# 从任意变换矩阵中提取D-H参数

May 17, 2020

**1.任意变换矩阵的分解**

任意的变换矩阵可以分解为三个子矩阵的乘积:$T_1T_2T_3 = T$。 若用$T_x$表示沿x轴的旋转平移变换，$T_y$表示沿y轴的旋转平移变换，$T_z$表示沿z轴的旋转平移变换， 则根据欧拉旋转定理，三个子矩阵中相邻两矩阵不绕同一轴旋转平移。
如以下变换可表示任意旋转变换：
$T = T_xT_yT_z, \qquad T = T_xT_yT_x, \qquad T = T_zT_xT_z, \qquad T = T_zT_yT_x$
以下变换则不能表示任意旋转变换：
$T = T_xT_yT_y = T_xT_y, \qquad T = T_xT_xT_x = T_x, \qquad T = T_xT_xT_z = T_xT_z$

**2.转化为DH变换矩阵的核心方法**

DH参数表示的变换称为DH变换:$T_{DH} = T_zT_x$,其中,$T_z$和$T_x$分别用旋转平移参数($\theta$,$d$)以及($\alpha$,$a$)来参数化。 由前文可知，由于DH变换缺少一个沿y轴或z轴的变换,其不能表示任意变换，因此我们在这里不上一个虚拟的子矩阵$T'_z$,其用($\theta'$,$d'$)来参数化，则任意变换可表示为$T = T_{DH}T'_z$。
机械臂是由一个个关节连接而成的，相邻关节的坐标系之间可能存在任意变换，其运动学如下所示：

$$\begin{aligned} T_e &= T_1 \cdot T_2 \cdot T_3 ... T_n \\ &= (T_{DH_1}T'_{z_1})(T_{DH_2}T'_{z_2})...(T_{DH_n}T'_{z_n}) \end{aligned}$$

其中$T_e$表示到末端执行器的变换，$T_i$表示第$i$到第$i+1$号关节的变换，改变括号的结合方式后，我们有

$$T_e = T_{DH_1}(T'_{z_1}T_{DH_2})(T'_{z_2}T_{DH3})...(T'_{z_{n-1}}T_{DH_n})T'_{z_n}$$

其中

$$T'_{z_i}T_{DH_{i+1}} = T'_{z_i}T_{z_{i+1}}T_{x_{i+1}} = T''_{z_{i+1}}T_{x_{i+1}} = T'_{DH_{i+1}}$$

于是

$$T_e = T_{DH_1}T'_{DH_2}...T'_{DH_n}T'_{z_n}$$

由于$T_n$一般仅仅是一个$T_z$变换，所以可忽略$T'_{z_n}$ 最后

$$T_e = T_{DH_1}T'_{DH_2}T'_{DH_3}...T'_{DH_n}$$

其中$T_{DH_1}$用($\theta_1$,$d$,$\alpha_1$,$a_1$)参数化，$T'_{DH_{i+1}}$用($\theta'_i + \theta_{i+1}$,$d'_i + d_{i+1}$,$\alpha_{i+1}$,$a_{i+1}$)参数化($i \in [1, n)$)

**3.如何从$T_i$中提取参数($\theta_i$,$d_i$,$\alpha_i$,$a_i$,$\theta_i'$,$d_i'$)**

$$T = T_z T_x T_z'$$

$$= \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) & 0 & 0 \\ sin(\theta) & cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & cos(\alpha) & -sin(\alpha) & 0 \\ 0 & sin(\alpha) & cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} cos(\theta') & -sin(\theta') & 0 & 0 \\ sin(\theta') & cos(\theta') & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d' \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta'\cos\alpha & -\sin\theta'\cos\theta + \cos\theta'\sin\theta\cos\alpha & \sin\theta\sin\alpha & d'\sin\theta\sin\alpha + a\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta'\cos\alpha & -\sin\theta'\sin\theta + \cos\theta'\cos\theta\cos\alpha & -\cos\theta\sin\alpha & -d'\cos\theta\sin\alpha + a\sin\theta \\ \sin\theta'\sin\alpha & \cos\theta'\sin\alpha & \cos\alpha & d'\cos\alpha + d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

假设已知的变换矩阵为:

$$DHT = \begin{bmatrix} T[1] & T[2] & T[3] & T[4] \\ T[5] & T[6] & T[7] & T[8] \\ T[9] & T[10] & T[11] & T[12] \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

则先由$\cos^{-1}(T[11])$可求得$\alpha$。 若$\sin\alpha \neq 0$，则结合$T[3], T[7], T[9], T[10]$可求得$\theta$与$\theta'$，然后将$\theta$和$\alpha$的值代入$T[4], T[8], T[12]$,联立解三元一次方程组，即可求得$d$,$a$以及$d'$； 若$\sin\alpha = 0$，则矩阵可简化为：

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta \pm \theta') & \sin(\theta \pm \theta') & 0 & a\cos\theta \\ \sin(\theta \pm \theta') & \cos(\theta \pm \theta') & 0 & a\sin\theta \\ 0 & 0 & \pm 1 & \pm d' + d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

由于这里$\theta$和$\theta'$作用相同，我们可以令$\theta' = 0$，这样，其余各参数也都可轻松求出了。

求解时要注意的点：

1. 仅用反三角函数求解时得到的角度值可以有多个，如$\sin\theta = 0$时$\theta$可以是0也可以是$\pi$,需结合$\cos\theta$的值进一步确定；

2. 由于是浮点运算，所以比较时不能用等号，求反三角函数时因为精度问题也可能超过$[-1, 1]$的取值范围，另外也得避免除以0的情况；

**感想：**

本来以为这种提取DH参数的工具网上应该挺好找的，然而出乎意料竟然没找到。 vrep上本来有一个DH extractor工具，但是有各种问题，得到的DH参数我用着根本不对，也不知道是不是我没用对。 刚好现在的任务里面要适配各种类型机械臂，自动提取DH参数就显得比较重要了，于是决定自己写一个这样的工具。凭着自己的理解，大致是写出来了，然而中间确走了相当多的坑。基本思路还挺简单的，大概当天就有头绪了，但是实现上却花了很多时间，算了

一下，从周四开始到周日上午最后完成，用了4天时间，这四天时间里后面三天都是在修改调bug！一个原因是代码里面条件挺多的，本身要正确实现就有点难，但最主要的障碍还是整个环境难以调试，找到问题的出处要花上很久。接下来要加强自己在代码正确实现和调试上的功力了。
总的来说，写完了还是有点成就感的，但毕竟花了太多时间，而且这仅仅是任务中一个为了方便点而做的工具，不知道这个投入产出比值不值。难得搞了这么长时间走了这么多坑，还是记录一下来的好。接下来就可以更方便的开展规划算法的适配工作了，还有就是不能保证现在的代码一定没问题了，毕竟我只试了4个机械臂。。。