尚德机构 | 学习是一种信仰 SUNLANDS.COM

离散数学

LI SAN SHU XUE

(课程代码：02324）

芝士学院出品

目录

第 1 章命题与命题公式

1.1 命题与命题联结词

1.1.1 命题与命题的表示

由一个或几个已知的前提，推导出一个未知结论的思维过程称为推理。推理的基本要素就是表达这些前提的一些陈述句，每个陈述句或成立或不成立，一般来讲，限定于某种情况下，一个陈述句不可能既成立又不成立。成立或不成立可以看作是这个陈述句的一个属性，称之为真值。当陈述句成立时，就说其真值为真，表示为 T；当陈述句不成立时，就说其真值为假，表示为 F。

例如，“地球是行星”是一个陈述句，并且是正确的，即它的真值为真。而陈述句“2 是无理数”是错误的，其真值为假。具有唯一真值的陈述句称作命题，也称为语句。真值为真的命题称为真命题；真值为假的命题称为假命题。

有些陈述句并不具有唯一的真值，也就是说，它有时为真，有时为假。这样的陈述句不是命题。例如，陈述句“$x+y>5$”，它的真值要依变量 x 与 y 的值来确定。比如，当 $x=5$，$y=3$ 时 $x+y>5$ 为真；当 $x=-1$，$y=2$ 时，$x+y>5$ 为假。因此在不确定变量 x、y 的值的情况下，无法确定“$x+y>5$”的真值。像这种有时为真有时为假的陈述句不是命题。请记住，命题的真值一定是唯一的，或者为真，或者为假，不能既真又假。

有些陈述句具有唯一的真值，但是依我们目前所掌握的知识及了解的情况，不能判断它的真假。例如“宇宙中存在与地球类似的有生命体的星球”，限于人类目前的认知水平，还不知道这样的星球是否存在。但这个句子的真值是唯一的，所以它是命题。

此外，疑问句、感叹句、祈使句等都不能构成命题。

例 1.1 判断下列句子中哪些构成命题。

（1）8 不是素数；

（2）雪是黑的；

（3）到 2049 年世界人口将超过 90 亿；

（4）每台计算机都有唯一的 IP 地址；

（5）喜马拉雅山好高啊！

（6）基本粒子是不可分的；

（7）离散数学难学吗？

（8）请遵守交通规则！

（9）$x+1=2$。

解：只有陈述句才可能是命题，其他的语句如疑问句、感叹句、祈使句等都不能是命题。依据这个准则，很容易知道（5）、（7）和（8）不是命题。（5）是感叹句，（7）是一般疑问句，（8）是祈使句，这三个都不是陈述句，所以都不是命题。

在剩余的 6 个语句中，除（9）外都是命题。其中（1）是正确的，故为真命题；（2）是错误的，即为假命题；（3）所描述的情况我们目前不得而知，需要等到 20 A9 年时才能知道是对还是错，但不管怎样，它有唯一的真值，所以（3）也是命题；（4）和（6）所描述的情况需要根据专业知识来判断真假，我们知道有些计算机是具有多 IP 地址的，而现代物理学已经告诉我们，基本粒子是可分的，所以这两个都是假命题；对于（9）中所描述的情况，它的真假值取决于 x 的值，当 $x=1$ 时，它为真，当 $x\neq1$ 时，它为假。当 x 的值没有指定时，它的真假值是不确定的，也就是不唯一的，所以它不是命题。当然，当 x 的值已经确定，我们可以判断 $x+1=2$ 是否成立时，这个语句就是命题了。

总而言之，判断命题有两个条件，一是语句本身是个陈述句，二是它有唯一的真值。

实际上，还有一种特殊的陈述句也不是命题，那就是悖论。悖论是指在逻辑上可以推导出互相矛盾之结论的陈述。对于一个悖论 A，如果认为它是真的，则可以推导出 A 为假；如果认为 A 是假的，则可以推导出 A 为真。例如，“我正在说谎”就是一个悖论。读者可以自行验证。悖论不是命题，本书也不讨论悖论。

在数理逻辑中，常常使用符号来表示一个命题，就好像我们在程序中用标识符表示变量一样，用符号来表示命题的这个过程称为命题的符号化。表示命题的符号既可以是大写的英文字母，也可以是小写的英文字母，如 P 或 p 有时还可以用字母加数字来表示，为了清楚起见，数字常表示为下标，如 P_1，或 Q_2。

表示命题的符号称为命题标识符。当命题标识符表示某个确定的命题时，称为命题常量或命题常项，如果命题标识符只表示命题位置，称为命题变元或命题变项。命题变元可以表示任意一个命题，即在确定它所代表的命题之前，命题变元不具有确定的真值。当用一个具体的命题去代替命题变元时，它的真值也就确定下来了，这称为对命题变元的指派。

命题为真时，其真值用“T”或“1”来表示，为假时，其真值用“F”或“0”来表示。

例 1.2 将下面命题符号化，并指出它们的真值。

（1）π 是有理数；

（2）所有的素数都是奇数；

（3）6 是一个合数。

解：分别使用 P、Q 和 R 来表示上述三个命题：

P：π是有理数。

Q：所有的素数都是奇数。

R：6 是一个合数。

π是无理数，所以P的真值为F。2 是素数，也是偶数，除此之外，其他的素数都是奇数。Q的真值为F。因为 2 和 3 都是 6 的因子，所以 6 是合数，R的真值为T。

1.1.2 复合命题与联结词

在例 1.2 所举的命题示例中，都是不能再分解的命题，这样的命题称为原子命题或简单命题。实际中，我们常常要表达更丰富的信息，例如“如果今年有假期，我将去欧洲旅游”，这个句子中表达了两层含义，一是“今年有假期”，二是“我去欧洲旅游”，而且这两个含义之间还是有关联的，前一个是前提，后一个是结果。在自然语言中，我们常使用连词来表示两个句子之间的关系，例如本例中的“如果”。在命题符号化时，这样的连词将表示为联结词，联结词都具有特定的符号。由原子命题通过联结词联结而成的命题，称为复合命题。

一般而言自然语言都具有二义性，即有些句子的含义多于一种。在数理逻辑中，为了能精确地进行推导，命题及联结词的含义必须是确定的。

数理逻辑中常用的联结词共有五个，下面详细介绍。

（1）否定

定义 1.1 设P为命题，P的否定是一个复合命题，记作$\neg P$。符号$\neg$称作否定联结词。若P为T，若$\neg P$为F；若P为F，$\neg P$为T。命题$\neg P$读作“非P”。

由定义可知，$\neg P$是一个复合命题。复合命题的真值依命题中所含各原子命题的真值来确定，可用一张表来表示，这样的表称为真值表。联结词$\neg$的定义如表 1.1 所示。

表 1.1 $\neg$的定义

P	$\neg P$
T	F
F	T

例 1.3 给出命题P:“今天是星期五”的否定，并用自然语言表示出来。

解：P：今天是星期五。

$\neg P$：今天不是星期五。

2.合取

定义 1.2 设P、Q为两个命题，P和Q的合取是一个复合命题，记作$P \wedge Q$。符号$\wedge$称为合取联结词。当且仅当P、Q同时为T时，$P \wedge Q$为T，其余情况$P \wedge Q$为F。

P和Q的合取表示的是“P并且Q”的含义。联结词$\wedge$的定义如表 1.2 所示。

表 1.2 $\wedge$的定义

P	Q	$P \wedge Q$

T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

自然语言中的“并且”可以对应于合取，其根本的含义是表示两件事情同时成立。与此类似的词语还有“既…，又…”，“不但…，而且…”，“虽然…，但是…”，“一面…，一面…”等。但有时，表示并列的“与”“和”等词语并不对应于合取。例如，“我与王强是同学”中的“与”用在主语中，它连接的是两个并列的主语，而不是两个原子命题。所以这个命题并不是合取命题，实际上，它仅仅是一个原子命题。

例 1.4 将下面命题符号化。

（1）2 既是偶数，也是素数；

（2）我今天不但听了离散数学课，还听了数据结构课；

（3）今天的离散数学课停上，美元上涨。

解：（1）设 P:2 是偶数，Q ：2 是素数。

故（1）可表示为 $P \wedge Q$ 。

（2）设 P :我今天听了离散数学课，Q ：我今天听了数据结构课。

故（2）可表示为 $P \wedge Q$ 。

（3）设 P :今天的离散数学课停上，Q ：今天美元上涨。

故（3）可表示为 $P \wedge Q$ 。

复合命题 $P \wedge Q$ 中的两个原子命题可以互换位置，即 $P \wedge Q$ 与 $Q \wedge P$ 的含义是相同的，它们的真值表也是一样的。这表示合取 $\wedge$ 具有对称性。

自然语言除了要符合语法外，还要有合理的语义，即表达的意思要合乎逻辑。但是复合命题所含的多个原子命题之间可以没有逻辑关联性。例如（3）中的两个原子命题之间不存在任何关联关系，上没上离散数学课，不会影响美元的走势。在命题逻辑中，我们仅关心它的表示，而忽略其语义。所以它的真值只与原子命题的真值有关，与语义无关。

特别地，命题联结词“合取”可将两个互为否定的命题联结在一起。以 P 表示命题，$P \wedge \neg P$ 的真值必是 F 。如表 1.3 所示。

3.析取

定义 1.3 设 P 、Q 为两个命题，P 和 Q 的析取是一个复合命题，记作 $P \vee Q$。符号 V 称为析取联结词。当且仅当 P 、Q 同时为 F 时，$P \vee Q$ 的真值为 F ，其余情况 $P \vee Q$ 的真值为 T 。

P 和 Q 的析取表示的是“ P 或者 Q ”的含义。联结词 V 的定义如表 1.4 所示。

表 1.3 $P \wedge \neg P$ 的真值

P	$\neg P$	$P \wedge \neg P$
T	F	F
F	T	F

表 1.4 ∨ 的定义

P	Q	$P \vee Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

从上述定义可以看出，联结词析取与自然语言中的“或”有些相似。

例 1.5 将下面命题符号化。

（1）王小林是本年度校运动会的跳高或 100 米短跑的冠军。

（2）我今天或者去听离散数学课，或者去听数据结构课。

解：（1）设 P:王小林是本年度校运动会的跳高冠军，Q：王小林是本年度校运动会的 100 米短跑的冠军。

故（1）可表示为 $P \vee Q$。这个命题表达的是王小林或者是跳高冠军，或者是短跑冠军，也有可能是两个项目的冠军。

（2）设 P：我今天去听离散数学课，Q：我今天去听数据结构课。

故（2）可表示为 $P \vee Q$。这个命题表达的是我今天可能去听离散数学或者数据结构课，也可能两门课都去听。

此处，“或”表示的是“相容”的含义，也称为“同或”，即两者并不互相排斥，可能同时成立。自然语言中有时会使用“或”来表示“相斥”的含义，即用“或”连接的两者不能同时成立，这样的语句不能表示为析取。

例 1.6 分析以下的复合命题。

（1）王小林今天或者去美国，或者去欧洲。

（2）王小林或者是坐火车去北京，或者是乘飞机去北京。

解：（1）设 P:王小林今天去美国，Q：王小林今天去欧洲。

显然，如果王小林今天去了美国，他就不可能去欧洲，反之也是一样。王小林没有分身术，他只能去一个地方。所以（1）不能简单地表示为 $P \vee Q$。

（2）设 P:王小林坐火车去北京，Q：王小林乘飞机去北京。

这个命题假设王小林只需乘坐一种交通工具即可到达北京。与（1）类似，王小林不能同时既坐火车又乘飞机。$P \vee Q$ 也不能精确地表达（2）中命题的含义。

（1）和（2）所表述的这两个例子有一个共同的特点，即复合命题中的两个原子命题不会同时成立，它们之间具有相斥性，这样的“或”表示的是“异或”。实际上，（1）和（2）均可表示为 $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$。

与合取命题类似，复合命题中 $P \vee Q$ 中的两个原子命题也可以互换位置，即 $P \vee Q$ 与 $Q \vee P$ 的含义是相同的，它们的真值表也是一样的。这表示析取 ∨ 具有对称性。

4.条件

定义 1.4 设 P、Q 为两个命题，P 和 Q 组成的条件命题是一个复合命题，记作 $P \rightarrow Q$。符号称为条件联结词。当且仅当 P 的真值为 T，Q 的真值为 F 时，

$P \to Q$的真值为F，其余情况$P \to Q$的真值为T。

复合命题读作$P \to Q$读作“如果P那么Q”，亦可读为“若P则Q”。其中P

表 1.5 $\to$的定义

P	Q	$P \to Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

称为前件或前提，Q称为后件或结论。条件联结词$\to$的定义如表 1.5 所示。

条件命题表示的是，当前件发生时后件是否发生。而当前件没有发生即P为F时，后件发生或不发生都没有关系。

与合取和析取均具有对称性不同，条件命题中$P \to Q$的前件与后件不可以互换位置，即$P \to Q$与$Q \to P$的含义是不同的。所以条件联结词$\to$不具有对称性。

例 1.7 将下面命题符号化。

（1）如果今天不下雨，我就去公园锻炼。

（2）如果我考试通过，就能拿到合格证书。

解：（1）设P:今天下雨，Q：我去公园锻炼。

故（1）可表示为$\neg P \to Q$。仅当今天没有下雨而我没去公园锻炼时，命题（1）为F。（2）设P:我考试通过，Q：我拿到合格证书。

故（2）可表示为$P \to Q$。

需要注意，条件命题的前件和后件之间可以在语义上不存在逻辑关系。这与我们日常的表述是有差异的。

例 1.8 如果雪是黑的，则房间里有 20 张桌子。

解：设P:雪是黑的；Q：房间里有 20 张桌子。

本例符号化为$P \to Q$。

5.双条件

定义 1.5 设P、Q为两个命题，P和Q组成的双条件命题是一个复合命题，记作$P \leftrightarrow Q$。符号$\leftrightarrow$称为双条件联结词。当P与Q的真值相同时，$P \leftrightarrow Q$的真值为T，否则$P \leftrightarrow Q$的真值为F。

复合命题$P \leftrightarrow Q$读作P当且仅当Q。联结词的$\leftrightarrow$定义如表 1.6 所示。

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

双条件命题 $P \leftrightarrow Q$ 表示 P 与 Q 的真值是否相同。当它们的真值相同时，也可以看作 P 与 Q 是等价的，即 P 与 Q 互为充分必要条件。数学上有时也将充分必要条件表示为“*iff*”，表示“*if and only if*”即当且仅当的意思。

不难看出 $(P \to Q) \wedge (Q \to P)$ 与 $P \leftrightarrow Q$ 的逻辑关系完全一样，都表示互为充要条件。

双条件命题 $P \leftrightarrow Q$ 中的两个原子命题互为条件，所以它们也是可交换的，即 $P \leftrightarrow Q$ 与 $Q \leftrightarrow P$ 的含义是完全相同的。所以双条件联结词 $\leftrightarrow$ 具有对称性。

例 1.9 将下面命题符号化，并指出其真值。

（1）当且仅当实数 R 可以表示为分数时，R 是有理数；

（2）$\sqrt{3}$ 是无理数当且仅当加拿大位于亚洲。

解：（1）设 P：实数 R 可以表示为分数，Q：实数 R 是有理数。

则（1）可表示为 $P \leftrightarrow Q$。由数学知识可知，（1）所表述的即是有理数的定义，所以它的真值为 T。

（2）设 P：$\sqrt{3}$ 是无理数，Q：加拿大位于亚洲。

则（2）可表示为 $P \leftrightarrow Q$。由数学知识知，P 为 T，而由地理知识知，Q 为 F，所以（2）的真值为 F。

例 1.10 将下列命题符号化。

（1）如果今天不下雨而且不刮风，我会去爬山；

（2）若今天是星期一，则明天是星期二；

（3）只有今天是星期一，明天才是星期二。

解：（1）设 P：今天下雨，Q：今天刮风，R：我去爬山。

则（1）可表示为 $(\neg P \wedge \neg Q) \to R$

（2）设 P：今天是星期一，Q：明天是星期二。

则（2）可表示为 $P \to Q$。

本例还隐含着另一层意思，即如果今天不是星期一（前件为假时），则明天可能是星期二，也可能不是星期二，不得而知。或者反过来说，如果明天是星期二，则不表明今天一定是星期一。要注意，命题的含义一定要和我们日常的概念分开。

（3）设 P:今天是星期一，Q：明天是星期二。

则（3）可表示为 $Q \to P$。

命题 $p \to q$ 表示“q 是 p 的必要条件”。自然语言中表示“q 是 p 的必要条件”

有许多不同的叙述方式，例如，“只要 p，就 q”，“因为 p，所以 q”，“p 仅当 q”，“只有 q 才 p”，等等。本例中表述的另一层含义是“明天是星期二”的话，“今天一定是星期一”。

例 1.11 设 P:今天下雨，Q： 今天刮风，R： 我去爬山。将下面命题用自然语言表述。

（1）$(P \vee Q) \to \neg R$；

（2）$R \to (\neg P \wedge \neg Q)$；

（3）$P \wedge \neg Q$；

（4）$P \to \neg Q$；

（5）$Q \to P$。

解：（1）$(P \vee Q) \to \neg R$ 表示：今天要是下雨或者刮风，我就不去爬山了；

（2）$R \to (\neg P \wedge \neg Q)$ 表示：如果我去爬山了，则今天既没下雨也没刮风;

（3）$P \wedge \neg Q$ 表示：今天下雨了，但没有刮风；

（4）$P \to \neg Q$ 表示：如果今天下雨，就不会刮风；

（5）$Q \to P$ 表示：如果今天刮风，就会下雨。

1.2 命题公式的等值演算

1.2.1 命题公式

命题符号化的过程中，可以用一个符号表示一个命题。当符号 P 代表一个具体的命题时，符号 P 称为命题常项，此时 P 的真值是确定的，所以称为“常”项。这类似于数学表达式中的一个常数。而当符号 P 仅仅表示是一个命题，但并没有指明是哪个命题时，P 为命题变元。命题变元 P 可以代表任一个命题，正如数学表达式中的一个变量一样。如果给 P 代入一个真值为 T 的命题，P 的真值为 T;如果代入一个真值为 F 的命题，P 的真值为 F。在代入之前，P 的值是不确定的，所以称为“变”元。一般地，命题变元不是命题。

在表示数学操作时，我们可以用操作符将操作数连接起来，得到一个数学表达式，比如 $a+3$。同时可以使用圆括号改变操作符的运算次序，比如 2*（ $x+3$ ）。在命题逻辑中也是一样，可以使用联结词将命题连接起来，得到一个更复杂的命题，即复合命题。这里，命题类似于表达式中的操作数，联结词类似于表达式中的操作符。联结词连接的命题符号既可以是命题常项，也可以是命题变元。同样，也可以在这样的式子中添加圆括号。将命题用联结词和圆括号按一定的逻辑关系联结起来的符号串称为合式公式。

定义 1.6 命题演算的合式公式定义如下：

（1）单个命题变元和命题常项是合式公式，并称为原子命题公式；

（2）若 A 是合式公式，则（$\neg A$)是合式公式；

（3）若 A、B 是合式公式，则（$A \wedge B$），（$A \vee B$），（$A \to B$），（$A \leftrightarrow B$）是合式

公式；
（4）有限次地应用（1）～（3）形成的符号串是合式公式。

合式公式也称为命题公式或命题形式，简称为公式。

在合式公式中，当其中含有命题变元时，合式公式没有确定的真值。仅当一个公式中所有的命题变元都被指派了具体的命题时，公式才有确定的真值。这与数学表达式是类似的，如果一个表达式中含有变量，且不知道变量的值，则表达式的值也是不知道的。只有给所有变量均赋予确定的值后，表达式的值才确定下来。

与数学表达式必须要遵循语法规则一样，合式公式也必须遵循定义 1.6 中所规定的规则，这样形成的符号串才能称为公式。定义 1.6 是一个递归定义，由最基础的原子命题逐步形成最终的公式。

例 1.12 设 P、Q、R 分别代表命题变元或命题常项，给定以下字符串，判断哪些是合式公式。

（1）$(P \wedge Q)$

（2）$(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$

（3）$P \wedge Q \vee (\neg P \wedge \neg Q)$

（4）$P \vee \rightarrow Q$

解：（1）、（2）、（3）都是合式公式。实际上，合式公式最外层的括号是可以省略的，所以（1）还可以表示为：$P \wedge Q$。（2）本身已去掉了最外层的括号。（4）不是合式公式。

有意思的是（3）与（2）相比，它去掉了第一对括号。数理逻辑中规定，不影响运算次序的括号也可以省去。与数学表达式一样，合式公式中的括号可以改变运算次序，（2）与（3）相差的只是第一对括号，去掉它会不会改变运算次序呢？这要看各联结词的优先级了。命题逻辑中规定，联结词优先次序依次为：$\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$。$\wedge$ 的优先级高于 $\vee$ 的优先级，有没有括号，都要先计算 $\wedge$ 运算。因此，（2）与（3）是一样的。

综上所述，在定义 1.6 之外，合式公式还有以下的约定。

（1）合式公式的最外层括号可以省略；

（2）不影响运算次序的括号也可以省略；

（3）联结词的优先次序为：$\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$。

定义 1.7 设 A_i 是公式 A 的一部分，且 A_i 是一个合式公式，称 A_i 是 A 的子公式，或公式分量。

例 1.13 指出以下所给合式公式中的子公式有哪些。

A：$(P \vee Q) \leftrightarrow (R \rightarrow (\neg P \wedge Q))$

解：已知公式 A：$(P \vee Q) \leftrightarrow (R \rightarrow (\neg P \wedge Q))$，它的子公式有以下一些：

A_1：P

A_2：Q

A_3：R

A_4：$\neg P$

A_5 ：$P \vee Q$

A_6 ：$\neg P \wedge Q$

A_7 ：$R \to (\neg P \wedge Q)$

在命题公式中，由于有命题变元的出现，因而真值是不确定的。用命题常项替换公式中的命题变元称作指派。当将公式中出现的全部命题变元都指派成具体的命题常项之后，公式就成了真值确定的命题。

定义 1.8 设 A 为一命题公式，P_1，P_2，...，P_n 为出现在 A 中的所有命题变元，对 P_1，P 2，...，P_n 各指定一个真值称为对 A 的一种指派或赋值。若指定的一种指派使 A 的值为真，则称这组值为 A 的成真指派；若指定的一种指派使 A 的值为假，则称这组值为 A 的成假指派。

若命题公式 A 中共有命题变元心 P_1，P 2，...，P_n，给定一组指派 α_i（$i=1,2,\ldots,n$），$\alpha_i = F$ 或 $\alpha_i = T$。根据组合理论可知，含 n 个命题变元的命题公式，共有 2^n 组指派。将命题公式 A 在所有指派下的取值情况列成表，称为 A 的真值表。在真值表中，真值 T、F 也可分别用 1、0 表示。

构造真值表的具体步骤如下：

（1）找出公式中所含的全体命题变元，设为 P_1，P 2，...，P_n，列出 2^n 个赋值。赋值从 $F\ F \ldots F$ 开始，然后按二进制加法依次写出每个赋值，直到 $T\ T \ldots T$ 为止，或者从 $T\ T \ldots T$ 开始，直到 $F\ F \ldots F$ 为止；

（2）按从简到繁的顺序写出公式的各个子公式；

（3）对应各个赋值计算出各子公式的真值，直到最后计算出公式的真值。

例 1.14 分别构造下列合式公式的真值表，并分别指出其成假赋值。

（1）$P \to (Q \to R)$；（2）$(P \to Q) \to R$；（3）$(P \wedge Q) \to R$。

表 1.7 $P \to (Q \to R)$ 的真值表

P	Q	R	$Q \to R$	$P \to (Q \to R)$
F	F	F	T	T
F	F	T	T	T
F	T	F	F	T
F	T	T	T	T
T	F	F	T	T
T	F	T	T	T
T	T	F	F	F
T	T	T	T	T

$P \to (Q \to R)$ 的成假赋值有 1 个：TTF

（2）$(P \to Q) \to R$ 的真值表如表 1.8 所示。

表 1.8 $P \to (Q \to R)$ 的真值表

P	Q	R	$P \to Q$	$(P \to Q) \to R$
F	F	F	T	F
F	F	T	T	T
F	T	F	T	F
F	T	T	T	T
T	F	F	F	T
T	F	T	F	T
T	T	F	T	F
T	T	T	T	T

$(P \to Q) \to R$ 的成假赋值有三个，分别是：FFF、FTF 和 TTF。

（3）$(P \wedge Q) \to R$ 的真值表如表 1.9 所示。

表 1.9 $(P \wedge Q) \to R$ 的真值表

P	Q	R	$P \wedge Q$	$(P \wedge Q) \to R$
F	F	F	F	T
F	F	T	F	T
F	T	F	F	T
F	T	T	F	T
T	F	F	F	T
T	F	T	F	T
T	T	F	T	F
T	T	T	T	T

$(P \wedge Q) \to R$ 的成假赋值有 1 个：TTF。

从例 1.14 可以看出，有的命题公式在命题变元的不同指派下，其对应的真值与另一命题公式完全相同，如表 1.7 中的 $P \to (Q \to R)$ 与表 1.9 中的 $(P \wedge Q) \to R$。这表明了合式公式的另一个重要特性。

定义 1.9 给定两个命题公式 A 和 B，设 P_1，P_2，…，P_n 为所有出现于 A 和 B 中的原子变元，若给 P_1，P_2，…，P_n 任一组真值指派，A 和 B 的真值都相同，称 A 和 B 是等值的或等价的，记为 $A \Leftrightarrow B$。若至少存在一组真值指派，使得 A 与 B 的真值不相同，称 A 和 B 不等值或不等价，记为 $A \not\Leftrightarrow B$。

定义中的符号 $\Leftrightarrow$ 和 $A \not\Leftrightarrow B$ 都不是联结词，它只是用来说明 A 与 B 是否等值的一种记法。

由等价的定义可知，

$\neg P \vee Q \Leftrightarrow P \to Q$，$(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \Leftrightarrow P \leftrightarrow Q$。

定义 1.10 设 A 为一命题公式，若 A 在它的各种指派情况下，其取值均为真，

则称公式 A 为重言式或永真式。

定义 1.11 设 A 为一命题公式，若 A 在它的各种指派情况下，其取值均为假，则称公式 A 为矛盾式或永假式。

定义 1.12 设 A 为一命题公式，若 A 在它的各种指派情况下至少存在一组成真指派，则称 A 是可满足式。若可满足式 A 至少存在一个成假赋值，则称 A 为非重言式的可满足式。

从定义 1.10~定义 1.12 可知以下的结论：

（1）合式公式 P 是可满足式，等价于 P 至少存在一个成真赋值；

（2）重言式一定是可满足式，但可满足式不一定是重言式；

（3）若两个命题公式 P 和 Q 等价，则 $P \leftrightarrow Q$ 是重言式。

例 1.15 给定下列合式公式，哪个是重言式，哪个是矛盾式，对于可满足式，指出它的成真赋值。

（1）$\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$；

（2）$\neg(P \to Q) \wedge Q$；

（3）$\neg(P \to Q) \wedge Q \vee R$。

解：（1）$\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$ 的真值表如表 1.10 所示。

由表 1.10 可知，（1）是重言式。

表 1.10 $\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$ 的真值表

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \vee \neg Q$	$\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$
T	T	T	F	F	F	F	T
T	F	F	T	F	T	T	T
F	T	F	T	T	F	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T

（2）$\neg(P \to Q) \wedge Q$ 的真值表如表 1.11 所示

表 1.11 $\neg(P \to Q) \wedge Q$ 的真值表

P	Q	$P \to Q$	$\neg(P \to Q)$	$\neg(P \to Q) \wedge Q$
T	T	T	F	F
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	F	F

由表 1.11 可知，（2）是矛盾式。

（3）$\neg(P \rightarrow Q) \wedge Q \vee R$ 的真值表如表 1.12 所示。

表 1.12 $\neg(P \rightarrow Q) \wedge Q \vee R$ 的真值表

P	Q	R	$P \rightarrow$	$\neg(P \rightarrow Q)$	$\neg(P \rightarrow Q) \wedge Q$	$\neg(P \rightarrow Q) \wedge Q \vee R$
T	T	T	T	F	F	T
T	T	F	T	F	F	F
T	F	T	F	T	F	T
T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	T	F	F	T
F	T	F	T	F	F	F
F	F	T	T	F	F	T
F	F	F	T	F	F	F

由表 1.12 可知，（3）是可满足的，其成真赋值分别是：$T\ T\ T$、$T\ F\ T$、$F\ T\ T$ 和 $F\ F\ T$。

重言式常记为 T，矛盾式常记为 F。

我们已经知道，含 n 个命题变元的命题公式共有 2^n 组指派，另一方面，含 n 个命题变元的命题公式会有无穷多个。因此，这无穷多个命题公式中，存在两个公式 P 与 Q，它们的真值表是相同的，即 P 与 Q 是等值的。实际上，对任一个公式 P，都存在无穷多个公式与 P 等价。

在命题逻辑中，常用的命题定律列在表 1.13 中。

表 1.13 常用的命题定律

双重否定律	$A \Leftrightarrow \neg\neg A$
幂等律	$A \Leftrightarrow A \vee A, A \Leftrightarrow A \wedge A$
结合律	$(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$ $(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$
交换律	$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$ $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$
分配律	$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$（$\vee$ 对 $\wedge$ 的分配律） $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$（$\wedge$ 对 $\vee$ 的分配律）
吸收律	$A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$，$A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$
德摩根律	$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$，$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$
同一律	$A \vee F \Leftrightarrow A$，$A \wedge T \Leftrightarrow A$
零律	$A \vee T \Leftrightarrow T, A \wedge F \Leftrightarrow F$
排中律	$A \vee \neg A \Leftrightarrow T$
否定律	$A \wedge \neg A \Leftrightarrow F$

蕴涵等值式	$A \to B \Leftrightarrow \neg A \vee B$
等价等值式	$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \to B) \wedge (B \to A)$
假言易位	$A \to B \Leftrightarrow \neg B \to \neg A$
等价否定等值式	$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \neg A \leftrightarrow \neg B$
归谬论	$(A \to B) \wedge (A \to \neg B) \Leftrightarrow \neg A$

1.2.2 等值演算与蕴涵式

研究两个公式是否等值有两种方法，一是基于真值表，看看两个公式的真值表是否完全相同。二是基于表 1.13 中列出的常用命题定律。对于比较复杂的公式，第二种方法更方便，也更简捷。由已知的等值式推演出另外一些等值式的过程称为等值演算或等价变换，这是布尔代数或逻辑代数的重要组成部分。等值演算基于下列置换规则定理。

定理 1.1 设 $\Phi(A)$ 是含子公式 A 的命题公式，使用子公式 B 置换 $\Phi(A)$ 中 A 的所有出现，得到命题公式 $\Phi(B)$，若则 $\Phi(A) \Leftrightarrow \Phi(B)$。

证明：因为若 $B \Leftrightarrow A$，那么在任意的真值赋值下 B 和 A 的真值都相同，把它们代入 $\Phi(x)$ 得到的结果当然也相同，从而 $\Phi(A) \Leftrightarrow \Phi(B)$。　证毕

例 1.16 用等值演算法验证等值式：$P \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$

证明：右= $(P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$

$\Leftrightarrow P \wedge (Q \vee \neg Q)$　(分配律)

$\Leftrightarrow P \wedge T$　(排中律)

$\Leftrightarrow P =$ 左　(同一律)　证毕

例 1.17 用等值演算法验证不等值式：$(P \to Q) \to R \not\Leftrightarrow P \to (Q \to R)$

证明：在例 1.14 中，通过构造 $(P \to Q) \to R$ 与 $P \to (Q \to R)$ 的真值表（表 1.8 和表 1.7)，我们已经看到这两个公式是不等值的，现在再采用等值演算法证明这个结论。

左= $(P \to Q) \to R$

$\Leftrightarrow \neg(P \to Q) \vee R$　(蕴涵等值式)

$\Leftrightarrow \neg(\neg P \vee Q) \vee R$　(蕴涵等值式)

$\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee R$　(德摩根律)

右= $P \to (Q \to R)$

$\Leftrightarrow \neg P \vee (Q \to R)$　(蕴涵等值式)

$\Leftrightarrow \neg P \vee (\neg Q \vee R)$　(蕴涵等值式)

$\Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q) \vee R$　(结合律)

$(P \wedge \neg Q) \vee R$ 与 $(\neg P \vee \neg Q) \vee R$ 是不相同的，当 R 取 F 时，两个式子的真值分别取决于 $P \wedge \neg Q$ 和 $\neg P \vee \neg Q$ 的真值。P 取 F 时，$P \wedge \neg Q$ 为 F，而 $\neg P \vee \neg Q$ 为 T。由此可知 F X F（X 表示不论 Q 取何值）使得 $(P \wedge \neg Q) \vee R$ 为 F，但使 $(\neg P \vee \neg Q) \vee R$ 为 T，即 F X F 是 $(P \to Q) \to R$ 的成假赋值，但是 $P \to (Q \to R)$ 的成真赋值。故 $(P \to Q) \to R \not\Leftrightarrow P \to (Q \to R)$。　证毕

例 1.18 用等值演算法验证等值式：$(P \vee Q) \to R \Leftrightarrow (P \to R) \wedge (Q \to R)$

证明：方法一自左向右证明。

左 = $(P\vee Q)\to R$

$\Leftrightarrow \neg(P\vee Q)\vee R$ （蕴涵等值式）

$\Leftrightarrow (\neg P\wedge\neg Q)\vee R$ （德摩根律）

$\Leftrightarrow (\neg P\vee R)\wedge(\neg Q\vee R)$ （分配律）

$\Leftrightarrow (P\to R)\wedge(Q\to R)=$右 （蕴涵等值式）

方法二　自右向左证明。

右 = $(P\to R)\wedge(Q\to R)$

$\Leftrightarrow (\neg P\vee R)\wedge(\neg Q\vee R)$ （蕴涵等值式）

$\Leftrightarrow (\neg P\wedge\neg Q)\vee R$ （分配律）

$\Leftrightarrow \neg(P\vee Q)\vee R$ （德摩根律）

$\Leftrightarrow (P\vee Q)\to R=$左 （蕴涵等值式）

故 $(P\vee Q)\to R\Leftrightarrow(P\to R)\wedge(Q\to R)$ 证毕

由命题定律证明等值式时，既可以从左向右证明（如例 1.18 中方法一所示），也可以从右向左证明（如例 1.18 中方法二所示），还可以左、右同时演算，让它们都等于一个中间结果，从而证明左、右等值。

在证明两个命题公式是等值的时候，除了上述所说的真值表法及使用命题定律法之外，还可以应用下述定理进行推演。

定理 1.2 设 A、B 为两个命题公式，$A\Leftrightarrow B$ 当且仅当 $A\leftrightarrow B$ 为一个重言式。

证明：若 $A\Leftrightarrow B$ 则 A、B 有相同真值，$A\leftrightarrow B$ 永为 T;若 $A\leftrightarrow B$ 为重言式，则 $A\leftrightarrow B$ 永为 T，故 A、B 的真值相同，即 $A\Leftrightarrow B$。　证毕

定义 1.13 当且仅当 $P\to Q$ 是一个重言式时，我们称 “P 蕴涵 Q” ，并记作 $P\Rightarrow Q$。

$P\Rightarrow Q$ 称 P 蕴涵 Q 或蕴涵式，亦称作永真条件式。

蕴涵式有下列性质：

（1）对任意公式 A，有 $A\Rightarrow A$;

对任意公式 A、B 和 C,若 $A\Rightarrow B$，$B\Rightarrow C$ 则 $A\Rightarrow$C;

对任意公式 A、B 和 C，若 $A\Rightarrow B$，$A\Rightarrow C$ 则 $A\Rightarrow(B\wedge C)$

对任意公式 A、B 和 C,若 $A\Rightarrow C$，$B\Rightarrow$C，有 $A\vee B\Rightarrow C$。

证明：(（1）显然。

下面证明（2）。

设 $A\Rightarrow B, B\Rightarrow C$，则 $A\to B$ 和 $B\to C$ 均为重言式。分以下情况讨论：

①如果 A 的真值为 T，由 $A\to B$ 是重言式，则 B 的真值为 T，由 $B\to C$ 为重言式，得 C 的真值为 T，即 $A\to C$ 为 T。

②如果 A 的真值为 F，则 $A\to C$ 必为 T。

综上，因为 $A\to C$ 是重言式，所以 $A\Rightarrow C$。

下面证明（3）。

设 $A\Rightarrow B$，$A\Rightarrow C$,则 $A\to B$ 和 $A\to C$ 均为重言式。分以下情况讨论：

①如果 A 的真值为 T ,由于 $A\to B$ 和 $A\to C$ 是重言式 ,则 B 和 C 的真值均为 T，

得到 $B\wedge C$ 的真值为 T，即 $A\to(B\wedge C)$ 为 T。

②如果 A 的真值为 F，则 $A\to(B\wedge C)$ 必为 T。

综上，因为 $A\to(B\wedge C)$ 是重言式，所以 $A\Rightarrow(B\wedge C)$。

下面证明（4）。

设 $A\Rightarrow C$，$B\Rightarrow C$，则 $A\to C$ 和 $B\to C$ 均为重言式。分以下情况讨论：

①如果 A 的真值为 T，B 的真值为 T，则 $A\vee B$ 为 T。由 $A\to C$ 是重言式，则 C 的真值为 T，即 $A\vee B\to C$ 为 T。

②如果 A 的真值为 T，B 的真值为 F，则 $A\vee B$ 为 T。由 $A\to C$ 是重言式，则 C 的真值为 T，$A\vee B\to C$ 为 T。

③如果 A 的真值为 F，B 的真值为 T，则 $A\vee B$ 为 T。由 $B\to C$ 是重言式，则 C 的真值为 T，即 $A\vee B\to C$ 为 T。

④如果 A 的真值为 F，B 的真值为 F，则 $A\vee B$ 为 F，则 $A\vee B\to C$ 为 T。

综上，因为 $A\vee B\to C$ 是重言式，所以 $A\vee B\Rightarrow C$。 证毕

定理 1.3 设 A、B 为任意两个命题公式，$A\Leftrightarrow B$ 的充分必要条件是 $A\Rightarrow B$ 且 $B\Rightarrow A$。

证明：必要性 若 $A\Leftrightarrow B$ 由定理 1.2 可知，$A\leftrightarrow B$ 为重言式。

由等价等值式有 $A\leftrightarrow B\Leftrightarrow(A\to B)\wedge(B\to A)$，故 $A\to B$ 与 $B\to A$ 都为 T，所以 $A\Rightarrow B$ 且 $B\Rightarrow A$。

充分性 若 $A\Rightarrow B$ 且 $B\Rightarrow A$，则必有 $A\to B$ 和 $B\to A$ 均为重言式。

因此 $A\leftrightarrow B$ 为重言式，$A\Leftrightarrow B$ 成立。 证毕

根据定理 1.3 可知，要证 $P\Leftrightarrow Q$，只需证明 $P\Rightarrow Q$ 且 $Q\Rightarrow P$ 即可。

但如何证明蕴涵式 $P\Rightarrow Q$ 呢？除了利用真值表法证明 $P\to Q$ 是重言式外，还有另外两种方法：

（1）对于 $P\to Q$，除 P 的真值取 T、Q 的真值取 F 外，其余情况 $P\to Q$ 真值都为 T。故要证 $P\Rightarrow Q$，只需对 $P\to Q$ 的前件 P 指定真值为 T，若由此推出 Q 的真值亦为 T，则 $P\to Q$ 是重言式，即 $P\Rightarrow Q$ 成立。

