一元微积分 B 上复习题（一）答案

预备知识

1、函数 $y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$ 的定义域是 $\underline{(-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)}$.

2、函数 $y=\begin{cases} x & 0\le x\le 1 \\ \ln x & 1<x<10 \end{cases}$，则其定义域为 $\underline{[0,10)}$.

3、函数 $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right),(a>0)$ 为__非奇非偶函数__（填奇函数，偶函数或非奇非偶函数）.

4、将幂指函数 $x^{\sin x}$ 表示为指数函数 $\underline{x^{\sin x}=\mathrm{e}^{\sin x\ln x}}$.

5、函数 $y=\dfrac{\sin x}{x(x-\pi)^2}$ 在以下（ D ）区间内无界.

（A） $(-\infty,-1)$ （B） $(-1,0)$ （C） $(0,1)$ （D） $(1,\pi)$

6、 $f(x)=x\cdot\tan x\cdot\left(\mathrm{e}^{\sin x}\right)$ 是（ B ）.

（A）偶函数 （B）无界函数 （C）周期函数 （D）单调函数

7、函数 $y=\arccos x$ 在 $[-1,1]$ 是（ C ）.

（A） 奇函数 （B）偶函数 （C）非奇非偶函数 （D）单调递增函数.

8、设函数 $g(x)=1-x$，且当 $x\ne 0$ 时， $f[g(x)]=\dfrac{1-x}{x}$，则 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=$（ B ）.

（A） 0 （B） 1 （C） 3 （D） -3

9、金额为 M_0 的钱存入银行账户，每年以 r 的利率支付利息， $M(t)$ 表示 t 年后账户的余额.

问(1)如果利息每年复合 n 次，求 $M(t)$ 的表达式;(2)如果利息是连续复合的,(即 $n\to\infty$)，推导出 $M(t)$ 的表达式. 请利用你得到的表达式帮小明计算一下，当银行年利率为 2.5%，4 年后小明的一万元存款，按连续复利计算，账户余额是多少？（无需近似计算）

解：（1） $M(t)=M_0(1+\dfrac{r}{n})^{nt}$

（2） $\lim\limits_{n\to\infty}M(t)=\lim\limits_{n\to\infty}M_0(1+\dfrac{r}{n})^{nt}=M_0\,\mathrm{e}^{rt}$.

（3） $M(t)=10000\,\mathrm{e}^{0.025\times 4}=10000\,\mathrm{e}^{0.1}$.

10、求 $r=1+\cos\theta$ 与 $r=3\cos\theta$ 的交点.

解： 将两个等式联立，消去 r，可得

$$\begin{cases} r=1+\cos\theta \\ r=3\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \cos\theta=\frac{1}{2}.$$

解得$\theta=\pm\frac{\pi}{3}$，交点为$\left(\frac{3}{2},\frac{\pi}{3}\right),\left(\frac{3}{2},-\frac{\pi}{3}\right)$.画图发现还有一个交点$(0,\pi)$漏掉了.

所以，交点有三个分别是$(\frac{3}{2},\frac{\pi}{3}),(\frac{3}{2},-\frac{\pi}{3}),(0,\pi)$.

极限与连续

1、函数$f(x)=\sqrt{x(x-1)}\ln x$的连续区间为$\underline{[1,+\infty)}$.

2、$\lim\limits_{x\to0}x\sin\frac{1}{x^2}=\underline{\ 0\ }$.

3、$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)^n=\underline{e^{-1}}$.

4、设当$x\to0$时，$\left(1+ax^2\right)^{\frac{1}{2}}-1$与$1-\cos x$是等价无穷小，则$a=\underline{\ 1\ }$.

5、$\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln\left(1+x^2\right)}}=\underline{\frac{1}{\sqrt{e}}}$.

6、$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^6+1^3}}+\frac{2^2}{\sqrt{n^6+2^3}}+\cdots+\frac{n^2}{\sqrt{n^6+n^3}}\right)=\underline{\frac{1}{3}}$.

7、$a\neq0$时，$\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{\sin(x-a)}=\underline{\cos a.}$

8、$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2}-\frac{1+2+\cdots+n}{n+2}\right)=\underline{\frac{1}{2}}$.

9、曲线$y=\frac{2x^2-x}{|x|(x+1)}$的水平渐近线是$\underline{y=2,y=-2}$.

10、以下关于数列收敛的性质描述，正确的是（ D ）.

（A）若$\{a_n\}$收敛，$\{b_n\}$有界，则$\{a_nb_n\}$收敛

（B）若$\{a_n\}$收敛，$\{b_n\}$发散，则$\{a_nb_n\}$发散

（C）若$\{a_n\}$发散，$\{b_n\}$发散，则$\{a_nb_n\}$发散

（D）若$\{a_n\}$收敛，$\{b_n\}$有界，则$\{a_nb_n\}$有界

11、以下哪个是**错误**的（ A ）.

（A）数列 $\left\{a_{n_k}^{(1)}\right\},\left\{a_{n_k}^{(2)}\right\}$ 是数列 $\left\{a_n\right\}$ 的两个子数列. $\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k}^{(1)}=\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k}^{(2)}=a,$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$

（B）数列 $\left\{a_n\right\}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\left|a_n\right|=0$

（C）数列 $\left\{a_n\right\}$，已知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n+1}=a,$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$

（D）数列 $\left\{a_n\right\}$ 收敛于 a，则其子数列 $\left\{a_{n_k}\right\}$ 也收敛于 a

12、曲线 $y=\dfrac{\arctan x}{x(x-1)^2}$ 的水平渐近线与竖直渐近线一共有（ B ）条.

