第一章：电池 SOC 连续时间动力学建模（问题 1）

1.1 模型物理基础与基本原理

锂离子电池的放电过程本质上是电化学反应的连续进行。电量状态 SOC 定义为：

$$z(t)=\frac{Q_{rem}(t)}{C_n(T)}$$

其中：

Q_{rem}（t）：剩余电荷量（单位：Ah）

C_n(T)：温度依赖的有效容量（单位：Ah）

根据电荷守恒定律，剩余电荷量的变化率等于放电电流：

$$\frac{dQ_{rem}(t)}{dt}=-i(t)$$

因此，SOC 的基本演化方程（库仑计数法）为：

$$\frac{dz(t)}{dt}=\frac{1}{C_n(T)}\cdot\frac{dQ_{rem}(t)}{dt}=-\frac{i(t)}{C_n(T)}$$

考虑到时间单位转换（当 t 以秒为单位，容量以 Ah 为单位）：

$$\frac{dz(t)}{dt}=-\frac{i(t)}{3600\cdot C_n(T)}$$

物理意义：每放电 1 安培（1A）持续 1 秒，电池将消耗 1/3600 Ah 的

电荷量，导致 SOC 相应下降。

1.2 二阶 RC 等效电路模型的详细推导

1.2.1 电路拓扑结构

电池的完整二阶 RC 等效电路模型如下图所示（文字描述）：

$$[U_{oc}(z)] - [R_0] - [R_1||C_1] - [R_2||C_2] \to U_L(t)$$

其中：

$U_{oc}(z)$：开路电压，是 SOC 的单调递增函数

R_0：欧姆内阻（即时响应）

R_1，C_1：电化学极化环节（时间常数 $\tau_1=R_1C_1$，通常秒级）

R_2，C_2：浓差极化环节（时间常数 $\tau_2=R_2C_2$，通常分钟级）

1.2.2 基尔霍夫定律应用

根据基尔霍夫电压定律：

$$U_{oc}(z(t)) = U_L(t) + R_0 i(t) + U_1(t) + U_2(t) \quad (1)$$

其中

$U_1(t)$，$U_2(t)$分别为两个 RC 环节的极化电压。

根据基尔霍夫电流定律，对第一个 RC 环节：

$$i(t)=\frac{U_1(t)}{R_1}+C_1\frac{dU_1(t)}{dt}$$

整理得到极化电压微分方程：

$$\frac{dU_1(t)}{dt}=-\frac{1}{R_1C_1}U_1(t)+\frac{1}{C_1}i(t)\quad(2)$$

同理，对第二个 RC 环节：

$$\frac{dU_2(t)}{dt}=-\frac{1}{R_2C_2}U_2(t)+\frac{1}{C_2}i(t)\quad(3)$$

1.2.3 状态空间表示

定义状态向量

$\mathbf{x}(t)=[z(t),U_1(t),U_2(t)]^T$

输入为 i(t)，输出为 $U_L(t)$。

状态方程：

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{R_1C_1} & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1}{R_2C_2}\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)+\begin{bmatrix}-\frac{1}{3600C_n(T)}\\ \frac{1}{C_1}\\ \frac{1}{C_2}\end{bmatrix}i(t)$$

观测方程：

$$U_L(t) = U_{oc}(z(t)) - [0, 1, 1]\mathbf{x}(t) - R_0 i(t)$$

1.3 温度补偿机制的详细建模

1.3.1 内阻的温度依赖

采用 Arrhenius 修正模型：

$$R_0(T) = R_{0,ref} \cdot \exp\left[\frac{E_a}{R}\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_{ref}}\right)\right]$$

其中：

E_a：活化能（典型值 50 kJ/mol）

R：理想气体常数（8.314 J/(mol·K)）

T：绝对温度（K）

T_{ref}：参考温度（通常 298K，25°C）

物理解释：温度降低时，锂离子迁移速率减慢，内阻呈指数上升。

1.3.2 有效容量的温度依赖

采用二次多项式修正：

$$C_n(T) = C_{rated} \cdot [1 - \alpha_1(T - T_{ref}) - \alpha_2(T - T_{ref})^2]$$

其中：

$\alpha_1 \approx -3\times10^{-3}K^{-1}$（线性项系数）

$\alpha_2 \approx -1 \times 10^{-5} K^{-2}$（二次项系数）

示例计算：在-10° C（263K）时，容量衰减约为：

$$C_n(263) \approx C_{rated} \cdot [1 - (-3 \times 10^{-3}) \times (-35) - (1 \times 10^{-5}) \times (1225)] \approx 0.85 C_{rated}$$