（2）由于 $(P\to Q)\Leftrightarrow(\neg Q\to\neg P)$，所以要证 $P\to Q$ 是重言式，只需证 $\neg Q\to\neg P$ 是重言式，亦即证明假定后件 Q 的真值取 F（$\neg Q$ 为真），由此推出 P 的真值为 F（$\neg P$ 为真），即推证了 $\neg Q\Rightarrow\neg P$ 成立，即 $P\Rightarrow Q$ 成立。

例 1.19 推证 $\neg Q\wedge(P\to Q)\Rightarrow\neg P$。

证明：方法一

假定，$\neg Q\wedge(P\to Q)$ 为 T，

则 $\neg Q$ 为 T 且 $P\to Q$ 为 T，进而得知 Q 为 F。

若 P 为 T 及 $P\to Q$ 为 T，知 Q 必为 T。矛盾。

故 P 只能为 F，即 $\neg P$ 为 T。

方法二

假定 $\neg P$ 为 F，则 P 为 T。

（a）若 Q 为 F，则 $P\to Q$ 为 F，$\neg Q\wedge(P\to Q)$ 为 F。

（b）若Q为T，则$\neg Q$为F，$\neg Q \wedge (P \to Q)$为F。

所以$\neg Q \wedge (P \to Q) \Rightarrow \neg P$成立。 证毕

有一些重要的重言蕴涵式，称为推理定律，如表 1.14 所示。

表 1.14 推理定律

$P \wedge Q \Rightarrow P$	化简律
$P \wedge Q \Rightarrow Q$	化简律
$P \Rightarrow (P \vee Q)$	附加律
$\neg P \Rightarrow P \to Q$	变形附加律
$Q \Rightarrow P \to Q$	变形附加律
$\neg(P \to Q) \Rightarrow P$	变形简化律
$\neg(P \to Q) \Rightarrow \neg Q$	变形简化律
$P \wedge (P \to Q) \Rightarrow Q$	假言推理
$(P \to Q) \wedge \neg Q \Rightarrow \neg P$	拒取式
$(P \vee Q) \wedge \neg Q \Rightarrow P$	析取三段论
$(P \to Q) \wedge (Q \to R) \Rightarrow (P \to R)$	条件三段论
$(P \leftrightarrow Q) \wedge (Q \leftrightarrow R) \Rightarrow (P \leftrightarrow R)$	等价三段论
$(P \to Q) \wedge (R \to S) \wedge (P \wedge R) \Rightarrow Q \wedge S$	合取构造二难
$(P \to Q) \wedge (R \to S) \wedge (P \vee R) \Rightarrow Q \vee S$	析取构造二难
$P \to Q \Rightarrow (P \vee R) \to (Q \vee R)$	前后件附加
$P \to Q \Rightarrow (P \wedge R) \to (Q \wedge R)$	前后件附加

1.3 联结词完备集

1.1 节中介绍了五个联结词，分别是：$\neg$、$\wedge$、$\vee$、$\to$和$\leftrightarrow$，并且规定了它们的运算次序。由这些联结词作用于原子命题后可以构成各种命题。给定任意两个原子命题P和Q，它们所能构成的不同真值结果共有 16 种，可以证明，这五个联结词已足够用来构成想要的任一复合命题。

定义 1.14 设S是一个联结词集合，如果任何n（$n \geq 1$)元真值函数都可以由仅含S中的联结词构成的公式表示，则称S是联结词完备集。

根据定义可知，联结词集$\{\neg,\wedge,\vee,\to,\leftrightarrow\}$是完备集。

由命题等值演算中可知，有些联结词可以转换为其他的联结词，对同一个命题公式可通过等值公式的转换，以不同的形式表示出来。

例如，由等价等值式$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \to Q) \wedge (Q \to P)$，可把包含$\leftrightarrow$的公式等价变换为包含“$\wedge$”和“$\to$”的公式。这样，由联结词集$\{\neg,\wedge,\vee,\to,\leftrightarrow\}$组合而成的所有命题公式，就可由联结词集$\{\neg,\wedge,\vee,\to\}$来表示。由此得到，联结词集$\{\neg,\wedge,\vee,\to\}$也是

完备集，而且是比$\{\neg,\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow\}$元素个数更少的集合。我们还可以进一步减少这个集合中的元素个数。

由蕴涵等值式$P\rightarrow Q\Leftrightarrow\neg P\vee Q$说明包含“$\rightarrow$”的公式可以变换为包含“$\neg$”和“V”的公式。由此，我们又可以简化联结词集，得到$\{\neg,\wedge,\vee\}$。则联结词集$\{\neg,\wedge,\vee\}$也是完备集。

最后，由德摩根律$\neg(A\vee B)\Leftrightarrow\neg A\wedge\neg B$和$\neg(A\wedge B)\Leftrightarrow\neg A\vee\neg B$，可将“$\wedge$”，与“V”相互转换。联结词集$\{\neg,\vee\}$或 $\{\neg,\wedge\}$都是完备集。

可以证明，从这两个集合中再减少任何一个元素，都不再是完备集。我们把$\{\neg,\vee\}$及$\{\neg,\wedge\}$称作命题公式的最小联结词完备集。

由上面的讨论可知，联结词完备集可有以下几种：

（1）$S_1=\{\neg,\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow\}$

（2）$S_2=\{\neg,\wedge,\vee,\rightarrow\}$

（3）$S_3=\{\neg,\wedge\}$

（4）$S_4=\{\neg,\vee\}$

（5）$S_5=\{\neg,\rightarrow\}$

而 $\{\neg\}$、 $\{\vee\}$、 $\{\wedge\}$、 $\{\vee,\wedge\}$或 $\{\neg,\leftrightarrow\}$等 都不是命题公式的联结词完备集。

对于联结词，我们规定其运算次序为：$\neg$、$\wedge$、$\vee$、$\rightarrow$、$\leftrightarrow$。

在计算机硬件设计中，出现了“与非门”或“或非门”这样的结构，对应于此，定义了以下两个新的联结词。

定义 1.15 设 P、 Q为两个命题，P与Q的否定式是一个复合命题，称作P与 Q的与非式，记作$P\uparrow Q$，即$P\uparrow Q\Leftrightarrow\neg(P\wedge Q)$符号$\uparrow$称为与非联结词。

定义 1.16 设 P、Q为两个命题，P或 Q的否定式是一个复合命题，称作P与 Q的或 非式，记作$P\downarrow Q$，即$P\downarrow Q\Leftrightarrow\neg(P\vee Q)$。符号$\downarrow$称为或非联结词。

可以证明，$\{\uparrow\}$和$\{\downarrow\}$都是联结词完备集。

练习题

1.下列语句中哪个是真命题？（ ）

A 我正在说谎。

B 严禁吸烟。

C 如果 1+2=3，那么雪是黑的。

D 如果 1+2=5，那么雪是黑的。

2.下面联结词中不具有对称性的是（ ）

A $\wedge$

B $\rightarrow$

C $\vee$

D $\leftrightarrow$

3.含 n 个命题变元的任一命题公式的指派个数是（ ）

A 2n

B 2^n

C n^2

D 2^{2n}

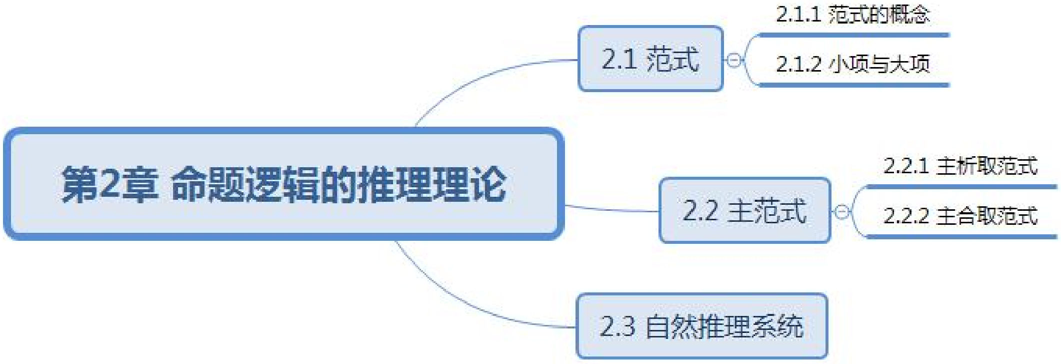
答案

1.D

2.B

3.B

第 2 章 命题逻辑的推理理论



2.1 范式

2.1.1 范式的概念

定义 2.1 命题变元及其否定统称为文字。仅由有限个文字构成的析取式称作简单析取式。仅由有限个文字构成的合取式称作简单合取式。

例如，P，$\neg Q$，$P\vee\neg P$、$\neg P\vee Q$、$\neg P\vee\neg Q\vee R$ 和 $P\vee\neg Q\vee R$ 都是简单析取式。而 P、$\neg Q$、 $P\vee\neg P$、 $\neg P\wedge Q$、$\neg P\wedge\neg Q\wedge R$、和 $P\wedge\neg Q\wedge R$ 都是简单合取式。实际上，简单析取式中不包含除析取联结词之外的其他联结词，类似地，简单合取式中不包含除合取联结词之外的其他联结词。

定理 2.1 简单析取式和简单合取式有以下性质。

（1）一个简单析取式是重言式，当且仅当它同时含某个命题变元及它的否定式。

（2）一个简单合取式是矛盾式，当且仅当它同时含某个命题变元及它的否定式。

证明：（1）设 A 是含 n 个文字的简单析取式，若 A 中既含某个命题变元 p_j，又含它的否定式 $\neg p_j$，由交换律、排中律和零律可知，A 为重言式。

反之，若 A 为重言式，则它必同时含某个命题变元及它的否定式。否则，A 中的不带否定符的命题变元都取 F 值，带否定符的命题变元都取 T 值，此赋值是 A 的成假赋值，这与 A 是重言式相矛盾。

（2）设 A 是含 n 个文字的简单合取式，若 A 中既含某个命题变元 p_j，又含它的否定式 $\neg p_j$，则由交换律、否定律和零律可知，A 为矛盾式。

反之，若 A 为矛盾式，则 A 中必同时含某个命题变元及它的否定式。否则，A 中的不带否定符的命题变元都取 T 值，带否定符的命题变元都取 F 值，此赋值是 A 的成真赋值，这与 A 是矛盾式相矛盾。证毕

例如，

$P \vee \neg P \vee \neg Q \vee R \Leftrightarrow T \vee \neg Q \vee R \Leftrightarrow T$, $P \wedge \neg P \wedge \neg Q \wedge R \Leftrightarrow F \wedge \neg Q \wedge R \Leftrightarrow F$ 。

定义 2.2 一个命题公式称为合取范式，当且仅当它具有形式：$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$（ $n \geq 1$ ），其中 A_1 ，A_2 ，…，A_n 都是简单析取式。

例如，$(P \vee R) \wedge (P \vee \neg Q) \wedge (\neg R \vee \neg Q)$ 是一个合取范式，它由三个简单析取式的合取组成。

合取范式是由简单析取式的合取构成的，根据合取联结词的定义可知，当且仅当每个简单析取式都是重言式时，合取范式是重言式。

定义 2.3—个命题公式称为析取范式，当且仅当它具有形式：$A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$（ $n \geq 1$ ），其中 A_1 ，A_2 ，…，A_n 都是简单合取式。

例如，$(\neg P \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg Q \wedge R)$ 是一个析取范式，它由三个简单合取式的析取组成。

析取范式是由简单合取式的析取构成的，根据析取联结词的定义可知，当且仅当每个简单合取式都是矛盾式时，析取范式是矛盾式。

实际上，有些命题公式既可以看成是析取范式也可以看成是合取范式。例如 $\neg P \wedge Q \wedge R$ 既可以看成是由一个简单合取式构成的析取范式，也可以看成是由三个简单析取式构成的合取范式；类似地，$\neg P \vee Q \vee R$ 既可以看成是由三个简单合取式构成的析取范式，也可以看成是由一个简单析取式构成的合取范式。

对任何一个命题公式，都存在与之等值的合取范式或析取范式。求等值合取范式或析取范式的步骤如下。

①任何公式都可变换为仅含联结词完备集 $\{\neg, \wedge, \vee\}$ 中的联结词的公式。利用等价等值式 $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \to B) \wedge (B \to A)$ 与蕴涵等值式 $A \to B \Leftrightarrow \neg A \vee B$ ，可以消去公式中出现的联结词 $\leftrightarrow$ 和 $\to$ ；

② 利用双重否定律 $\neg\neg A \Leftrightarrow A$ 和德摩根律 $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ 、$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$ 进行等值变换，保证在范式中不出现形如 $\neg\neg A$ 、$\neg(A \wedge B)$ 、$\neg(A \vee B)$ 这样的子公式，实际上，使用德摩根律是让否定联结词 $\neg$ 出现在命题变元的前面，而不是括号的前面；

③利用分配律 $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$、$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ 进行等值变换，保证在析取范式中不出现形如 $A \wedge (B \vee C)$ 的子公式，在合取范式中不出现形如 $A \vee (B \wedge C)$ 的子公式。

例 2.1 求 $(P \wedge (Q \to R)) \to S$ 的析取范式和合取范式。

解：先求析取范式。

$(P \wedge (Q \to R)) \to S \Leftrightarrow (P \wedge (\neg Q \vee R)) \to S$

$\Leftrightarrow \neg(P \wedge (\neg Q \vee R)) \vee S$

$\Leftrightarrow \neg P \vee (Q \wedge \neg R) \vee S$

再求合取范式。

$(P \wedge (Q \to R)) \to S \Leftrightarrow (P \wedge (\neg Q \vee R)) \to S$

$\Leftrightarrow \neg(P \wedge (\neg Q \vee R)) \vee S$

$\Leftrightarrow \neg P \vee (Q \wedge \neg R) \vee S$

$\Leftrightarrow (\neg P \vee S) \vee (Q \wedge \neg R)$

$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q \vee S) \wedge (\neg P \vee \neg R \vee S)$

一般来讲，一个命题公式的合取范式或析取范式并不是唯一的，例如 $P \vee (Q \wedge R)$ 是一个析取范式，它亦可写成：

$$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge P) \vee (P \wedge R) \vee (P \wedge Q) \vee (Q \wedge R)$$

为了能够唯一表示合式公式，我们进一步规范合式公式的形式。为此，先介绍小项与大项的概念。

2.1.2 小项与大项

定义 2.4 n 个命题变元的简单合取式，称作布尔合取或极小项，简称为小项，其中每个命题变元与它的否定不能同时存在，但该命题变元必须出现且仅出现一次，或以变元的形式，或以变元的否定形式。

两个命题变元 P 和 Q 的小项共有 4 个，分别是：$P \wedge Q$、$P \wedge \neg Q$、$\neg P \wedge Q$ 和 $\neg P \wedge \neg Q$。类似地，三个命题变元 P、Q、R 的小项共有 8 个，分别是：$P \wedge Q \wedge R$、$P \wedge Q \wedge \neg R$、$P \wedge \neg Q \wedge R$、$P \wedge \neg Q \wedge \neg R$、$\neg P \wedge Q \wedge R$、$\neg P \wedge Q \wedge \neg R$、$\neg P \wedge \neg Q \wedge R$ 和 $\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$。按惯例，小项中代表命题变元的各字母按英文字母表的次序排列。比如，小项 $P \wedge Q$ 通常不会写为 $Q \wedge P$，小项 $\neg P \wedge \neg Q \wedge R$ 也不会写为 $R \wedge \neg P \wedge \neg Q$。

一般来说，n 个命题变元 P_1，P_2，…，P_n 共有 2^n 个小项。为了表示的更直观，我们以字母 m 加上由编码构成的下标来表示每个小项，其中下标是一个 n 位的二进制数。在任一个小项中，若出现的是命题变元 P_i，则对应该小项编码的第 i 位为 1，若出现的是命题变元 P_i 的否定，则对应的第 i 位为 0。例如小项（$\neg P \wedge Q \wedge R$）的编码是 011，所以表示为 m_{011}。为了简单起见，有时也用 n 位二进制对应的十进制数 i 来表示小项的编码，如 m_{011} 也可表示为 m_3。

设 P、Q、R 为三个命题变元，真值 T 和 F 分别用“1”和“0”来表示，含三个命题变元的所有小项的真值表及对应的编码如表 2.1 所示。

表 2.1 三个命题变元的小项的真值表

P	Q	R	$\neg P\wedge Q\wedge\neg R$ m_{000}/m_0	$\neg P\wedge\neg Q\wedge R$ m_{001}/m_1	$\neg P\wedge Q\wedge\neg R$ m_{010}/m_2	$\neg P\wedge Q\wedge R$ m_{011}/m_3
0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0
0	1	0	0	0	1	0
0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0
P	Q	R	$P\wedge\neg Q\wedge\neg R$ m_{100}/m_4	$P\wedge\neg Q\wedge R$ m_{101}/m_5	$P\wedge Q\wedge\neg R$ m_{110}/m_6	$P\wedge Q\wedge R$ m_{111}/m_7
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0
1	0	1	0	1	0	0
1	1	0	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	1

从表 2.1 中可以看到小项有如下性质：

（1）每个小项具有一个相应编码，且只在一种情况下真值为T，即按照其编码值进行指派时，其真值为T,其他情况下，真值都为F。故每个小项有一个成真赋值，有2^n-1种成假赋值。每个小项的成真赋值均不相同。

例如，小项（$P\wedge\neg Q\wedge R$)记为m_{101}，当P真值为T，Q真值为F，R真值为T时，小项（$P\wedge\neg Q\wedge R$）的真值为T，其余2^n-1种指派情况，该小项真值都为F。

（2）任意两个不同小项的合取式为矛盾式。

证明：每个小项均只有一个成真赋值，对任意两个不同的小项m_i和m_j，它们的成真赋值是不同的。对任一种指派，不能使m_i和m_j同时为T，则$m_i\wedge m_j$为F。根据零律，所有小项的合取式为矛盾式。证毕

例如，

$$m_{001}\wedge m_{100}=(\neg P\wedge\neg Q\wedge R)\wedge(P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\Leftrightarrow\neg P\wedge P\wedge\neg Q\wedge R\wedge\neg R\Leftrightarrow F$$

（3）全体小项的析取式为重言式。

$$\sum_{i=0}^{2^n-1}m_i=m_0\vee m_1\vee\ldots\vee m_{2^n-1}\Leftrightarrow T$$

证明：任给一种指派$\alpha_0\alpha_1...\alpha_{n-1}$，它必定为某个小项的成真指派。具体来说，设有编码$\alpha_0\alpha_1...\alpha_{n-1}=k$，则$k$为$m_k$的成真赋值，即$m_k$的真值为$T$。根据零律，所有小项的析取为重言式。证毕

定义 2.5 n个命题变元的简单析取式，称作布尔析取或极大项，简称为大项，其中每个命题变元与它的否定不能同时存在，但该命题变元必须出现且仅出现一次，或以变元的形式，或以变元的否定形式。

与小项情况类似，对每个大项也可以进行编码。以字母M加上由编码构成的下标来表示每个大项，其中下标是一个n位的二进制数。在任一个大项中，若出现的是命题变元P_i，则对应该大项编码的第i位为 0，若出现的是命题变元P_i的否定，则对应的第i位为 1。

例如，由两个命题变元P和Q构成的大项共有 4 个，分别是：$P\vee Q$、$P\vee\neg Q$、$\neg P\vee Q$和$\neg P\vee\neg Q$，对应的编码依次是：M_{00}、M_{01}、M_{10}和M_{11}，亦可写成M_i（$i=0,1,2,3$）。

三个命题变元P、Q、R构成的大项共有 8 个，分别是：$P\vee Q\vee R$、$P\vee Q\vee\neg R$、$P\vee\neg Q\vee R$、$P\vee\neg Q\vee\neg R$、$\neg P\vee Q\vee R$、$\neg P\vee Q\vee\neg R$、$\neg P\vee\neg Q\vee R$和$\neg P\vee\neg Q\vee\neg R$，对应的编码依次是：$M_{000}$、$M_{001}$、$M_{010}$、$M_{011}$、$M_{100}$、$M_{101}$、$M_{110}$和$M_{111}$，或记为$M_i$（$i=0,1,2,3,4,5,6,7$）。各大项的成假赋值及对应的编码如表 2.2 所示。

表 2.2 三个命题变元的大项的成假赋值及编码

大项	成假赋值	编码
$P\vee Q\vee R$	000	M_0
$P\vee Q\vee\neg R$	001	M_1
$P\vee\neg Q\vee R$	010	M_2
$P\vee\neg Q\vee\neg R$	011	M_3
$\neg P\vee Q\vee R$	100	M_4
$\neg P\vee Q\vee\neg R$	101	M_5
$\neg P\vee\neg Q\vee R$	110	M_6
$\neg P\vee\neg Q\vee\neg R$	111	M_7

与小项的性质类似，大项有如下性质：

（1）每个大项具有一个相应编码，且只在一种情况下真值为F，即按照其编码值进行指派时，其真值为F，其他情况下，真值都为T。故每个大项有一个成假赋值，有2^n-1种成真赋值。每个大项的成假赋值均不相同。

例如，大项（$P\vee\neg Q\vee R$）的编码为M_{010}，当P真值为F，Q真值为T，R真值为F时，大项（$P\vee\neg Q\vee R$）的真值为F，其余2^n-1种指派情况，该大项真值都为T。

（2）任意两个不同大项的析取式为重言式。

这个性质的证明类似于小项性质（2）的证明。证明略。

例如，$M_{001} \vee M_{100} = (P \vee Q \vee \neg R) \vee (\neg P \vee Q \vee R) \Leftrightarrow P \neg \vee P \vee Q \vee \neg R \vee R \Leftrightarrow T$

（3）全体大项的合取式为矛盾式。

$$\sum_{i=0}^{2^n-1} M_i = M_0 \wedge M_1 \wedge \ldots \wedge M_{2^n-1} \Leftrightarrow F$$

这个性质的证明类似于小项性质（3）的证明。证明略。

设 n 个命题变元 P_1，P_2，…，P_n，给定具有相同编码的小项和大项 m_i 与 M_i，根据小项与大项的定义，很容易验证它们满足关系：$\neg m_i \Leftrightarrow M_i$，$\neg M_i \Leftrightarrow m_i$。例如，$m_{001} = \neg P \wedge \neg Q \wedge R$，$M_{001} = P \vee Q \vee \neg R$，它们满足等式：$\neg m_{001} \Leftrightarrow M_{001}$，$\neg M_{001} \Leftrightarrow m_{001}$。

2.2 主范式

主范式包括主析取范式和主合取范式。

2.2.1 主析取范式

定义 2.6 对于给定的命题公式，如果有一个等价公式，它仅由小项的析取所组成，则该等价式称为原式的主析取范式。

定理 2.2 在公式的真值表中，所有真值为 T 的指派所对应的小项的析取，即构成该公式的主析取范式。

证明：设给定公式为 A，其真值为 T 的指派所对应的小项为 m_{i1}，m_{i2}，…，m_{ik}，这些小项的析取式记为 B，即 $B = m_{i1} \vee m_{i2} \vee \ldots \vee m_{ik}$，真值为 F 的指派所对应的小项为 m_{j1}，m_{j2}，…，m_{jt}，$t = 2^n - k$。

首先对使 A 为 T 的某一指派，必存在某个小项的真值为 T，而该小项必定含在 B 中，设其为 m_{iu} $(1 \le u \le k)$，即 m_{iu} 在此指派下真值为 T。由零律可知，B 的真值为 T。

其次，对使 A 为 F 的某一指派，其对应的小项必定不包含在 B 中，即该指派使得 m_{i1}，m_{i2}，…，m_{ik} 的真值均为 F，故 $B = m_{i1} \vee m_{i2} \vee \ldots \vee m_{ik} = F$。

A 与 B 在相应指派下具有相同的真值，综上，$A \Leftrightarrow B$。

求任一合式公式的主析取范式有多种方法，定理 2.2 是其中的一种方法。对于所给的任一合式公式，先求出其真值表，然后列出所有真值为 T 的小项，并求它们的析取，即得该合式公式的主析取范式。

定理 2.3 任何命题公式都存在与之等值的主析取范式，并且是唯一的。

证明：存在性可由定理 2.2 保证。下面采用反证法来证明唯一性。

任给含 n 个命题变元的可满足命题公式 A，若 A 有两个不同的主析取范式 A_1 和 A_2，因主析取范式是与原式等价的合式公式，则必有 $A_1 \Leftrightarrow A_2$。由于 A_1 和 A_2 是两个不同的主析取范式，它们所含的小项不完全相同，必存在某个小项只存在于 A_1 和 A_2 两者之一中，不失一般性，设小项 m_i 只在 A_1 中，但不在 A_2 中。设 m_i 在 A_1 中有一组成真指派 S，在 S 指派下，主析取范式 A_1 为真。由于 A_2 不包含 m_i，使 m_i 为 T 的指派均是其他小项的成假指派，故该指派下 A_2 为 F。这与 $A_1 \Leftrightarrow A_2$ 矛盾。故主析取范式是唯一的。 证毕

除了采用真值表法可求合式公式的主析取范式外，还可采用等值演算方法求解。步骤如下。

①采用 2.1 节中介绍的求等值析取范式的步骤，求得与所给公式等值的简单合取式的析取式。

②若某简单合取式中没有包含所有的变元，则需要根据排中律 $P_i \vee \neg P_i \Leftrightarrow T$、同一律 $A \wedge T \Leftrightarrow A$ 和分配律进行变换。例如，某简单合取式 A_i 中缺少变元 P_i，则通过如下的变换：

$A_i \wedge (P_i \vee \neg P_i) \Leftrightarrow (A_i \wedge P_i) \vee (A_i \wedge \neg P_i)$

可使简单合取式 A_i 中增加 P_i 或 $\neg P_i$。

③去掉重复出现的小项。

例 2.2 用真值表法和等值演算法，写出公式 A：$\neg(P \to Q) \wedge \neg Q \wedge \neg R$ 的主析取范式。

解：方法一构造 A 的真值表，如表 2.3 所示。

表 2.3 公式 A 的真值表

P	Q	R	$P \to Q$	$\neg(P \to Q)$	$\neg Q$	$\neg R$	$\neg(P \to Q) \wedge \neg Q \wedge \neg R$
0	0	0	1	0	1	1	0
0	0	1	1	0	1	0	0
0	1	0	1	0	0	1	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	1	0	0	0	0

从表 2.3 可知，真值为 1 的小项只有 m_{100}，即 $(P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$。故 A 的主析取范式为 $(P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$,可以表示为 $\sum(4)$。

除了使用真值表法求合式公式的主析取范式外，也可以用等值演算法求主析取范式。

方法二

$\neg(P \to Q) \wedge \neg Q \wedge \neg R \Leftrightarrow \neg(\neg P \vee Q) \wedge \neg Q \wedge \neg R$

$\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \wedge \neg Q \wedge \neg R$

$\Leftrightarrow P \wedge \neg Q \wedge \neg R$

2.2.2 主合取范式

定义 2.7 对于给定的命题公式，如果有一个等价公式，它仅由大项的合取所组成，则该等价式称为原式的主合取范式。

类似于定理 2.2 及定理 2.3,我们有以下定理。

定理 2.4 在公式的真值表中，所有真值为 F 的指派所对应的大项的合取，即为此公式的主合取范式。

该定理的证明类似于定理 2.2 的证明。证明略。

定理 2.5 任意含有 n 个命题变元的公式 A，都存在与之等值的主合取范式，并且是唯

一的。

该定理的证明类似于定理 2.3 的证明。证明略。

求命题公式 A 的主合取范式与求主析取范式的步骤非常相似，仍然可以用两种方法。方法一是采用真值表法，求出所有真值为 F 的大项，并求它们的合取即可。方法二是采用等值演算方法。利用蕴涵等值式与等价等值式去掉公式中出现的联结词 $\rightarrow$ 和 $\leftrightarrow$ ，并且保证公式中不出现 $\neg\neg A$ 、$\neg(A\wedge B)$ 、$\neg(A\vee B)$ 等形式的子公式，即采用双重否定律和德摩根律，将 $\neg\neg A$ 变换为 A ，将 $\neg(A\wedge B)$ 变换为 $\neg A\vee\neg B$ ，将 $\neg(A\vee B)$ 变换为 $\neg A\wedge\neg B$ 等。另外，如果出现 $A\vee(B\wedge C)$)的形式，则利用分配律进行变换。此时会得到简单析取式的合取式。若某简单析取式中没有包含所有的变元，则需要再按照否定律和同一律进行变换。最后消去重复出现的大项。

从 A 的主析取范式求其主合取范式步骤为：

① 求出 A 的主析取范式中未包含小项的下标；

② 把①中求出的"下标"写成对应大项；

③ 将②中得到的大项进行合取，即为 A 的主合取范式。

例 2.5 求公式 A ：$(P\vee(Q\wedge R))\rightarrow(P\wedge Q\wedge R)$ 的主合取范式。

解：公式 A 的主析取范式为 $\sum(0,1,2,7)$ ，所以 A 的主合取范式为：$\prod(3,4,5,6)$ 。

对于含 n 个命题变元的公式 A ，根据主范式（主析取范式、主合取范式）的定义和定理，有以下结论：

（1）若 A 可化为与其等价的含 2^n 个小项的主析取范式，则 A 为重言式。

（2）若 A 可化为与其等价的含 2^n 个大项的主合取范式，则 A 为矛盾式。

（3）若 A 的主析取范式中至少含有一个小项，或 A 的主合取范式中最多含有 2^n-1 个大项，则 A 为可满足式。

2.3 自然推理系统

逻辑思维的特征是推理和演绎，推理是数理逻辑中主要的研究内容之一。所谓推理是指从前提出发推导出结论的思维过程，而数理逻辑中的推理则特指用数学的方法来精确表示这个过程。这里，前提被表示成命题，推理所遵从的规则表示为命题等值公式。如何表示推理是正确的呢？我们给出下列定义。

定义 2.8 设 H_1 ，H_2 ，...，H_n 和 C 都是命题公式，若对于 H_1 ，H_2 ，...，H_n 和 C 中出现的命题变元的任意一组赋值，或者 $H_1\wedge H_2\wedge\ldots\wedge H_n$ 为假，或者当 $H_1\wedge H_2\wedge\ldots\wedge H_n$ 为真时 C 也为真，则称由前提 $H_1,H_2,\ldots,H_n$ 推出结论 C 的推理是有效的或正确的，并称 C 是有效结论或逻辑结论。

简单地说，从前提出发，根据推理规则得出的结论就是有效的结论，而这个结论是否是真实的并不在我们讨论的范围之内。也就是说，我们只关心这个结论是否是从前提推导出来的，推导的过程是否遵从推理规则，而不关心得到的结论的含义是什么。下面给出这个定义的符号化表示。

定义 2.9 设好 $H_1,H_2,\ldots,H_n$ ，C 是命题公式，当且仅当 $H_1\wedge H_2\wedge\ldots\wedge H_n\Rightarrow C$ ，称 C 是一组前提 $H_1,H_2,\ldots,H_n$ 的有效结论，记为 $H_1\wedge H_2\wedge\ldots\wedge H_n\vdash C$ 。

由交换律可知，对 $H_1,H_2,...,H_n$ 的任一种排列次序 H_{i1} ，H_{i2} ，...，H_{in} ，存在以下的等值关系：$H_1 \wedge H_2 \wedge ... \wedge H_n \Leftrightarrow H_{i1} \wedge H_{i2} \wedge ... \wedge H_{in}$ ，这表明，前提的排列次序对推理过程没有影响。

由蕴涵定义可知， $P \Rightarrow Q$ 的充分必要条件是 $P \rightarrow Q$ 是一个重言式，而对于条件联结词 $\rightarrow$ 来讲，前件与后件的不同取值共可组合出 4 种情况。仅当 P 为 T 而 Q 为 F 时，$P \rightarrow Q$ 为 F ，即不是重言式。其他 3 种情况下 $P \rightarrow Q$ 的值均为 T ，即为重言式。所以，只要推导中不出现 $H_1 \wedge H_2 \wedge ... \wedge H_n$ 为 T 且 C 为 F 时，推理就是有效的。由此我们得到定理 2.6。

定理 2.6 推理 $H_1 \wedge H_2 \wedge ... \wedge H_n \vdash$ C 是有效推理的充分必要条件是 $H_1 \wedge H_2 \wedge ... \wedge H_n \rightarrow C$ 为重言式。

证明：必要性 设 $H_1 \wedge H_2 \wedge ... \wedge H_n$ 推出 C 的推理正确，即 $H_1 \wedge H_2 \wedge ... \wedge H_n \vdash C$ 为有效推理，则对于 $H_1,H_2,...,H_n$ 和 C 中所含命题变元的任何一组赋值，不会出现 $H_1 \wedge H_2 \wedge ... \wedge H_n$ 真而 C 为假的情况，即在任何赋值下，$H_1 \wedge H_2 \wedge ... \wedge H_n \rightarrow C$ 均为真，$H_1 \wedge H_2 \wedge ... \wedge H_n \rightarrow C$ 是重言式。

充分性 若 $H_1 \wedge H_2 \wedge ... \wedge H_n \rightarrow C$ 为重言式，表明对任何的赋值，该式均为真，这表明或者 $H_1 \wedge H_2 \wedge ... \wedge H_n$ 为真且 C 亦为真，或者 $H_1 \wedge H_2 \wedge ... \wedge H_n$ 为假。故可由 $H_1 \wedge H_2 \wedge ... \wedge H_n$ 推出 C，即 $H_1 \wedge H_2 \wedge ... \wedge H_n \vdash C$ 是有效推理。 证毕

判别有效结论的过程就是论证过程，可采用真值表法、主范式方法和推理法。

在推理法中为了今后的推理论证需要，现将常用的等值公式和蕴涵公式表整理归纳为表 2.7 和表 2.8。

表 2.7 等值公式表

E_1	$A \Leftrightarrow \neg\neg A$
E_2	$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$
E_3	$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$
E_4	$(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$
E_5	$(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$
E_6	$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
E_7	$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
E_8	$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$
E_9	$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$
E_{10}	$A \Leftrightarrow A \vee A$
E_{11}	$A \Leftrightarrow A \wedge A$
E_{12}	$A \vee (B \wedge \neg B) \Leftrightarrow A$
E_{13}	$A \wedge (B \vee \neg B) \Leftrightarrow A$
E_{14}	$A \vee (B \vee \neg B) \Leftrightarrow T$
E_{15}	$A \wedge (B \wedge \neg B) \Leftrightarrow F$

E_{16}	$A \to B \Leftrightarrow \neg A \vee B$
E_{17}	$\neg(A \to B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$
E_{18}	$A \to B \Leftrightarrow \neg B \to \neg A$
E_{19}	$A \to (B \to C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \to C$
E_{20}	$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \to B) \wedge (B \to A)$
E_{21}	$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$
E_{22}	$\neg(A \leftrightarrow B) \Leftrightarrow A \leftrightarrow \neg B$

表 2.8 推理定律表

I_1	$A \wedge B \Rightarrow A$
I_2	$A \wedge B \Rightarrow B$
I_3	$A \Rightarrow A \vee B$
I_4	$B \Rightarrow A \vee B$
I_5	$\neg A \Rightarrow A \to B$
I_6	$B \Rightarrow \neg A \to B$
I_7	$\neg(A \to B) \Rightarrow A$
I_8	$\neg(A \to B) \Rightarrow \neg B$
I_9	$A, B \Rightarrow A \wedge B$
I_{10}	$\neg A, A \vee B \Rightarrow B$
I_{11}	$A, A \to B \Rightarrow B$
I_{12}	$\neg B, A \to B \Rightarrow \neg A$
I_{13}	$A \to B, B \to C \Rightarrow A \to C$
I_{14}	$A \vee B, A \to C, B \to C \Rightarrow C$
I_{15}	$A \to B \Rightarrow (A \vee C) \to (B \vee C)$
I_{16}	$A \to B \Rightarrow (A \wedge C) \to (B \wedge C)$

在推理过程中，如果命题变元较多，用真值表法、等值演算法及主范式法等进行推理证明都不很方便，因而现在引入构造论证的方法。

首先假定已知的前提为真，然后使用推理公式可得到一系列的命题公式，这些命题公式或者是已知的前提，或者是由某些前提应用推理规则得到的结论。当得到要求证的结论时，推理过程结束。如果得到与待求证的结论相反的结果，则说明原推理是无效的。

常用的推理规则有：

（1）前提引入规则：在证明的任何步骤上，都可以引入前提，简称 P 规则。

（2）结论引入规则：在证明的任何步骤上，所证明的结论都可作为后续证明的前提，称为 T 规则。

（3）转换规则：在证明的任何步骤上，命题公式中的任何子命题公式都可以用与之等

值的命题公式置换，如用$\neg P \vee Q$置换$P \to Q$，为此表 2.7 及表 2.8 的等值及推理公式都可应用。它亦记为T规则。

例 2.9 证明：$\neg(P \wedge \neg Q)$，$\neg Q \vee R$，$\neg R \vdash \neg P$

证明：（1）$\neg Q \vee R$　　P规则

（2）$Q \to R$　　$T(1)E_{16}$

（3）$\neg R$　　P规则

（4）$\neg Q$　　$T(2)(3)I_{12}$

（5）$\neg(P \wedge \neg Q)$　　P规则

（6）$\neg P \vee Q$　　$T(5)E_8$

（7）$\neg P$　　$T(4)(6)I_{10}$ 证毕

推导过程中，每一步都标注出了使用的规则，规则的含义举例如下。

①T（1）E_{16}：在得到的（1）步基础上引用T规则应用E_{16}公式。

②T（2）(3）I_{12}：在得到的（2）(3）步基础上引用T规则应用I_{12}公式。

③P规则：引入前提。

定理 2.7 若$H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \wedge \neg C$为矛盾式，则$H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \vdash C$成立。

证明：设$S = H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n$，若$S \wedge \neg C$为矛盾式，

$S \wedge \neg C$为矛盾式$\Leftrightarrow \neg(\neg S \vee C)$为$F$

$\Leftrightarrow \neg S \vee C$为$T$

$\Leftrightarrow S \to C$为T

$\Leftrightarrow S \Rightarrow C$即$S \vdash C$成立。

定理 2.7 的含义是，结论的否定可以作为附加前提在推理的过程中被引用。如果能推导出F，则表明原来的结论为有效结论。这种将结论的否定式作为附加前提引入并推出矛盾式的证明方法称作归谬法。从逻辑上来讲，这类似于反证法，即先否定结论，然后得出矛盾，进而说明对结论的否定是不正确的，即结论成立。

例 2.10 用归谬法证明下面有效推理。

前提：$(p \wedge q) \to r$，$\neg r \vee s$，$\neg s$，p

结论：$\neg q$

证明：（1）q　　P规则（否定）

（2）$\neg r \vee s$　　P规则

（3）$\neg s$　　P规则

（4）$\neg r$　　$T(2)(3)I_{10}$

（5）$(p \wedge q) \to r$　　P规则

（6）$\neg(p \wedge q)$　　$T(4)(5)I_{12}$

（7）$\neg p \vee \neg q$　　$T(6)E_8$

（8）p　　P规则

（9）$\neg q$　　$T(7)(8)I_{10}$

（10）$q \wedge \neg q$　　$T(1)(9)I_9$

（11）F

由此得到$(((p\wedge q)\to r)\wedge(\neg r\vee s)\wedge\neg s\wedge p)\wedge q\Rightarrow F$，所以推理正确。证毕