（A） 1 条　　（B） 2 条　　（C） 3 条　　（D） 4 条

13、 关于方程 $x^5+x-1=0$ 的根的个数，以下说法正确的是（ A ）.

（A） 在 $(0,+\infty)$ 内只有一个根　　（B）在 $(0,+\infty)$ 内有两个根

（C） 在 $(0,+\infty)$ 内无实数根　　（D） 在 $(0,+\infty)$ 内至少有一个根

14、$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4x+4}{x^3+5x^2-14x}=($ A $).$

（A） 0　　（B） 2　　（C） -1　　（D） 5

15、函数 $f(x)=x\tan\dfrac{1}{x}$ （ C ）.

(A)当 $x\to\infty$ 时为无穷大　　(B）当 $x\to\infty$ 时为无穷小

(C) 当 $x\to\infty$ 时极限为 1　　(D) 以上结论都不对

16、下列极限正确的是（ B ）.

（A）$\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{x}=1$　　（B）$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=1$

（C）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在　　（D）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=1$

17、若 $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{\mathrm{e}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{a}{x}\right)^{x+\mathrm{e}}$，则 $a=$（ A ）.

（A）-1　　（B）2　　（C）1　　（D）e

18、以下说法中**正确**的有几个(C).

（I）函数 $f(x)$ 在 x_0 点连续，则函数在 x_0 点极限存在

（II） $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=a,$ 则函数在 $f(x)$ 在 x_0 点极限存在且连续

（III） $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$, 则函数在 $f(x)$ 在 x_0 点右极限存在且右连续

(IV） $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=a, \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=b$, 且$a\neq b$, 则函数在 $f(x)$ 在 x_0 点不连续

（A）1　　　　　（B）2　　　　　（C）3　　　　　（D）4.

19、极坐标方程 $r^2=a^2\cos 2\theta\ (a>0)$ 图像中，θ 的范围是（ C ）.

（A）$[0,\frac{\pi}{2}]\cup[\pi,\frac{3\pi}{2}]$　　　　（B）$[0,\frac{\pi}{4}]\cup[\pi,\frac{5\pi}{4}]$

（C）$[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]\cup[\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}]$　　　　（D）$[-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4}]\cup[\frac{3\pi}{4},\pi]$.

20、已知 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+f(x))}{e^x-1}=1$, 则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=$ (A).

（A）1　　　　　（B）2　　　　　（C）3　　　　　（D）4

21、设函数 $f(x)=3^x$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln[f(1)f(2)\cdots f(n)]$.

解： $\frac{1}{n^2}\ln[f(1)f(2)\cdots f(n)]=\frac{\ln f(1)+\ln f(2)+\cdots+\ln f(n)}{n^2}$

$=\frac{\ln 3+2\ln 3+\cdots+n\ln 3}{n^2}=\ln 3\frac{1+\cdots+n}{n^2}=\frac{\ln 3}{2}\frac{n(1+n)}{n^2}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln[f(1)f(2)\cdots f(n)]=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln 3}{2}\frac{n(1+n)}{n^2}=\frac{\ln 3}{2}$.

22、讨论极限 $\lim\limits_{x\to\infty}x(\arctan|x|-\frac{\pi}{2})$ 是否存在，若存在求极限值；若不存在说明理由.

解： $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\arctan|x|-\frac{\pi}{2})=\lim\limits_{x\to+\infty}x(\arctan x-\frac{\pi}{2})=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\arctan x-\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}}==\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=-1$

$\lim\limits_{x\to-\infty}x(\arctan|x|-\frac{\pi}{2})=\lim\limits_{x\to-\infty}x(\arctan(-x)-\frac{\pi}{2})=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\arctan(-x)-\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{-1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=1$

极限 $\lim\limits_{x\to\infty}x(\arctan|x|-\frac{\pi}{2})$ 不存在.

23、若 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin^2(x-1)}{x^2+ax+b}=1$, 求常数 a,b.

解： 由于 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin^2(x-1)}{x^2+ax+b}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{x^2+ax+b}=1$, 且 $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^2=0$

所以 $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+ax+b)=0$，故 $1+a+b=0$；

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{x^2+ax+b}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{(x-1)(x-b)}=1,$$得到$1-b=0$，

因此$a=-2,b=1$.

24、若函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，$a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$, 常数$k_1,k_2,\cdots,k_n>0$, 并记

$k_1+k_2+\cdots+k_n=K$，证明：必定存在$\xi\in[x_1,x_n]$,使得

$$f(\xi)=\frac{1}{K}[k_1 f(x_1)+k_2 f(x_2)+\cdots+k_n f(x_n)].$$

证明：设M，m分别是$f(x)$在闭区间$[x_1,x_n]$上的最大值和最小值，

$$m=\frac{1}{K}[k_1 m+k_2 m+\cdots+k_n m]\le\frac{1}{K}[k_1 f(x_1)+k_2 f(x_2)+\cdots+k_n f(x_n)]\le\frac{1}{K}[k_1 M+k_2 M+\cdots+k_n M]=M$$

由介值定理知必定存在$\xi\in[x_1,x_n]$,使得

$$f(\xi)=\frac{1}{K}[k_1 f(x_1)+k_2 f(x_2)+\cdots+k_n f(x_n)].$$