}y$.

三、（9 分）计算二重积分 $\iint\limits_D \sin(y^2)\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由直线 $y = 2x, y = 8$ 和 y 轴共同围成的区域.

解：画草图.



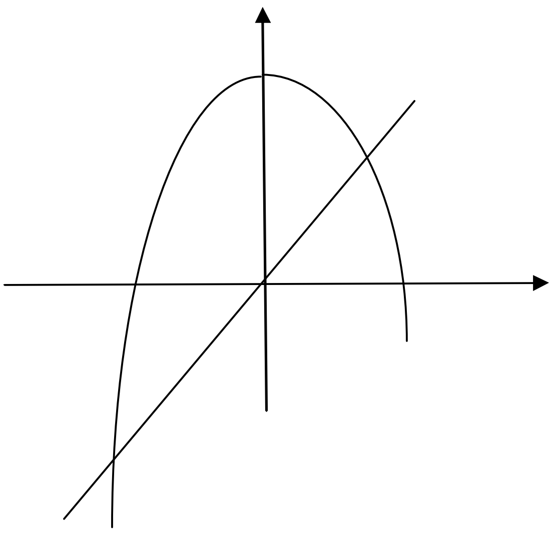
$$\iint\limits_D \sin(y^2)\mathrm{d}\sigma = \int_0^4 \sin(y^2)\mathrm{d}y \int_0^{\frac{y}{2}} \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^4 \sin(y^2)\mathrm{d}y^2$$

$$= \frac{1}{4}(1-\cos(64)).$$

四、（10 分）求底为 xoy 平面内抛物线 $y = 2 - x^2$ 和直线 $y = x$ 所围区域，顶为柱面 $z = x^2$ 的曲顶柱体的体积.

解：做草图，求出交点



$$\begin{cases} y = 2 - x^2 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow (-2,-2),(1,1)$$

所求体积为 $\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-2}^{1}\mathrm{d}x \int_x^{2-x^2} x^2\mathrm{d}y$

$$= \int_{-2}^{1} x^2(2-x^2-x)\mathrm{d}x$$

$$= (\frac{2}{3}x^3 - \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4})\Big|_{-2}^{1}$$

$$= \frac{63}{20}.$$

五、（12 分）某公司可通过电台及网络两种方式做销售某种商品的广告，根据统计资料，销售收入 R（万元）与电台广告费 x_1（万元）及网络广告费 x_2（万元）之间的关系有如下经验公式：

$$R = 15 + 14x_1 + 32x_2 - 8x_1x_2 - 2x_1^2 - 10x_2^2.$$

（1）在广告费用不限的情况下，求最优广告策略；

（2）若提供的广告费用为1.5 万元，求相应的最优广告策略.

解：（1）利润函数为 $z=f(x_1,x_2)=15+14x_1+32x_2-8x_1x_2-2x_1^2-10x_2^2-(x_1+x_2)$
$=15+13x_1+31x_2-8x_1x_2-2x_1^2-10x_2^2$

由 $\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x_1}=13-8x_2-4x_1=0\\ \dfrac{\partial z}{\partial x_2}=31-8x_1-20x_2=0\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_1=0.75\\ x_2=1.25\end{cases}$ 万元

计算 $A=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}=-4, B=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1\partial x_2}=-8, C=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}=-20$

$AC-B^2>0, A<0$ 是极大值。也是最值点

最优广告策略是电台投入 0.75 万元，网络投入 1.25 万元.

（2）是在条件 $x_1+x_2=1.5$ 的极值问题

构造 L 函数 $L(x_1,x_2,\lambda)=15+13x_1+31x_2-8x_1x_2-2x_1^2-10x_2^2+\lambda(x_1+x_2-1.5)$

由 $\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x_1}=13-8x_2-4x_1+\lambda=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2}=31-8x_1-20x_2+\lambda=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=x_1+x_2-1.5=0\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_1=0\\ x_2=1.5\end{cases}$

即广告费全部用于网络，可使利润最大.

六、（8 分）计算 $\iint\limits_D \ln(1+x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $D: x^2+y^2\le 1$.

解：$\iint\limits_{\mathrm{D}} \ln(1+x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\cdot\ln(1+r^2)\mathrm{d}r$

$=2\pi\int_0^1\dfrac{1}{2}\cdot\ln(1+r^2)\mathrm{d}r^2$

$=\pi(\ln(1+r^2)\cdot r^2\Big|_0^1-\int_0^1\dfrac{r^2}{1+r^2}\mathrm{d}r^2)$

$=\pi(\ln 2-\int_0^1\dfrac{r^2+1-1}{1+r^2}\mathrm{d}r^2)=\pi(2\ln 2-1).$