如果结论是一个条件式，则可采用下列定理确定的规则进行证明。

定理 2.8 若$H_1\wedge H_2\wedge\ldots\wedge H_n\wedge R\Rightarrow C$，则$H_1\wedge H_2\wedge\ldots\wedge H_n\Rightarrow R\to C$。

证明略。

定理 2.8 的含义是指，若H_1，H_2，…，H_n，$R\vdash C$，则H_1，H_2，…，$H_n\vdash R\to C$。本规则也称为CP规则。

例 2.11 用CP规则证明下面有效推理。

前提：$(p\wedge q)\to r$，$\neg s\vee p$，q

结论：$s\to r$

证明：（1）s　　CP规则（附加前提）

（2）$\neg s\vee p$　　P规则

（3）p　　$T(1)(2)I_{10}$

（4）q　　P规则

（5）$p\wedge q$　　$T(3)(4)I_9$

（6）$(p\wedge q)\to r$　　P规则

（7）r　　$T(5)(6)I_{11}$

由此得到推理是正确的。　　证毕

练习题

1.命题公式$\neg(P\wedge Q)\to R$的主析取范式中含极小项的个数是（ ）

A 8

B 3

C 5

D 0

2.命题公式$\neg(P\to Q)$的主析取范式是（ ）

A $P\wedge Q$

B $P\wedge\neg Q$

C $\neg P\wedge Q$

D $\neg P\wedge\neg Q$

3.命题公式$\neg(P\to Q)$的主合取范式是（ ）

A $\prod(0,1,2)$

B $\prod(0,1,3)$

C $\prod(0,2,3)$

D $\prod(1,2,3)$

答案

1.C。2.B。3.B。

第 3 章谓词逻辑

3.1 谓词的概念与表示

分析句子“x 大于 3”，其中含有两部分，一是句子的主语 x ，这是一个变量，称为个体词；二是谓语部分“大于 3”，它表示主语的某一个性质，称为谓词。可以用 $P(x)$ 来表示句子“x 大于 3”，其中 P 表示的是性质，x 表示的是变量。

命题中，个体词是指所研究对象中可以独立存在的具体的或抽象的客体，既可以使用变量，也可以代入特定的值。当它表示具体的或特定的客体时称为个体常项，多用小写的英文字母 a ，b ，c，...等来表示；当它表示抽象或泛指的个体时称为个体变项，也称个体变元或个体变量，多用小写的英文字母 x ，y，z，...等来表示。个体变项的取值范围为个体域，或称论域。论域是个集合，既可以是有穷集合，也可以是无穷集合。包含宇宙中所有事物的论域称为全总个体域。如果没有特别指明某个论域，则隐含所指是在全总个体域中进行讨论。

例如谓词 A 表示“是大学生”，w 表示“王强”，则“王强是大学生”可表示为 $A(w)$。

再比如，设 $B(x,c,y)$ 表示“c 位于 x 和 y 之间”，jn ，bj 和 sh 分别表示“济南”、“北京”和“上海”，则 S (bj，jn ，S h)表示语句“济南位于北京和上海之间”。

谓词用来指明个体的性质或个体之间的关系等，常用大写的英文字母 P ，Q ，R ，...来表示。表示具体性质或关系的谓词称为谓词常项，表示抽象的或泛指的性质或关系的谓词称为谓词变项。例如 $A(w)$ 和 B (bj，jn ，sh)等都是谓词常项，因为它们表示的都是具体的事情。

定义 3.1 由一个谓词、一些个体变量组成的表达式称为谓词变项或命题函数。

命题函数不是命题，只有命题函数中的变元都取为特定具体的个体时，才是确定的命题。例如对于命题函数 $P(x)$ ，当 x 的值不确定时，$P(x)$ 的值也不能确定，所以它不是命题，而仅仅是命题函数。当变量 x 的值确定下来后，$P(x)$ 的真假也能确定下来。例如，$P(2)$ 为假，而 P (20)为真。可以将 $P(x)$ 理解成谓词 P 在 x 的值。单独的个体词和谓词不能构成命题，将个体词和谓词分开不是命题。

谓词中的个体变元个数可多可少，例如 $A(x)$ 表示“x 是个大学生”，这里 x 是论域中的变量。又如 $L(x,y)$ 表示“x 小于 y”，这里 x 和 y 都是论域中的变量。谓词变项中，个体变元的数目称为谓词变项的元数。如 $A(x)$ 为一元谓词，$L(x,y)$ 为二元谓词。一般地，

$P\left(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\right)$为$n$元谓词。注意，当$n$元谓词中某一个体变项取作常量时，比如$x_1 = a$，此时$P(a, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$为$n-1$元谓词。通常把不带个体变项的谓词称为 0 元谓词，例如F(a)，P（a，b，...，d)等都是 0 元谓词。

3.2 量词与合式公式

在命题函数中，当其中出现的所有变量均被赋值后，得到的命题的真值也确定下来。有些命题函数中，使得命题为真或为假的变量值并不是唯一的，即变量取不同的值时，得到的命题真值是相同的。

如何来表示这种数量关系呢？命题函数中表示数量的词称为量词，可以使用量词来表示个体常项与变项之间的数量关系，即对命题函数进行量化。量词分为两种，一是全称量词，二是存在量词。

在数学语句中，经常会断定某一性质对变量在某一特定域内的所有值均为真，这一特定域即是论域，这样的语句用全称量词表示。

定义 3.2 $P(x)$的全称量化是命题“$P(x)$对x在其论域的所有值为真”。符号$\forall x P(x)$表示$P(x)$的全称量化，其中$\forall$称为全称量词。

$\forall x P(x)$也可表示为“对所有x，$P(x)$”或是“对每个x，$P(x)$”。日常语言中的“一切”、“任意的”、“所有”及“凡是”等词，都可对应全称量词。

与之相对的，有时需要表示某一性质对变量在论域内的若干值为真，对其他的值为假，这样的语句用存在量词表示。

定义 3.3 $P(x)$的存在量化是命题“论域中存在一个元素x使$P(x)$为真”。符号$\exists x P(x)$表示$P(x)$的存在量化，其中$\exists$称为存在量词。

$\exists x P(x)$也可表示为“有一个x使得$P(x)$”或是“至少有一个x使得$P(x)$“”。日常语言中的“存在着”、“有一个”、“至少有一个”等词，都可对应存在量词。

假定在变量x的论域中有n个对象，要确定$\forall x P(x)$是否为真，可以对x的n个值依次查看$P(x)$是否总是真。如果遇到论域中的某一个值使$P(x)$为假，则$\forall x P(x)$为假，否则$\forall x P(x)$为真。要确定$\exists x P(x)$是否为真，则要依次查看x的n个值，查找使$P(x)$为真的x的值。若找到一个，则$\exists x P(x)$为真，若总也找不到这样的x，则如$\exists x P(x)$为假。

总之，论域中的所有值都使$P(x)$为真时，$\forall x P(x)$才为真；而只需要有一个值使得$P(x)$为真时，$\exists x P(x)$即为真。反过来，有一个值使得$P(x)$为假，$\forall x P(x)$即为假；而所有的值均使$P(x)$为假，则$\exists x P(x)$为假。

在全称量词中，特性谓词是条件式的前件，在存在量词中特性谓词后跟一个合取项。

一般的，在全总个体域中才产生特性谓词。如果事先规定了个体域，则可免去特性谓词。一般约定：如果事先没有明确提出个体域，则认为个体域是全总个体域。

例 3.4 使用自然语言描述命题：$\exists x \forall y \forall z((F(x, y) \wedge F(x, z) \wedge (y \neq z)) \rightarrow \neg F(y, z))$，其中$F(a, b)$表示“$a$和$b$是朋友”，论域是本校所有学生组成的集合。

解：本命题表示：有一名学生x对本校所有学生y和z，若y和z都是x的朋友，且y和z不是同一个人，则y和z就不是朋友。换句话说，有一名学生，他的朋友之间都不是朋友。

本例中，论域是本校所有学生，所以可以免去特性谓词。

例 3.5 凡是偶数均能被 2 整除。

解：用 $E(x)$ 表示“x 是偶数”，用 $G(x)$ 表示“x 能被 2 整除”。

则本例可表示为：$\forall x(E(x)\to G(x))$。

量词出现的次序不同，得到的谓词公式的逻辑含义也可能是不同的。

由一个谓词及若干个体变量组成的表达式称为原子谓词公式。原子谓词公式可以组成复合谓词公式。

定义 3.4 由一个或几个原子谓词公式以及逻辑联结词组合而成的表达式称为复合谓词公式。

复合谓词公式中使用的逻辑联结词包括：$\neg$、$\wedge$、$\vee$、$\to$和$\leftrightarrow$，这 5 个联结词的意义与命题演算中的解释相似。

定义 3.5 谓词演算的合式公式，递归的定义如下：

（1）原子谓词公式是合式公式。

（2）若 A 是合式公式，则 $(\neg A)$ 也是合式公式。

（3）若 A 和 B 都是合式公式，则（$A \wedge B$）、（$A \vee B$）和 $(A \leftrightarrow B)$ 也是合式公式。

（4）若 A 是合式公式，x 是 A 中出现的任何个体变元，则 $(\forall x)A$ 和 $(\exists x)A$ 也是合式公式。

（5）只有经过有限次应用规则（1）~（4）所得到的符号串才是合式公式。

为了简化表示，约定最外层的括号可以省略。例如，（$\neg A$）可以写成 $\neg A$，$(A\wedge B)$ 可以写成 $A\wedge B$ 等。但需注意，量词后面若有括号则这个括号不能省略。例如，$\forall x(A(x)\to B(x))$ 不能写成 $\forall xA(x)\to B(x)$。合式公式 A 记为 $WffA$，合式公式简称为公式。

定义 3.6 给定谓词合式公式 A，其中一部分公式形式为 $\forall xB(x)$ 或 $\exists xB(x)$，称量词 $\forall$、$\exists$ 后面的 x 为指导变元，也称为作用变元。称 $B(x)$ 为相应量词的辖域（或作用域）。在辖域中，x 的一切出现称为约束出现。在 $B(x)$ 中除去约束出现的其他变元的出现称为自由出现。

在某个辖域内，某个变量的出现或是约束出现，或是自由出现。但在整个公式中，一个变量可能会表现为既是约束出现也是自由出现的情况。

在谓词合式公式中，一个个体变元既可以是约束出现，又可以是自由出现，这很容易引起混淆。为了避免这些不必要的混淆，采用下面两个规则改变命题公式的写法：

（1）约束变元改名规则：将量词辖域中，量词的指导变元及其辖域中该变元的所有约束出现均改为本辖域中未曾出现过的个体变元，其余不变。

（2）自由变元代入规则：把公式中的某一自由变元，用该公式中没有出现的个体变元符号替代，且要替换该自由变元在公式中的所有出现处。

这两个规则的使用目的，是为了保证个体变元在合式公式中或以约束形式出现，或以自由形式出现，不再有混合出现的情况，从而避免了混淆。

3.3 谓词演算的等价式与蕴涵式

有些命题可以有不同的符号化表示，甚至可以使用不同的量词形式。比如，用 $A(x)$ 表示“x 是人”，$B(x)$ 表示“x 呼吸”，命题“人活着必须有呼吸”可以表示为下面两种形式。

（1）$\forall x(A(x)\to B(x))$

（2）$\neg\exists x(A(x)\wedge\neg B(x))$

量词不仅可以相互替换，有些情况下，还可以消去。当确定论域后$\forall xP(x)$与$\exists xP(x)$都是一个特定的命题，例如论域是$\{a,b,c\}$，则$\forall xS(x)$即是$S(a)\wedge S(b)\wedge S(c)$，$\exists xS(x)$即是$S(a)\vee S(b)\vee S(c)$。设论域元素为$a_1$，$a_2$，…，$a_n$，则下列关系式成立。

$\forall xA(x)\Leftrightarrow A(a_1)\wedge A(a_2)\wedge\ldots\wedge A(a_n)$

$\exists xA(x)\Leftrightarrow A(a_1)\vee A(a_2)\vee\ldots\vee A(a_n)$

在谓词公式中常包含命题变元和个体变元，当个体变元用确定的个体取代，命题变元用确定的命题所取代时，就称作对谓词公式赋值（或解释）。

定义 3.7 给定任何两个谓词公式$WffA$和$WffB$，设它们有共同的论域E，若对A和B的任一组个体变元进行赋值，所得命题的真值相同，则称谓词公式A和B在E上是等价的，并记作$A\Leftrightarrow B$。

定义 3.8 给定任意谓词公式$WffA$，其论域为E，对于A的所有赋值$WffA$都为真，则称$WffA$在E上是有效的（或永真的）。如果在所有赋值下$WffA$都为假，则称$WffA$为不可满足的。如果至少在一种赋值下为真，则称该$WffA$为可满足的。

定理 1.1 的结论可以推广到谓词公式中。用谓词演算中的公式，代替命题演算公式中的变元，所得的公式即为等价式或蕴涵式。故在表 1.13、表 1.14、表 2.7 和表 2.8 中所列出的等价公式和蕴涵式都可推广到谓词演算中使用。

例如，根据幂等律有：$A\Leftrightarrow A\vee A$，$A\Leftrightarrow A\wedge A$，使用谓词公式$\forall xP(x)$来替代变元$A$，可以得到$\forall xP(x)\Leftrightarrow\forall xP(x)\vee\forall xP(x)$及$\forall xP(x)\Leftrightarrow\forall xP(x)\wedge\forall xP(x)$。

根据蕴涵等值式有：$A\to B\Leftrightarrow\neg A\vee B$，使用谓词公式$\forall xA(x)$来替代变元$A$，谓词公式$\exists xB(x)$来替代变元$B$，则有$\forall xA(x)\to\exists xB(x)\Leftrightarrow\neg\forall xA(x)\vee\exists xB(x)$。

定理 3.1 量词与否定联结词之间有如下关系：

（1）$\neg\forall xQ(x)\Leftrightarrow\exists x\neg Q(x)$；

（2）$\neg\exists xQ(x)\Leftrightarrow\forall x\neg Q(x)$。

证明：本定理在有限论域D上证明，设论域$D=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$

（1）$\neg\forall xQ(x)\Leftrightarrow\neg(Q(a_1)\wedge Q(a_2)\wedge\ldots\wedge Q(a_n))$

$\Leftrightarrow\neg Q(a_1)\vee\neg Q(a_2)\vee\ldots\vee\neg Q(a_n)$

$\Leftrightarrow\exists x\neg Q(x)$

（2）$\neg\exists xQ(x)\Leftrightarrow\neg(Q(a_1)\vee Q(a_2)\vee\ldots\vee Q(a_n))$

$\Leftrightarrow\neg Q(a_1)\wedge\neg Q(a_2)\wedge\ldots\wedge\neg Q(a_n)$

$\Leftrightarrow\forall x\neg Q(x)$。 证毕

表 3.1 给出谓词演算中的等值式和蕴涵式，读者可以自行证明。

表 3.1 谓词等值式与蕴涵式

E_{23}	$\exists x(A(x)\vee B(x))\Leftrightarrow\exists xA(x)\vee\exists xB(x)$
E_{24}	$\forall x(A(x)\wedge B(x))\Leftrightarrow\forall xA(x)\wedge\forall xB(x)$
E_{25}	$\neg\exists xA(x)\Leftrightarrow\forall x\neg A(x)$
E_{26}	$\neg\forall xA(x)\Leftrightarrow\exists x\neg A(x)$
E_{27}	$\forall x(A\vee B(x))\Leftrightarrow A\vee\forall xB(x)$

E_{28}	$\exists x(A \wedge B(x)) \Leftrightarrow A \wedge \exists x B(x)$
E_{29}	$\exists x(A(x) \rightarrow B(x)) \Leftrightarrow \forall x A(x) \rightarrow \exists x B(x)$
E_{30}	$\forall x A(x) \rightarrow B \Leftrightarrow \exists x(A(x) \rightarrow B)$
E_{31}	$\exists x A(x) \rightarrow B \Leftrightarrow \forall x(A(x) \rightarrow B)$
E_{32}	$A \rightarrow \forall x B(x) \Leftrightarrow \forall x(A \rightarrow B(x))$
E_{33}	$A \rightarrow \exists x B(x) \Leftrightarrow \exists x(A \rightarrow B(x))$
I_{17}	$\forall x A(x) \vee \forall x B(x) \Rightarrow \forall x(A(x) \vee B(x))$
I_{18}	$\exists x(A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$
I_{19}	$\exists x A(x) \rightarrow \forall x B(x) \Rightarrow \forall x(A(x) \rightarrow B(x))$

3.4 前束范式

在命题逻辑中，任何公式都可以表示成等值的析取范式或合取范式，特别地，主范式的表示还是唯一的。同样谓词公式也有规范的表示形式，称为前束范式。

定义 3.9 一个公式，如果量词均在全式的开头，它们的作用域，延伸到整个公式的末尾，则该公式称为前束范式。

前束范式的形式为：$(Q_1V_1)(Q_2V_2)\ldots(Q_nV_n)A$，其中$Q_i$ $(1 \le i \le n)$是量词，或者是全称量词$\forall$，或者是存在量词$\exists$，V_i $(1 \le i \le n)$是各指导变元，A为不含有量词的谓词公式。

定理 3.2 任意一个谓词公式，均存在与之等值的前束范式。

证明略。

这个定理称为前束范式的存在定理。一般情况下，前束范式是不唯一的。将一个谓词公式变换为前束范式的过程有以下几个步骤：

①对不同辖域的同名变元进行换名（换名规则）；

②利用定理 3.1，将否定联结词$\neg$深入到命题变元和谓词公式前面（量词转化规则）；

③利用等值式$\forall x(A \vee B(x)) \Leftrightarrow A \vee \forall x B(x)$和$\exists x(A \wedge B(x)) \Leftrightarrow A \wedge \exists x B(x)$，将量词移到全式最前面（量词前提规则）；

由此，得到与原式等值的前束范式。

3.5 谓词演算的推理理论

包含量词的命题也可进行推理，这就是谓词演算的推理。命题逻辑中的推理规则依然可用于谓词演算的推理中，例如命题演算中的推理规则P、T和CP规则等，都可用在谓词推理中。所以谓词演算的推理方法，可以看做是命题演算推理方法的扩展。

另一方面，在谓词推理中，由于量词的存在，所以不能简单地使用命题推理中的规则，必须去掉量词才能将命题推理中的等值式和蕴涵式用于谓词推理过程中。所以在某些前提和结论中都要考虑量词的限制和影响。为此本节介绍一些关于消去和添加量词的规则。

（1）全称量词消去规则（简记为$\forall -$）。

P是谓词，而c是论域中的任意一个个体，如果论域中全部个体都有$P(x)$，那么对某个具体的个体c亦有$P(x)$，即可得到结论$P(c)$。这条规则可表示为：

$$\frac{\forall x P(x)}{\therefore P(c)}$$

（2）全称量词引入规则（简记为$\forall +$）。

如果能够证明对论域中任一个体c谓词$P(c)$都成立，则可得到$\forall x P(x)$为真。这称为全称量词引入规则。注意，这里的个体c必须是论域中的任意一个元素，而不能是某个特定的元素。这条规则可表示为：

$$\frac{P(x)}{\therefore \forall x P(x)}$$

（3）存在量词消去规则（简记为$\exists -$）。

如果已知$\exists x P(x)$成立，则在论域中存在一个个体c使得$P(c)$为真。这里只知存在个体c，但不能选择任意的c，通常并不知道c的具体值。例如$\exists x P(x)$和$\exists x Q(x)$都为真，则对某些c和某些d，可以断定$P(c) \wedge Q(d)$为真，但是不能断定$P(c) \wedge Q(c)$为真，也不能断定$P(d) \wedge Q(d)$为真。这条规则可表示为：

$$\frac{\exists x P(x)}{\therefore P(c)}$$

（4）存在量词引入规则（简记为$\exists +$）。

如果已知论域中某个个体c使得$P(c)$为真，则可得出$\exists x P(x)$为真。这条规则可表示为：

$$\frac{P(c)}{\therefore \exists x P(x)}$$

练习题

1.设论域元素 a,b,c,下列选项中，与谓词公式$\forall x R(x)$等价的是（ ）

A $R(a) \wedge R(b) \wedge R(c)$

B $R(a) \wedge R(b) \vee R(c)$

C $R(a) \vee R(b) \wedge R(c)$

D $R(a) \vee R(b) \vee R(c)$

2.设论域元素 a,b,c,下列选项中，与谓词公式$\exists x R(x)$等价的是（ ）

A $R(a) \wedge R(b) \wedge R(c)$

B $R(a) \wedge R(b) \vee R(c)$

C $R(a) \vee R(b) \wedge R(c)$

D $R(a) \vee R(b) \vee R(c)$

3.谓词公式$\forall x(F(x) \vee \exists y S(y)) \to Q(x)$中量词$\forall x$的辖域是（ ）

A $\forall x(F(x) \vee \exists y S(y))$

B $F(x)$

C $(F(x) \vee \exists y S(y))$

D $F(x), Q(x)$

答案

1.A。2.D。3.C。

第 4 章 集合

4.1 集合的基本概念

4.1.1 集合的概念

集合是最基本的离散结构。到目前为止，集合都没有一个严格、精确的定义，教科书中往往都是给出描述性的解释，但这并不妨碍集合是近现代数学中许多分支的基础。一般来说，集合包含一组可区分的对象，把这些对象汇集到一起组成一个整体就称作集合，简称为集。这些对象称为集合的元素或成员。集合常常用 S、A、B 等符号来表示，也可以由字母加下标来表示，如 S_1、A_2 等。若要表示集合中的元素，则通常使用大括号将集合中的元素括起来，且元素之间用逗号分隔。

例如，全体中国人组成集合 S_1，某所学校里所有学生组成集合 S_2，所有的偶数组成集合 S_3，宇宙中所有的星球组成集合 S_4 等。甚至我们还可以说，上面所说的这四个集合组成集合 S_5，含所有奇数的集合与 100 以内的素数组成集合 S_6。

上面所举的例子中，体现了集合的几个特点。S_1 与 S_2 是由有限个元素组成的，称为有限集或有穷集。而 S_3 是由无穷个元素组成的，称为无限集或无穷集。按照人们目前的认知水平，认为宇宙是无边际的，其中的星球数是无穷多的，所以 S_4 也看成是无穷集。S_5 是由集合构成的集合，所以它的元素又是集合。S_6 中的元素不是相同类型的，既有集合，又有素数。可见，集合中的元素可以是任意类型的，而且并不要求所有元素的类型是相同的。集合中的元素具有唯一性，也就是说，集合中不存在相等的元素。此外，集合中元素之间的次序并不重要。

定义 4.1　若元素 a 是集合 A 中的元素，则称 a 属于 A，记为 $a \in A$，否则称 a 不属于 A，记为 $a \notin A$。

定义 4.2　设 A、B 是任意两个集合，称这两个集合是相等的，当且仅当它们含有相同的元素。集合 A 与 B 相等记为 $A = B$，集合 A 与 B 不相等记为 $A \neq B$。

集合中可以包含任意多个元素，甚至是 0 个元素。集合 A 中的元素个数称为集合的基数或势，表示为 $|A|$。有限集的基数为自然数。如果一个无限集合可以跟自然

数集合形成一一对应，则称其为可数无限集，反之称为不可数集合。例如，整数集合是可数的，而实数集合是不可数的。

定义 4.3 不包含任何元素的集合称为空集，记为 $\varnothing$ 或 $\{\ \}$。空集的基数为 0，即 $|\varnothing|=0$。

4.1.2 集合的表示法

集合的表示法主要有以下一些。

1.列举法

将集合中的元素一一列举出来，并用大括号括起全部元素，元素之间以逗号作分隔。当集合中元素个数过多时，限于篇幅的原因，在不产生歧义的情况下，可以使用省略号来表示未列出的元素。

2.描述法

使用谓词来刻画集合元素的性质。谓词既可以使用自然语言，也可以使用形式语言。这种描述方式中，集合的表示格式为：$S=\{x|P(x)\}$。它表示的含义是：当 $P(b)$ 为真时，b 是 S 的元素。

3.图示法

用封闭曲线表示集合及其关系，封闭曲线内的点表示集合的元素，这种图称为文氏图。文氏图较为直观地描述了集合之间的关系，但一般不作为证明和计算的依据。一般地，使用圆或椭圆来代表集合概念，圆内的点表示集合内的元素，圆外的点表示不属于该集合的元素。最外面使用一个矩形框代表我们所讨论的论域。有时，使用阴影表示某个区域内的所有元素。

例如图 4.1 中表示了两个集合 A 和 B。

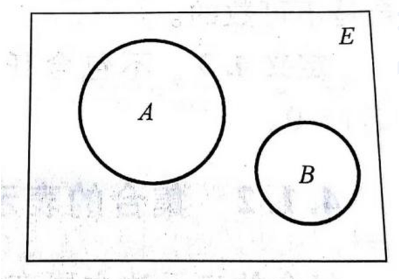


图 4.1 集合 A 与 B

当我们关注集合中元素的具体值时，多使用列举法或是叙述法来表示，为的是能够精确给出元素的值。当仅关注集合间的关系时，多使用图示法表示。一个集合的表示方法不是唯一的。

有一些常用的数集，往往使用特定的符号表示它们，将这些数集及代表的符号列在表 4.1 中。

表 4.1 常用数集及代表的特号

符号	数集	符号	数集	符号	数集	符号	数集
N	自然数集	C	复数集	Z	整数集	Q_-	负有理数集
Q	有理数集	R	实数集	Z^+	正整数集	Q_+	正有理数集

例 4.4 $\{a,d,a,d,b,a,c,b,c,c\}=\{a,b,c,d\},\{2,5,7\}=\{7,5,2\}$。

定义 4.4 设 A、B 是任意两个集合，若 A 的每一个元素都属于 B，则称 A 为 B 的子集，也称 B 包含 A 或 A 包含在 B 内。记作 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$。

根据子集的定义，显然有 $A\subseteq B \Leftrightarrow \forall x(x\in A\to x\in B)$。特别地，任一集合 A 都是自身的子集，即 $A\subseteq A$。

对任意集合 A、B、C，必有 $A\subseteq B\wedge B\subseteq C\Rightarrow A\subseteq C$。

定理 4.1 任意两个集合 A 和 B，$A=B$ 的充分必要条件是两个集合互为子集。

证明：必要性 若 $A=B$，由集合相等的定义可知 A 和 B 含有相同的元素，所以若 $x\in A$ 必有 $x\in B$，即 $A\subseteq B$；同样若有 $x\in B$，必有 $x\in A$，即 $B\subseteq A$。

充分性 已知 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，若 $A\neq B$，表明 A 和 B 含有不完全相同的元素，即至少有一个元素不同时属于集合 A 和 B。设该元素为 a，或者 $a\in A$ 但 $a\notin B$，或者 $a\in B$ 但 $a\notin A$。前者表明 A 不是 B 的子集，与 $A\subseteq B$ 矛盾；后者表明 B 不是 A 的子集，与 $B\subseteq A$ 矛盾。假设不成立，故 $A=B$。　证毕

定义 4.5 如果集合 A 的每一个元素都属于 B，但集合 B 中至少有一个元素不属于 A,则称 A 为 B 的真子集，记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$。

空集的子集只有一个，即它本身，$\varnothing\subseteq\varnothing$。而 $\varnothing\subset\varnothing$ 不成立。

定理 4.2 对于任意集合七必有 $\varnothing\subseteq A$。

证明：假设空集 $\varnothing$ 不是 A 的子集，则至少有一个元素 x，使得 $x\in\varnothing$ 且 $x\notin A$。而空集中不含有任何元素，所以不存在这样的元素 x。故 $\varnothing$ 是 A 的子集。　证毕

推论 4.1 空集是唯一的。

证明：假设有 $\varnothing_1$ 和 $\varnothing_2$ 由定理 4.2 必有 $\varnothing_1\subseteq\varnothing_2$，$\varnothing_2\subseteq\varnothing_1$，再由定理,4.1，可知 $\varnothing_1=\varnothing_2$。　证毕

定义 4.6 设 A 为任意集合，以 A 的子集为元素所组成的集合，称为集合 A 的幂集，记为 $\wp(A)$。

定理 4.3 若 A 是具有 n 个元素的有限集，则 A 的幂集 $\wp(A)$ 有 2^n 个元素。

证明：使用归纳法证明。

归纳基础：n =0,空集的子集还是空集，而空集具有唯一性，故幂集是只含一个空集的集合。命题成立。

归纳假设：$n=k$ 时，即 $A=\{a_0,a_1,a_2,\ldots,a_{k-1}\}$，$\wp(A)$ 有 2^n 个兀素。

当 $n=k+1$ 时，设 $A=\{a_0,a_1,a_2,\ldots,a_{k-1},a_k\}$。$\wp(A)$ 是由 A 的子集构成的集合，将这些子集分为两类 U 和 V。U 中的子集均不含元素 a_k，V 中的子集均含元素 a_k。

显然，由归纳假设可知 U 的个数为 2^k。将元素 a_k 加入到 U 中的每个集合中，即得到 V 的各个集合。故 V 的个数亦为 2^k。此时 A 的所有子集个数为 $2^k+2^k=2^{k+1}$。命题得证。

定义 4.7 在一定范围内，如果所有集合均为某一集合的子集，则称该集合为全集。全集一般记为 E。

全集概念相当于论域，例如考虑某大学的系或班级的学生时，该大学的全体学生组成了全集。

4.2 集合的运算

4.2.1 集合的基本运算

集合的基本运算包括交、并、补和差。

定义 4.8 设任意两个集合 A 和 B ，由集合 A 和 B 的所有共同元素组成的集合 S 称为 A 和 B 的交集，记为 $A\cap B$ 。 $S=A\cap B=\{x|(x\in A)\wedge(x\in B)\}$ ，如图 4.2 中阴影部分所示。

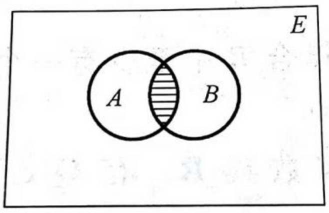


图 4.2 $S=A\cap B$

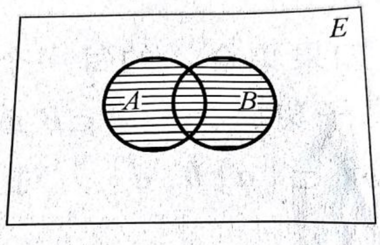


图 4.3 $S=A\cup B$

$A\cap B$ 中的元素既属于 A 又属于 B 。例如，现以 A 表示懂英语的人组成的集合，以 B 表示懂德语的人组成的集合，则既懂英语又懂德语的人组成的集合即是 $A\cap B$ 。

若两个集合的交集为空集，称两个集合不相交。画文氏图时，表示集合的两个圆没有重叠部分，如图 4.1 所示。

集合交集的定义可以推广到多个集合，设 A_1 ， A_2 ，… ， A_n 为任意 n 个集合，则 n 个集合的交 S 定义为： $S=A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n=\bigcap_{i=1}^{n}A_i$ 。

定义 4.9 设任意两个集合 A 和 B ，所有属于 A 或属于 B 的元素组成的集合 S 称为 A 和 B 的并集，记作 $A\cup B$ 。 $S=A\cup B=\{x|(x\in A)\vee(x\in B)\}$ ，如图 4.3 中阴影部分所示。

$A\cup B$ 中的元素要么属于 A 要么属于 B ，当然也可能既属于 A 又属于 B 。仍以之前懂外语的情景为例，懂英语或懂德语的人组成的集合即是 $A\cup B$ 。这个集合中的人至少懂得英语或德语中的一门。更确切地说，有些人仅会说英语，有些人仅会说德语，有些人既懂英语又懂德语。这三部分人都属于 $A\cup B$ 。

集合并集的定义也可以推广到多个集合，设 A_1 ， A_2 ，… ， A_n 为任意 n 个集合，则 n 个集合的并 S 定义为： $S=A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n=\bigcup_{i=1}^{n}A_i$

定义 4.10 设任意两个集合 A 和 B ，由属于 A 但不属于 B 的所有元素组成的集合 S ，称为 A 与 B 的差集，也称为 B 对于 A 的补集，或相对补，记作 $A-B$ 。 $S=A-B=\{x|x\in A\wedge x\notin B\}$ ，如图 4.4 中阴影部分所示。

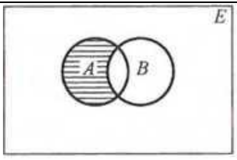


图 4.4　$S = A - B$

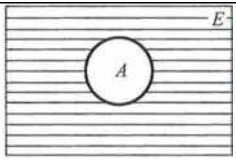


图 4.5　$S = \sim A$

仍以之前懂外语的情景为例，仅懂英语的人组成的集合即是 A - B。仅懂德语的人组成的集合是 B - A。一般来讲，这些人不会是同一群人，即 $A - B \neq B - A$。

定义 4.11 设 E 为全集，对任一集合 A，关于 E 的补 $E - A$，称为集合 A 的绝对补，记作: $\sim A$ 或 $\overline{A}$。$\sim A = E - A = \{x | x \in E \wedge x \notin A\}$，即所有不属于 A 的元素组成 $\sim A$，如图 4-5 所示。由定义可知，~~ A = A， A U~ A =£， $A \cap \sim A$ =∅。

定理 4.4　设 A、 B 为任意两个集合，则下列关系式成立。

（1） $A - B = A \cap \sim B$；

（2） $A - B = A - (A \cap B)$。

证明：（1） $A - B = A \cap \sim B$

$\forall x$

$x \in A - B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$

$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in \sim B$

$\Leftrightarrow x \in A \cap \sim B$

综上， $A - B = A \cap \sim B$

（2） $A - B = A - (A \cap B)$

$\forall x$

$x \in A - B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$

$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin A \cap B$

$\Leftrightarrow x \in A - (A \cap B)$

综上， $A - B = A - (A \cap B)$。证毕

推论 4.2 对于两个有限集 A 和 B， $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$。

证明：给定两个有限集 A 和 B，基数 $|A \cup B|$ 为 $A \cup B$ 中元素的个数。 A U B 中的元素可分为以下互不相交的三类：

①仅属于 A 不属于 B 的元素，即 $A - B$ 中的元素；

②仅属于 B 不属于 A 的元素，即 $B - A$ 中的元素；

③既属于 A 又属于 B 的元素，即 $A \cap B$ 中的元素。

由 $A - B = A - (A \cap B)$，得到 $|A| = |A - B| + |A \cap B|$， $|B| = |B - A| + |A \cap B|$，则 $|A \cup B| = |A - B| + |B - A| + |A \cap B| = |A| + |B| - |A \cap B|$。　证毕

4.2.2 集合运算的恒等式

集合运算有以下恒等式，其中 A、 B、C 代表任意集合。如表 4.2 所示。

表 4.2 集合运算的恒等式

算律名称	公式	编号
幂等律	$A\cap A=A$	1
	$A\cup A=A$	2
结合律	$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$	3
	$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$	4

(续)

算律名称	公式	编号
交换律	$A\cap B=B\cap A$	5
	$A\cup B=B\cup A$	6
分配律	$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$	7
	$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$	8
包含律	$A\cap B\subseteq A$	9
	$A\cap B\subseteq B$	10
	$A\subseteq A\cup B$	11
	$B\subseteq A\cup B$	12
同一律	$A\cap E=A$	13
	$A\cup\varnothing=A$	14
零律	$A\cap\varnothing=\varnothing$	15
	$A\cup E=E$	16
排中律	$A\cup\sim A=E$	17
矛盾律	$A\cap\sim A=\varnothing$	18
吸收律	$A\cap(A\cup B)=A$	19
	$A\cup(A\cap B)=A$	20
德摩根律	$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$	21
	$A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$	22
	$\sim(A\cup B)=\sim A\cap\sim B$	23
	$\sim(A\cap B)=\sim A\cup\sim B$	24
	$\sim\varnothing=E$	25
	$\sim E=\varnothing$	26
双重否定律	$\sim(\sim A)=A$	27

下面选择表 4.2 中几个有代表性的恒等公式进行证明。

(1) $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

(2) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

(3) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

(4) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

（5）$A\cap(A\cup B)=A$

（6）$A\cup(A\cap B)=A$

（7）$\sim(A\cup B)=\sim A\cap\sim B$

（8）$\sim(A\cap B)=\sim A\cup\sim B$

（9）$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$

（10）$A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$

证明：（1）$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

$\forall x$

$x\in(A\cap B)\cap C\Leftrightarrow x\in A\wedge x\in B\wedge x\in C$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge x\in B\cap C$

$\Leftrightarrow x\in A\cap(B\cap C)$

综上，$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

（2）$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

$\forall x$

$x\in(A\cup B)\cup C\Leftrightarrow x\in A\cup B\vee x\in C$

$\Leftrightarrow x\in A\vee x\in B\vee x\in C$

$\Leftrightarrow x\in A\vee x\in B\cap C$

$\Leftrightarrow x\in A\cup(B\cup C)$

综上，$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$。

（3）$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$\forall x$

$x\in A\cap(B\cup C)\Leftrightarrow x\in A\wedge x\in B\cup C$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge(x\in B\vee x\in C)$

$\Leftrightarrow(x\in A\wedge x\in B)\vee(x\in A\wedge x\in C)$

$\Leftrightarrow x\in A\cap B\vee x\in A\cap C$

$\Leftrightarrow x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$

综上，$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

（4）$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$\forall x$

$x\in A\cup(B\cap C)\Leftrightarrow x\in A\vee x\in(B\cap C)$

$\Leftrightarrow x\in A\vee(x\in B\wedge x\in C)$

$\Leftrightarrow(x\in A\vee x\in B)\wedge(x\in A\vee x\in C)$

$\Leftrightarrow x\in A\cup B\wedge x\in A\cup C$

$\Leftrightarrow x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$

综上，$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

（5）$A\cap(A\cup B)=A$

$\forall x$

$x\in A\cap(A\cup B)\Leftrightarrow x\in A\vee x\in A\cup B$

$\Leftrightarrow x\in A$

综上，$A\cap(A\cup B)=A$

（6）$A\cup(A\cap B)=A$

$\forall x$

$x \in A \cup (A \cap B) \Leftrightarrow x \in A \vee x \in A \cap B$

$\Leftrightarrow x \in A \vee (x \in A \wedge x \in B)$

$\Leftrightarrow x \in A$

综上，$A \cup (A \cap B) = A$

（7）$\sim (A \cup B) = \sim A \cap \sim B$

$\forall x$

$x \in \sim (A \cup B) \Leftrightarrow x \notin A \cup B$

$\Leftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B$

$\Leftrightarrow x \in \sim A \wedge x \in \sim B$

$\Leftrightarrow x \in \sim A \cap \sim B$

综上，$\sim (A \cup B) = \sim A \cap \sim B$

（8）$\sim (A \cap B) = \sim A \cup \sim B$

$\forall x$

$x \in \sim (A \cap B) \Leftrightarrow x \notin A \cap B$

$\Leftrightarrow x \notin A \vee x \notin B$

$\Leftrightarrow x \in \sim A \vee x \in \sim B$

$\Leftrightarrow x \in \sim A \cup \sim B$

综上，$\sim (A \cap B) = \sim A \cup \sim B$

（9）$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

左$= A - (B \cup C) = A \cap \sim (B \cup C)$

$= A \cap \sim B \cap \sim C$

右$= (A - B) \cap (A - C)$

$= (A \cap \sim B) \cap (A \cap \sim C)$

$= A \cap \sim B \cap \sim C$

综上，$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

（10）$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

左$= A - (B \cap C)$

$= A \cap \sim (B \cap C)$

$= A \cap (\sim B \cup \sim C)$

右$= (A - B) \cup (A - C)$

$= (A \cap \sim B) \cup (A \cap \sim C)$

$= A \cap (\sim B \cup \sim C)$

综上，$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$　　证毕

证明集合恒等式的方法有两种，一是证明等式左、右两边所代表的集合含有完全相同的元素，如上面证明中，前 8 个等式的证明方法。二是根据已经证明的等式进行变形，如上面证明中后两个等式的证明方法。