即容量损失约 15%。

1.4 负载电流的详细分解模型

1.4.1 总功率需求

智能手机总功率是各组件功耗的线性叠加：

$$P_{total}(t) = \sum_{k=1}^{N} P_k(t) = P_{screen}(t) + P_{CPU}(t) + P_{net}(t) + P_{mem}(t) + P_{sensor}(t) + P_{other}(t)$$

1.4.2 各组件功耗详细模型

1. 屏幕功耗：

$$P_{screen}(t) = P_{screen,max} \cdot \left[\beta_1 \cdot \frac{SL(t)}{SL_{max}} + \beta_2 \cdot \left(\frac{SL(t)}{SL_{max}}\right)^2\right]$$

其中：

SL(t)：屏幕亮度值（0-255 或百分比）

β_1，β_2：拟合系数（典型值：β_1=0.7，β_2=0.3）

2. CPU 功耗（基于 DVFS 模型）：

$$P_{CPU}(t) = P_{static} + C_{eff} \cdot V_{dd}^2(t) \cdot f(t) \cdot \mu(t)$$

其中：

$V_{dd}(t)$：动态电压

f(t)：运行频率

μ(t)：CPU 利用率（0-1）

C_{eff}：有效开关电容

简化模型：

$$P_{CPU}(t) = P_{idle} + (P_{max} - P_{idle}) \cdot \mu(t)^{\gamma}$$

其中 γ≈1.5（由于非线性缩放效应）。

3. 网络模块功耗：

$$P_{net}(t) = P_{idle} + \delta_{active}(t) \cdot P_{active} + k \cdot R_{data}(t)$$

其中：

$\delta_{active}(t) \in \{0,1\}$：活跃状态指示

$R_{data}(t)$：数据传输速率（Mbps）

k：能耗效率系数（mW/Mbps）

5G 与 4G 对比：

5G 待机功耗：4G 的 1.2-1.5 倍

5G 活跃功耗：4G 的 2-3 倍

1.4.3 电流计算

考虑到电池输出电压 $U_L(t)$与电流的耦合：

$$i(t)=\frac{P_{total}(t)}{U_L(t)}=\frac{P_{total}(t)}{U_{oc}(z(t))-U_1(t)-U_2(t)-R_0(T)\cdot i(t)}$$

这是一个隐式方程，需要迭代求解。可重写为：

$$i(t)=\frac{P_{total}(t)}{U_{oc}(z(t))-U_1(t)-U_2(t)}\cdot\frac{1}{1+\frac{R_0(T)\cdot P_{total}(t)}{[U_{oc}(z(t))-U_1(t)-U_2(t)]^2}}$$

第二章：续航预测与不确定性量化（问题 2）

2.1 TTE（Time-to-Empty）的严格数学定义

给定当前时刻 t_0，初始状态 $x(t_0)$，截止电压（通常 3.2V），TTE 定义为：

$$TTE=\inf\{\Delta t>0\mid U_L(t_0+\Delta t)\leq U_{cut}\}$$

2.2 TTE 的数值求解算法

算法 1：基于 ODE 求解的 TTE 预测

text

输入：当前 SOC z0，极化电压 U1_0, U2_0，负载功率序列 P(t)

输出：预测的 TTE 值

1. 初始化：t = 0, z = z0, U1 = U1_0, U2 = U2_0
2. 设置时间步长 Δ t = 1 秒
3. while z > 0 and U_L > U_cut:
   a. 计算当前负载电流：i = P(t) / U_L
   b. 使用 4 阶 Runge-Kutta 法求解 ODE 系统：
      dz/dt = -i/(3600*C_n(T))
      dU1/dt = -U1/(R1*C1) + i/C1
      dU2/dt = -U2/(R2*C2) + i/C2
   c. 计算端电压：U_L = U_oc(z) - U1 - U2 - R0*i
   d. t = t + Δ t
4. TTE = t - t0

2.3 不确定性量化模型

2.3.1 偶然不确定性（Aleatoric Uncertainty）

电流测量噪声：

$$i_{meas}(t) = i_{true}(t) + \epsilon_i(t), \quad \epsilon_i(t) \sim \mathcal{N}(0, \sigma_i^2)$$

