第二章 导数答案

1、已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f(0)=0, f'(0)=-1$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(3x)-f(-x)}{x}=$ $\underline{\quad -4 \quad}$.

2、曲线 $\begin{cases} x=\ln t+t^2 \\ y=t\ln t+1 \end{cases}$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程为 $\underline{y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3}}$.

3、设 $f'(\cos x)=\cos 2x$，则 $f''(x)=$ $\underline{\quad 4x \quad (|x|<1) \quad}$.

4、函数 $y=\ln(1+x) \quad (x>-1)$ 的 n 阶导数 $y^{(n)}=\underline{(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n} \quad (x>-1)}$.

5、函数 $y=(1+x)^{\tan x}$，则 $y'=\underline{(1+x)^{\tan x}(\sec^2 x\ln(1+x)+\dfrac{\tan x}{1+x})}$.

6、设 $y=\dfrac{2-x}{1+x}$，则 $y^{(n)}=\underline{\dfrac{3\times(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}}$.

7、设 $y=f(\ln x)$，$f''(x)$ 存在，则 $y''=\underline{\dfrac{f''(\ln x)-f'(\ln x)}{x^2}}$.

8、设 $y=\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\underline{\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x\left(\dfrac{1}{1+x}+\ln\dfrac{x}{1+x}\right)}$.

9、设函数 $y=3^{2x+5}$，则 $\underline{y^{(n)}=3^5\cdot 9^x(\ln 9)^n}$.

10、设 $u=f[\phi(x)+\ln x]$，其中 $f(x),\phi(x)$ 均可导，则 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\underline{f'\cdot(\varphi'(x)+\dfrac{1}{x})}$.

11、 $y=\arcsin\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$，求 $y'(1), y'(-2)$.

解： $$y'=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}}\frac{-2x(1+x^2)-(1-x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\frac{-2x}{|x|(1+x^2)}$$

$$y'(1)=-1, \qquad y'(-2)=\frac{2}{5}.$$

12、已知 $y=y(x)$ 由方程 $x^2+\sin(xy)+y^3=1$ 确定，计算 $y'(0)$ 与 $y''(0)$.

解：当 $x=0$ 时，$y^3=1\Rightarrow y=1$. $x^2+\sin(xy)+y^3=1$ 两边同对 x 求导

$$2x+\cos(xy)(y+xy')+3y^2y'=0$$

代入 $x=0$， $y=1$，得到 $1+3y'(0)=0 \Rightarrow y'(0)=-\dfrac{1}{3}$.

再对 x 求导

$$2-\sin(xy)(y+xy')^2+\cos(xy)(2y'+xy'')+6yy'^2+3y^2y''=0$$

代入 $x=0$， $y(0)=1$， $y'(0)=-\dfrac{1}{3}$， 得到 $y''(0)=-\dfrac{2}{3}$.

13、已知 $f(x)=\begin{cases} e^x-ax & x>0 \\ 1 & x=0 \\ \sqrt{1+x+x^2} & x<0 \end{cases}$，求 a 使得 $f(x)$ 在 0 处可导，并求 $f'(x)$.

解： $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0-} f(x)=1$，对任意 a， $f(x)$ 在 0 处连续.

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0+}\frac{e^x-ax-1}{x}=1-a；\ f'_-(0)=\lim_{x\to 0+}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}=\frac{1}{2}$$

当 $1-a=\dfrac{1}{2}$，即 $a=\dfrac{1}{2}$ 时， $f(x)$ 在 0 处可导，

此时 $f'(x)=\begin{cases} e^x-\dfrac{1}{2} & x>0 \\ \dfrac{1}{2} & x=0 \\ \dfrac{2x+1}{2\sqrt{1+x+x^2}} & x<0 \end{cases}$.

14、求由方程 $2x-y=(y-x)\ln(y-x)$ 所确定的函数 $y=y(x)$ 的微分 $\mathrm{d}y$ 以及在点 $(1,2)$ 处的切线方程.