定义 4.12 设 A、B 为任意两个集合，A 和 B 的对称差为集合 S，其元素或属于 A，或属于 B，但不能既属于 A，又属于 B，记作 $A \oplus B$。

$S = A \oplus B = \{x | (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \notin A \cap B)\}$

$=\{x|x\in(A-B)\vee x\in(B-A)\}$。

定理 4.5 设任意集合 A、B、C，则有以下性质：

（1）$A\oplus B=B\oplus A$;

（2）$A\oplus\varnothing=A$

（3）$A\oplus A=\varnothing$；

（4）$A\oplus B=(A\cap\sim B)\cup(\sim A\cap B)$;

（5）$(A\oplus B)\oplus C=A\oplus(B\oplus C)$。

证明略。

此外，还有下列关系式成立：

$A\cup B=(A\cap\sim B)\cup(B\cap\sim A)\cup(A\cap B)$

$A\cup B=(A\oplus B)\cup(A\cap B)$。

证明略。

4.3 有序对与笛卡儿积

4.3.1 有序对

与集合中元素的无序性不同，有些事物之间的次序是重要的。例如北京的地理位置为北纬 39 度，东经 116 度，可以简略表示为（39，116)。这里，括号中前一个元素表示纬度，后一个元素表示经度，两个元素的次序是不能颠倒的。

定义 4.13 由两个元素 x 和 y(允许 x =y)按一定顺序排列成的二元组称为一个有序对或序偶，记作 $<x$，$y>$ 或 (x,y)，其中 x 是该有序对的第一元素，y 是该有序对的第二元素。

之所以称为有序对，是因为有序对中的两个元素的次序是重要的，一般情况下不能对换。因此，当 $x\neq y$ 时，$<x$，$y>\neq<y$，$x>$。

定义 4.14 两个有序对相等，$<x$，$y>=<u$，$v>$，当且仅当 $x=u$ 且 $y=v$。

例如：a 代表人名，b 代表手机号码，则有序对 $<a$，$b>$ 就代表通讯录中的一条记录。a 代表课程名，b 代表分数，则有序对 $<a$，$b>$ 为某位同学大学成绩单中的一条记录。

有序对的概念可以推广到多元的情形。

（1）三元有序组 $<x$，y，$z>$ 可以表示为 $<<x$，$y>$，$z>$；任给两个三元有序组 $<x$，y，$z>$ 和 $<u$，v，$w>$，当且仅当 $<x$，$y>=<u$，$v>$ 且 $z=w$ 时，$<x,y,z>=<u,v,w>$。

（2）n 元有序组 $<x_1$，x_2，…，x_{n-1}，$x_n>$ 可表示为 $<<x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}>,x_n>$,其中 $<x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}>$ 是 $n-1$ 元有序组。任给两个 n 元有序组 $<x_1,x_2,\ldots,x_n>$ 和 $<y_1,y_2,\ldots,y_n>$，当且仅当 $<x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}>=<y_1,y_2,\ldots,y_{n-1}>$ 且 $x_n=y_n$ 时，$<x_1,x_2,\ldots,x_n>=<y_1,y_2,\ldots,y_n>$。

多元有序组也可简称为多元组。可以看出，n 元有序组是基于 $n-1$ 元有序组的定义给出的，这是一个递归的概念。

4.3.2 笛卡儿积

有序对$<x$，$y>$中的两个元素可以分别属于不同的集合，由此可以定义一种称作笛卡儿积的有序对集合。

定义 4.15 设A、B为集合。用A中元素x为第一元素，B中元素y为第二元素构成有序对，所有这样的有序对组成的集合叫做A和B的笛卡儿积，记作$A\times B$。笛卡儿积也称为直积。

笛卡儿积的符号化表示为$A\text{x}B=\{<x,y>|x\in A\wedge y\in B\}$。

笛卡儿积运算具有以下性质：

（1）对任意集合A, $A\times\varnothing=\varnothing$，$\varnothing\times A=\varnothing$;

（2）笛卡儿积不满足交换律，即当$A\neq\varnothing\wedge B\neq\varnothing\wedge A\neq B$时，$A\times B\neq B\times A$;

（3）笛卡儿积不满足结合律，即当$A\neq\varnothing\wedge B\neq\varnothing\wedge C\neq\varnothing$时，$(A\times B)\times C\neq A\times(B\times C)$。

定理 4.6 若集合A有 m 个元素，集合B有n个元素，则$A\times B$有$m*n$个元素。

证明：设$A=\{a_0,a_1,a_2...,a_{m-1}\}$，$B=\{b_0,b_1,b_2,...,b_{n-1}\}$。根据定义可知，$A\times B$的元素如下所示：

$$\begin{gathered}<a_0,b_0>,<a_1,b_0>,...,<a_{m-1},b_0>\\<a_0,b_1>,<a_1,b_1>,...,<a_{m-1},b_1>\\\vdots\\<a_0,b_{n-1}>,<a_1,b_{n-1}>,...,<a_{m-1},b_{n-1}>\end{gathered}$$

其中，每一行中有 m 个元素，共有n行，所以元素个数为$m*n$个。　证毕

$|A\times B|=|A|\times|B|$称为笛卡儿积的基数。

定理 4.7 设A、B、C 为任意三个集合，则有：

（1）$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$；

（2）$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$

（3）$(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$

（4）$(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)$

证明：（1）$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

任取$<x,y>$

$<x,y>\in A\times(B\cup C)\Leftrightarrow x\in A\wedge y\in B\cup C$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge(y\in B\vee y\in C)$

$\Leftrightarrow(x\in A\wedge y\in B\vee(x\in A\wedge y\in C))$

$\Leftrightarrow<x,y>\in A\times B\vee<x,y>\in A\times C$

$\Leftrightarrow<x,y>\in(A\times B)\cup(A\times C)$

故$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

（2）$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$

任取$<x,y>$

$<x,y>\in A\times(B\cap C)\Leftrightarrow x\in A\wedge y\in B\cap C$

$\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B \wedge y \in C$

$\Leftrightarrow <x, y> \in A \times B \wedge <x, y> \in A \times C$

$\Leftrightarrow <x, y> \in (A \times B) \cap (A \times C)$

故 $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

（3）$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

任取 $<x, y>$

$<x, y> \in (A \cup B) \times C \Leftrightarrow x \in A \cup B \wedge y \in C$

$\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge y \in C$

$\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in C) \vee (x \in B \wedge y \in C)$

$\Leftrightarrow <x, y> \in A \times C \vee <x, y> \in B \times C$

$\Leftrightarrow <x, y> \in (A \times C) \cup (B \times C)$

故 $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

（4）$(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

任取 $<x, y>$

$<x, y> \in (A \cap B) \times C \Leftrightarrow x \in A \cap B \wedge y \in C$

$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \wedge y \in C$

$\Leftrightarrow <x, y> \in A \times C \wedge <x, y> \in B \times C$

$\Leftrightarrow <x, y> \in (A \times C) \cap (B \times C)$

故 $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$　　证毕

定理 4.8 设 A、B、C、D 为四个非空集合，则 $A \times B \subseteq C \times D$ 的充分条件为 $A \subseteq C$ 且 $B \subseteq D$。

证明：

必要性　设 $A \times B \subseteq C \times D$，任给 $x \in A$，$y \in B$

$<x, y> \in A \times B \Rightarrow <x, y> \in C \times D$

$\Leftrightarrow x \in C \wedge y \in D$

故有 $A \subseteq C$ 且 $B \subseteq D$。

充分性　设 $A \subseteq C$ 且 $B \subseteq D$，任给 $<x, y>$

$<x, y> \in A \times B \Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B$

$\Leftrightarrow x \in C \wedge y \in D$

$\Leftrightarrow <x, y> \in C \times D$

故有 $A \times B \subseteq C \times D$

可以扩展笛卡儿积的定义，约定：

（1）$A_1 \times A_2 \times A_3 = (A_1 \times A_2) \times A_3$

（2）$A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4 = (A_1 \times A_2 \times A_3) \times A_4 = ((A_1 \times A_2) \times A_3) \times A_4$

（3）一般地，$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = (A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_{n-1}) \times A_n$

$= \{<a_1, a_2, \ldots, a_n> | (a_1 \in A_1) \wedge (a_2 \in A_2) \wedge \ldots \wedge (a_n \in A_n)\}$。

$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ 是 n 元有序组构成的集合。如果每个集合 A_i（$1 \leq i \leq n$）都是有限集，则 $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ 的基数是 $|A_1| \times |A_2| \times \ldots \times |A_n|$。特别地，下列等式成立：

$A \times A = A^2$

$A \times A \times A = A^3$

…

$A\times A\times\ldots\times A(n个)=A^n$

当 A 是有限集时，$\left|A^n\right|=|A|^n$。

练习题

1.设 $A=\{4,6,8\}$，下列选项中 A 的真子集是（ ）

A $\{2,6\}$

B $\{4,6\}$

C $\{4,6,8\}$

D $\{2,4,6\}$

2.下列选项中，包含元素 2 的集合是（ ）

A $\{\{2\},\{\{2\}\}\}$

B $\{\{2\},\{2,\{2\}\}\}$

C $\{\{\{2\}\}\}$

D $\{2,\{2\}\}$

3.设集合 A 有 m 个元素，集合 B 有 n 个元素，$A\times B$ 的元素个数是（ ）

A m

B n

C m+n

D $m\times n$

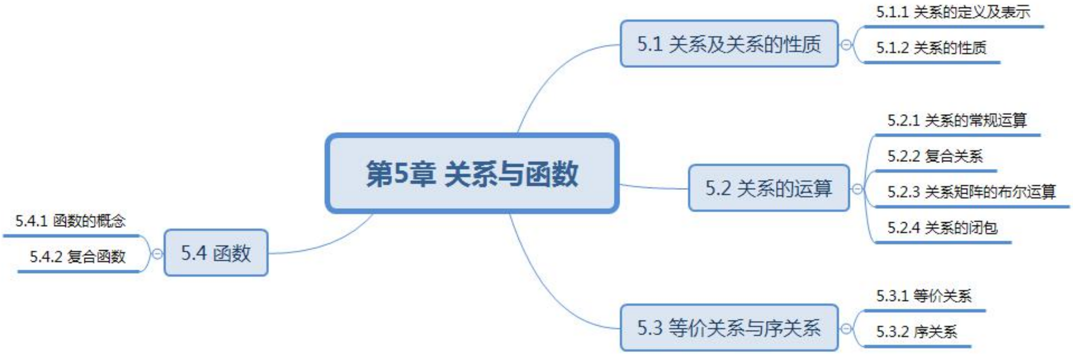
答案

1.B。

2.D。

3.D。

第 5 章关系与函数



5.1 关系及关系的性质

5.1.1 关系的定义及表示

我们使用二元组来描述笛卡儿积，实际上，关系也可用二元组来描述。

定义 5.1 设 A、B 是任意两个集合，$A\times B$ 的子集 R 称为从 A 到 B 的二元关系，简称为关系。特别地，当 $A=B$ 时，称 R 为 A 上的关系。如果 $<x，y>\in R$，可记为 xRy，称 x 与 y 有关系 R；如果 $<x，y>\notin R$，则记为 $x\not R y$，称 x 与 y 没有关系 R。

显然 A 到 B 的二元关系，也是有序对的集合，但它与笛卡儿积是不同的。关系可能仅在两个集合的部分元素之间有定义，没有定义的元素之间不存在关系。而笛卡儿积是两个集合全部元素之间都有定义。

二元关系中，有几个特殊的关系，分别是空关系、全域关系及恒等关系。

定义 5.2 对任意的集合 A，称 $E_A=\{<x,y>|x\in A\wedge y\in A\}=A\times A$ 为 A 上的全域关系或全关系，称 $I_A=\{<x,x>|x\in A\}$ 为 A 上的恒等关系。对于任何集合 A，若 A 上的关系 $R=\varnothing$，称为 A 上的空关系。

定义 5.3 设 R 是集合 A 上的二元关系，

（1）R 中所有有序对的第一元素构成的集合称为 R 的定义域，记为 $domR$，表示为

$domR=\{x|\exists y(<x,y>\in R)\}$；

（2）R 中所有有序对的第二元素构成的集合称为 R 的值域，记为 $ranR$，

$ranR=\{y|\exists x(<x,y>\in R)\}$；

（3）R 的定义域和值域的并集称为 R 的域，记为 $fldR, fldR=domR\cup ranR$。

例如，设 $X=\geq\{a,b,c,d\}$，$Y=\{1,2,3,4,5\}$，$f=\{<a,1>,<b,3>,<c,4>,<d,4>\}$，则 $domf=\{a,b,c,d\}$，$ranf=\{1,3,4\}$。

表示关系时，除了列出有序对的集合外，还可以使用关系矩阵和关系图。

设给定两个有限集合 $X=\{x_1,x_2,\ldots x_m\}$，$Y=\{y_1,y_2,\ldots,y_n\}$，R 为 X 到 R 的一个二

元

关系，称矩阵 $M_R=(r_{ij})_{m\times n}$ 对应于 R 的关系矩阵，其中

$$r_{ij}=\begin{cases}1\text{，当}<x_i,y_i>\in R\\ 0\text{，当}<x_i,y_i>\notin R\end{cases}$$

直观地说，当元素 x_i 与 y_j 有关系时，关系矩阵的 i 行 j 列处的值是 1；当元素 x_i 与 y_j 没有关系时，关系矩阵的 i 行 j 列处的值是 0。若 R 是含 n 个元素的集合 A 上的关系，则关系矩阵为 $n\times n$ 的方阵。关系矩阵也称为布尔矩阵。关系矩阵中，值为 1 的元素个数与 R 中所含的有序对的个数相等。

例 5.5 设 $A=\{-2,0,3,6\}$，试以关系矩阵来表示 LE_A 和 D_A。

解：的关系矩阵如下：

$$M_{LE_A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

D_A 的关系矩阵如下：

$$M_{D_A}=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&0&0&0\\0&1&1&1\\0&1&0&1\end{pmatrix}$$

根据关系 R 中各二元组的值可以构造关系矩阵，反过来，给出关系矩阵，我们也可以确定关系 R 中的二元组。

例 5.6 设 $X=\{x_1,x_2,x_3\}$，$Y=\{y_1,y_2,y_3,y_4,y_5\}$。根据所给的关系矩阵确认关系 R 中的二元组。

$$M_R=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\1&0&1&1&0\\1&0&1&0&1\end{pmatrix}$$

解：根据关系矩阵 M_R，可知

$R=\{<x_1,y_2>,<x_2,y_1>,<x_2,y_3>,<x_2,y_4>,<x_3,y_1>,<x_3,y_3>,<x_3,y_5>\}$。

关系图是一种比较直观的表示方法。

设集合 $X=\{x_1,x_2,\ldots,x_m\}$ 到 $Y=\{y_1,y_2,\ldots,y_n\}$ 的二元关系为 R，在平面上作出两组顶点，其中一组顶点对应 X 中的元素，另一组顶点对应 Y 中的元素，两组顶点分别记作 $x_1,x_2,\ldots,x_m$ 和 $y_1,y_2,\ldots,y_n$。如果 x_iRy_j，则自顶点 x_i 至顶点 y_j 画一条有向边

（带方向的线段），边上的方向由 x_i 指向 y_j；如果 x_iRy_j，则 x_i 与 y_j 间没有边相连，由此得到 R 的关系图。图 5.1 是一个关系图的示意图。由关系图的表示方法可知，若 R 中含有 t 个有序对，则关系图中恰有 t 个有向边。

若 R 是 X 上的关系，则关系图中只需画出 X X 中的 m 个顶点即可。画关系图时，各顶点的位置、次序是不重要的，连线的长短只与顶点间的距离有关，并不代表任何含义。为了直观起见，如果 R 是 X 到 Y 的二元关系，则尽量将 X 中的顶点与 Y 中的顶点分开一些，如图 5.1 中所示。如果 R 是单个集合 X 上的二元关系，则各顶点的位置可以是任意的。

例 5.7 设 $A=\{-2,0,3,6\}$，试画出 LE_A 的关系图。

解：因为 LE_A 是 A 上的关系，故只需画出 A 中的 4 个顶点即可。以由 x_i 到 x_j 的有向边来表示 x_iRx_j，以由 x_i 到自身的有向边来表示 x_iRx_i 的关系图如图 5.2 所示。

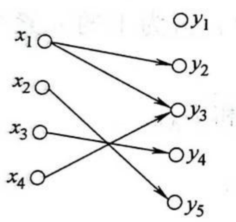


图 5.1 关系图的示意图

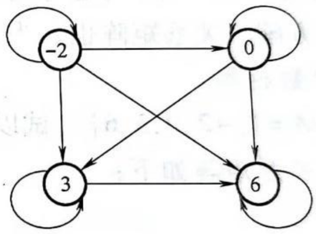


图 5.2 LE_A 的关系图

5.1.2 关系的性质

定义 5.4 设 R 是集合 A 上的二元关系，

（1）如果对 $\forall a\in A$，必有 aRa，则称关系 R 在 A 上是自反的；

（2）如果对 $\forall a\in A$，必有 $a\not R a$，则称关系 R 在 A 上是反自反的；

（3）对 $\forall a,b\in A$，若 aRb 必有 bRa，则称关系 R 在 A 上是对称的；

（4）对 $\forall a,b\in A$，若 aRb 且 bRa 必有 $a=b$,则称关系 R 在 A 上是反对称的；

（5）对 $\forall a,b,c\in A$,若 aRb 且 bRc 必有 aRc，则称关系 R 在 A 上是传递的。

反对称关系也可以表示为：若 aRb 且 $a\neq b$，必有 $b\not R a$。

设有关系 R，判别 R 的自反性和反自反性非常简单，只需针对集合 A 中的所有元素 x，判别 R 中是否包含了形如 $<x,x>$ 的二元组。若全包含，则 R 为自反的；若全没有包含，则 R 为反自反的；若一部分存在，一部分不存在，则 R 既不是自反的，也不是反自反的。

判定关系不满足自反性和反自反性的条件是：若 $\exists x\in A$,满足 $<x,x>\notin R$，则 R 不是自反的；若 $\exists x\in A$，满足 $<x,x>\in R$，则 R 不是反自反的。

定义 5.4 也可以用谓词逻辑来表示。比如：$\forall x,y\in A$，满足 $<x,y>\in R\rightarrow<y,x>\in R$ 则 R 是对称的；$\forall x,y\in A$，满足 $(<x,y>\in R)\wedge(x\neq y)\rightarrow<y,x>\notin R$，则 R 是反对称的。

根据条件式的定义，当前件为假时，命题为真，即对于 $\forall x,y\in A$，若 $<x,y>\notin R$，不论二元组 $<y,x>$ 是否属于 R，命题 $<x,y>\in R\to<y,x>\in R$ 均为真。所以判别对称性时，不必考虑不属于 R 的二元组 $<x,y>$ 的情况，只需针对 R 中的任一二元组 $<x,y>$ 来判定 $<y,x>$ 是否属于 R 即可。若 $\exists<x,y>\in R$ 满足 $(<x,y>\in R)\wedge(<y,x>\in R)$ 为假，这说明 $<y,x>\notin R$，则 R 不是对称的。注意，不是对称的并不意味着是反对称的。

与此类似的，表示反对称的条件式中，当前件为假时，命题也为真。所以只需针对 $\forall x,y\in A$，考虑属于 R 且二个元素不相等的二元组 $<x,y>$，看看 $<y,x>\notin R$ 是否成立。若 $\exists<x,y>\in R$ 且 $x\neq y$，而 $<y,x>\in R$，则 R 不是反对称的。

判定关系不满足对称性和反对称性的条件是：若 $\exists x,y\in A,<x,y>\in R\wedge<y,x>\notin R$，则 R 不是对称的；若 $\exists x,y\in A\wedge x\neq y,<x,y>\in R\wedge<y,x>\in R$，则 R 不是反对称的。

总之，$\forall x,y\in A$，针对 R 中的任一二元组 $<x,y>(x\neq y)$，判别二元组对 $<x,y>$ 与 $<y,x>$ 是否同时存在。若同时存在，则 R 为对称的；若不同时存在，则 R 为反对称的；若有些二元组对同时存在，有些不同时存在，则 R 既不是对称的，也不是反对称的。

关系的性质还可以通过关系矩阵和关系图给予验证。

（1）若关系 R 是自反的，当且仅当在关系矩阵中，对角线上的所有元素都是 1，在关系图上每个顶点都有到自身的有向边。

（2）若关系 R 是反自反的，当且仅当关系矩阵对角线上的元素皆为 0,关系图上每个顶点都没有到自身的有向边。

（3）若关系 R 是对称的，当且仅当关系矩阵是对称矩阵，且在关系图上，任何两个顶点间若存在有向边，必是成对出现。

（4）若关系是反对称的，当且仅当关系矩阵中 $r_{ij}*r_{ji}=0(i\neq j)$，即以主对角线为对称的两个元素不能同时为 1，在关系图上两个不同顶点间的有向边，均不会成对出现。

自反性与反自反性不是非此即彼的，一个关系 R 不是自反的，并不说明它一定就是反自反的，反之亦然。关系 R 可能既不是自反的，也不是反自反的。在关系的关系矩阵中，对角线上的元素部分为 1、部分为 0 时，R 既不是自反的也不是反自反的。

类似地，对称性与反对称性也不是非此即彼的。一个关系不满足对称性，并不代表它一定满足反对称性。反之亦然。即一个关系可能既不是对称的，也不是反对称的。

我们将常见的几个关系的性质总结在表 5.1 中。

表 5.1 常见关系的性质

关系	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
全域关系 E	√		√		√
恒等关系 I	√		√	√	√
空关系$\varnothing$		√	√	√	√
小于等于关系 LE_A	√			√	√
小于关系 L_A		√		√	√
整除关系 D_A	√			√	√

5.2 关系的运算

5.2.1 关系的常规运算

关系是由二元组构成的集合，所以对集合的运算可以应用在关系上。

定理 5.1 若 Z 和 S 是从集合 X 到 Y 的两个关系，则 Z、S 的并、交、补、差仍是 X 到 Y 的关系。

证明：从集合 X 到 Y 的两个关系 Z、S 的并、交、差分别表示为：$Z\cup S$、$Z\cap S$ 和 $Z-S$，S 的补表示为 $\tilde{S}$。

因为 $Z\subseteq X\times Y, S\subseteq X\times Y$, 则

$Z\cup S\subseteq X\times Y, Z\cap S\subseteq X\times Y, \tilde{S}=(X\times Y-S)\subseteq X\times Y, Z-S=Z\cap\tilde{S}\subseteq X\times Y$。

故结论得证。　证毕

定义 5.5 设 R 是从 X 到 Y 的二元关系，如将 R 中每一个二元组中的元素顺序互换，所得到的集合称为 R 的逆关系，简称为 R 的逆，记作 R^{-1} 或 R^{C}，即 $R^{-1}=\{<y,x>|<x,y>\in R\}$。

定理 5.2 设 R、R_1、R_2 都是从 A 到 B 的二元关系，则下列各式成立。

（1）$(R^{-1})^{-1}=R$；

（2）$(R_1\cup R_2)^{-1}=R_1^{-1}\cup R_2^{-1}$；

（3）$(R_1\cap R_2)^{-1}=R_1^{-1}\cap R_2^{-1}$；

（4）$(\tilde{R})^{-1}=\widetilde{R^{-1}}$；

（5）$(A\times B)^{-1}=B\times A$；

（6）$(R_1-R_2)^{-1}=R_1^{-1}-R_2^{-1}$；

（7）若 $R_1\subseteq R_2$，则 $R_1^{-1}\subseteq R_2^{-1}$；

（8）$domR^{-1}=ranR$；

（9）$ranR^{-1}=domR$。

证明：（1）$(R^{-1})^{-1}=R$

$\forall<a,b>$

$<a,b>\in(R^{-1})^{-1}\Leftrightarrow<b,a>\in R^{-1}$

$\Leftrightarrow<a,b>\in R$

故 $(R^{-1})^{-1}=R$。

（2）$(R_1\cup R_2)^{-1}=R_1^{-1}\cup R_2^{-1}$

$\forall<a,b>$

$<a,b>\in(R_1\cup R_2)^{-1}\Leftrightarrow<b,a>\in R_1\cup R_2$

$\Leftrightarrow<b,a>\in R_1\vee<b,a>\in R_2$

$\Leftrightarrow<a,b>\in R_1^{-1}\vee<a,b>\in R_2^{-1}$

$\Leftrightarrow<a,b>\in R_1^{-1}\cup R_2^{-1}$

故 $(R_1\cup R_2)^{-1}=R_1^{-1}\cup R_2^{-1}$

（3）$(R_1\cap R_2)^{-1}=R_1^{-1}\cap R_2^{-1}$

$\forall<a,b>$

$<a,b>\in(R_1\cup R_2)^{-1}\Leftrightarrow<b,a>\in R_1\cap R_2$

$\Leftrightarrow<b,a>\in R_1\wedge<b,a>\in R_2$

$\Leftrightarrow<a,b>\in R_1^{-1}\wedge<a,b>\in R_2^{-1}$

$\Leftrightarrow<a,b>\in R_1^{-1}\cap R_2^{-1}$

故 $(R_1\cap R_2)^{-1}=R_1^{-1}\cap R_2^{-1}$

（4）$(\tilde{R})^{-1}=\tilde{R}^{-1}$

$\forall<a,b>$

$<a,b>\in(\tilde{R})^{-1}\Leftrightarrow<b,a>\in\tilde{R}$

$\Leftrightarrow<b,a>\notin R$

$\Leftrightarrow<a,b>\notin R^{-1}$

$\Leftrightarrow<a,b>\in\tilde{R}^{-1}$

故 $(\tilde{R})^{-1}=\tilde{R}^{-1}$

（5）$(A\times B)^{-1}=B\times A$

$\forall<a,b>$

$<a,b>\in(A\times B)^{-1}\Leftrightarrow<b,a>\in A\times B$

$\Leftrightarrow<a,b>\in B\times A$

故 $(A\times B)^{-1}=B\times A$

（6）$(R_1-R_2)^{-1}=R_1^{-1}-R_2^{-1}$

$\forall<a,b>$

$<a,b>\in(R_1-R_2)^{-1}\Leftrightarrow<b,a>\in R_1-R_2$

$\Leftrightarrow<b,a>\in R_1\wedge<b,a>\notin R_2$

$\Leftrightarrow<a,b>\in R_1^{-1}\wedge<a,b>\notin R_2^{-1}$

$\Leftrightarrow<a,b>\in R_1^{-1}-R_2^{-1}$

故 $(R_1-R_2)^{-1}=R_1^{-1}-R_2^{-1}$

（7）若 $R_1\subseteq R_2$，则 $R_1^{-1}\subseteq R_2^{-1}$

$\forall<a,b>$

$<a,b>\in R_1^{-1} \Leftrightarrow <b,a>\in R_1$

$\Rightarrow <b,a>\in R_2$

$\Leftrightarrow <a,b>\in R_2^{-1}$

故（7）得证。

（8）$domR^{-1}=ranR$

$\forall x$

$x\in domR^{-1} \Leftrightarrow \exists y(<x,y>\in R^{-1})$

$\exists y(<y,x>\in R)$

$\Leftrightarrow x\in ranR$

故 $domR^{-1}=ranR$

（9）$ranR^{-1}=domR$。

$\forall y$

$y\in ranR^{-1} \Leftrightarrow \exists x(<x,y>\in R^{-1})$

$\Leftrightarrow \exists x(<y,x>\in R)$

$\Leftrightarrow y\in domR$

故 $ranR^{-1}=domR$　　证毕

5.2.2 复合关系

定义 5.6 设 R 为 A 到 B 的关系，S 为 B 到 C 的关系，则 $R\circ S$ 称为 R 和 S 的复合关系，表示为 $R\circ S=\{<x,y>|\exists t(<x,t>\in R\wedge <t,y>\in S)\}$。

上面这样定义的复合关系称为右复合，它表示运算次序为从左至右，即先进行 R 运算，再进行 S 运算。类似地还可定义左复合 $R\circ S$，它表示运算次序为从右至左，先进行 S 运算，再进行 R 运算，表示为：$R\circ S=\{<x,y>|\exists t(<x,t>\in S\wedge <t,y>\in R)\}$。本书中不特别指明的情况下，使用右复合定义。

定义中，隐含着还需要满足如下的关系：$x\in A\wedge y\in B\wedge t\in C$。因为满足了 $<x$，$y>\in R$ 这个条件，就意味着也满足了 $x\in A\wedge y\in B$；同样的，$<y$，$t>\in S$ 这个条件也意味着 $y\in B\wedge t\in C$，所以定义中不需要再强调了。

定理 5.3 设 F 是 X 到 Y 的关系，G 是 Y 到 Z 的关系，H 是 Z 到 W 的关系，则

（1）$(F\circ G)\circ H=F\circ(G\circ H)$；

（2）$(F\circ G)^{-1}=G^{-1}\circ F^{-1}$。

证明：（1）$(F\circ G)\circ H=F\circ(G\circ H)$

$\forall <x,w>$

$<x,w>\in(F\circ G)\circ H \Leftrightarrow \exists z(<x,z>\in F\circ G\wedge <z,w>\in H)$

$\Leftrightarrow \exists z(\exists y(<x,y>\in F\wedge <y,z>\in G)\wedge <z,w>\in H)$

$\Leftrightarrow \exists z\exists y(<x,y>\in F\wedge <y,z>\in G\wedge <z,w>\in H)$

$\Leftrightarrow \exists y(<x,y>\in F\wedge \exists z(<y,z>\in G\wedge <z,w>\in H))$

$\Leftrightarrow \exists y(<x,y>\in F\wedge <y,w>\in G\circ H)$

$\Leftrightarrow <x,w>\in F\circ(G\circ H)$

故 $(F\circ G)\circ H=F\circ(G\circ H)$

（2）$(F\circ G)^{-1}=G^{-1}\circ F^{-1}$

$\forall <x,z>$

$<x,z>\in(F\circ G)^{-1}\Leftrightarrow <z,x>\in(F\circ G)$

$\Leftrightarrow \exists y(<z,y>\in F\wedge <y,x>\in G)$

$\Leftrightarrow \exists y(<y,z>\in F^{-1}\wedge <x,y>\in G^{-1})$

$\Leftrightarrow \exists y(<x,y>\in G^{-1}\wedge <y,z>\in F^{-1})$

$\Leftrightarrow <x,z>\in G^{-1}\circ F^{-1}$

故 $(F\circ G)^{-1}=G^{-1}\circ F^{-1}$　　证毕

但复合运算不满足交换律，一般来说 $R_1\circ R_2\neq R_2\circ R_1$

因为关系的复合运算满足结合律，故可以使用递归来定义关系的幂。

定义 5.7 设 R 是集合 A 上的关系，幂 $R^n(n=1,2,\ldots)$ 递归地定义为 $R^1=R,R^n=R^{n-1}\circ R$。

具体来说，$R\circ R$，$R\circ R\circ R$，…，$R\circ R\circ\ldots\circ R$（$n$个）可分别记作 R^2，R^3，…，R^n，其中 $R^n=R^{n-1}\circ R$，$R^{n-1}=R^{n-2}\circ R$，…，$R^3=R^2\circ R$，$R^2=R\circ R$。

5.2.3 关系矩阵的布尔运算

已知关系 R 的关系矩阵为 M_R，则逆关系 R^{-1} 的关系矩阵为 M_R 的转置矩阵 M_R^T。

关系矩阵可以表示关系，同样的，关系的运算也可以通过矩阵的布尔运算体现出来。布尔运算的定义为：

$0\vee 0=0,0\vee 1=1,1\vee 0=1,1\vee 1=1,$

$0\wedge 0=0,,0\wedge 1=0,1\wedge 0=0,1\wedge 1=1$。

假设集合 A 含有 n 个元素，A 上的关系 R_1 和 R_2 分别由矩阵 M_{R_1} 和 M_{R_2} 表示，则 R_1 和 R_2 的并 $R_1\cup R_2$ 的关系矩阵 $M_{R_1\cup R_2}$、R_1 和 R_2 的交 $R_1\cap R_2$ 的关系矩阵 $M_{R_1\cup R_2}$ 分别定义如下:

$$\begin{aligned}M_{R_1\cup R_2}[i,j]&=M_{R_1}[i,j]\vee M_{R_2}[i,j]\\ M_{R_1\cap R_2}[i,j]&=M_{R_1}[i,j]\wedge M_{R_2}[i,j]\end{aligned}\qquad (1\le i,j\le n)$$

例 5.13 设集合 A 上的关系 R_1 和 R_2 的关系矩阵如下：

$$M_{R_1}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\quad M_{R_2}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&0&0\end{pmatrix}$$

求 $R_1\cup R_2$、$R_1\cap R_2$ 的关系矩阵。

解：$M_{R_1\cup R_2}=M_{R_1}\vee M_{R_2}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}$，$M_{R_1\cap R_2}=M_{R_1}\wedge M_{R_2}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

定理 5.4 设 $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_m\}$，$B=\{b_1,b_2,\ldots,b_n\}$，$C=\{c_1,c_2,\ldots,c_r\}$。从 A 到 B 的关系 R_1 的关系矩阵 $M_{R_1}=(x_{ij})$ 是 $m\times n$ 阶矩阵，从 B 到 C 的关系 R_2 的关系矩阵 $M_{R_2}=(y_{ij})$ 是 $m\times r$ 阶矩阵，那么 R_1 与 R_2 的复合关系 $R_1\circ R_2$ 是从 A 到 C 的关系，

其关系矩阵 $M_{R_1 \circ R_2} = (z_{ij})$ 是 $m \times r$ 阶矩阵，其中 $z_{ij} = \bigvee_{k=1}^{n}(x_{ik} \wedge y_{kj})$，

oft

$i = 1,2,\ldots,m, j = 1,2,\ldots,r$。证明略。

所以，关系尺。S =|<2，3>，<3，A>，<A，1>，<5，3>}，$S \circ R$ ={<1，2>，<2，3>，<5，1>}〇

由定理 5.4 知，求两个关系 R_1 与 R_2 的复合关系 $R_1 \circ R_2$ 的关系矩阵，实际上是求两个关系矩阵的布尔乘法。矩阵的布尔乘法与普通的矩阵乘法的计算过程是一样的，只是使用合取替代普通的乘法，使用析取替代普通的加法。

5.2.4 关系的闭包

关系的某些性质非常有用，例如自反性、对称性及传递性。但任给一个关系 R，都不能保证 R 一定具有这些性质。在 R 中添加新的二元组形成新的关系 R'，可能会使 R' 具有自反性、对称性及传递性，比如，将 R 扩展为全关系 E。但这样得到的新关系变得太大，添加的某些二元组是没有意义的，所以是不必要的。我们的目标是，仅添加必要的二元组，使得新关系具有我们想要的性质。得到的新关系称为原关系的闭包。

定义 5.8 设 R 是非空集合 A 上的二元关系，若关系 R' 满足下列条件：

（1）R' 是自反的（对称的或传递的）；

（2）$R \subseteq R'$

（3）对于 A 上的任何包含 R 的自反的（对称的或传递的）关系 R''，有 $R' \subseteq R''$；

称 R' 为 R 的自反（对称或传递）闭包，记作 $r(R)$（$s(R)$ 或 $t(R)$）。

那么如何得到关系 R 的闭包呢？先看自反闭包。为使新关系 R' 具有自反性，根据自反性的定义可知，对 $\forall x \in A$，必有 $<x,x> \in R'$，故只需在 R 中添加所有的 R 中没有的二元组 $<x,x>$ 即可得到自反闭包。

构造对称闭包的方法是，查看 R 中任意的二元组 $<x,y>$，如果 $<y,x> \notin R$，则需要将 $<y,x>$ 加入 R 中，即保证 R 中的二元组都是成对出现的，有 $<x,y>$ 就必有 $<y,x>$。

最后再看传递闭包，它的构造需要一个迭代过程。对于 R 中的任意两个二元组 $<x,y>$、$<y,z>$，如果 $<x,z> \notin R$，则在 R 中添加 $<x,z>$。如果本轮中新增加了二元组，则需要再对 R 中所有二元组进行检查，并添加必要的二元组。当本轮检查中没有增加任何二元组时，检查结束，得到的即是原关系的传递闭包。可以证明这个过程不会无限的进行下去，本书忽略此证明。

由此，得到下列定理。

定理 5.5 设 R 为非空有穷集合 A 上的二元关系，则

（1）$r(R) = R \cup I_A$；

（2）$s(R) = R \cup R^{-1}$；

（3）$t(R) = R \cup R^2 \cup \ldots \cup R^n$，其中 n 是集合 A 中的元素的数目。

证明略。

5.3 等价关系与序关系

5.3.1 等价关系

前面两节介绍了关系及关系的性质，有些应用中需要一个关系同时具备多个性质。本节我们将讨论这样的关系。

定义 5.9 给定集合 A 上的关系 ρ ，若 ρ 是自反的、对称的，则称 ρ 是 A 上的相容关系。

定义 5.10 设 R 为非空集合 A 上的关系，若 R 是自反的、对称的和传递的，则称 R 为 A 上的等价关系。

设 R 为等价关系，若 $<x,y>\in R$ ，称 x 等价于 y ，记作 $x \sim y$。

等价关系是一类重要的二元关系。

例 5.19 设 $A=\{1,2,\ldots,10\}$ ，定义 A 上的同余关系：

$R=\{<x,y>|x\in A\wedge y\in A\wedge x\equiv y(\mathrm{mod}\,3)\}$ ，

证明 R 是等价关系。

证明：题目中所给的关系 R 是同余关系，即若 $<x,y>\in R$ ，则 x 除以 3 与 y 除以 3 后得到的余数相同。下面我们来验证 R 是等价关系。

$\forall a\in A$ ，有 $a\equiv(\mathrm{mod}\,3)$ 成立，即 $<a,a>\in R$ ，故 R 是自反的。

$\forall <a,b>$

$<a,b>\in R \Leftrightarrow a\equiv b(\mathrm{mod}\,3)$

$\Leftrightarrow \exists t(t\in Z\wedge a-b=3\times t)$

$\Leftrightarrow b-a=-3\times t$

$\Leftrightarrow <b,a>\in R$

故 R 是对称的。

$\forall <a,b>,<b,c>$

$<a,b>\in R\wedge <b,c>\in R \Leftrightarrow a\equiv b(\mathrm{mod}\,3)\wedge b\equiv c(\mathrm{mod}\,3)$

$\Leftrightarrow \exists t(t\in Z\wedge a-b=3\times t)\wedge \exists r(r\in Z\wedge b-c=3\times r)$