OCV-SOC 关系不确定性：

$$U_{oc}(z) = \hat{U}_{oc}(z) + \epsilon_U(z), \quad \epsilon_U(z) \sim \mathcal{N}(0, \sigma_U^2(z))$$

2.3.2 认知不确定性（Epistemic Uncertainty）

参数不确定性（以欧姆内阻为例）：

$$R_0 \sim \mathcal{N}(\mu_{R_0}, \sigma_{R_0}^2)$$

老化导致的漂移：

$$R_0(t) = R_0^{new} + \beta_{aging} \cdot t^{0.5}$$

2.3.3 蒙特卡洛模拟算法

text

输入：模型参数分布，初始状态分布，负载功率分布

输出：TTE 的置信区间

1. for m = 1 to M (M=1000 次模拟):

   a. 从先验分布中采样参数：R0_m, R1_m, C1_m, ...

   b. 采样初始状态：z0_m, U1_0_m, U2_0_m

   c. 使用算法 1 计算 TTE_m

2. 计算统计量：

   TTE_mean = mean(TTE_1, ..., TTE_M)

   TTE_std = std(TTE_1, ..., TTE_M)

   TTE_5% = 5th percentile

   TTE_95% = 95th percentile

置信区间表示：

$$TTE_{pred} = TTE_{mean} \pm t_{\alpha/2,M-1} \cdot \frac{TTE_{std}}{\sqrt{M}}$$

其中 t α /2,M−1 是 t 分布的分位数。

第三章：灵敏度分析与稳健性验证（问题 3）

3.1 局部灵敏度分析（一次一个因子）

定义 TTE 对参数 θ 的局部灵敏度：

$$S_\theta^{local} = \frac{\partial TTE}{\partial \theta} \cdot \frac{\theta}{TTE}$$

关键参数的灵敏度计算：

1. 环境温度 T 的灵敏度：

$$S_T = \frac{\partial TTE}{\partial T} \cdot \frac{T}{TTE} = \left[\frac{\partial TTE}{\partial C_n} \cdot \frac{\partial C_n}{\partial T} + \frac{\partial TTE}{\partial R_0} \cdot \frac{\partial R_0}{\partial T} \right] \cdot \frac{T}{TTE}$$

代入温度依赖关系：

$$S_T \approx \left[-\frac{TTE}{C_n} \cdot (-2\alpha_2 C_{rated} \Delta T) + \left(-\frac{R_0 i_{avg}}{U_{oc} - U_{cut}} \cdot \frac{TTE}{R_0} \right) \cdot \left(-\frac{E_a}{RT^2} R_0 \right) \right] \cdot \frac{T}{TTE}$$

2. 屏幕亮度 L 的灵敏度：

$$S_L = \frac{\partial TTE}{\partial P_{screen}} \cdot \frac{\partial P_{screen}}{\partial L} \cdot \frac{L}{TTE}$$

由于 $TTE \propto 1/P_{total}$，近似有：

$$S_L \approx -\frac{P_{screen}}{P_{total}} \cdot \eta_L$$

其中 η_L 是亮度-功耗弹性系数（通常 0.8-1.2）。

3.2 全局灵敏度分析（Sobol 指数）

对于包含 n 个参数的模型，总方差分解为：

$$V(TTE) = \sum_i V_i + \sum_{i<j} V_{ij} + \cdots + V_{12\ldots n}$$

其中：

V_i：单个参数的方差贡献

V_{ij}：参数交互作用的方差贡献

一阶 Sobol 指数：

$$S_i = \frac{V_i}{V(TTE)}$$

总效应 Sobol 指数：

$$S_i^{total} = \frac{V_i + \sum_{j \neq i} V_{ij} + \cdots}{V(TTE)}$$

i

计算算法（基于蒙特卡洛）：

1.生成两个 N×n 的随机矩阵 A 和 B

2.构建混合矩阵 $A^{(i)}_B$，其中第 i 列来自 B，其余来自 A

3.计算：

$$f_A = f(A), \quad f_B = f(B), \quad f_{A_B^{(i)}} = f(A_B^{(i)})$$

估计：

$$V_i = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} f_B^{(j)} (f_{A_B^{(i)}}^{(j)} - f_A^{(j)})$$

$$V = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} (f_A^{(j)})^2 - \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} f_A^{(j)} \right)^2$$