解： 方程两边求微分： $2dx-dy=(dx-dy)\ln(y-x)+dy-dx$

$\therefore\ dy=\dfrac{3+\ln(y-x)}{2+\ln(y-x)}dx$. 或 $dy=\dfrac{2y-x}{y}dx$

切线斜率 $k=y'\big|_{x=1}=\dfrac{3+\ln(2-1)}{2+\ln(2-1)}=\dfrac{3}{2}$，

切线方程为： $y=2+\dfrac{3}{2}(x-1)$ 即 $3x-2y+1=0$.

15、设函数 $y=y(x)$ 是摆线方程 $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$ 确定的函数，求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{x=a\pi}$.

解：因 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy/dt}{dx/dt}=\dfrac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\dfrac{\sin t}{1-\cos t}$

故 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d(\frac{dy}{dx})\Big/dt}{dx/dt}=\dfrac{\frac{1}{\cos t-1}}{a(1-\cos t)}=-\dfrac{1}{a(1-\cos t)^2}$

由于 $x=a\pi$ 对应于 $t=\pi$，因此 $\dfrac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=a\pi}=-\dfrac{1}{4a}$.

16、求曲线 $x^3+y^3-3xy=0$ 在点 $(\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{4})$ 处的切线方程和法线方程.

解：方程 $x^3+y^3-3xy=0$ 两边同取导数， $3x^2+3y^2y'-3y-3xy'=0$，

将 $(\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{4})$ 带入 $3x^2+3y^2y'-3y-3xy'=0$ 解得 $\therefore y'=0$

所以切线方程为 $y=\sqrt[3]{4}$ ，法线方程为 $x=\sqrt[3]{2}$.

17、求曲线 $y=x^2$ 与曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 的公切线.

解: 设 (a,b) 为曲线 $y=x^2$ 上的切点, (c,d) 为曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 的切点.

$y=x^2$ 的切线的斜率为 $2a$，切线方程为 $Y-b=2a(X-a)$, $b=a^2$

$y=\dfrac{1}{x}$ 的切线的斜率为 $-\dfrac{1}{c^2}$,切线方程为 $Y-d=-\dfrac{1}{c^2}(X-c)$, $d=\dfrac{1}{c}$

可以解得 $a=-2$, 公切线为 $Y-4=-4(X+2)$.

18、设 $\begin{cases} x=\ln\sqrt{1+t^2} \\ y=\pi-\arctan t \end{cases}$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解： $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-\frac{1}{1+t^2}}{\frac{t}{1+t^2}}=-\dfrac{1}{t}$， $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\frac{1}{t^2}}{\frac{t}{1+t^2}}=\dfrac{1+t^2}{t^3}$.

19、设函数 $y=y(x)$ 由方程 $y=\sin(x+y)$ 确定，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 与 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解：方程 $y=\sin(x+y)$ 两边对 x 求导， $\dfrac{dy}{dx}=\cos(x+y)(1+\dfrac{dy}{dx})$，

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\cos(x+y)}{1-\cos(x+y)}$ $\qquad$ $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{-\sin(x+y)}{[1-\cos(x+y)]^3}$

20、设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$ ，求 $f'(0),f''(0)$.

解：$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{e^x-1}{x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$

$x\neq 0$ $\quad f'(x)=\dfrac{e^x\cdot x-e^x+1}{x^2}$

$$f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{xe^x-e^x+1}{x^2}-\dfrac{1}{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2e^xx-2e^x+2-x^2}{2x^3}=\frac{1}{3}$$

21、设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} & x<0\\ a+be^x & x\geq 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导，求 a,b，并求 $f'(0)$.

解：$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导因而连续，$f(0-)=0=f(0)=a+b$

$f_-'(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}}{x}=1$，$f_+'(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{a+be^x-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{be^x}{1}=b,$

$\therefore a=-1,b=1,f'(0)=1$.