$\Leftrightarrow a-c=3\times(t+r)$

$\Leftrightarrow a\equiv c(\mathrm{mod}\,3)$

$\Leftrightarrow <a,c>\in R$

故 R 是传递的。

综上，K 是等价关系。　证毕

在数学中，存在很多等价关系，例如，在平面三角形集合中，三角形的相似关系是等价关系。日常生活中，也存在很多的等价关系，例如，在一群人的集合中年龄相等关系是等价关系，姓氏相同关系也是等价关系，籍贯相同关系也是等价关系。但朋友关系不是等价关系，而仅仅是相容关系，因为朋友关系一般不具备传递性。

定义 5.11 设 R 是非空集合 A 上的等价关系，$\forall a\in A$ ，令 $[x]_R=\{y|y\in A\wedge xRy\}$ ，称 $[x]_R$ 为 x 关于 R 的等价类，简称为 x 的等价类。在不会引起歧义的情况下，$[x]_R$ 简

记为 $[x]$。

再看例 5.19 中的同余关系 R，它把集合 A 分成三个等价类，分别是：

$[1]=\{1,4,7,10\}$；

$[2]=\{2,5,8\}$；

$[3]=\{3,6,9\}$。

实际上，[1]=[4]=[7]=[10]，[2]=[5]=[8],[3]=[6]=[9]。这说明，等价类 $[x]$ 是由 A 中所有与 x 等价的元素构成的集合，同一等价类中的所有元素都是等价的，一个等价类中的所有元素的等价类都是相同的。

这个例子可以推广到整数集合 Z 上，定义模 n 相等关系 $R=\{<x,y>|x\equiv y(\bmod n)\}$，可以验证关系是等价关系。关系 R 将集合 Z 分为 n 个等价类，同一个等价类中任何两个元素 x，y 模 n 相等，即 $xRy \Leftrightarrow x\equiv y(\bmod n)$。

现以 n =4 为例，模 4 相等关系将整数集 Z 中任一个整数归于下列 4 个集合之一：

（1）被 4 除余数为零的集合：$[0]=\{\ldots,-8,-4,0,4,8,\ldots,4P,\ldots\}$，其中 $P\in Z$；

（2）被 4 除余数为 1 的集合：$[1]=\{\ldots,-7,-3,1,5,9,\ldots,4P+1,\ldots\}$，其中 $P\in Z$；

（3）被 4 除余数为 2 的集合：$[2]=\{\ldots,-6,-2,2,6,10,\ldots,4P+2\}$，其中 $P\in Z$；

（4）被 4 除余数为 3 的集合：$[3]=\{\ldots,-5,-1,3,7,11,\ldots,4P+3,\ldots\}$，其中 $P\in Z$。

在整数集中具有模 4 相等关系的数组成的集合只有上述 4 个，Z 中的任一个元素 x 必属于一个等价类中，并且只可属于一个等价类中。在上述每一个集合中，任意两元素之差都是 4 的倍数。另一方面，这 4 个等价类的并即为集合 Z，$[0]_R\cup[1]_R\cup[2]_R\cup[3]_R=Z$。

定理 5.6 设给定非空集合 A 上的等价关系 R，$\forall a$，$b\in A$ 有 aRb，当且仅当 $[a]_R=[b]_R$。

证明：$\forall a,b\in A$，

$a\in[a]_R\wedge aRb\Leftrightarrow b\in[a]_R$

$\Leftrightarrow a\in[b]_R$

综上，命题得证。

定义 5.12 给定非空集合 A，若有集合 $S=\{S_1,S_2,\ldots,S_m\}$，其中 $S_i\subseteq A$，$S_i\neq\varnothing$（$1\le i\le m$），且 $S_i\cap S_j=\varnothing$（$i\neq j$）同时有 $\bigcup_{i=1}^{m}S_i=A$，称 S 是 A 的划分，每个 S_i（$1\le i\le m$）称为一个分块。

实际上，集合 A 上的任一等价关系的等价类都构成 A 的一个划分。仍以 $n=4$ 的同余关系为例，$[0]_R\cup[1]_R\cup[2]_R\cup[3]_R=Z$，任意两个等价类的交是空集，因此，$S=\{[0]_R,[1]_R,[2]_R,[3]_R\}$ 就是 Z 的一个划分。

定理 5.7 集合 A 的一个划分确定 A 的元素间的一个等价关系，划分中的集合是等价类。

证明：设集合 A 有一个划分 $S=\{S_1,S_2,\ldots,S_m\}$，现定义一个关系 R：aRb，当且仅当 a,b 在同一分块中，下面证明 R 是等价关系。

（1）$\forall a \in A$，a 与 a 在同一分块中，故必有 a R a，即 R 是自反的。

（2）$\forall a,b \in A$，若 a 与 b 在同一分块中，则 b 与 a 也在同一分块中，即 $aRb \Rightarrow bRa$，故 R 是对称的。

（3）$\forall a,b,c \in A$，若 a 与 b 在同一分块中，不失一般性设为 S_i，$b \in S_i$；b 与 c 在同一分块中，不失一般性设为 S_j，$b \in S_j$。因为任意两个分块满足 $S_u = S_v = \varnothing\ (u \neq v)$，即它们没有公共元素，故 b 仅能属于一个分块中，必有 $S_i = S_j$，即 a 与 c 都在分块 S_i（/ S_j）中，故有：$aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$，即 R 是传递的。

综上，R 是 A 上的等价关系，显然每个分块都是等价类。 证毕

5.3.2 序关系

定义 5.13 设 A 是一个非空集合，如果 A 上的关系 R 满足自反性、反对称性及传递性，则称 R 是 A 上的一个偏序关系，记作“$\preccurlyeq$”。集合 A 和 A 上的偏序关系 $\preccurlyeq$ 一起称为偏序集，记为 $< A$，$\preccurlyeq >$。

设 $\leq$ 为偏序关系，若 $<x,y> \in \leq$，读为“x 小于或等于 y”，记作 $x \leq y$。例如集合 A 上的恒等关系 I_A 和空关系 $\varnothing$ 都是 A 上的偏序关系，整数集合上的小于等于关系 LE_A 也是偏序关系。

定义 5.14 设 $\preccurlyeq$ 是非空集合 A 上的偏序关系，对 $\forall a$，$b \in A$，若 $<$a，$b> \in \leq$ 且 $a \neq b$，称 a 小于 b，记为 $a \prec b$；若 $< a$，$b > \in \leq$ 或 $< b$，$a > \in \leq$，称 a 与 b 是可比的，否则称 a 与 b 是不可比的。

偏序集 $< A, \leq >$ 中，并不是任意两个元素之间都存在 $\leq$ 关系，存在 $\preccurlyeq$ 关系的两个元素之间或相等，或不同。元素相等的情况反映的正是关系的自反性；元素不相等时，反映的是元素之间的顺序关系。

定义 5.15 设 $< A$，$\leq >$ 为偏序集，对 $\forall a$，$b \in A$，若 $a \prec b$ 且不存在 $c \in A$ 使得 $a \prec c \prec b$，则称 b 覆盖 a。记 $COVA = \{ < a,b > | a \in A \wedge b \in A \wedge b覆盖a \}$。

表示偏序关系的关系图称为哈斯图，表示规则为：① A 中每个元素可用顶点表示；② $\forall a,b \in A$，若 $a \prec b$，则将 a 画在 b 的下方；③ $\forall a,b \in A$，若 b 覆盖 a，则在 a 与 b 之间画一条边；④哈斯图中省略从顶点到自身的边。

哈斯图中边所连的两个顶点之间是可比的，且上面的顶点覆盖下面的顶点。实际上，偏序关系这个术语中的“偏”字表示的即是“部分元素”的意思，换句话说，并不一定在全部元素之间都存在这个关系。

既然集合中并非全部元素之间都存在偏序关系，那么究竟是哪些元素之间存在这种关系呢？从哈斯图中可以非常直观地看出来。从任一个顶点 X 沿着边向上遇到的所有顶点，都与 X 之间存在偏序关系，这由传递性保证。

定义 5.16 设集合 A 上的二元关系 R 若是反自反和传递的，称 R 为 A 上的拟序关系，记为 $< A$，$\prec >$，$< A$，$\prec >$ 称为拟序集。

定理 5.8 集合 A 上的二元关系 R 是拟序的，则 R 必为反对称的。

证明：设集合 A 上的二元关系 R 是拟序的，根据拟序定义可知，R 是反自反和

传递的。

对 $\forall a$ ，$b\in A$ ，若<a，$b>\in R$ 且<6，$a>\in R$ ，由 R 的传递性可知，<a，$a>\in R$。因 R 是反自反的，$<a,a>\notin R$ ，故 $<a,b>$ 与 $<b,a>$ 必不能同时属于 R ，即 R 为反对称的。证毕

定义 5.17 设 $\leq$ 是非空集合 A 上的偏序关系，对 $\forall a,b\in A$ ，若必有 $a\leq b$ 或 $b\leq a$ ，则称≤是 A 上的全序关系（或线序关系）。若 $\leq$ 是 A 上的全序关系，称< A,≤ >是全序集。

偏序关系不要求集合 A 中的所有元素之间都存在偏序关系，如果集合 A 中任意两个元素之间都存在偏序关系，则为全序关系。例如，正整数集合 Z^+ 的大于关系是全序关系。

定义 5.18 设 $<A$ ，$\leq$ 是一个偏序集，$B\subseteq A$ ，$y\in B$。

（1）若 $\forall x(x\in B\rightarrow y\leq x)$ 成立，则称 y 为 B 的最小元。

（2）若 $\forall x(x\in B\rightarrow x\leq y)$ 成立，则称 y 为 B 的最大元。

（3）若 $\forall x(x\in B\wedge x\leq y\rightarrow x=y)$ 成立，则称 y 为 B 的极小元。

（4）若 $\forall x(x\in B\wedge y\leq x\rightarrow x=y)$ 成立，则称 y 为 B 的极大元。

最小元是 B 中“最小”的元素，它与 B 中所有元素都可比，即与 B 中所有元素都存在偏序关系；而极小元不一定与 B 中所有元素均可比，但只要可比，就一定是“小于等于”其他元素。或者说，B 中不存在比它更小的元素。

最大元与极大元的意义与此类似，最大元与 B 中所有元素是可比的，且都“大于等于”这些元素，即它是 B 中“最大”的元素；极大元是 B 中没有比它更大的元素。

集合的最大元、最小元不一定存在，如果存在的话，一定是唯一的；而极大元、极小元可能存在多个。如果极大元只有一个的话，它一定是最大元，极小元也有类似的结论。

定义 5.19 设< A ，≤ >为一偏序集，对于 $B\subseteq A$ ，如有 $a\in A$ ，且对 B 中任意元素 x 都满足 $x\leq a$ 则称 a 为子集 B 的上界，同样对于 B 中任意元素 x ，都满足 $a\leq x$ ，则称 a 为 B 的下界。

定义 5.20 设 $<A$ ，≤ >为偏序集，有子集 $B\subseteq A$ ，若 a 为 B 的任一上界，且对 B 的所有上界 y ，均有 $a\leq y$ ，则称 a 为 B 的最小上界（上确界），同样若 b 为 B 的任一下界，若对 B 的所有下界 z ，均有 $z\leq b$ ，则称 b 为 B 的最大下界（下确界）。

上/下界及上/下确界与前面介绍的最大/小元和极大/小元不同，上/下界及上/下确界可能不属于所讨论的集合。

定义 5.21 设 $<A$ ，≤ >为全序集，如果 A 的任何非空子集都含有最小元，则称 $<A$ ，≤ >为良序集。

例如，自然数集 N，对于小于等于关系在是良序集。整数集 Z 对于≤关系不是良序集，因为 $Z\subseteq Z$ ，Z 本身没有最小元素。可见，全序集并不一定是良序集。实数集是全序集，但也不是良序集。

5.4 函数

5.4.1 函数的概念

函数是数学中的一个基本概念，它表示每个输入值 x 对应唯一输出值 y 的一种对应关系，常记为 $y=f(x)$。在离散数学中函数可以看作是一种特殊的二元关系。包含函数 f 所有的输入值的集合称为函数 f 定义域，包含所有的输出值的集合称作 f 值域。

定义 5.22 设 F 为二元关系，若 $\forall x \in domF$ 都存在唯一的 $y \in ranF$，使 xFy 成立，则称 F 为函数，也称为映射。对于函数 F，如果有 xFy，则记为 $y=F(x)$，称 x 为自变量，y 为 F 在 x 的值，或在 F 作用下 x 的象。

从 x 到 y 的函数 F 记为：

F ：$x \to y$ 或 $x \to y$。

函数 F 与关系 R 虽然都可看成是二元组的集合，但它们还是不同的，具体的差异有以下两点：

（1）函数 F 要对定义域中的所有元素都有定义，而不能只对某个真子集进行定义。关系 R 可能只对定义域中的若干元素有定义。

（2）对 $\forall x \in domF$，只能有唯一的 $y \in ranF$，满足 $<x，y>\in F$。而关系 R 中，对同一个 x，可以存在多个 y，均满足 $<x, y>\in R$。

例 5.28 设 $A=\{x_1, x_2, x_3\}$，$B=\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$，试判断以下关系是否为函数。

解：F_1 是函数，而 F_2 不是，因为它对 A 中的 x_2 和 x_3 没有定义，且对于 x_1，存在 y_1 与 y_2，满足 $<x_1，y_1>\in F_2$，$<x_1，y_2>\in F_2$，即对于值 x_1，存在多于 1 个的值与其构成二元组。

从这个例子可以看出，关系 F 要构成函数，必须对定义域中的每个值都要有定义，且对每个值的定义都是唯一的，不可以把 B 中两个不同的元素指派给 A 中的同一个元素，例如关系 F_2 中，将 y_1 和 y_2 都指派给了 x_1，这是不允许的。但可以将 B 中的同一个元素指派给 A 中两个不同的元素，例如关系 F_1 中，将 y_1 分别指派给了 x_1 和 x_2，这是允许的。

定义 5.23 设 F、G 都是 X 到 Y 的函数，它们有相同的定义域与值域，$domF=domG$，$ranF=ranG$，且对 $\forall x \in X$ 都有 $F(x)=G(x)$，称函数 F 与 G 是相等的，并记作 $F=G$。

定义 5.24 设 X、Y 为集合，所有从 X 到 Y 的函数构成的集合记作 Y^X，表示为：$Y^X=\{f|f:X\to Y\}$。一般地 Y^X 读作“Y 上 X”。

当 X 或 Y 中至少有一个集合是空集时，，可以分成下面三种情况：

（1）$X=\varnothing$ 且 $Y=\varnothing$，则 $Y^X=\varnothing^{\varnothing}=\{\varnothing\}$;

（2）$X=\varnothing$ 且 $Y\neq\varnothing$，则 $Y^X=Y^{\varnothing}=\{\varnothing\}$;

（3）$X\neq\varnothing$ 且 $Y=\varnothing$,则 $Y^X=\varnothing^X=\varnothing$。

当 X 和 Y 均不为空集时，设 $|X|=m, |Y|=n$,则 $|Y^X|=n^m$。

定义 5.25 函数 f 为一对一的，当且仅当对于 f 定义域中的所有 x 和 y，$f(x)=f(y)$蕴含着 $x=y$。一对一函数也称为单射函数或入射函数。

可以从另一个方面来理解一对一函数 f，当且仅当 $x\neq y$ 就有 $f(x)\neq f(y)$。自变量 x 不同时，得到的函数值 y 也不同。

例如，在自然数集合 N 上定义 $f_1(n)=2n$，它是从 N 到 N 的单射，因为自然数不同，其 2 倍值也不同；但 $f_2(n)=\lfloor n/2\rfloor$不是单射的，例如 $f_2(4)=f_2(5)=2$。

定义 5.26 给定函数 $f:X\rightarrow Y$，当且仅当对 $\forall y\in Y$,都有 $x\in X$ 使得 $f(x)=y$，则函数 f 称为满射的或映上的。

例如，考虑自然数集合 N 上的函数 $f(n)=\lfloor n/2\rfloor$，它是 N 到 N 的满射。因为对于 N 中的每个元素 n，$f(2n)=n$。但 $f(n)=2n$ 不是 N 到 N 的满射，对于所有的奇数 n，均找不到对应的自然数 m，使得 $f(m)=n$。

定义 5.27 给定函数 $f:X\rightarrow Y$，函数 f 是满射的又是单射的，则称 f 为一一对应的，也称为双射的。

例如，定义 $f(n)=(-1)^n\lceil n/2\rceil$，这是从 N 到 Z 的双射。$n$ 为 0 时，函数值也为 0; n 为奇数时，函数值为负整数；n 为偶数时，函数值为正整数。

定义 5.28 设 f 从 X 到 Y 的双射函数 ,定义函数 :Y 中的任一元素 y,对应于 X 中满足 $f(x)=y$ 的唯一的元素 x ;称为 f 反函数。f 反函数表示为 f^{-1}。当 $f(x)=y$ 时，$f^{-1}(y)=x$。

任给一个函数，它的逆不一定是函数，只是一个二元关系。仅当函数是双射函数时才存在反函数，所以双射函数也称为可逆的，它的反函数也称为逆函数。

定理 5.9 设 $f:X\rightarrow Y$ 是双射函数，那么 f^{-1} 是 $Y\rightarrow X$ 的双射函数。

证明：已知函数 $f:X\rightarrow Y$ 是双射函数，$f=\{<x,y>|x\in X\wedge y\in Y\wedge f(x)=y\}$，$f^{-1}$ 是 $Y\rightarrow X$ 的关系，$f^{-1}=\{<y,x>|<x,y>\in f\}$，且有 $domf^{-1}=ranf=Y$，$ranf^{-1}=domf=X$。

对 $\forall y\in Y=domf^{-1}$，因 f 满射的，故必有 $x\in X$，有 $x=f^{-1}(y)$，即 f^{-1} 对定义域 $domf^{-1}$ 中的任何值都有定义，f^{-1} 是函数。

$\forall y_1,y_2\in Y, y_1\neq y_2$，因 f 满射的，则存在 $x_1,x_2\in X$，满足 $x_1=f^{-1}(y_1)$，$x_2=f^{-1}(y_2)$

若 $x_1=x_2$，因 f 单射的，必有 $y_1=y_2$，与 $y_1\neq y_2$ 矛盾，故 $x_1\neq x_2$，即 f^{-1} 是单射的。

又因 f 单射的，故 $\forall x\in X$，必有 $y\in Y$，使得 $y=f(x)$，即 f^{-1} 是满射的。

综上，f^{-1} 是双射函数。证毕

5.4.2 复合函数

函数是特殊的二元关系，关系可以进行复合，所以函数也可以进行复合。两个函数的复合运算本质上就是两个关系的复合。

定义 5.29 设 $f:X\rightarrow Y$，$g:Y\rightarrow Z$，函数 f 和 g 的复合 $f\circ g(x)=g(f(x))$，具体表示为：$f\circ g(x)=\{<x,z>|(x\in X)\wedge(z\in Z)\wedge\exists y(y\in Y\wedge y=f(x)\wedge z=g(y))\}$，复

合函数也称为合成函数。

简单地看，$f \circ g(x) = g(f(x))$，如果 f 值域不是 g 的定义域的子集，则无法定义 $f \circ g$。

定理 5.10 设函数 $f: X \to Y$ 是任意函数，则 $f \circ I_Y = I_X \circ f = f$。

证明：因为 $f: X \to Y$ 是函数，所以对 $\forall x \in X$，有 $y \in Y$，使 $f(x) = y$，对 $\forall <x, y>$

$<x, y> \in f \Rightarrow <x, y> \in f \wedge y \in Y$

$\Rightarrow <x, y> \in f \wedge <y, y> \in I_Y$

$\Rightarrow <x, y> \in f \circ I_Y$

$<x, y> \in f \circ I_Y \Rightarrow \exists t(<x, t> \in f \wedge <t, y> \in I_Y \wedge t \in Y)$

$\Rightarrow <x, t> \in f \wedge t = y$

$\Rightarrow <x, y> \in f$

故有 $f \circ I_Y = f$。同样可证明 $I_X \circ f = f$　证毕

定理 5.11 设 $f: X \to Y$ 是双射函数，$g: Y \to Z$ 是双射函数，则

（1）$f^{-1} \circ f = I_Y$，$f \circ f^{-1} = I_X$；

（2）$(f^{-1})^{-1} = f$；

（3）$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$

证明：仅给出（3）的证明。

根据已知，$f: X \to Y$ 是双射函数，$g: Y \to Z$ 是双射函数，由复合函数的定义，对 $\forall <z, x>$

$<z, x> \in (f \circ g)^{-1} \Rightarrow <x, z> \in f \circ g$

$\Rightarrow \exists y(<x, y> \in f \wedge <y, z> \in g \wedge y \in Y)$

$\Rightarrow <z, y> \in g^{-1} \wedge <y, x> \in f^{-1}$

$\Rightarrow <z, x> \in g^{-1} \circ f^{-1}$

$<z, x> \in g^{-1} \circ f^{-1}$

$\Rightarrow \exists y(<z, y> \in g^{-1} \wedge <y, x> \in f^{-1} \wedge y \in Y)$

$\Rightarrow <y, z> \in g \wedge <x, y> \in f$

$\Rightarrow <x, z> \in f \circ g$

$\Rightarrow <z, x> \in (f \circ g)^{-1}$

综上，$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$　证毕

定理 5.12 设 $f: X \to Y$，$g: Y \to Z$，$f \circ g: X \to Z$。

（1）若 f 和 g 都是满射的，则复合函数 $f \circ g$ 也是满射的；

（2）若 f 和 g 都是单射的，则复合函数 $f \circ g$ 也是单射的；

（3）若 f 和 g 都是双射的，则复合函数 $f \circ g$ 也是双射的。

证明略。

练习题

1.设 $P=\{<1,2>,<2,4>,<3,3>\}$，$Q=\{<1,3>,<2,4>,<4,2>\}$，下列选项中，正确的是（ ）

A $\mathrm{ran}P \subset ran(P \cap Q)$

B $\mathrm{ran}Q = ran(P \cup Q)$

C $\mathrm{dom}P = domQ$

D $\mathrm{dom}P \cup domQ = ranP \cup ranQ$

2.设 $X=\{1,2,3,4,5\}$，$Y=\{6,7,8,9,10\}$，给定 $f=\{<1,8>,<3,10>,<2,6>,<4,9>\}$，下列选项中，正确的是（ ）

A f 不是从 X 到 Y 的函数

B f 是单射

C f 是满射

D f 是双射

3.设 $X=\{1,2,3,4,5\}$，$Y=\{6,7,8,9\}$，给定 $f=\{<1,8>,<3,9>,<4,7>,<2,6>,<5,9>\}$，下列选项中，正确的是（ ）

A f 不是从 X 到 Y 的函数

B f 是单射

C f 是满射

D f 是双射

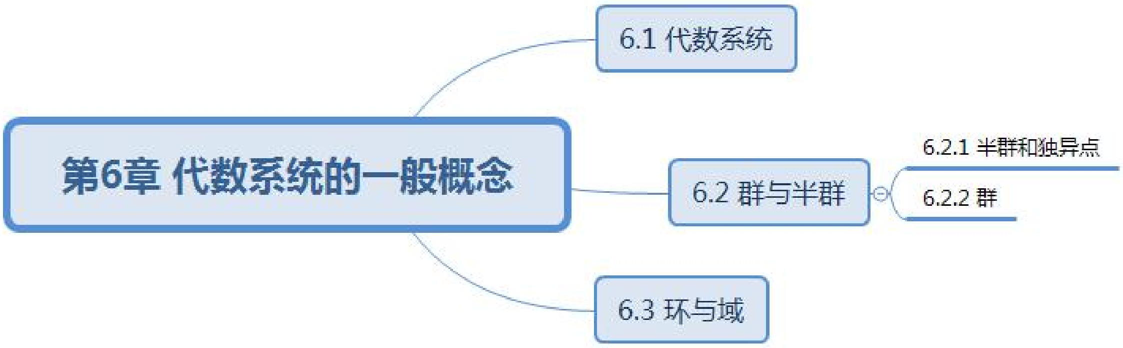
答案

1.B。

2.A。

3.C。

第 6 章代数系统的一般概念



6.1 代数系统

封闭性是数学运算的一个非常重要的性质。对于集合 S 及 S 上定义的运算☆，如果其中任意两个元素在进行☆运算后，结果仍在 S 中，则称集合 S 对于运算☆是封闭的。比如，整数集上的加法、减法和乘法运算都是封闭的。但是除法运算在整数集上不是封闭的，因为两个整数相除后，结果不一定还是整数。再比如，减法在自然数集上不是封闭的。

定义 6.1 设 A 为任意集合，一个从 A^n 到 B 的映射，称为集合 A 上的一个 n 元运算。如果 $B \subseteq A$，则称该 n 元运算是封闭的。

定义 6.1 中还隐含着这样的含义：A 中的任何 n 个元素之间都可进行所定义的运算，并且运算结果是唯一的。例如在整数集上，加法可以施加于任意两个整数上，所以可以在整数集上定义加法。而 0 不能做除数，一般地不在整数集上定义除法运算。

可以使用一个符号来表示某个运算，表示运算的符号称为运算符或算符，例如，四则运算中的+、－、×、/是算符。参与运算的对象称为运算数或操作数。

集合上的“运算”不仅是指数值之间的运算，还可以定义非数值之间的运算，甚至可以定义抽象意义上的运算。例如，给定由所有颜色组成的集合，颜色之间的“运算”定义为两种颜色的调色结果，比如红色加绿色的结果为黄色，红色加蓝色为品红色。可以看出，调色运算在颜色集合上是封闭的。

参与运算的元素个数可以是任意的，个数为 n 时对应的运算称为 n 元运算。整数集上的加法、减法及乘法运算都是二元运算，刚才定义的颜色之间的调色也是二元运算，当然还可以定义三元调色运算，例如天蓝色加上黑色再加上紫色为浅蓝紫色。常见的加、减、乘、除四则运算都是二元运算，集合的交、并运算也是二元运算，集合的补运算是一元运算。

当讨论运算的一般性质时，常使用形式化的符号来代表具体的算符。这些形式化的算符有：$\circ$、$\triangle$、$\square$、*和 $\otimes$ 等，它们代表更普遍的含义。对于二元运算，习惯上把算符置于两个运算元素之间，对于一元运算，常将算符置于运算元素的前面。

例如，在有理数集上，求一个有理数的倒数即是一元运算。在实数集、整数集、有理数集上，求一个数的相反数是一元运算，并且是各自集合上的封闭运算。在矩阵集合上，求矩阵的转置运算是一元运算，并且运算满足封闭性。

定义 6.2—个非空集合 A，连同若干个定义在该集合上的运算 f_1, f_2，…，f_k所组成的系统，称为一个代数系统，简称为代数，记作：$< A, f_1, f_2, ..., f_k >$。

定义 6.3 设 A 为任意非空集合，*和$\circ$是集合 A 上的二元运算，对 $\forall a,b,c \in A$，

（1）若有 $a*b \in A$则称运算*关于集合是封闭的；

（2）若有 $a*(b*c)=(a*b)*c$，则称运算$*$在集合 A 上是可结合的，或称运算$*$在 A 上满足结合律；

（3）若有 $a*b=b*a$，称运算$*$在 A 上是可交换的，或称运算$*$在 A 上满足交换律；

（4）若有 $a*a=a$，则称运算$*$在 A 上是幂等的，或称运算$*$在 A 上满足幂等律；

（5）若有：$a\circ(b*c)=(a\circ b)*(a\circ c)$和$(b*c)\circ a=(b\circ a)*(c\circ a)$成立，则称运算$\circ$对$*$是可分配的，或称运算$\circ$对$*$满足分配律；

（6）若$\circ$和$*$均满足交换律，而且有：$a\circ(a*b)=a$和$a*(a\circ b)=a$，则称运算$\circ$和$*$是可吸收的，或称运算$\circ$和$*$满足吸收律。

普通的加法和乘法在自然数集 N、整数集 Z、有理数集 Q 及实数集 R 上都是可结合、可交换的。另外，可以验证乘法对加法是可分配的，但加法对乘法不满足分配律。幂集上的交运算$\cap$和并运算$\cup$是可结合的，且是互相可分配的。n阶$(n \geq 2)$实方阵集合$M_n(R)$上的矩阵乘法对矩阵加法是可分配的。

除了运算的一些性质外，还有一些与二元运算有关的特殊元素。

定义 6.4 设*为集合 A 上二元运算，若存在 $e_L \in A$，使得对于 $\forall x \in A$，都有 $e_L * x = x$ 则称 e_L 是 A 中关于$*$运算的左幺元。类似地，若存在 $e_r \in A$，使得对于 $\forall x \in A$，都有 $x*e_r=x$，则称 e_r 是 A 中关于$*$运算的右幺元。如果存在 $e \in A$，它既是左幺元，又是右幺元，则称 e 是 A 中关于$*$的幺元。幺元也称为单位元。

显然，若 e 是 A 中关于$*$的幺元，则对 $\forall x \in A$，都有 $e*x=x*e=x$。

定义 6.5 设$*$是定义在集合 A 上的二元运算，如果有一个元素 $o_l \in A$，对于任意元素 $x \in A$都有 $O_l * x = O_l$，则称 O_l 为 A 中关于运算$*$的左零元；如果有一个元素 $O_r \in A$，对于任意元素 $x \in A$，都有 $x*O_r=O_r$，则称 O_r 为 A 中关于运算$*$的右零元；如果存在 $O \in A$，它既是左零元也是右零元，则称 O 为 A 上关于运算$*$的零元。

显然，若 O O 为 A 上关于运算$*$的零元，则对 $\forall x \in A$，均有 $O*x=x*O=O$。

例如，对于由整数集合 Z 及普通乘法×构成的代数系统$<Z,\times,>$, 整数 0 是其零元，整数 1 是其幺元。若运算改为普通加法+，则代数系统<Z，+>中，整数 0 为其幺元，没有零元。

定理 6.1 设$*$是定义在集合 A 上的二元运算，在 A 中存在关于运算$*$的左幺元 e_l 右幺元 e_r，则 $e_l=e_r=e$，且 A 中的幺元是唯一的。

证明：因为e_l和e_r分别是A中关于运算$*$的左幺元和右幺元，所以

$e_l = e_l * e_r = e_r = e$

设存在另一个幺元$e_1 \in A$，则

$e_1 = e_1 * e = e$，即幺元是唯一的。证毕

定理 6.2 设$*$是定义在集合A上的二元运算，在A中存在关于运算$*$的左零元O_l和右零元O_r，则$O_l = O_r = O$，且A中的零元是唯一的。

证明：因为O_l和O_r O_r分别是A中关于运算$*$的左零元和右零元，所以

$O_l = O_l * O_r = O_r = O$

设存在另一个零元$O_1 \in A$，则

$O_1 = O_1 * O = O$，即零元是唯一的。　证毕

定理 6.3 设有代数系统$< A,* >$中，$|A| > 1$。若该代数系统中存在关于运算$*$的幺元 e 与零元O，则$e \neq O$

证明：反证法设$e = O$，则对$\forall x \in A$，必有

$x = e * x = O * x = O = e$

这表明，A中只含有一个元素 e，且与零元相等，这与条件$|A| > 1$相矛盾。故假设不成立。

证毕

定义 6.6 设代数系统$< A,* >$中，e 是关于运算$*$的幺元。若对A中某个元素a，存在A的一个元素b，使得$b * a = e$，则称b为a的左逆元；若$a * b = e$，则称b为a的右逆元。若一个元素b，既是a的左逆元，又是a的右逆元，则称b是a的一个逆元，记作a^{-1}。

代数系统中若存在幺元，则该幺元是所有元素的幺元。零元也是如此，若代数系统中存在零元，则该零元是所有元素的零元，故幺元或零元具有一般性。与之相对的，逆元具有个体性。在代数系统中，有的元素可能存在逆元，有的元素可能不存在逆元。即使两个元素都有逆元存在，也不能保证这两个逆元是相同的。

一个元素的左右逆元存在且相等，是代数系统的一个重要性质，只当满足一定条件时，一个元素的左右逆元才相同且唯一。

定理 6.4 设代数系统$< A,* >$，这里$*$是定义在A上的二元运算，A中存在幺元 e，且每一个元素都有左逆元。如果$*$是可结合运算，那么这个代数系统中任何一个元素的左逆元必定也是该元素的右逆元，且每个元素的逆元是唯一的。

证明：对$\forall a \in A$，设b是a的左逆元，即$b * a = e$。首先证明b也是a的右逆元。

A中的任何元素均有左逆元，设c是b的左逆元。即$c * b = e$。

因为$(b * a) * b = e * b = b$，所以，

$e = c * b = c * ((b * a) * b)$

$= (c * (b * a)) * b$

$= ((c * b) * a) * b$

$= (e * a) * b$

$= a * b$

故，b 也是 a 的右逆元。

下面证明逆元的唯一性。

设元素 a 有两个逆元 b 和 c，即 $a*b=a*c=e$，那么，

$$
\begin{aligned}
b &= b*e = b*(a*c) \\
&= (b*a)*c \\
&= e*c \\
&= c
\end{aligned}
$$

因此，a 的逆元是唯一的。　证毕

代数系统的幺元和零元，称为特异元素或代数常数。有时为了强调这些特异元素的存在，也把它们写人代数系统的表达式中。

定义 6.7 如果两个代数系统中运算的个数相同，对应运算的元数也相同，且代数常数的个数也相同，则称这两个代数系统具有相同的构成成分，也称它们是同类型的代数系统。

定义 6.8 设 $V=<S,f_1,f_2,...,f_k>$ 是代数系统，$B\subseteq S$，且 B 对 $f_1,f_2,...,f_k$ 都是封闭的，B 和 S 还含有相同的代数常数，则称 $<B,f_1,f_2,...f_k>$ 是 V 的子代数系统，简称子代数。

例如，$<N,+>$ 是 $<Z$，$+>$ 的子代数，又如 $<N$，$+,0>$ 是 $<Z,+,0>$ 的子代数，因为 N 对运算+是封闭的，且它们都含有相同的代数常数。

对于任何代数系统 $V=<S,f_1,f_2,...,f_k>$，其子代数一定存在。最大的子代数就是 V 本身。如果令 V 中所有代数常数构成的集合是 B，且 B 对 V 中所有的运算都是封闭的，则 B 构成 V 的最小的子代数。最大和最小的子代数称为 V 的平凡子代数。若 B 是 S 的真子集，则 B 构成的子代数称为 V 的真子代数。

6.2 群与半群

6.2.1 半群和独异点

群与半群都是具有一个二元运算的代数系统，本小节先介绍半群。

定义 6.9 设 $V=<S,*>$ 是代数系统，$*$ 是集合 S 上的二元运算，若运算 $*$ 是封闭且是可结合的，则称 V 为半群。

由定义可知，若 $V=<S,*>$ 是半群，则对

$\forall a,b,c\in S, a*b\in S, a*(b*c)=(a*b)*c$

定义 6.10 若半群 $<S,*>$ 中存在一个幺元，则称 $<S$，$*>$ 为独异点（或含幺元半群）。

由于普通的加法及乘法均满足结合律，所以 $<Z$，$+>$、$<N$，$+>$、$<Q$，$+>$、$<R$，$+>$ 等都是半群。0 是各自的幺元，所以这几个代数系统也都是独异点。代数系统 $<Z^+$，$+>$ 也是半群，但因为不含元素 0,所以不是独异点。

定理 6.5 设 $<S$，$*>$ 是一个半群，$B\subseteq S$，且 $*$ 在 B 上封闭，那么 $<B$，$*>$ 也是一个半群，通常称 $<B,*>$ 是半群 $<S$，$*>$ 的子半群。

证明：因为 $*$ 在 S 上可结合，而 $B\subseteq S$，且 $*$ 在 B 上是封闭的，所以 $*$ 在 B 上也

是可结合的，因此< B ，∗>是个半群。 证毕

不含任何字符的串称为空串，记为 ε ，这是一个非常特殊的字符串。

对于空串 $\varepsilon \in \sum^*$,对任一 $\varepsilon \in \sum^*$ 有 $\varepsilon + \omega = \omega + \varepsilon = \omega$,所以 ε 为幺元,即< $\sum^*$ ，+>是含幺元半群，即独异点。

定理 6.6 设< S ，∗>是独异点，对于 $\forall a,b \in S$ ，若 a,b 均有逆元，则：

（1） $\left(a^{-1}\right)^{-1} = a$ ；

（2）若 $a*b$ 有逆元，则 $(a*b)^{-1} = b^{-1}*a^{-1}$。

证明：（1）因 $<S,*>$ 是独异点，故< S ，∗>中存在幺元 e ，对 $\forall a \in S$ ，若 a 有逆元，则 $a*a^{-1} = a^{-1}*a = e$ ，这表明 a 是 a^{-1} 的逆元，即 $\left(a^{-1}\right)^{-1} = a$。

（2）对 $\forall a,b \in S$ ，若 a 、 b 及 $a*b$ 均有逆元，则

$a*b*\left(b^{-1}*a^{-1}\right) = a*\left(b*b^{-1}\right)*a^{-1} = a*e*a^{-1} = e$ ，

$\left(b^{-1}*a^{-1}\right)*a*b = b^{-1}*\left(a^{-1}*a\right)*b = b^{-1}*e*b = e$ ，

故 $b^{-1}*a^{-1}$ 是 $a*b$ 的逆元，即 $(a*b)^{-1} = b^{-1}*a^{-1}$。 证毕

6.2.2 群

定义 6.11 设 $<G,*>$ 是一个独异点，其中 G 是非空集合，∗是 G 上一个二元运算，对于 $\forall x \in G$ 都有逆元 x^{-1} 存在，则称 $<G,*>$ 是一个群。

可以看出，群要满足独异点的三个条件，即封闭性、结合律及存在幺元，同时还要求对集合中的每个元素都要有逆元。

前面定义的代数系统< Z ，+>、< Q ，+>和< R ，+>都是群，0 是各自的幺元，对每个元素 x ，－ x 就是它的逆。这些群分别称为整数加群、有理数加群和实数加群。但< N ，+>不是群，因为对于任何正整数，在 N 中都不存在它的逆元。

定义 6.12 设 $<G,*>$ 是一个群，如果 G 是有限集，则称 $<G,*>$ 为有限群， G 中元素的个数称为该有限群的阶数，记为 $|G|$。特别地，若群 G 中只含有一个元素，即 $G = \{e\}$ ， $|G| = 1$ ，则称 G 为平凡群。

定义 6.13 设< G ，∗>是一个群，若运算∗在 G 上满足交换律，则称 G 为交换群或 $Abel$ 群。

定义 6.14 设< G ，∗>是群，e 是幺元， $\forall a \in G$ ， $n \in Z$ ，定义 a 的 n 次幂

$$a^n = \begin{cases} e, & n = 0 \\ a^{n-1}a, & n > 0 \\ \left(a^{-1}\right)^m, n < 0, n = -m \end{cases}$$

定义 6.15 设< G ，∗>是群，e 是幺元。对于 $a \in G$ ，使得 $a^k = e$ 成立的最小正整数 k 称为 a 的阶，记作 $|a|$ ， a 称为 k 阶元。若不存在这样的正整数 k ，则 a 称为无限阶元。

注意：群的阶与群中某元素 a 的阶是两个不同概念，群中各元素的阶可能各不相同。在 $Klein$ 四元群中，该群的阶数 $|G| = 4$,但是 $|e| = 1$ ， $|a| = |b| = |c| = 2$。