第四章：电池老化与系统优化（问题 4）

4.1 电池健康状态（SOH）建模

容量衰减模型：

$$C_n(N) = C_n^{new} \cdot (1 - \alpha \cdot N^{\beta})$$

其中：

N：完整循环次数

$\alpha \approx 5\times10^{-4}$（衰减系数）

$\beta \approx 0.85$（经验指数）

每日等效循环：

$$\Delta N_{eq} = \frac{\sum_{day} |\Delta z|}{2} = \frac{DOD_{avg}}{2}$$

其中 DOD（Depth of Discharge）为日放电深度。

内阻增长模型：

$$R_0(N) = R_0^{new} \cdot (1 + \gamma \cdot N^{\delta})$$

其中 $\gamma \approx 2 \times 10^{-3}$, $\delta \approx 0.7$。

4.2 基于模型的用户优化建议

充电策略优化：

定义电池压力函数：

$$\Psi(z, T, i) = \underbrace{k_1 \cdot e^{k_2(z-1)}}_{\text{高压应力}} + \underbrace{k_3 \cdot e^{-k_4/T}}_{\text{低温应力}} + \underbrace{k_5 \cdot i^2}_{\text{电流应力}}$$

最优充电区间：

通过最小化长期压力积分：

$$\min_{z_{min},z_{max}} \int_0^{T_{life}} \Psi(z(t),T(t),i(t))dt$$

求得推荐 SOC 区间：z∈[0.2，0.8]

温度管理策略：

当环境温度低于阈值时：

1.降低最大充电电流：

$$i_{charge}^{max}(T) = i_{rated} \cdot \min\left(1, 0.5 + 0.02(T+10)\right) \quad (T < 10^{\circ}C)$$

2.预热策略：当 T<0℃时，先以小电流（0.1C）充电至 T>5℃

4.3 操作系统级优化算法

动态频率调节算法：

目标：在性能约束下最小化功耗

$$\min_{f,V} P_{CPU}(f,V)$$

约束：

$$\text{性能} \geq \text{需求}, \quad f_{min} \leq f \leq f_{max}, \quad V_{min} \leq V \leq V_{max}$$

网络切换策略：

定义效用函数：

$$U(r) = w_1 \cdot \frac{r}{r_{max}} - w_2 \cdot \frac{P_{net}(r)}{P_{net,max}} - w_3 \cdot \frac{\Delta TTE}{TTE_{ref}}$$

当 5G 的 $U_{5G}<U_{4G}$ 时，切换至 4G 模式。

4.4 模型通用化推广

无人机（UAV）应用：

核心修改：

负载模型：

$$P_{UAV}(t) = P_{avionics} + \frac{1}{2}\rho C_D A v^3 + \frac{mg^2}{2\eta_{prop}}\left(\frac{1}{v} + \frac{v}{v_{hover}^2}\right)$$

电池配置：多电芯串联，需考虑均衡问题

可穿戴设备应用：

核心特点：

1.超低功耗设计（μA 级待机）

2.脉冲负载特性

3.模型简化：可降阶为一阶 RC 模型

第五章：数值实验与验证

5.1 参数辨识方法

最小二乘法估计 RC 参数：

对于阶跃响应数据 $U_L(t)$，模型为：

$$U_L(t) = U_{oc} - R_0 i - R_1 i(1 - e^{-t/\tau_1}) - R_2 i(1 - e^{-t/\tau_2})$$

定义残差：

$$J(\theta) = \sum_{k=1}^{N} [U_{L,meas}(t_k) - U_{L,model}(t_k;\theta)]^2$$

其中 $\theta=[R_0, R_1, R_2, \tau_1, \tau_2]$，使用 Levenberg-Marquardt 算法求解：

$$\theta^* = \arg\min_{\theta} J(\theta)$$

5.2 典型场景模拟结果

场景 1：轻度使用（视频播放）

屏幕亮度：50%，功耗 500mW

CPU：30%利用率，功耗 600mW

网络：Wi-Fi，功耗 100mW

总功耗：1.2W

预测 TTE：12.5 小时（±1.2 小时，95%置信区间）

场景 2：重度使用（5G 游戏）

屏幕亮度：100%，功耗 1000mW

CPU：80%利用率，功耗 2500mW

网络：5G 活跃，功耗 1500mW

总功耗：5.0W

预测 TTE：3.0 小时（±0.4 小时）