定理 6.7 设< G ，∗>为群， $\forall a,b \in G, \forall n,m \in Z$ 有：

（1）$\left(a^{-1}\right)^{-1}=a$；

（2）$(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}$；

（3）$a^{n}a^{m}=a^{n+m}$；

（4）$\left(a^{n}\right)^{m}=a^{nm}$；

（5）若 G 为 $Abel$ 群，$(ab)^{n}=a^{n}b^{n}$。

证明略。

定义 6.16 在代数系统 $<G$，$*>$中，如果存在 $a\in G$，有 $a*a=a$，称 a 为幂等元。

若运算$*$满足幂等律，G 中的所有元素均是幂等元。

定理 6.8　$<G$，$*>$是群，则 G 满足消去律，即对 $\forall a,b\in G$，

（1）若 $a*b=a*c$，则 $b=c$;

（2）若 $b*a=c*a$，则 $b=c$。

证明略。

定理 6.9 在群<G，*>中，e 中唯一的幂等元。

证明：因为，所以 e 是幂等元。

现设 G 中存在幂等元 a，即 aeG 且 a*a=a，则有

a=e*a=(a-1*a)*a

=a~l*(a*a)

-1

=a*a=e○

这表明 G 中的任何幂等元都等于 e。命题得证。

定理 6.10　$<G$，$*>$是非平凡群，则群中不存在零元。

证明：已知 $<G$，$*>$为非平凡群，即 $|G|>1$。若群 $<G$，$*>$有零元，则对 $\forall x\in G$，都有 $x*O=O*x=O\neq e$，所以零元 O 不存在逆元，与 $<G$，$*>$是群相矛盾。命题得证。

对于平凡群，$|G|=1$，它有唯一的元素 a，这个元素可以看作是幺元，也可以看作是零元。

定理 6.11 设 $<G$，$*>$是一个群，对于 $\forall a,b\in G$，必存在唯一的元素 $x\in G$，使得 $a*x=b$。

证明：因为 G 是一个群，对于 $\forall a\in G$，必存在逆元 a^{-1}，令 $x=a^{-1}*b$，显然 $x\in G$，则

$$a*x=a*\left(a^{-1}*b\right)=\left(a*a^{-1}\right)*b=e*b=b$$

若存在 $x_1\in G$，也满足 $a*x_1=b$;则 $a^{-1}*\left(a*x_1\right)=a^{-1}*b$，即 $x_1=a^{-1}*b$，故 $x=x_1$。命题得证。

定义 6.17 设 $<G$，$*>$为群，若在 G 中存在一个元素 a，使得 G 中的任意元素都由 a 的幂组成，则称该群为循环群，元素 a 称为循环群 G 的生成元。

在循环群 $<G$，$*>$中，G 的阶为有限时，称为有限循环群，否则称为无限循环群。

若 a 为生成元，$G=(a)$ 表示由 a 生成的循环群。$G=\{a^0=e,a^1,a^2,\ldots,a^{n-1}\}$ 是 n 阶有限循环群，$G=\{\ldots,a^{-1},a^0=e,a^1,a^2,\ldots\}$ 为无限循环群。

定义 6.18 设 $<G,*>$ 是一个群，S 是 G 的非空子集，如果 $<S,*>$ 也构成群，则称 $<S,*>$ 是 $<G,*>$ 的一个子群，记作 $S\le G$。

下面给出子群的三个判定定理。

定理 6.12 （判定定理一）

设 $<G,*>$ 是群，H 是 G 的非空子集，则 $H\le G$ 当且仅当下面的两个条件成立：

（1）$\forall a,b\in H$，有 $a*b\in H$；

（2）$\forall a\in H$，有 $a^{-1}\in H$。

证明：必要性显然。

充分性 $\forall a,b\in H$，由 $a*b\in H$ 可知 $*$ 在 H 中是封闭的。又 $H\subseteq G$，所以 $*$ 在 H 中满足结合律。H 非空，$\forall a\in H$，由（2）知 $a^{-1}\in H$，故由（1）有：$a*a^{-1}=e\in H$，即 G 的幺元必是 H 的幺元，故 $<H,*>$ 是 $<G,*>$ 的子群。 证毕

定理 6.13(判定定理二）

设 $<G,*>$ 是群，H 是 G 的非空子集，则 H 是 G 的子群当且当 $\forall a,b\in H$ 有 $a*b^{-1}\in H$。

证明：必要性 $\forall a,b\in H$，由于 H 是 G 的子群，必有 $b^{-1}\in H$，则有 $a*b^{-1}\in H$。

充分性 因为 H 非空，故必有 $b\in H$，按已知条件，则有 $b*b^{-1}\in H$，即 $e\in H$。

任取 $a\in H$，由 $e,a\in H$，则有 $e*a^{-1}=a^{-1}\in H$。即 H 任一元素的逆也属于 H。

任取 $a,b\in H$，可知有 $b^{-1}\in H$，故由条件得：

$a*(b^{-1})^{-1}\in H$，即 $a*b\in H$。因 $H\subseteq G$，可得 $a*b\in G$。

由判定定理一可知，H 是 G 的子群。 证毕

定理 6.14(判定定理三）

设 $<G,*>$ 是群，H 是 G 的有穷非空子集，则 H 是 G 的子群当且仅当 $\forall a,b\in H$，有 $a*b\in H$

证明：必要性显然。

要证明充分性，只需证明 $\forall a\in H$，有 $a^{-1}\in H$ 即可。$\forall a\in H$，若 $a=e$，则 $a^{-1}=e^{-1}=e\in H$。

若 $a\ne e$，令：$S=\{a,a^2,\ldots\}$，则 $S\subseteq H$。由于 H 是有穷集，必有 $a^i=a^j(i<j)$。。根据 G 中的消去律得 $a^{j-i}=e$。由于 $a\ne e$，可知 $j-i>1$，故有 $a^{j-i-1}a=e$ 和 $aa^{j-i-1}=e$，即 $a^{-1}=a^{j-i-1}\in H$。 证毕

使用这三个判定定理，可以证明一些重要的子群。

6.3 环与域

在集合上定义的运算个数可以是一个，也可以是多个。例如整数集上可以定义加法、减法、乘法及取模等。前一节介绍的群的定义中，仅包含定义在集合上的一个二元运算，本节我们将扩展运算的个数，在集合上定义两个二元运算，并让两个

运算之间满足一定的性质。

定义 6.19 设 $<A,+,*>$ 是一个代数系统，+和 $*$ 是二元运算，如果满足

（1）< A ，+>是 $Abel$ 群；

（2）< A ，$*$ >是半群；

（3）运算 $*$ 对于运算+是可分配的；

则称< A,+ ，$*$ >是一个环。

为了区分环中的这两个二元运算，通常将+称为“加法”，将*称为“乘法”。当然它们既可以是普通意义下的加法与乘法，也可以是扩展的其他运算。

例如，我们可以在整数集、有理数集和实数集上定义普通的加法及乘法运算，构成相应的代数系统，它们都构成环。整数集 Z 及其上定义的加法和乘法运算，构成整数环< Z ,+ ,$*$ >。有理数集 Q 及其上定义的加法和乘法运算构成有理数环< Q ，+，$*$ >，实数集 R 及其上定义的加法与乘法也构成环，称为实数环。不但如此，全体偶数及其上定义的加法与乘法也构成环。设 $M_n(R)$ 为 n（$n \geq 2$）阶实方阵组成的集合，+和 x 分别是矩阵的加法和乘法运算，则< $M_n(R)$ ，+，×>也是环，称为 n 阶实矩阵环。集合 A 的幂集 $\wp(A)$ 关于集合的对称差运算 $\oplus$ 和交运算 $\cap$ 也构成环。

为了表示上的方便，将环中加法的幺元记作 0,若乘法有幺元，则记作 1。对于环中的任一元素 a ，其加法逆元称为负元，记为 $-a$ 。若 a 存在乘法逆元，则称为逆元，记为 a^{-1}。

环有一些非常重要的运算性质，列在定理 6.15 中。

定理 6.15 设< A ，+，$*$ >是一个环，则对 $\forall a,b,c \in A$ ，有

（1）a*0=0*a=0；

（2）a*(-b)=(-a)*b=-(a*b);

（3）(-a)*($-b$)=a*b；

（4）$a*(b-c)=a*b-a*c$;

（5）$(b-c)*a=b*a-c*a$.

证明：（1）已知 0 是加法幺元，所以有

$a*0=a*(0+0)=a*0+a*0$

因为< A ，+>是 Abel 群，满足消去律，故有 a*0=0。同理可证 0*a=0。

（2）$a*(-b)+a*b=a*(-b+b)=a*0=0$ ，所以 $a*(-b)$ 是 $a*b$ 的负元，由负元的唯一性可得 $a*(-b)=-(a*b)$。同理可证 $(-a)*b=-(a*b)$。

（3）因为 $a*(-b)+(-a)*(-b)=[a+(-a)]*(-b)=0*(-b)=0$ ，

同时，$a*(-b)+a*b=a*[(-b)+b]=a*0=0$ ，所以 $(-a)*(-b)=a*b$。

（4）因为 $<A,+>$ 是 Abel 群，故运算+满足交换律，

$a*(b-c)+a*(-b)=a*(b-c-b)=a*(b-b-c)=a*(-c)=-a*c$ ，

而由（2）知，$a*(b-c)+a*(-b)=a*(b-c)+(-a*b)$,

即 $a*(b-c)+(-a*b)=-a*c$,

在上式两端同加 $-a*b$ 的逆元 $a*b$,得到

$a*(b-c)+(-a*b)+a*b=a*b-a*c$ ，即 $a*(b-c)=a*b-a*c$

（5）$(b-c)*a+(-b)*a=(b-c-b)*a=-c*a$，

而$(b-c)*a+(-b)*a=(b-c)*a+(-b*a)$，即$(b-c)*a+(-b*a)=-c*a$，

在上式两端同加$-b*a$的负元$b*a$，得到

$(b-c)*a+(-b*a)+b*a=-c*a+b*a$,得到$(b-c)*a=b*a-c*a$。　证毕

定义 6.20 设< R ，+，* >是环，对$a,b\in R$，$a\neq 0$，$b\neq 0$，但$a*b=0$，则称a是R中的一个左零因子，b是R中一个右零因子；若一个元素既是左零因子，又是右零因子，则称它是一个零因子。

例如，模 6 的整数环$<Z_6$，$\oplus$，$\otimes>$中，$3\otimes 4=0$，所以 3 是左零因子，4 是右零因子。由于$\otimes$是可交换的，即$4\otimes 3=0$，所以 4 也是左零因子，3 也是右零因子，综上，3 和 4 都是零因子。

定义 6.21 设$<A,+,*>$是环。

（1）如果环中乘法$*$满足交换律，则称$<A,+,*>$是可交换环。

（2）如果环中乘法$*$存在幺元，即对$\forall a\in R$，均有$1*a=a*1=a$，则称< A ，+，* >为含幺元的环。1 称为环< A ，+，* >的幺元。

（3）对于$\forall a,b\in R$，若$a*b=0$,必有 a=0 或$b=0$，则称<A,+，* >是一个无零因子环。

（4）若< A ，+，* >既是交换环、含幺环，也是无零因子环，则称< A ，+，* >为整环。

例如，数的加法与乘法均满足交换律，所以整数环、有理数环、实数环等均是可交换环，也都有各自的幺元 1，所以也都是含幺环。而偶数集与通常的数的加法及乘法构成的环是交换环，但没有幺元，所以它不是含幺环。整数环、有理数环、实数环等，都是无零因子环。所以也都是整环。由于矩阵乘法不满足交换律，故环$<M_n(R),+,\times>$不是可交换环，单位矩阵是它的乘法幺元。

定理 6.16 设< R ，+，* >是环，R是无零因子环，当且仅当在R中乘法适合消去律，即对$\forall a,b,c\in R$，$a\neq 0$，若有$a*b=a*c$(或$b*a=c*a$)，则有$b=c$。

证明：充分性　设R中乘法运算$*$满足消去律，即对$\forall a,b\in R$，且$a*b=0$，若$a\neq 0$，则有

$a*b=0=a*0$，由消去律得$b=0$，所以R是无零因子环。

必要性，对$\forall a,b,c\in R$，$a*b=a*c$，且$a\neq 0$，

则有$a*b-a*c=0$，由定理 6.15 的（4）得：$a*(b-c)=0$，

因为R中没有零因子，所以$(b-c)=0$，即$b=c$。

同理可证，若有$b*a=c*a$且$a\neq 0$，也能得到$b=c$。　　证毕

定义 6.22 设< R ，+，* >是一个整环，且$|R|\geq 2$，若对$\forall a\in R^*=R-\{0\}$，都有$a^{-1}\in R$，则称< R ，+，* >是域。

有理数环Q和实数环R都是域，但整数环Z不是域。

练习题

1.在自然数集 N 上，满足结合律的运算是（ ）

A $a*b=a-b$

B $a*b=\max(a,b)$

C $a*b=a+2b$

D $a*b=|a-b|$

2.设集合 $A=\{1,2,3,\ldots,10\}$，下面定义的运算在集合 A 上是不封闭的是（ ）

A $x*y=\max(x,y)$

B $x*y=\min(x,y)$

C $x*y=GCD(x,y)$,即 x,y 最大公约数

D $x*y=LCM(x,y)$，即 x,y 最小公倍数

3.设 $A=\{2z+1|z\in Z\}$，运算为实数加法+和乘法 *，则 $<A,+,*>$ 构成的代数系统是（ ）

A 环

B 整环

C 域

D 都不满足

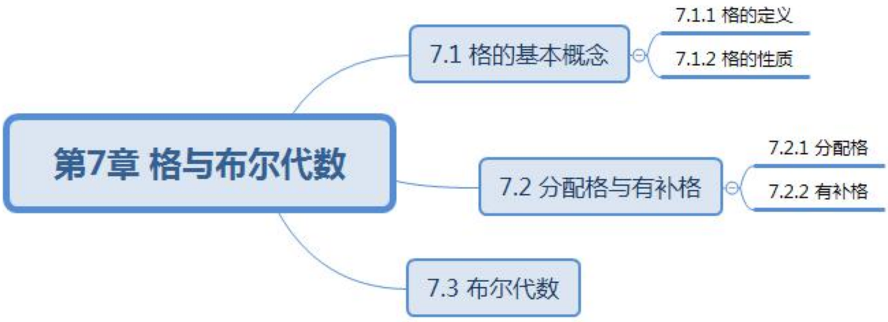
答案

1.B。

2.D。

3.D。

第 7 章格与布尔代数



7.1 格的基本概念

7.1.1 格的定义

在 5.3 节曾介绍了偏序集的概念。偏序集是由一个集合 A，以及 A 上的一个偏序关系“≤”所组成的一个序偶，记作 $< A, \le >$。对于这个偏序集来说，它的任一子集，不一定存在最大下界和最小上界。

回顾例 5.27 中由图 5.10 所表示的偏序集，子集 $\{a,b,c\}$ 的上界是 e，f，j 和 h，它的唯一的下界是 a。而 $\{j,h\}$ 没有上界，它的下界是 a,b,c,d,e 和 f。子集 $\{b,d,g\}$ 的最小上界是 g，最大下界是 b。子集，更具体来说是含两个元素的子集是否存在最大下界及最小上界是偏序集的一个非常重要的特征。

定义 7.1 设 $< A, \le >$ 是一个偏序集，对 $\forall a,b \in A$，子集 $\{a,b\}$ 在 A 中都有最大下界(也称为下确界，记为 $\inf\{a,b\}$)和最小上界（也称为上确界，记为 $\sup\{a,b\}$），则称 $< A, \le >$ 为格。

定义 7.1 中规定的是“两个元素”的子集，实际上，多个元素的子集也是一样的，只要子集中所含元素的个数是有限的就可以。“任意两个元素有最大下界和最小上界”当且仅当“任意有限个元素有最大下界和最小上界”。注意，子集不能是“任意的非空子集”。

最大下界和最小上界具有唯一性，因此可以对此定义相关的运算。

定义 7.2 设 $< A, \leqslant >$ 是一个格，如果在 A 上定义两个二元运算 $\wedge$ 和 $\vee$，使得对 $\forall a,b \in A$，$a \wedge b$ 等于 a 和 b 的最大下界，$a \vee b$ 等于 a 和 b 的最小上界。称 $< A, \wedge, \vee >$ 为由格 $< A, \leqslant >$ 所诱导的代数系统。二元运算 $\wedge$ 和 $\vee$ 分别称为交运算和并运算。

定义 7.3 设 $< S, \leqslant >$ 是格，P 是由格中元素及 $\leqslant$，$=, \geqslant$，$\wedge$ 和 $\vee$ 等符号所表示的命题，如果将 P 中的 $\leqslant$，$\geqslant$，$\wedge$ 和 $\vee$ 分别替换成 $\geqslant, \leqslant$，$\vee$ 和 $\wedge$，得到的命题 P' 称为 P 的对偶命题，简称对偶。

例如，若 P 为 $a \wedge b \leqslant a = a$, 那么 P' 是 $a \vee b \geqslant a = a$ ，P 与 P' 互为对偶。

格的对偶原理：如果命题 P 对一切格 L 为真，则 P 的对偶命题也对一切格为真。

显然，全序集肯定是格，但并不是所有的偏序集都是格。

7.1.2 格的性质

定理 7.1 在一个格 $< A$ ，$\leqslant >$ 中，对 $\forall a,b \in A$ ，都有

$a \leqslant a \vee b$， $b \leqslant a \vee b$， $a \wedge b \leqslant a$， $a \wedge b \leqslant b$

证明：因为 a 和 b 的并 $a \vee b$ 是 a 的一个上界，所以，a$\leqslant a \vee b$；同理，$b \leqslant a \vee b$。

由对偶原理即得：$a \wedge b \leqslant a$， $a \wedge b \leqslant b$。证毕

定理 7.2 设< A ，$\leqslant$ >是格，$\forall a$ ，b ，$c \in A$ ，

（1）$a \leqslant b$ 且 $a \leqslant c \Rightarrow a \geqslant b \wedge c$;

（2）$a \geqslant b$ 且 $a \geqslant c \Rightarrow a \geqslant b \vee c$

证明：(1) $\forall a,b,c \in A$ ，由条件 $a \leqslant b$ 及 $a \leqslant c$ ；，可知 a 是 $\{b,c\}$ 的下界，而 $b \wedge c$ 是 $\{b,c\}$ 的最大下界，故有 $a \leqslant b \wedge c$。

（2）由对偶定理得到：$a \geqslant b$ 且 $a \geqslant c \Rightarrow a \geqslant b \vee c$。 证毕

定理 7.3 在格< A ，$\leqslant$ >中，对于 $\forall a,b,c,d \in A$ ，如果 $a \leqslant b$ 且 $c \leqslant d$，则 $a \vee c \leqslant b \vee d$ 且 $a \wedge c \leqslant b \wedge d$ 。

证明：已知 $a \leqslant b$ 且 $c \leqslant d$，由定理 7.1 及偏序关系的传递性可知，$a \leqslant b \vee d$， $c \leqslant b \vee d$， $b \vee d$ 是 a 和 c 的一个上界，但 aVc 是 a 和 c 的最小上界，所以有 $a \vee c \leqslant b \vee d$

同理可证 $a \wedge c \leqslant b \wedge d$ 。　　证毕

定理 7.4 设< A ，$\leqslant$ >是一个格，由< A ，$\leqslant$ >所诱导的代数系统为< A ，$\wedge$ ，$\vee$ >，则对于 $\forall a,b,c \in A$,有

（1）交换律：$a \vee b = b \vee a$, $a \wedge b = b \wedge a$;

（2）结合律：$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$ ，$a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$;

（3）幂等律：$a \vee a = a$ ，$a \wedge a = a$;

（4）吸收律：$a \vee (a \wedge b) = a$ ，$a \wedge (a \vee b) = a$

证明：（1）$a \vee b$ 和 $b \vee a$ 分别是 $\{a,b\}$ 和 $\{b,a\}$ 的最小上界，而 $\{a,b\} = \{b,a\}$ ，故 $a \vee b = b \vee a$。

由对偶原理可证 $a \wedge b = b \wedge a$。

（2）由定理 7.1 可得

$(a \vee b) \vee c \geqslant a \vee b \geqslant a$， $(a \vee b) \vee c \geqslant a \vee b \geqslant b$， $(a \vee b) \vee c \geqslant c$，

由上面三式及定理 7.2 得到

$(a \vee b) \vee c \geqslant b \vee c$， $(a \vee b) \vee c \geqslant a \vee (b \vee c)$，

同理可证 $(a \vee b) \vee c \leqslant a \vee (b \vee c)$，

由偏序的反对称性可得 $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$。

根据对偶原理可证 $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$。

（3）由定理 7.1 有 $a \leqslant a \vee a$ ，$a \leqslant a$ ，故有 $a \vee a \leqslant a$，根据偏序的反对称性可得，$a \vee a = a$。

根据对偶原理可证 $a \wedge a = a$

（4）由定理 7.1 有 $a \vee (a \wedge b) \leqslant a$，同时也有 $a \vee (a \wedge b) \leqslant a$，

由偏序的反对称性有 $a \vee (a \wedge b) = a$。

根据对偶原理可证 $a \wedge (a \vee b) = a$。　证毕

格 < A ，$\leqslant$ > 及其上诱导的代数系统 < ^ A ，$\wedge$ ，$\vee$ > 必满足交换律、结合律、幂等律和吸收律。

定理 7.5 设 < A ，$*$ ，$\circ$ > 是一个代数系统，其中 $*$ 和 $\circ$ 都是二元运算，且满足交换律、结合律和吸收律，则 A 上存在偏序关系 $\leqslant$ ，使 < A ，$\leqslant$ > 是一个格，且 $\forall a,b \in A$，有 $a \wedge b = a * b$ ，$a \vee b = a \circ b$。

证明：（1）先证在 A 中，存在偏序关系 $\leqslant$。

在 A 上定义二元关系 $\leqslant$ 为：对 $\forall a,b \in A$ ，$a \leq b$ 当且仅当 $a * b = a$。

因为代数系统中，运算 $*$ 和 $\circ$ 满足吸收律，

$\forall a \in A, a * a = a * (a \circ (a * a)) = a$ ，同理可证 $a \circ a = a$,即 $\circ$ 和 $*$ 满足幂等律。

对 $\forall a \in A$ ，有 $a * a = a$ ，即 $a \leq a$ ，故≤是自反的。

设 $a \leq b$ ，则 $a = a * b$ ，再设 $b \leq a$ ，则 $b = b * a$ ，因为 $*$ 满足交换律，故 $a * b = b * a$ ，即 $a = b$ ，所以，≤是反对称的。

设 $a \leq b$ 且 $b \leq c$ ，则 $a * b = a$ ，$b * c = b$ ，

$a * c = (a * b) * c = a * (b * c) = a * b = a$ ，即 $a \leq c$ ，故≤是传递的。

综上，≤是偏序关系。

（2）再证 $\forall a,b \in A$ ，　有 $a \vee b = a \circ b$ ，$a \wedge b = a * b$

因为 $(a * b) * a = a * b$ ，$(a * b) * b = a * b$ ，

由≤的定义有： $a * b \leq a$ ，$a * b \leq b$ ，即 $a * b$ 是 $\{a,b\}$ 的下界。

设 c 是 $\{a,b\}$ 的任一下界，即 $c \leq a$ ，$c \leq b$ ，那么，有 $c * a = c$ ，$c * b = c$ ，

而 $c * (a * b) = (c * a) * b = c * b = c$ ，

所以 $c \leq a * b$。这表明 $a * b$ 是 $\{a,b\}$ 的最大下界，即 $a \wedge b = a * b$。

类似可以证明 $a \circ b$ 是 $\{a,b\}$ 的最小上界，即 $a \vee b = a \circ b$ 证毕

定理 7.5 给出了格的另一种等价定义，即一个代数系统具有的运算满足某些算律。今后我们不再区分是偏序的格还是代数系统的格。

定义 7.4 设 $< L,\wedge,\vee >$ 是代数系统，其中 $\wedge$ 和 $\vee$ 是二元运算，若 $\wedge$ 和 $\vee$ 运算满足交换律、结合律和吸收律，则称 $< L,\wedge,\vee >$ 是一个格。

定理 7.6 设 $< L,\wedge,\vee >$ 是格，则

（1）$\forall a,b,c \in L$ ，若 $a \leq b$ ，则 $a \wedge c \leq b \wedge c$ ，$a \vee c \leq b \vee c$;

（2）$\forall a,b,c,d \in L$ 有 $a \leq b$ 且 $c \leq d \Rightarrow a \wedge c \leq b \wedge d$ ，且 $a \vee c \leq b \vee d$ 。

证明：（1）由 $a \wedge c \leq a$ 和 $a \leq b$ ，得到 $a \wedge c \leq b$ ，但 $a \wedge c \leq b \vee d$ ，

由上两个式子得到 $a \wedge c \leq b \wedge c$。

同理可证 $a \vee c \leq b \vee c$。这个性质称为格的保序性。

（2）已知 $a \leq b$ ，由（1）得到 $a \wedge c \leq b \wedge c$ ，

同理，由 $c \leq d$ 得到 $c \wedge d \leq d \wedge b$ ，因为 L 是格，满足交换律，

即 $b \wedge c \le c \wedge b$ ，$d \wedge b \le b \wedge d$

所以 $a \wedge c \le b \wedge d$ 。

同理可证 $a \vee c \le b \vee d$ 。 证毕

定义 7.5 设 $<L,\wedge,\vee>$ 是格，S 是 L 的非空子集，若 S 关于运算 $\wedge$ 和 $\vee$ 是封闭的，则称 $<S,\wedge,\vee>$ 是格 L 的子格。

例如，$<S_6,D_+>$ 是 $<S_{24},D_+>$ 的子格。

例 7.5 设 $<S,\le>$ 是一个格。S 如图 7.2 所示。

$S_1=\{a,e,f,g\}$ ，$S_2=\{a,b,e,g\}$ ，

则 S_1 不是 S 的子格，因为 $e \wedge f = c \notin S_1$

而 S_2 是 S 的子格。

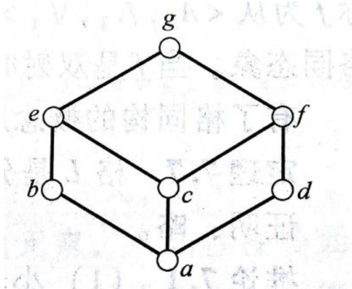


图 7.2 格与子格

7.2 分配格与有补格

上一节我们介绍了格的概念及其基本性质，格的运算满足交换律、结合律、吸收律以及幂等律，但并不是所有的格都满足分配律，满足分配律的格成为一类特殊的格。对于补元素也是一样的，并不是所有的格元素都存在补元素。本节介绍分配格与有补格，这是两种特殊的格。

7.2.1 分配格

定义 7.6 设< A ，∧，V>是格，若对 $\forall a,b,c \in A$ ，满足

$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ ，

$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ ，

则称 $<A,\wedge,\vee>$ 是分配格。

这个定义的含义是，当格中定义的两个运算满足分配律时，格即是分配格。实际上，分配格定义中的两个等式是等价的，只要有一个分配恒等式成立，另一个分配恒等式自然成立，这个可以由格的性质推导出来，

定义 7.7 设< A_1 ，$\le_1$ >和< A_2 ，$\le_2$ >是两个格，由它们分别诱导的代数系统为 $<A_1,\wedge_1,\vee_1>$ 和 $<A_2,\wedge_2,\vee_2>$,如果存在着一个从 A_1 到 A_2 的映射 f ,使得对 $\forall a,b \in A_1$ 有

$$f(a \vee_1 b) = f(a) \vee_2 f(b) ，$$

$$f(a \wedge_1 b) = f(a) \wedge_2 f(b) ，$$

称 f 为从 $<A_1,\wedge_1,\vee_1>$ 到 $<A_2,\wedge_2,\vee_2>$ 的格同态，也可称 $<f(A_1),\le_2>$ 是

$<A_1,\leq_1>$格同态象。当 f 是双射时，格同态也称为格同构。

有了格同构的概念后，我们就可以给出判定一个格是否为分配格的充分必要条件了。

定理 7.7 格 L 是分配格，当且仅当 L 中不含有与钻石格或五角格同构的子格。

证明：略。

推论 7.1　（1）小于五元的格都是分配格。

（2）任意一条链都是分配格。

证明：仅证明（2）。

链即是全序集。

设 $<L,\leq>$ 是一个链。根据定义，链中任意两个元素均可比较。对于 L 中的任意两个元素 $a,b,a\leq b$ 或 $b\leq a$。如果 $a\leq b$,则 $a\wedge b=a,a\vee b=b$;如果 $b\leq a$ ，$a\vee b=a$。故链一定是格。

下面证明分配律成立。对 $\forall a,b,c\in A$ ，分下面两种情况讨论：

① $b\leq a$ 或 $c\leq a$;

② $a\leq b$ 且 $a\leq c$。

对于情况①，则 $a\vee(b\wedge c)=a=(a\vee b)\wedge(a\vee c)$;

对于情况②，则 $a\vee(b\wedge c)=b\wedge c=(a\vee b)\wedge(a\vee c)$。

综上分配律均成立，故 A 是分配格。 证毕

例 7.7 图 7.4 中哪个是分配格，哪个不是？

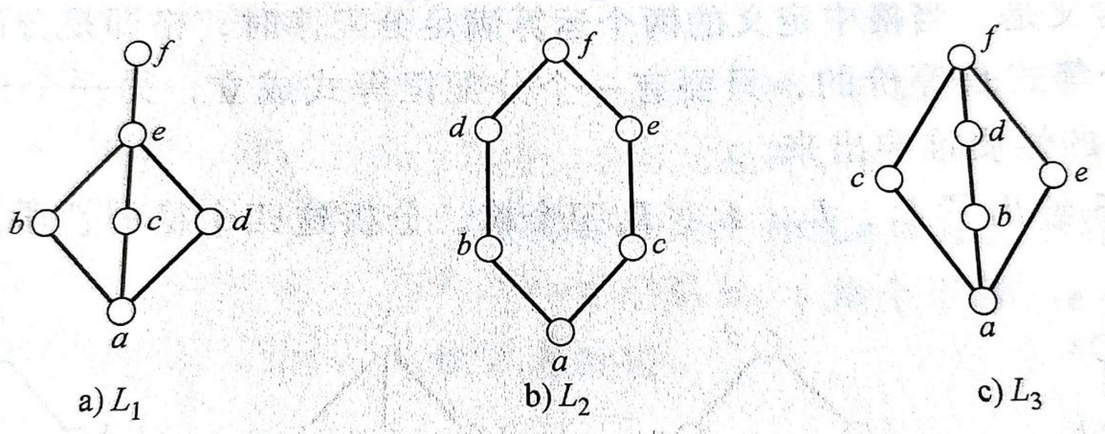


图 7.4　格的示例

解：图 7.4 所示的三个格都不是分配格。

在格 L_1 中，子格 $\{a,b,c,d,e\}$ 与钻石格同构。在格 L_2 中，子格 $\{a,b,c,e,f\}$ 与五角格同构。格 L_3 中，子格 $\{a,c,b,e,f\}$ 与钻石格同构。

7.2.2 有补格

定义 7.8 设< A ，$\leq$ >是一个格，如果存在元素 $a\in A$ ，对于 $\forall x\in A$ ，都有 $a\leq x$ ，则称 a 为格 $<A,\leq>$ 的全下界。如果存在元素 $b\in A$ ，对于 $\forall x\in A$ ，都有 $x\leq b$ ，则称 b 为格< A ，$\leq$ >的全上界。

格< A ，≤>的全下界就是偏序集的最小元，全上界就是偏序集的最大元。可以证明，格 A 若存在全下界或全上界，一定是唯一的。一般地，全下界记为 0,全上界记为 1。

定义 7.9 设< A ，≤>是格，若 A 存在全下界和全上界，则称 A 为有界格，记作 $< A,\wedge,\vee,0,1 >$。

钻石格和五角格都是有界格，同时任何有限格 L 也是有界格。设 $L=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$，则 $a_1\wedge a_2\wedge\ldots\wedge a_n$ 是 L 的全下界，$a_1\vee a_2\vee\ldots\vee a_n$ 是 i 的全上界。

例 7.8 设有限集合 S，那么在格 $<\wp(S),\cap,\cup>$ 中，空集 $\varnothing$ 就是该格的全下界，集合 S 就是该格的全上界。

定义 7.10 设< A ，∧ ，V ，0 ，1>是有界格，$a\in A$，若存在 $b\in A$，使得 $a\vee b=1$，且 $a\wedge b=0$，称 b 是 a 的补元。

显然，若 b 是 a 的补元，则 a 也是 b 的补元，换句话说，a 和 b 互为补元，简称互补。

在任何有界格中，全下界 0 与全上界 1 总是互补的。而对于其他元素，可能存在补元，也可能不存在补元。如果存在补元，可能是唯一的，也可能有多个补元。对于有界分配格，如果它的元素存在补元，则一定是唯一的。

定理 7.8 设< A ，∧ ，V ，0 ，1>是有界分配格，若 $a\in A$，且对于 a 存在补元 b，则 b 是 a 的唯一补元。　、

证明：假设 $c\in A$ 也是 a 的补元，则有 $a\vee c=1$，且 $a\wedge c=0$。又知 b 也是 a 的补元，故有 $a\vee b=1$，且 $a\wedge b=0$。则 $a\vee c=a\vee b$，$a\wedge c=a\wedge b$。

由于 A 是分配格，从而满足分配律，则

$b=b\wedge(b\vee a)=b\wedge(c\vee a)=(b\wedge c)\vee(b\wedge a)=(b\wedge c)\vee(c\wedge a)$

$=(b\vee a)\wedge c=(c\vee a)\wedge c=c$　证毕

a 的补元记为 a' 或 $\overline{a}$。

定义 7.11 设< A ，∧ ，V ，0 ，1>是一个有界格，若对于 $\forall a\in A$，在 A 中都有 a 的补元存在，则 A 称为有补格。

例 7.9 考虑图 7.3 中的四个格。

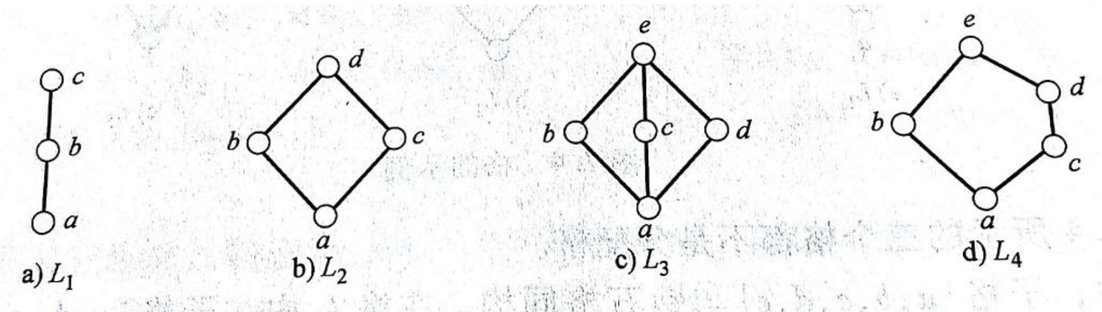


图 7.3　格的示例

解：L_1 中，a 与 c 互补，b 不存在补元。a 是全下界，c 是全上界。L_2 中，a 与 d 互补，b 与 c 互补。a 是全下界，d 是全上界。L_3 中，a 与 e 互补。b、c、d 三个元素中，对于任意一个，另外两个都是它的补元，即每个元素都存在两个补元。a

是全下界，e 是全上界。L_4 中，a 与 e 互补，b 的补元是 c 和 d，c 和 d 的补元都是 b。a 是全下界，e 是全上界。

综上，L_1 不是有补格，其他三个都是有补格。

7.3 布尔代数

定义 7.12 如果一个格是有补分配格，则称它为布尔格或布尔代数。

例 7.11 集合 B 的幂集格 $<\wp(B)$，$\cap$，$\cup$，$\backsim$，$\varnothing$，$B>$ 是布尔代数，也称为集合代数，其中 $\cap$ 和 $\cup$ 分别为集合的交和并运算，~是绝对补运算，全集是 B。

我们也可通过规定集合上的运算和算律来定义布尔代数。

定理 7.9 设有代数系统 $<B$，$\wedge$，$\vee$，'，0，1>，其中 B 至少包含两个元素，$\wedge$ 和 V 为 B 上的两个二元运算，'为 B 上一元运算，对 $\forall a,b,c\in B$,满足

$(H_1)a\wedge b=b\wedge a$，$a\vee b=b\vee a$（交换律）；

$(H_2)a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$，$a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c)$（分配律）；

(H_3) 在 B 中存在零元 0，使 $a\vee 0=a,a\wedge 0=a$，存在单位元 1，使 $a\wedge 1=a,a\vee 1=1$（同一律）；

$(H_4)a'\in B$，使 $a\wedge a'=0$，$a\vee a'=1$（补元律）；

则 $<B$，$\wedge$，$\vee$，'，0，1>是布尔格。证明略。

由定理 7.9 中的 4 个算律可以推出吸收律和结合律。根据定理 7.9,可以给出布尔代数的另一个等价定义。

定义 7.13 设 $<B$，$\wedge$，$\vee$，'，0，1>为代数系统，$\wedge$，$\vee$ 是 B 上的二元运算，'为 B 上的一元运算，运算满足定理 7.9 中的条件 $(H_1)\backsim$ 条件 (H_4)，则称此代数系统为布尔代数。

在命题代数中，可以验证命题集合上联结词的定义具有 $(H_1)\backsim(H_4)$ 各性质，故命题集合 $<S$，$\wedge$，$\vee$，'，1,0>构成布尔代数。

定理 7.10 设 $<B$，$\wedge$，$\vee$，'，0，1>是布尔代数，则

（1）$\forall a\in B,(a')'=a$

（2）$\forall a,b\in B,(a\wedge b)'=a'\vee b',(a\vee b)'=a'\wedge b'$'

证明：（1）$\forall a\in B$，根据补元的定义，有

$a\vee a'=1$ 且 $a\wedge a'=0$

这表明 a 是 a' 的补元，由补元的唯一性得 $(a')'=a$。

（2）$\forall a,b\in B$，由布尔代数的性质，有

$(a\wedge b)\vee(a'\vee b')=(a\vee a'\vee b')\wedge(b\vee a'\vee b')$

$=(1\vee b')\wedge(a'\vee 1)=1\wedge 1=1$

$(a\wedge b)\vee(a'\vee b')=(a\wedge b\wedge a')\vee(a\wedge b\wedge b')$

$=(0\wedge b)\vee(a\wedge 0)=0\vee 0=0$

这表明 $(a'\vee b')$ 是 $(a\wedge b)$ 的补元，由补元的唯一性，有 $(a\wedge b)'=a'\vee b'$。

同理可证，$(a\vee b)'=a'\wedge b'$。　　证毕

定理 7.10 给出的是布尔代数的性质，其中（1）称为双重否定律，（2）称为德

摩根律。

在布尔代数< B ，∧，V，'，0,1>中，1 是运算∧的单位元，0 是运算 V 的单位元。可以证明，1 是运算 V 的零元，0 是运算∧的零元。

练习题

1.下列各集合对于整除关系都构成偏序集，不能构成格的集合是（ ）

A $L_1 = \{1,2,3,4,5\}$

B $L_2 = \{1,2,3,6,12\}$

C $L_3 = \{1,2,3,4,6,9,12,18,36\}$

D $L_4 = \{1,2,2^2,2^4,\ldots\}$

2.设 $<L,\leq>$ 是一个有界格，下列叙述中，正确的是（ ）

A 每个元素都有补元

B 每个元素都没有补元

C 最多有一个元素有补元

D 至少有两个元素存在补元

3.设 $<L,\leq>$ 是一个有界分配格，a 是 L 中的一个元素，下列叙述中，正确的是（ ）

A a 的补元一定存在

B a 的补元可能有多个

C 若 a 有补元，则一定唯一

D 若 a 有补元，则一定有多个

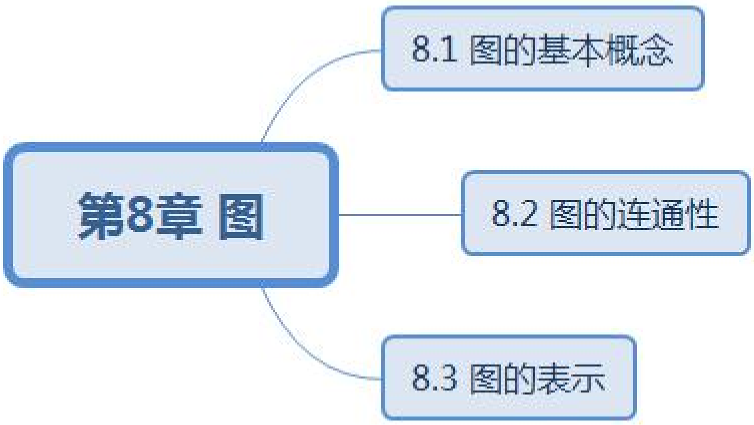
答案

1.A。

2.D。

3.C。

第 8 章 图



8.1 图的基本概念

我们用图来表示对象之间的联系，其中对象表示为顶点，它们之间的联系表示为边，至于顶点的位置及形状、边的长度及粗细都是无关紧要的。顶点也称为结点。

定义 8.1 一个图包含两部分，一部分是顶点，一部分是边。一般地，图用 $G=(V,E)$来表示，其中 V 是非空有限顶点集，E 是边集，E 中的每条边都是 V 中某一对顶点间的连接。当顶点分别是 u，v 时，连接这两个顶点的边可以表示为一个二元组 (u,v)或是 $<u,v>$，有时也将边称为顶点的有序对。

图 $G=(V,E)$中，顶点总数记为 $|V|$，边的总数记为 $|E|$。如果图中边的数目较少(相对于顶点数来说)，图称为稀疏图。特别地，一条边也没有的图称为零图。反之，边数较多的图称为密集图或稠密图。仅有一个顶点的图叫做平凡图，平凡图必为零图。

图 G 中的边 (u,v)，既可以表示从 u 指向 v，也可以表示从 v 指向 u。有些情况下，可以限定图中边的方向。当图中的边限定为从一个顶点指向另一个顶点时，这样的边称为有向边，也称为弧；不限定方向的边称为无向边。实际上，一条无向边可以看成是两条方向相向的有向边。组成有向边的二元组是有序的，而组成无向边的二元组可以看成是无序的。例如有向边 (u,v)表示从顶点 u 指向顶点 v 的边，它与有向边 (v,u)不同。对于有向边 (u,v)来说，u 为弧尾或起点，v 称为弧头或终点。弧的方向是从 u 指向 v。而无向边 (u,v)既可以表示从顶点 u 指向顶点 v，也可以表示从顶点 v 指向顶点 u，无向边 (u,v)与无向边 (v,u)是等价的。

图中的边均为有向边的图称为有向图。如果图中仅含有无向边，这样的图称为无向图。如果一个图中既含有有向边，又含有无向边，则可以将其中所有的无向边表示为对应的有向边，从而图成为有向图。

例 8.1 图 8.1 中分别表示了一个无向图和一个有向图。其中 G_1 是无向图，含有

5 个顶点，7 条边。G_2 是有向图，含有 3 个顶点，6 条边。

以 G_2 为例，其边集 $E(G_2)=\{(A,B),(A,B),(A,C),(A,C),(B,C),(C,B)\}$。

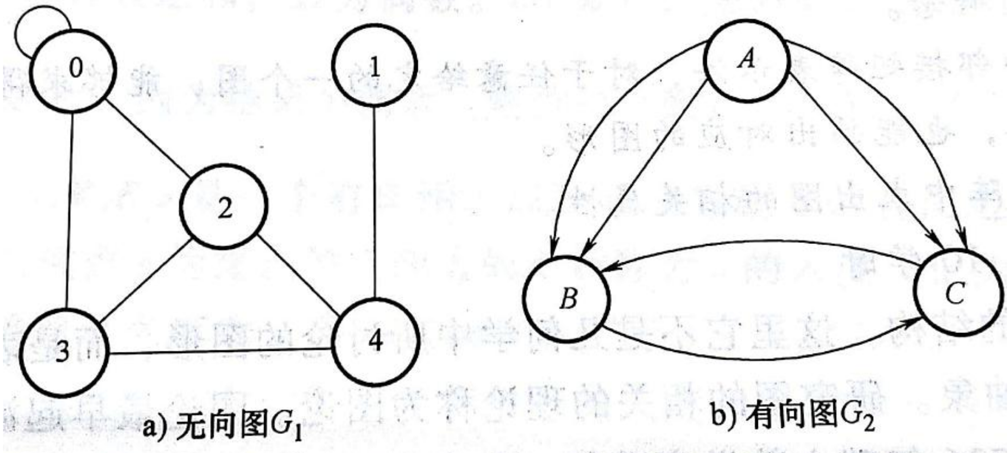


图 8.1　图的示例

图中每条边都与两个顶点相关联。对于无向边来说，这两个点是可以互换的，例如图 G_1 中，边（0,2)也可以写成（2,0)。而有向边的两个顶点是有序的，例如图 G_2 中，(B,C) 和 (C,B) 分别代表两条不同的边。

图中任意两个顶点之间可以存在任意条边，包括没有边及多条边。两个顶点间多于 1 条的边称为多重边或平行边，边数称为边的重数。特别地，顶点到自己也可以存在一条边，这样的边称为环。含有多重边的图称为多重图，不含多重边及环的图称为简单图。在多重图里，允许两条或多条边连接同一对顶点。

例如图 G_1 中，顶点 0 上有一个环。顶点 1 和顶点 2 之间没有边；图 G_2 中，顶点 A 与顶点 B 之间、顶点 A 与顶点 C 之间都存在多重边。顶点 B 和顶点 C 之间虽然也有两条边，但它们不属于多重边，因为它们是不同方向的，分别是 B 到 C 的一条边及 C 到 B 的一条边。

在图 $G=<V,E>$ 中，若 $|V|=n(n>0)$，G 称为 n 阶图；若 $E=\varnothing$，称图 G 是 n 阶零图。

同一条边连接的两个顶点称为边的端点，这两个端点互称为邻接点，此时，边与顶点之间称为相关联。

定义 8.2 设无向图 $G=<V,E>$，顶点 $v(v\in E)$ 关联的边数称作该顶点的度数，简称为度，记为 $\deg(v)$。

对图 G 中的顶点 v，若 $\deg(v)=0$，则 v 称为弧立点；若 $\deg(v)=1$，则 v 称为悬挂点；若 v 有环，则计算度时使 $\deg(v)$ 增加 2；若 $\deg(v)$ 为奇数，称 v 为奇顶点或奇点；若 $\deg(v)$ 为偶数，称 v 为偶顶点或偶点。

定理 8.1 图 $G=<V,E>$ 中，顶点度数总和等于边数的两倍，即

$\sum_{v\in V}\deg(v)=2|E|$。

证明：对任意图 $G=<V,E>$，设 $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$，E 中的每条边 $e=(v_i,v_j)$，使 v_i 和 v_j 的度分别加 1，即使总度数增加 2，因此图 G 中所有顶点的度数之和为边

数的两倍。

证毕

例 8.2 一个具有 10 个顶点而且每个顶点的度均为 6 的图，有多少条边？

解：顶点度之和=10*6=60,故 $2|E|=60$，$|E|=30$，图中共有 30 条边。

定理 8.2 对任意的图 G，奇顶点必为偶数个。

证明：设图 $G=<V,E>$，V_1 为奇顶点集，V_2 为偶顶点集，则

$$\sum_{v\in E}\deg(v)=\sum_{v\in V_1}\deg(v)+\sum_{v\in V_2}\deg(v)=2|E|$$

因为 $\sum_{v\in V_2}\deg(v)$ 是偶数之和，必为偶数。$2|E|$ 也是偶数，故 $\sum_{v\in V_1}\deg(v)$ 必为偶数。而 $\sum_{v\in V_1}\deg(v)$ 是奇数之和，因为结果为偶数，则数的个数必为偶数，即 $|V_1|$ 是偶数。

证毕

定义 8.3 设 $G=<V,E>$ 是一个有向图,以顶点 v 为起点的有向边的个数称为 v 的出度，记为 $\deg^+(v)$；以顶点 v 为终点的有向边的个数称为 v 的入度，记为 $\deg^-(v)$。顶点的出度与入度之和就是该顶点的度数，即 $\deg(v)=\deg^+(v)+\deg^-(v)$。

例 8.3 求出图 8.1 所示的有向图 G_2 中各顶点的入度和出度。

解：各顶点的出度：

$\deg^+(A)=4$，$\deg^+(B)=1$，$\deg^+(C)=1$

各顶点的入度：

$\deg^-(A)=0$，$\deg^-(B)=3$，$\deg^-(C)=3$。

定理 8.3 在有向图中，所有顶点的入度之和等于所有顶点的出度之和。

证明：对任意有向图 $G=<V,E>$，设 $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$，e 为 E 中的任一条有向边，不妨设 $e=(v_i,v_j)$，它使 v_i 的出度加 1，而使 v_j 的入度加 1。故所有顶点的出度之和等于有向边数，同时，所有顶点的入度之和也等于有向边数。故所有顶点的入度之和等于所有顶点的出度之和，其值为有向边数。 证毕

例如，图 8.1 所示的有向图 G_2 中，所有顶点的入度之和为 6,所有顶点的出度之和亦为 6,这个数也是图中边的数目。

定义 8.4 设含 n 个顶点的简单无向图 $G=<V,E>$ 中，若每个顶点都与其余的 n-1 个顶点邻接，则称 G 为 n 阶（无向）完全图，记作 K_n。

定义 8.5 设含 n 个顶点的简单有向图 $G=<V,E>$ 中，若每个顶点都邻接到其余的 n-1 个顶点，则称 G 为 n 阶有向完全图。

显然，n 阶（无向）完全图中共有 $\frac{n(n-1)}{2}$ 条边，n 阶有向完全图中共有 $n(n-1)$ 条边。

图 8.2 给出了 n 阶（ n <6)完全图示例。

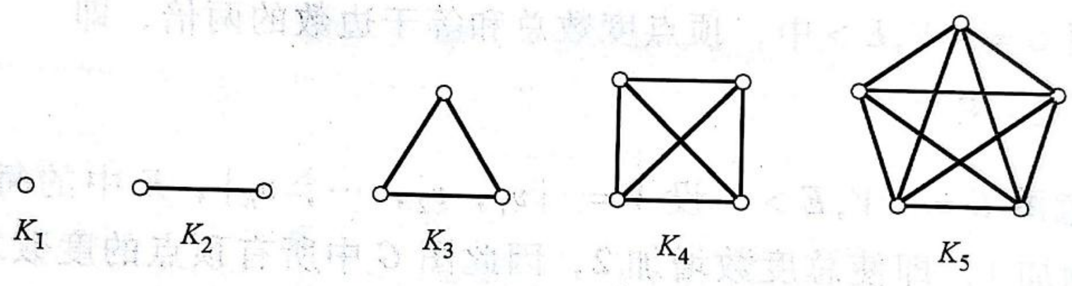


图 8.2 n 阶（$n<6$）完全图

定义 8.6 设 $G=<V,E>$ 是 n 阶无向简单图，以 V 为顶点集、所有属于 K_n 但不属于 G 的边为边集所构成的图，称为 G 相对于 K_n 的补图，简称为 G 的补图，记作 $\tilde{G}$

例如，图 8.3 所示的 G_1 和 G_2 互为补图。

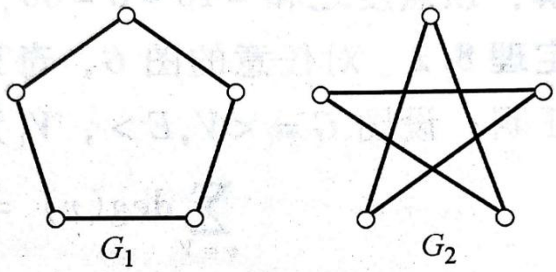


图 8.3 G_1 与 G_2 互为补图

定义 8.7 对于无向图 $G=<V,E>$，记

$\Delta(G)=\max\{\deg(v)|v\in V\}$,

$\delta(G)=\min\{\deg(v)|v\in V\}$，,

称 $\Delta(G)$ 为图 G 的最大度，称 $\delta(G)$ 为图 G 的最小度。

定义 8.8 在无向图 $G=<V,E>$ 中，如果每个顶点的度都是 k，则图 G 称为 $k-$ 正则图。

例如，K_n 是 $n-1-$ 正则图，因为每个顶点的度均为 n -1。图 8.3 中的图 G_1 和图 G_2 都是 2-正则图。

定义 8.9 设图 $G=<V,E>$，如有图 $G'=<V',E'>$，且 $E'\subseteq E, V'\subseteq V$，则称 G' 是 G 的子图。如果 G 的子图包含 G 的所有顶点，即 $E'\subseteq E, V'=V$ 则 G'称为 G 的生成子图。

例 8.4 分析图 8.4 所示的几个图之间的关系。

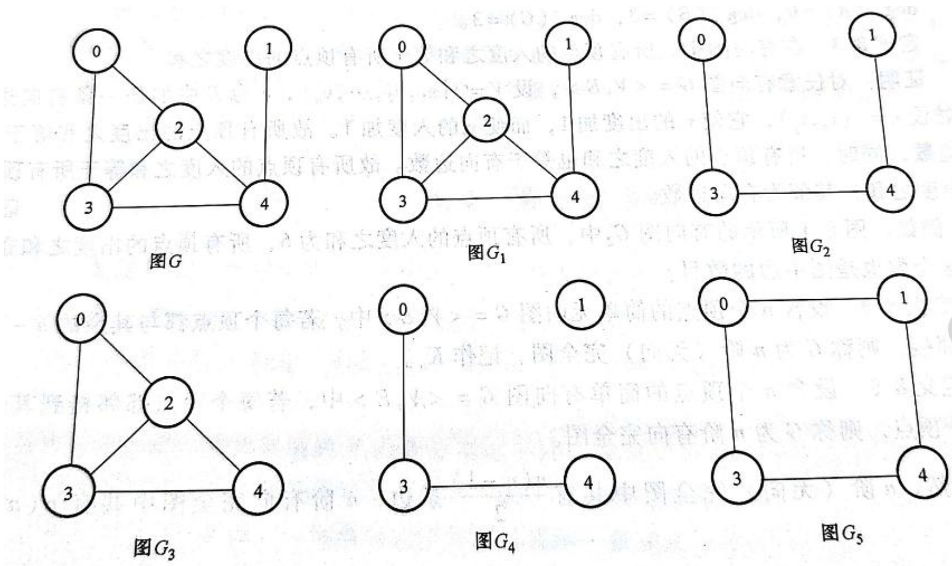


图 8.4 子图示例

解：图 G_1、图 G_2、图 G_3 和图 G_4 都是图 G 的子图，其中，图 G_1 是图 G 的生成子图。图 G_5 不是图 G 的子图。特别地，图 G_1 与图 G—样，也是子图。

此外，图 G_2 是图 G_1 和图 G_5 的子图，且是图 G_5 的生成子图。图 G_3 是图 G_1 的子图。图 G_4 是图 G_1、图 G_2 和图 G_5 的子图，图 G_4 不是图 G_1 的生成子图，是图 G_2 和图 G_5 的生成子图。

将这些关系总结在表 8.1 中，对应每一个图，前一列表示子图关系，后一列表示生成子图关系。

表 8.1 图 8.4 中各图之间的关系

	G		G_1		G_2		G_3		G_4		G_5	
	子图	生成子图	子图	生成子图	子图	生成子图	子图	生成子图	子图	生成子图	子图	生成子图
G	√	√	√	√								
G_1	√	√	√	√								
G_2	√		√		√	√					√	√
G_3	√		√				√	√				
G_4	√		√		√	√			√	√	√	√
G_5											√	√

定义 8.10 设图 $G_1 =< V_1, E_1 >$，及图 $G_2 =< V_2, E_2 >$，如果存在一一对应的映射 $f: V_1 \to V_2$，使得 $\forall v_i, v_j \in V_1$ 且 $(v_i, v_j) \in E_1$，当且仅当 $(f(v_i), f(v_j)) \in E_2$，并且 (v_i, v_j) 与的 $(f(v_i), f(v_j))$ 重数相同，则称 G_1 与 G_2 是同构的，记作 $G_1 \cong G_2$。

图 G_1 与图 G_2 同构的充要条件是：图 G_1 与图 G_2 的顶点和边分别存在一一对应且保持关联关系。可以将定义 8.10 中的无向边改为有向边，从而定义两个有向图的同

构。

定义 8.11 图 $G=<V,E>$，若 $G\cong\tilde{G}$，则称图 G 为自补图。

例如图 8.3 中的两个图 G_1 和 G_2 是同构的。因为它们也互为补图，所以是自补图。能构成自补图的必要条件是，其对应的完全图中的边数必为偶数。例如，3 个顶点的完全图中所含的边数为 3，是奇数，意味着不存在 3 个顶点的自补图。6 个顶点的完全图中所含的边数为 15，所以也不存在 6 个顶点的自补图。

8.2 图的连通性

定义 8.12 给定图 $G=<V,E>$，G 中顶点与边的交替序列 $\Gamma=v_{i_0}e_{j_1}v_{i_1}e_{j_2}\ldots e_{j_n}v_{i_n}$，称为联结 v_{i_0} 到 v_{i_n} 的通路，其中 e_{j_r} 是关联顶点 $v_{i_{r-1}}$ 与 v_{i_r} 的边，即 $e_{j_r}=\left(v_{i_{r-1}},v_{i_r}\right),r=1,2,\ldots,n$，$v_{i_0}$ 和 v_{i_n} 分别称作 Γ 的起点和终点，Γ 中边的条数 n 称为通路的长度。当 $v_{i_0}=v_{i_n}$ 时，Γ 称作回路。若 Γ 的所有边均不相同，则 Γ 称为简单通路。当简单通路的起点与终点相同时，Γ 称为简单回路。若简单通路 Γ 的所有顶点不同（除起点和终点可能相同外），则 Γ 称为初级通路或路径。若初级通路的起点与终点相同时，称为初级回路。

对于简单图来说，只使用顶点序列即可表示一条通路。通路 $\Gamma=v_{i_0},v_{i_1},\ldots,v_{i_n}$ 的长度为 n。

例 8.5 根据图 8.5,举出通路、回路、简单通路、初级回路等例子。

解：在图 8.5 所示的图中，

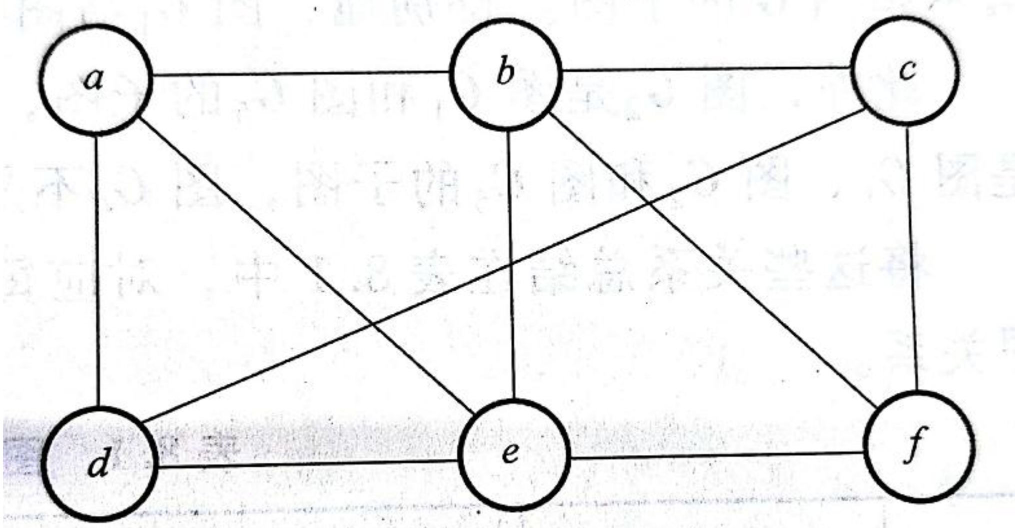


图 8.5 图中的通路

通路 :a,d,e,b,a,e,f,c,b,f,c,d 是长度为 11 的通路 ,但不是简单通路 ,因为边 (f,c) 出现两次；

a,b,e,d 是长度为 3 的通路，且是简单通路；

回路：b,c，f，e，b，f，e，b 是长度为 7 的回路，但不是简单回路，因为其中含有重复的边；

简单通路：a，d，c，f，e 是长度为 4 的简单通路，也是初级通路；

初级回路：b，c，f，e，b 是长度为 4 的初级回路。

定理 8.4 若无向图 $G=<V,E>$ 中每个顶点的度数至少为 2，则 G 包含一条初级回路。

证明：若图 G 包含环或多重边，则定理结论成立。

若图 $G=<V,E>$ 是简单图，G 中每个顶点的度数至少为 2，表明每个顶点都至少存在 2 个不同的邻接点。

在图中任取一个顶点 v_0，从 v_0 开始构造初级回路的顶点序列，用集合 S 保存这些顶点。初始时，$S=\{v_0\}$。从 v_0 的邻接点中任取一个顶点 v_1 加人 S 中，因为 G 是简单图，$v_0 \neq v_1$，$S=\{v_0,v_1\}$。

因为 v_1 的度至少为 2，故除 v_0 外 v_1 还有其他的邻接点，设为 v_2。若 $v_2 \in S$，则 S 内的顶点已经构成初级回路。否则，继续这个过程，选择 v_2 的除 v_1 外的一个邻接点。

一般来讲，当选择到顶点 $v_i(i\geq 1)$ 时，它的相邻顶点除 v_{i-1} 外，必可选另一顶点 v_{i+1}。若 $v_{i+1}\in S$，不失一般性设 $v_{i+1}=v_k$，则得到通路 $(v_0,v_1,\ldots,v_k,v_{k+1},\ldots,v_i,v_{i+1}=v_k)$，其中从 v_k 到 v_k 的顶点序列 $(v_k,v_{k+1},\ldots,v_k)$ 即是初级回路，因为除 v_k 外，S 中的其他顶点均不相同。若 $v_{i+1}\notin S$，则得到 $(v_0,v_1,\ldots,v_i,v_{i+1})$，继续选择 v_{i+1} 的邻接点 v_{i+2} 并判断其是否属于 S 中。因 G 中只有有限个顶点，故这个过程不会无限进行下去，必在某一步时新选中的顶点已属于 S。此时，初级回路即已得到。　证毕

定义 8.13 在无向图 G 中，顶点 u 和 v 之间若存在通路，则称顶点 u 和顶点 v 是连通的。若图 G 中任何两个不同顶点都是连通的，则称 G 为连通图，否则称 G 为不连通图。

无向图顶点之间的连通性，是顶点集之间的一个等价关系。以 R 表示顶点之间的连通关系。在 $G=<V,E>$ 中，对任意的顶点 $u\in V$，u 到 u 之间是连通的，即 uRu。故 R 是自反的。对任意的顶点 $u,v\in V$，若 uRv，表明 u 到 v 之间存在通路，这条通路也是 v 到 u 的通路，即 vRu，故 R 是对称的。又对任意的顶点 $u,v,w\in V$，如果 uRv 且 vRw，可推出 u 到 w 也存在通路，即 uRw，因此 R 在 V 上是传递的。所以连通关系 R 在顶点集 V 上是等价关系。

对应于这个等价关系，必可对顶点集作一个划分，把顶点集 V 分成 $V_1,V_2,\ldots,V_m$ 个子集（划分块），使得两个顶点 v_j 和 v_k 是连通的，当且仅当它们属于同一顶点集 V_i 中。子图 $G(V_1),G(V_2),\ldots,G(V_m)$ 称为图 (G) 的连通分支或连通分量。G 的连通分支数记为见 $W(G)$。实际上，$G=<V,E>$ 的一个连通分量构成图 G 的一个极大连通子图。所谓图 G 的极大连通子图 G' 是指，该子图 G' 是连通的，且将 $G-G'$ 中的任何元素加人 G' 得到的新图都是　不连通的。特别地，对于连通图 G，它的极大连通子图即是图本身。不连通的图是 2 个或 2 个以上的连通分量的并，图的任意两个连通分量都没有公共的顶点及边。

定理 8.5 设 $G=<V,E>$，$|V|=n$，若从顶点 u 到 v $(u\neq v)$ 存在通路，则从 u 到 v 必存在长度小于或等于 $n-1$ 的一条通路。

证明：设 G 中有一条长度为 l 路，记为 $\Gamma = v_0e_1v_1e_2\ldots e_lv_l\left(v_0 = u, v_l = v\right)$，分以下两种情况讨论。

若 $l \le n-1$,则 Γ 满足要求，定理成立；

若 $l > n-1$，此时路 Γ 上的顶点数大于 G 中的顶点数。于是必存在 $k,s,0 \le k < s \le l$，使 $v_s = v_k$，Γ 的形式为：$\Gamma = v_0e_1v_1e_2\ldots e_kv_ke_{k+1}v_{k+1}\ldots e_sv_se_{s+1}v_{s+1}\ldots e_lv_l$

因为 $v_s = v_k$，所以 Γ 也可表示成：$\Gamma = v_0e_1v_1e_2\ldots e_kv_ke_{s+1}v_{k+1}\ldots e_sv_se_{s+1}v_{s+1}\ldots e_lv_l$

即在 Γ 上存在 v_k 到自身的回路 $C_{ks} = v_ke_{k+1}v_{k+1}\ldots e_sv_k$。在 Γ 上删除 C_{sk} 上的一切边及除 v_k 外的一切顶点，得到：$\Gamma_1 = v_0e_1v_1e_2\ldots e_kv_ke_{s+1}v_{s+1}\ldots e_lv_l$，$\Gamma_1$ 仍为 u 到 v 的路，且长度至少比 Γ 减少 1。若 Γ_1 还不满足要求，则重复上述过程。由于 G 是有限顶点数，故经过有限步后，必得到 u 到 v 长度小于或等于 $n-1$ 的路。　　证毕

推论 8.1:在一个 n 阶图中，若从顶点 u 到 v $(u \ne v)$ 存在路，则从 u 到 v 存在长度小于或等于 n-1 的初级路。证明略。

无向图的连通性，不能直接推广到有向图。在有向图 $G = <V, E>$ 中，从顶点 u 到 v 有一条路，称从 u 到 v 可达。

可达性是有向图顶点集上的二元关系，它是自反和传递的。但一般它不是对称的，故可达性不是等价关系。

定义 8.14 在简单有向图 G 中，任何一对顶点间至少有一个顶点到另一个顶点是可达的，则称这个图是单侧连通的。如果对于图 G 中任何一对顶点，两者之间是相互可达，则称这个图是强连通的。如果在图 G 中，略去边的方向，将它看成无向图后，图是连通的，则该图称为弱连通的。

图 8.6a 是一个强连通图，而图 8.6b 是一个弱连通图。其中仅有顶点 1 和顶点 5 存在到其余所有各顶点的通路，顶点 2、顶点 3 和顶点 4 作为起始点都有不可达的顶点，实际上从这三个顶点均不能到达顶点 1 和顶点 5。

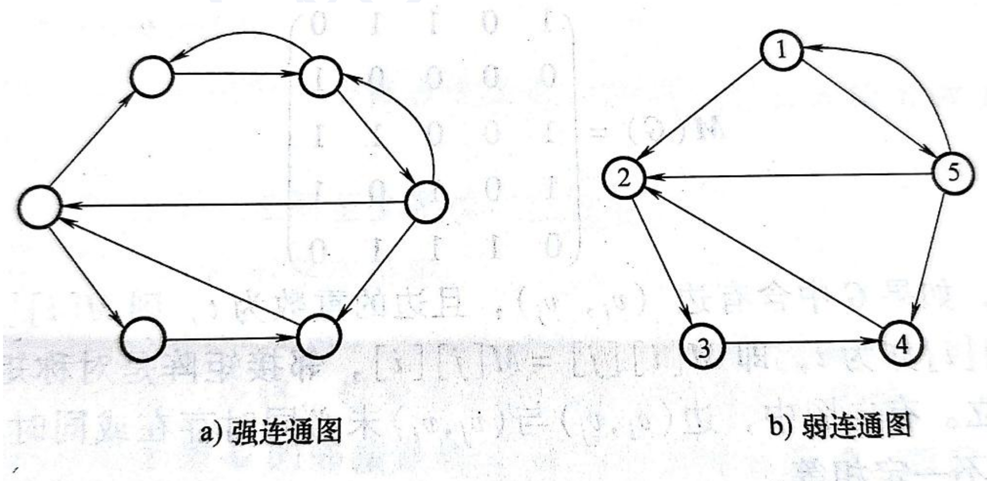


图 8.6　有向连通图

定义 8.15 设无向图 $G = <V, E>$ 为连通图，对任意的顶点 $w \in V$，若删除 w 及与 w 相关联的所有边后，无向图不再连通，则称为割点。

定义 8.16 设无向图 $G=<V,E>$ 为连通图，若存在点集 $V_1 \subset V$，当删除 V_1 中的所有顶点及与 V_1 中顶点相关联的所有边后，图 G 不再是连通的；而删除了 V_1 的任何真子集 V_2 及与 V_2 中顶点相关联的所有边后，所得到的子图仍是连通图，则称 V_1 是 G 的一个点割集。

定义 8.17 设无向图 $G=<V,E>$ 为连通图，对任意的边 $e \in E$，若删除 e 后无向图不再连通，则 e 称为割边，也称为桥。

定义 8.18 设无向图 $G=<V,E>$ 为连通图，若有边集 $E_1 \in E$，当删除 E_1 中所有边后得到的子图是不连通图；而删除了 E_1 的任一真子集 E_2 后得到的子图是连通图，称 E_1 是 G 的一个边割集。

无向连通图 $G=<V,E>$ 的点割集为 V_1，边割集为 E_1，则子图 $G-E_1$ 所含的连通分量个数必为 2，而子图 $G-V_1$ 中所含的连通分量的个数不能确定。

例 8.6 求出图 8.7 所示图 G 的割点和割边。

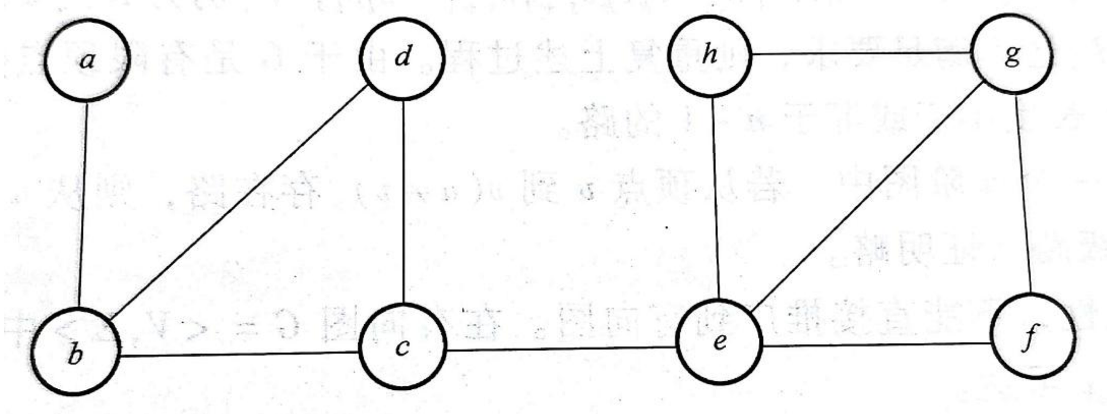


图 8.7　图 G

解：图 G 的割点是 b，c 和 e。删除这三个顶点中的任意一个，都使得图 G 不再连通。

图 G 的割边是（a，b)和（c，e)。删除（a，b)或（c，e)，G 不再连通。

8.3 图的表示

定义 8.19 设图 $G=<V,E>$，$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$，则 n 阶方阵 $M=(a_{ij})$ 称为 G 的邻接矩阵，其中，a_{ij} 为图 G 中从 v_i 到 v_j 的边的数目。

简单图的邻接矩阵是布尔矩阵。借助布尔矩阵，可以很容易求简单图中各顶点的度。对于无向图 G，邻接矩阵 i 行或 i 列中非零元素的个数即为顶点 v_i 的度。对于有向图 G，邻接矩阵 i 行中非零元素的个数为顶点 v_i 的出度，而 i 列中非零元素的个数为顶点 v_i 的入度，i 行非零元素的个数加上 i 列非零元素的个数为顶点 v_i 的度。

由邻接矩阵可以计算任意两顶点之间的通路数目。对于布尔矩阵 M，定义它的幂 $M^2=M\times M$,其中“x”是矩阵乘法。$M^k=M\times M^{k-1}(k>1)$。

定理 8.6 设 M 是 n 个顶点的简单图 G 的邻接矩阵，$M^k=\left(m_{ij}^{(k)}\right)$ 是 M 的 k 次幂，则在 M^k 中的 $\left(m_{ij}^{(k)}\right)$ 等于顶点 v_i 和 v_j 之间长度为 k 的通路的数目。证明略。

例 8.8 在图 8.5 所示的图中，顶点 a 到顶点 d 之间长度为 3 的通路有多少条？

解：先写出图 8.5 的邻接矩阵 M:

$$M=\begin{pmatrix}0&1&0&1&1&0\\1&0&1&0&1&1\\0&1&0&1&0&1\\1&0&1&0&1&0\\1&1&0&1&0&1\\0&1&1&0&1&0\end{pmatrix}$$

计算 M^2 和 M^3:

$$M^2=\begin{pmatrix}3&1&2&1&2&2\\1&4&1&3&2&2\\2&1&3&0&3&1\\1&3&0&3&1&2\\2&2&3&1&4&1\\2&2&1&2&1&3\end{pmatrix} \quad M^3=\begin{pmatrix}4&9&4&7&7&5\\9&6&9&4&10&7\\4&9&2&8&4&7\\7&4&8&2&9&4\\7&10&4&9&6&9\\5&7&7&4&9&4\end{pmatrix}$$

顶点 a 到顶点 d 之间长度为 3 的通路数 = $M^3[1][4]=7$，即满足要求的通路有 7 条，分别是：a，b，a，d；a，e，a，d；a，d，a，d；a，b，c，d；a，b，e，d；a，d，c，d；a，d，ed。

有时需要判断从 v_i 到 v_j 之间是否有通路存在，而不在乎两顶点之间通路的数目，为此可把上述矩阵改成路径矩阵。

定义 8.20 设 G 是含 n 个顶点无多重边的图，定义 n 阶方阵 $P(G)=(P_{ij})$ 为路径矩阵，其中

$$P_{ij}=\begin{cases}1 & \text{若 } v_i \text{ 与 } v_j \text{ 之间至少存在一条通路，}\\ 0 & \text{若 } v_i \text{ 与 } v_j \text{ 不存在通路。}\end{cases}$$

路径矩阵亦称可达性矩阵，可达性矩阵表明了图中任意两个顶点间是否至少存在一条路，以及在任何顶点上是否存在回路。

一般来讲，可由图 G 的邻接矩阵 A 得到可达性矩阵 P，即设 $B_n=A+A^2+\ldots+A^n$，再从 B_n 中仅将不为零的元素改换为 1，由此得到可达性矩阵。

邻接矩阵及可达性矩阵概念，可推广至有向图。

练习题

1.无向简单图 $G=<V,E>$，$V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$，则 $|E|$ 的值最大是（ ）

A 8

B 10

C 12

D 16

2.无向简单图 $G=<V,E>$，$V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$，则 $\Delta(G)$ 的值最大是（ ）

A 1

B 2

C 3

D 4

3.无向简单图 G 中有 14 条边，2 个度为 4 的顶点，5 个度为 3 的顶点，其余顶点的度均小于 3，则 G 中所含顶点数至少是（ ）

A 9

B 10

C 11

D 12

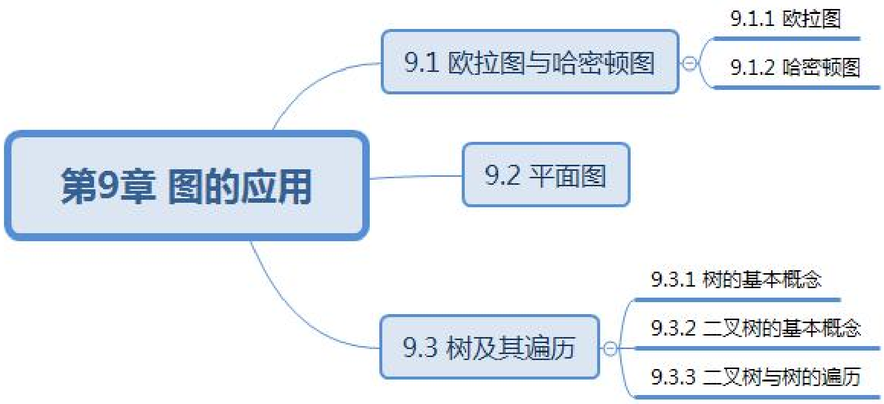
答案

1.B。

2.D。

3.B。

第 9 章图的应用



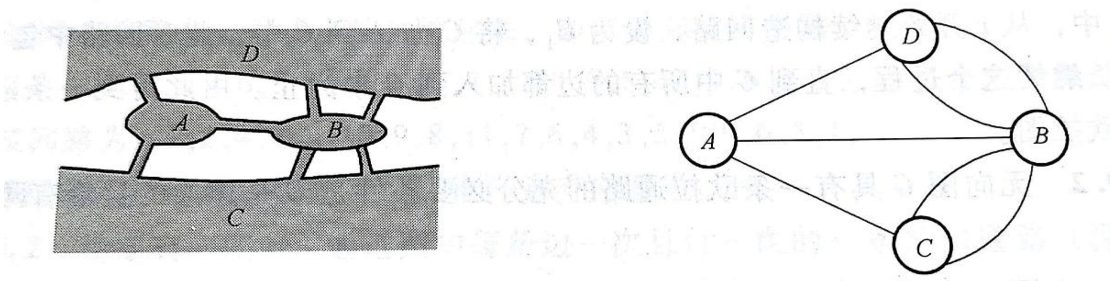
9.1 欧拉图与哈密顿图

9.1.1 欧拉图

在德国东普鲁士有一个小城镇，名为哥尼斯堡。城市虽然不是很大，在欧洲乃至全世界却是闻名遐迩。它曾经是东普鲁士的首都，德国的文化中心之一。现在是俄罗斯加里宁格勒州首府，名字也改为加里宁格勒。两位名人，18 世纪的哲学家康德和 19 世纪大数学家希尔伯特都曾在此居住过。城中 Pr *egel* 河贯穿其中，河中心有两个小岛，在当时有七座桥把两个小岛与河的两岸连接起来，如图 9.1a 所示。日复一日这七座桥上行走过无数行人，在桥上可以听到悠扬的钟声，同时感受着吹拂自波罗的海的海风。

当地人有一项有趣的休闲活动，就是在周末完成一次走过所有七座桥的散步，每座桥只能经过一次而且起点与终点必须是同一地点。这个问题如此的简单，可是一天天过去了，全城竟然没有人能够做得到。这就是著名的哥尼斯堡七桥问题。

1736 年欧拉访问小城，对这个问题颇感兴趣。他用图来表示 Pr *egel* 河附近的地形，把每一块陆地考虑成一个点，连接两块陆地的桥以边来表示。如图 9.1b 所示。



a) 哥尼斯堡镇的七桥　　b) 七桥的逻辑结构

图 9.1　七桥问题

于是哥尼斯堡七桥问题可以描述为：在图 9.1b 所示的图中，从任何一点出发，能否通过每条边一次且仅一次回到出发点。

与哥尼斯堡七桥问题非常相似的一个问题是中国古代的“一笔画问题”，即要求用笔连续移动，不离开纸面且边不重复地画出图形。

欧拉通过对七桥问题的研究，在 1736 年发表了论文，不仅圆满地回答了哥尼斯堡居民提出的问题，而且得到并证明了更为广泛的有关一笔画问题的三条结论，人们通常称之为欧拉定理。欧拉的这篇论文是图论方面的第一篇论文。论文中对问题的解决方法为近代数学一个重要分支——拓扑学奠定了重要的基础。

根据图中各顶点度的奇偶性将图中全部顶点分为奇点或偶点，度为奇数的顶点为奇点，度为偶数的顶点为偶点。如果图中所含顶点全部是偶点，则可以一笔画出，并且不限出发点。如果图中含有两个奇点，则从其中的一个奇点出发，可以一笔画出这个图形，并且在另一个奇点处结束。如果图中所含的奇点个数多于 2 个，则不能一笔画出该图形。

由于是对无向图进行讨论，所以可以知道，奇点的个数一定为偶数个，不存在奇数个奇点的图形。

再来看图 9.1b 所示的图形，图中全部的 4 个顶点均为奇点，所以不能一笔画出这个图形，也就是说找不到一条路线可以经过所有的桥并且只经过桥一次。难怪那么长时间都没有人给出解答。

定义 9.1 在连通图 G 中，经过 G 中每条边一次且仅一次的通路，称为欧拉通路或欧拉路；若欧拉通路为回路，则称为欧拉回路。具有欧拉回路的图称为欧拉图，含有欧拉通路但没有欧拉回路的图称为半欧拉图。

定理 9.1 无向连通图 G 是欧拉图的充分必要条件是 G 是连通的且无奇点。

证明：必要性设 G 是欧拉图，C 是 G 的一条欧拉回路，不妨设 $C=ue_1v_1e_2v_2\ldots v_{n-1}e_nu$（当 $i\neq j$ 时 $e_i\neq e_j$），对于 C 的内部顶点 $v_i(1\leq i\leq n-1)$，它在 C 中的每一次出现，都会有两条与它关联的边出现在 C 中，因 C 是欧拉回路，所以这两条边不能重复，即 v_i 的度增加 2。对于 C 的端点 u,e_1 和 e_n 也使 u 的度增加 2。因为 C 中含有图 G 中的所有边，所以 G 的所有顶点的度均为偶数。故 G 没有奇点。

充分性 设 G 是无向连通图，且没有奇点，由定理 8.4 可知，G 中必存在回路，设为 C。

若 C 中已经包含图 G 中的所有边，则 C 已是欧拉回路，结论得证；若 C 不是欧拉回路，删除 C 中的所有边，及与剩余边所组成的图不连通的顶点，得到图 G_1。因为 G 是连通的，所以 C 与 G_1 一定存在公共顶点，不失一般性，设为 v。

在 G_1 中，从 v 开始继续构造回路，设为 C_1，将 C_1 加入到 C 中，此时回路中包含了 G 中更多的边。继续这个过程，直到 G 中所有的边都加人到 C 中为止。由此得到一条欧拉回路，即图 G 是欧拉图。　证毕

定理 9.2 无向图 G 具有一条欧拉通路的充分必要条件是 G 是连通的且恰有两个奇点。

证明略。

例 9.1 在图 9.2 所示的各无向图中，哪些具有欧拉回路？在没有欧拉回路的图

中，哪些具有欧拉通路？

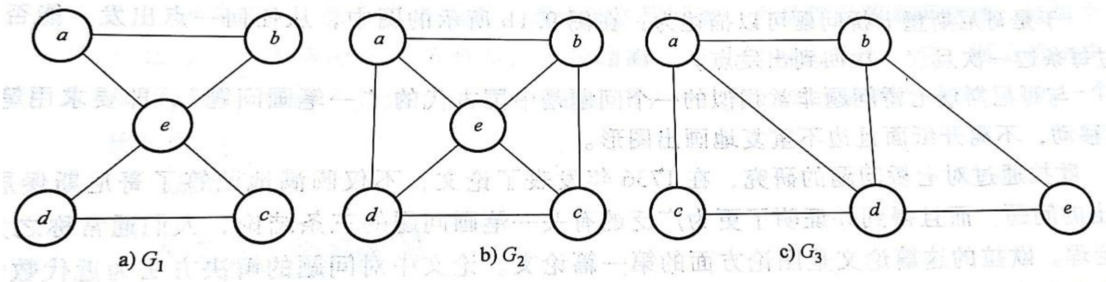


图 9.2　欧拉通路示例

解：G_1具有欧拉回路，例如 a,e,c,d,e,b,a 是一条欧拉回路。实际上，图 G_1中各顶点都是偶点，从任意一个顶点出发，都可找到欧拉回路。

G_2没有欧拉通路。图中，a,b,c,d 的度均为 3,它们 4 个都是奇点，所以不存在欧拉通路，进而也不存在欧拉回路。

G_3中，a 和 b 的度均为 3，是奇点，其余 3 个顶点都是偶点，所以它存在欧拉通路。例如 a,c,d,e,b,d,a,b 是一条欧拉通路。若图中存在奇点时，欧拉通路必须从奇点开始，到另一个奇点结束，故 G_3没有欧拉回路。

一笔画问题可以归结为求图的欧拉通路问题。判定一个图 G 是否可以一笔画出，与判定该图是否具有欧拉通路或是欧拉回路的条件是一样的。

定理 9.1 中充分性的证明过程，实际上就是寻找图的欧拉回路的方法。通过例 9.2 来说明这个过程。

例 9.2 寻找图 9.3 所示的短弯刀的欧拉回路。

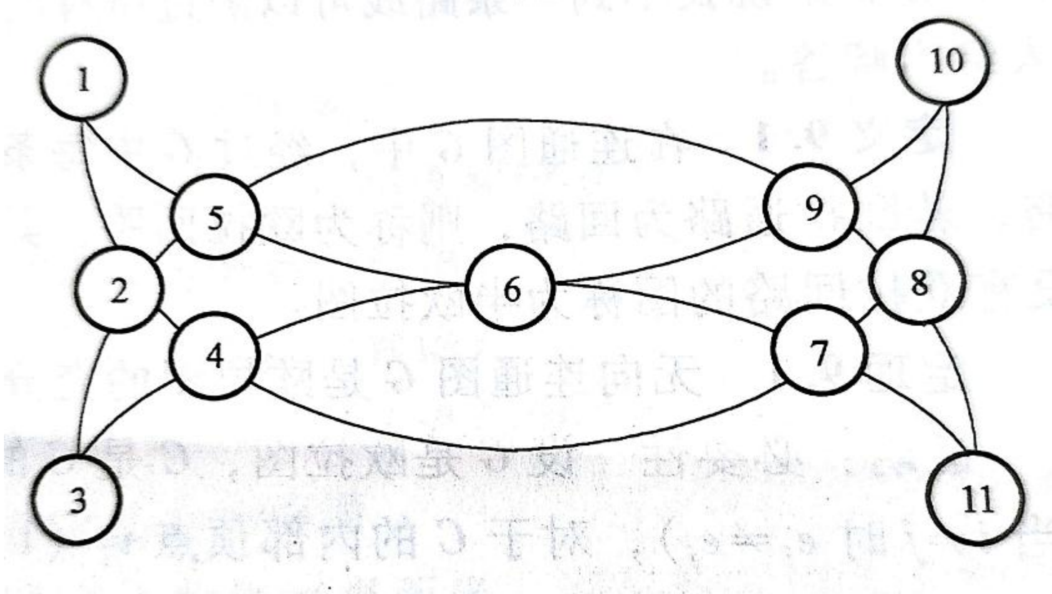


图 9.3　穆罕默德短弯刀

解：在图 9.3 中，所有点都是偶点，所以必存在一条欧拉回路。

先从任意一点开始，寻找图中的一条回路，例如 1，2，,4,，3，2，5，9，6，5，1。

从图中删除回路 P_1 中的所有边，在得到的剩余图中，继续寻找回路 P_2，注意回路 P_2 的起始点必须是 P_1 中的顶点，例如顶点 4，P_2 为 4，7，8，10，9，8，11，7，6，4。再删除 P_2 中的所有边。若还有边剩余，则继续这个过程，直到图中没有边剩余为止。

此时，图中的某条边必含在某个回路中，例如本例中，所有的边都含有两个回路 P_1 和 P_2 中。将这两个回路在公共顶点处拼接起来，即可得到欧拉回路。

P_1：1，2，4，3，2，5，9，6，5，1，P_2：4，7，8，10，9，8，11，7，6，4，它们的公共顶点是 4，拼接后得到欧拉回路为：1，2，4，7，8，10，9，8，11，7，6，4，3，2，5，9，6，5，1。

欧拉通路和欧拉回路的概念，可以推广到有向图中。

定义 9.2 给定有向图 G，通过图中每条边一次且仅一次的一条单向通路（回路）称作单向欧拉通路（回路）。

定理 9.3 有向图 G 具有一条单向欧拉回路，当且仅当图是可达的，且每个顶点入度等于出度。一个有向图 G 具有单向欧拉通路，当且仅当它是可达的，而且除两个顶点外，每个顶点的入度等于出度，而这两个顶点中，一个顶点的入度比出度大 1，另一个顶点的入度比出度小 1。

证明略。

9.1.2 哈密顿图

欧拉路的条件是经过图中每条边一次且仅一次。与此非常类似的是哈密顿路。

定义 9.3 给定无向图 G，若存在一条路 L，经过图中每个顶点一次且仅一次，则 L 称为哈密顿路，简称为 H-路；若存在一条回路 C，经过图中的每个顶点一次且仅一次，C 称作哈密顿回路，简称为 H-回路。具有哈密顿回路的图称作哈密顿图，简称为 H-图。

欧拉给出了判断图是否是欧拉图的充分必要条件，与此不同，判断图是否为哈密顿图却没有充分必要条件。有些性质可以用来判断图肯定不是哈密顿图。例如，含有度为 1 的顶点的图必不是哈密顿图，因为在哈密顿回路中每个顶点都关联着回路中的两条边。

定理 9.4 若图 $G=<V,E>$ 具有哈密顿回路，则对于顶点集 V 的每个非空子集 S，均有 $W(G-S)\le|S|$ 成立。其中 $W(G-S)$ 表示 $G-S$ 中连通分量数。

证明略。

定理 9.5 设 G 具有 n 个顶点的简单图，如果 G 中每一对顶点度数之和大于等于 $n-1$，则在 G 中存在一条哈密顿路。

证明略。

定理 9.6 设 G 是具有 n 个顶点的简单图，如果 G 中每一对顶点度数之和大于等于 n，则在 G 中存在一条哈密顿路。

证明略

定理 9.5 与定理 9.6 都是充分条件而不是必要条件。即满足条件时必存在哈密顿路（回路），但不满足定理条件时，亦可能存在哈密顿路（回路）。

9.2 平面图

图的平面性问题在图的理论及应用中具有重要地位，不只有它的理论意义，还有许多实际应用。例如，单面印刷电路板和集成电路的布线问题等。本节只介绍平面图的一些基本概念。

定义 9.4 若一个图 G 能画在平面 S 上，且使 G 的边仅在端点处相交，则称图 G 为可嵌人平面 S，G 称为可平面图，简称为平面图。

平面图的子图都是平面图，非平面图的母图都是非平面图。读者可以试着证明这个结论。

例如，图 9.9a 所示的正方体可以画成图 9.9b 所示的平面图。所以正方体是可平面图。

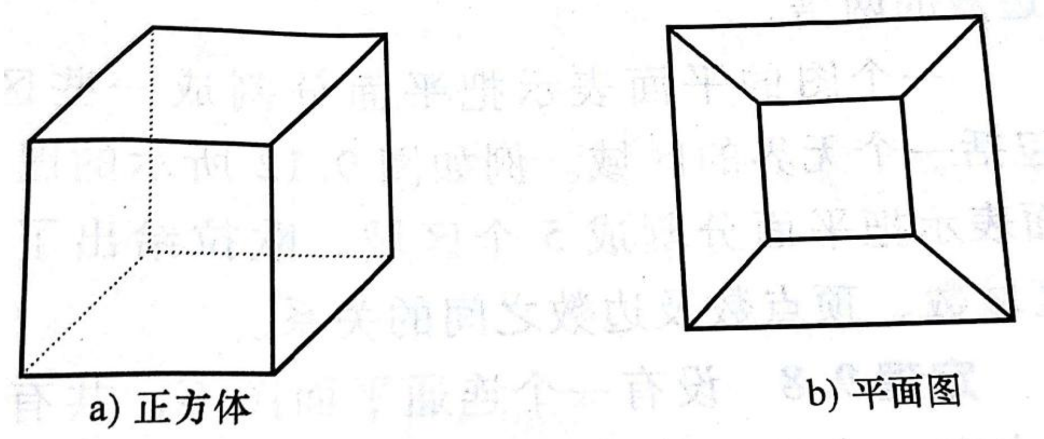


图 9.9 正方体与对应的平面图

并不是所有的图都能嵌入到平面上，例如图 9.10 所示的两个图 $K_{3,3}$ 和 K_5 就是著名的非平面图，无论怎样画，这两个图都不能避免有交叉线。例如，$K_{3,3}$ 的另一种画法如图 9.11 所示，至少有一条线与其他线交叉（虚线所示）。

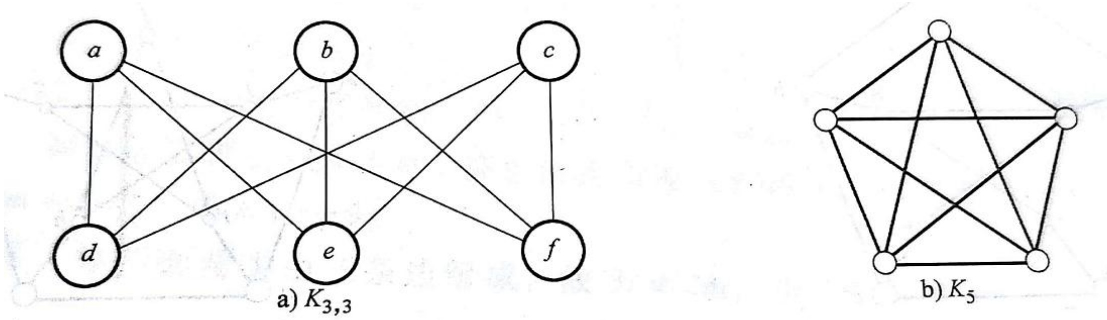


图 9.10 两个非平面图

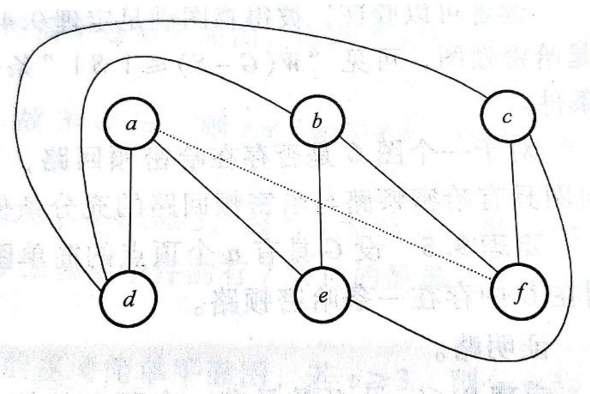


图 9.11 $K_{3,3}$的另一种画法

定义 9.5 设 G 是一个连通平面图，G 的边将 G 所在的平面划分成若干个区域，每个区域称为 G 的一个面，其中面积无限的区域称为无限面或外部面。面积有限的区域称为有限面或内部面。包围每个面的所有边组成的回路称为该面的边界，边界的长度称为该面的次数。若区域记为 R，则次数可记为 deg（R）。

例如图 9.9b 共有六个面，其中一个外部面，其他面都是由 4 条边围成的内部面，它们的次数均为 4。

定理 9.7 设连通平面图 G，面的次数之和等于其边数的两倍。

证明：对每一条边 e，位于 e 两边的面有以下两种情况：

（1）e 的两边都是有限面，或一边是有限面而另一边是无限面，在计算这两个面的次数时，e 各提供 1，总共提供 2；

（2）e 的两边都是无限面，实际上，两边的无限面是同一个面，在计算包住这个无限面的边界时，e 出现两次，故计算该无限面的次数时，e 提供 2。

综上，计算平面图 G 所在面的总次数时，每条边均提供 2，定理得证。证毕

例如，图 9.9b 中，边数为 12，图中内部面与外部面均为 4 次，次数和为 6×4=24，是边数的两倍。

一个图的平面表示把平面分割成一些区域，包括一个无界的区域。例如图 9.12 所示的图的平面表示把平面分割成 5 个区域。欧拉给出了这些区域数、顶点数及边数之间的关系。

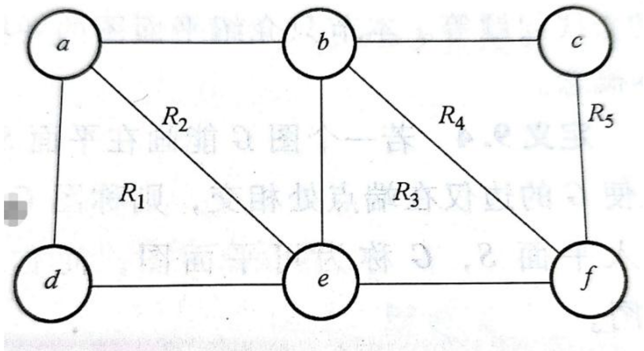


图 9.12 图中的通路

定理 9.8 设有一个连通平面图 G，共有 n 个顶点和 m 条边，其平面表示中共有 r 个面，则 $n-m+r=2$ 成立。此公式称为欧拉公式。

证明：对边数 m 作归纳法。

当 m=0 时，由 G 的连通性可知，G 只含一个孤立点，此时 $n=1, r=1$(即只有一个外部面)，故 1-0+1=2，结论成立。

设 $m=k(k\geq 0)$时结论成立，当 $m=k+1$时，对 G 分以下两种情况讨论：

（1）若 G 为无回路的连通图，任取一个度数为 1 的顶点 v（无回路的连通图称为树，必存在度为 1 的顶点），删除该顶点及与它关联的边，得到图 $G_1=G-v$，则 G_1 仍是连通的且仍是平面图。G_1 中顶点数 $n_1=n-1$，边数 $m_1=m-1$，面数不变，$r_1=r$。

根据归纳假设 $n_1-m_1+r_1=2$，将 $n_1=n-1, m_1=m-1, r_1=r$ 代入，得到：$(n-1)-(m-1)+r=2$，即：$n-m+r=2$。

（2）若 G 是有回路的连通图，设 C 为 G 的一个回路，选 C 上的一条边 e，令 $G_2=G-e$，G_2 仍是连通的，并且 $n_2=n, m_2=m-1, r_2=r-1$，由归纳假设 $n_2-m_2+r_2=2$，可得

$n-(m-1)+(r-1)=2$，即：$n-m+r=2$ 证毕

定理 9.9 设 G 是一个有 v 个顶点 m 条边的连通简单平面图，若 $v\geq 3$ 则 $m\leq 3v-6$。

证明：设平面图 G 的面数为 r，当 $v=3$,m=2 时，$m\leq 3v-6$，显然成立。

若 $m\geq 3$，则每一面的次数不小于 3，由定理 9.7,各面次数之和为 2m，因此，

$2m\geq 3r$，$r\leq \frac{2}{3}m$，代入欧拉公式有 $2=v-m+r\leq v-m+\frac{2}{3}m$，

即 $2\leq v-\frac{m}{3}$，$6\leq 3v-m$，$m\leq 3v-6$。 证毕

应用定理 9.9，可以判定某些图是非平面图。

定理 9.10 设 G 是一个有 v 个顶点 m 条边的连通简单平面图，若 $v\geq 3$ 且没有长度为 3 的回路，则 $m\leq 2v-4$。

证明略。

定义 9.6 如果两个图 G_1 和 G_2 同构，或经过反复插入或消去 2 度顶点后同构，

则称 G_1 与 G_2 同胚。

定理 9.11 一个图是平面图，当且仅当它不含与 K_5 同胚的子图；也不含与 $K_{3,3}$ 同胚的子图。

证明略。

以上定理称为库拉图斯基定理。

9.3 树及其遍历

9.3.1 树的基本概念

树是图论中最重要的概念之一。它在计算机专业中应用广泛，例如，可以用树来构造存储和传输数据的有效编码，以及用树来构造成本最低的电缆网络等。本节介绍树的基本知识。

定义 9.7—个连通且无回路的无向图称为树，也称为自由树。

树没有简单回路，所以树中不含多重边或环，任何树都是简单图。树中度数为 1 的结点称为叶结点，度数大于 1 的结点称为分支点。一个无回路的无向图称为森林，若它的每个连通子图都是树。

定理 9.12 给定图 T ，有 n 个结点，则下列命题是等价的。

（1）T 是树;

（2）T 无回路，且 T 的任何两个顶点间有唯一一条路；

（3）T 无回路，且有 $n-1$ 条边；

（4）T 是连通的，且有 $n-1$ 条边；

（5）T 是连通的，但删去任何一条边后便不再连通；

（6）T 无回路，但增加任何一条边，将得到唯一的一个回路。

证明略。

要使含 n 个顶点的图是连通的，图中所含的边数最少为 $n-1$。这是图连通的必要条件,换句话说，少于 $n-1$ 条边时，图一定是不连通的。实际上，树即满足这个必要条件。少一条边，树都不再连通，增加一条边，都会存在回路。

—棵树如图 9.14 所示。

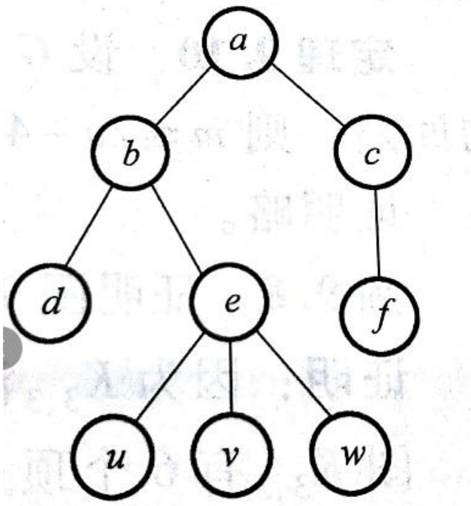


图 9.14 一颗树 T

定理 9.13 若树中结点个数 $n \ge 2$，则树中至少含有两个叶结点。

证明 :设树 $T=<V,E>$，$|V|=n\ge 2$,因为 T 是连通图 ,故对 $\forall v \in V$,有 $\deg(v)\ge 1$。

另一方面，由定理 9.12 知，树中边数为 $n-1$，由定理 8.1 可得，

$\sum \deg(v_i)=2(|v|-1)=2n-2$。 （1）

若 T 中没有叶结点，即每个结点度数均大于等于 2,则 $\sum \deg(v_i)\ge 2n$ 与式（1）矛盾。

若 T 中至多有一个叶结点，即至多有一个结点的度数为 1，其他结点的度数均大于等于 2，则 $\sum \deg(v_i)\ge 2(n-1)+1=2n-1$，也与式（1）矛盾。

故 T 中至少有两个结点的度数为 1，即树中至少有两个叶结点。 证毕

推论 9.1 设 G 有 n 个顶点，e 条边，w 个连通分量，则 G 为森林的充要条件是 $e=n-w$。

证明：必要性 设 G 是森林，其每个连通分量 G_i 都是树，故由定理 9.12 知，

$e=\sum_i E(G_i)=\sum |V(G_i)|-w=n-w$。i

充分性 反证法，若设 G 不是森林，则 G 含有回路，从而至少存在 G 的一个连通分量 G_i 含有回路。对于 G_i G_i 来说，$E(G_i)>V(G_i)-1$。对于不含有回路的连通分量 G_j，$E(G_j)=V(G_j)-1$

综上，$e=\sum_k E(G_i)=E(G_i)+\sum(|V(G_j)|-1)>n-w$，与已知矛盾。故 G 是森林。

证毕

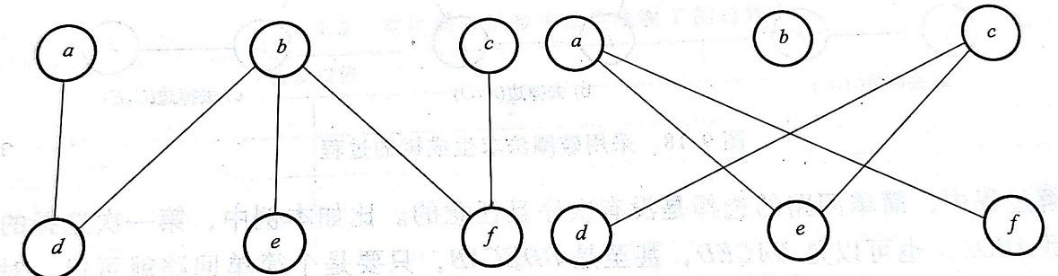
定理 9.14 树 T 的每一个分支结点都是 T 的割点。

证明略。

定义 9.8 设 $G=<V,E>$ 是无向连通图，若 G 的生成子图 T 是一棵树，则称 T 是 G 的生成树，也称为支撑树。G 在 T 中的边称为 T 的树枝，G 不在 T 中的边称为 T 的

弦。所有弦的集合及其导出的子图称为 G 的余树。

例如图 9.10a 所示的 $K_{3,3}$，其生成树如图 9.15a 所示，其余树如图 9.15b 所示。



a) $K_{3,3}$的生成树　　b) $K_{3,3}$的余树

图 9.15　生成树及余树

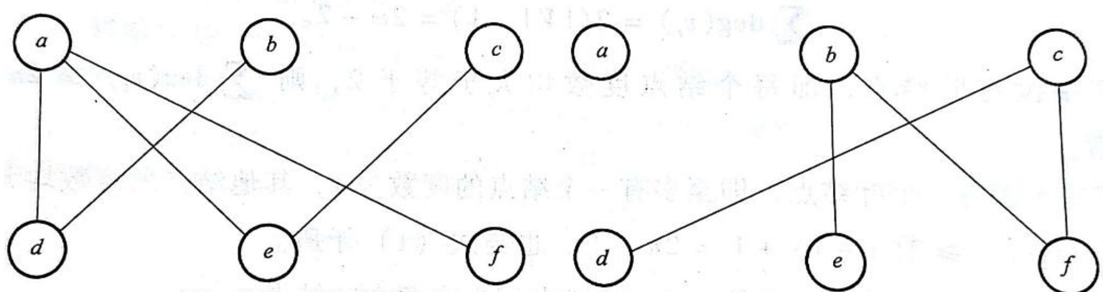
一般来讲，图 G 的生成树可能不唯一，例如，图 9.16a 也是 $K_{3,3}$ 的一棵生成树，对应的余树如图 9.16b 所示。实际上，当无向连通图本身不是树时，其生成树一定不唯一。

定理 9.15 连通图至少有一棵生成树。

证明：(1) 若 G 中无回路，则 G 本身是一棵树，也是自身的生成树。

(2) 若图 G 有回路，则任选 G 中的一个回路，删除回路中的任一条边得到 G_1。由于删除的是回路中的一条边，不影响它的连通性，故 G_1 仍连通，且与 G 的结点数相同。若 G_1 中没有回路，则它为 G 的生成树；若仍有回路，则继续这个过程，再选择一个回路并删除回路中的任一条边，直到新得到的图中没有回路时为止。这样，最后得到的图既是连通的又无回路，且与图 G 含有相同的顶点，它即为 G 的生成树。

证毕



a) $K_{3,3}$的另一棵生成树　　b) $K_{3,3}$的余树

图 9.16　生成树及余树

定理 9.15 中求生成树的方法称为破圈法。实际上，每次选择回路时，只需选择简单回路即可，即不含相同边且始点与终点相同的通路。

定义 9.9 设图 $G=<V,E>$，对 $\forall e \in E$，指定一个数值 w，称为边 e 的权。这样的图称为带权图，记作 $G=<V,E,W>$，其中 W 是所有边的权组成的有限集。

定义 9.10 设无向连通带权图 $G=<V,E,W>$，T 是 G 的一棵生成树，T 的各边权值之和称为带权图，记作 $W(T)$。G 的所有生成树中权值最小的生成树称为最小生成树。

下面给出求图 G 的最小生成树的算法，该算法称为 $Kruskal$ l(克鲁斯卡尔）算

法。

设图 $G=<V,E,W>$ 是无向连通带权图，它有 m 条边 $e_1,e_2,...,e_m$ ，各边上的权依次为： $a_1,a_2,...,a_m$ ，不妨设 $a_1 \le a_2 \le ... \le a_m$

（1）初始准备：将图中的所有顶点加人到生成树 T 中，但不包含任何的边。此时 T 中仅含有顶点，这些顶点分别自成一个连通分量，连通分量的个数为 $m=|V|$ ；

（2）依次检查各边 $e_1,e_2,...e_m$ ，对当前的边 e_i ，如果 e_i 所依附的两个顶点分别位于生成树的两个连通分量上，则将 e_i 加入到生成树 T 中，并令 e_i 所依附的两个顶点所在的两个连通分量合并成一个，生成树中连通分量的个数减 1：如果 e_i 依附的两个顶点已经位于同一个连通分量上，则舍弃 e_i ，再看下一条边 e_{i+1}。当生成树 T 中含有 $|V|$-1条边时，过程结束。此时，原来的 $|V|$ 个连通分量最终合并成一个。

定理 9.16 使用 $Kruskal$ l（克鲁斯卡尔）算法生成的生成树 T 是最小生成树。

证明略。

定义 9.11 如果有向图在不考虑边的方向时是一棵树，那么这个有向图称为有向树。

定义 9.12 若一棵有向树恰有一个结点的入度为 0，其余所有结点的入度均为 1，则称该有向树为有根树。人度为 0 的结点称为树的根，出度为 0 的结点称为叶结点或叶子，出度不为 0 的结点称为根树分支点或内点。

例如：图 9.20a 表示的是一棵有向树。其中 1 是根，2,9,7,8,5,都是叶结点，其余为分支结点。通常将根画在最上层。

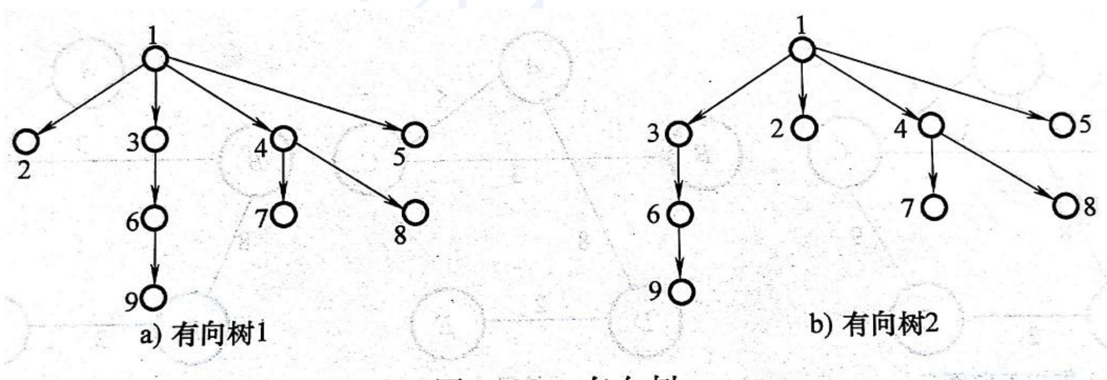


图 9.20 有向树

定义 9.13 设 u 是有根树中的一个分支点，若从顶点 u 到顶点 w 有一条有向边 (u,w) ，则称 w 为 u 的子结点或儿子，u 称为 w 的父结点或父亲。父结点相同的顶点之间互称为兄弟结点。若从顶点 u 到顶点 z 有一条有向路，则称 z 是 u 的子孙，称 u 是 z 的祖先。

树中除根以外的所有顶点的入度均为 1，所不同的是各顶点的出度。实际上，顶点的出度即是顶点的子结点的个数。叶结点没有子结点。

树的结点具有“层次”性。设某结点 v 位于 i 层，则 v 的子结点位于 $i+1$ 层。约定根位于 0 层。树中结点的最大层数定义为树的深度，最大层数加 1 为树的高度。

树还具有“嵌套”关系。任何一个结点 v 及 v 的所有子孙结点仍构成一棵树，称为原树的子树，结点 v 是这棵子树的根。由此，树还可采用以下的递归定义。

定义 9.14 树包含一个或多个结点，这些结点中的某一个称为根，而其他所有结点，被分成有限个互不相交的子集，每个子集又构成树，称为根的子树。

具有 n 个结点的树，可用结点少于 n 的树来定义。

定义 9.15 在有向树 T 中，若每个结点的子结点之间指定某种次序，则 T 称为有序树。

定义 9.16 在有根树中，若每一个然点的出度小于等于 m，则称这棵树为 m 叉树。如果每一个结点的出度恰好等于 m 或零，则称这棵树为完全 m 叉树。若完全 m 叉树的所有结点的层次相同，则称其为正则 m 叉树。

例如，图 9.20a 中，出度最大的顶点是 1，出度值是 4，所以这是一棵 4 叉树。图 9.21a 中除叶结点外，每个结点的出度都是 2，且叶结点都在最下面一层，所以这是一棵正则二叉树。而图 9.21b 中，叶结点并不在同一层中，所以只是完全二叉树。

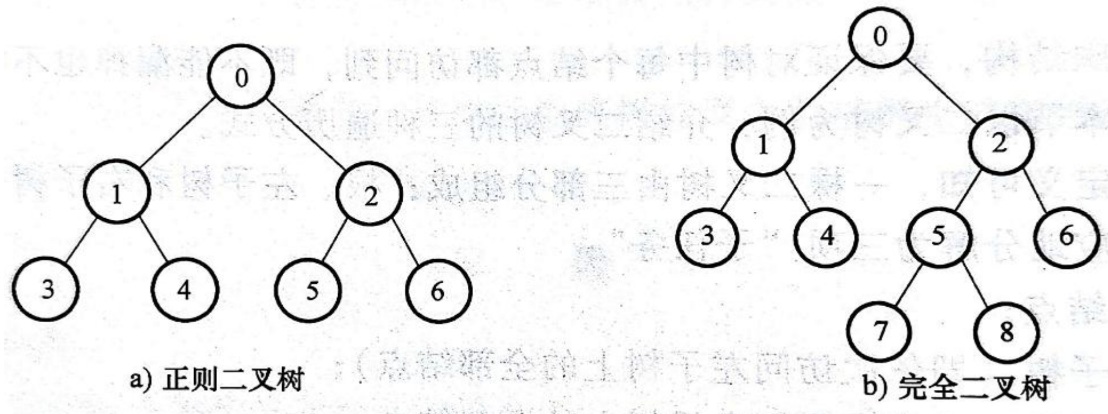


图 9.21 特殊的二叉树

9.3.2 二叉树的基本概念

二叉树有着非常广泛的应用。所谓二叉树是指有序树中任何结点的子结点的个数不多于 2 个，即结点的出度政为 0 或为 1 或为 2。位子左侧的子结点称为左子结点，位于右侧的子结点称为右子结点。以左子结点为根的子树称为左子树，以右子结点为根的子树称为右子树。二叉树的 5 种基本形态如图 9.22 所示。

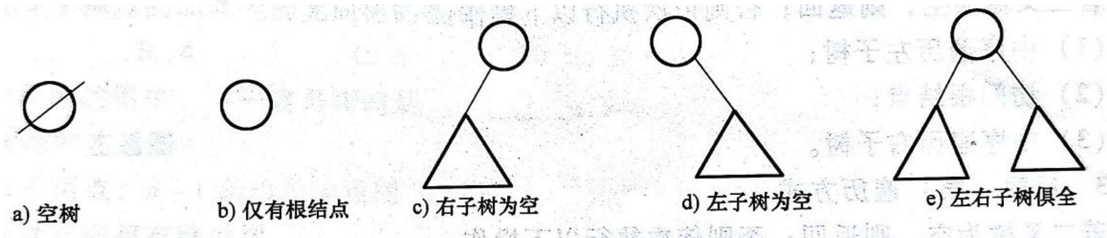


图 9.22 二叉树的 5 种基本形态

例 9.11 用二叉树表示算术表达式 a*（b+c)-d。

解：用图 9.23 表示算术表达式，该树称为表达式树。

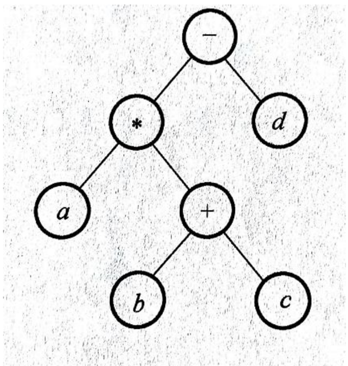


图 9.23　表达式树 T

定理 9.17 设有完全 m 叉树 T，其叶结点数为 t，分支结点数为 i，则 $(m-1)i=t-1$。

证明：设完全 m 叉树 T 的顶点数为 n，则 $n=t+i$

另一方面，每个分支结点的出度为 m，则所有结点的出度和= $m*i$。除根外，每个结点的入度均为 1，所有结点的入度和=n-1。树中出度和=入度和，即 $m*i=n-1=t+i-1$

整理得：$(m-1)i=t-1$。　　证毕

例 9.12 证明若 T 是有 n 个结点的完全二叉树，则 T 有（n+1)/2 个叶结点。

证明：设 T 为完全二叉树，m=2，其叶结点数为 t，分支结点数为 i，故根据定理 9.17，有 $i=t-1$。结点数 $n=i+t$，故 $n=t+i=t+t-1$，$n=2t-1$，所以 $t=(n+1)/2$。证毕

有根树有很多应用，除去上面举例的算术表达式可以用有根树表示外，很多命题公式也可用类似的方法表示。

9.3.3 二叉树与树的遍历

定义 9.17 树的遍历是指依次访问树中的每个结点一次且仅访问一次。树的遍历也称为树的周游。

因为树的特殊结构，要保证对树中每个结点都访问到，既不能漏掉也不能重复，必须采用特定的策略。本节以二叉树为例，介绍二叉树的三种遍历方式。

由二叉树的定义可知，一棵二叉树由三部分组成：根、左子树和右子树。因此对二叉树的遍历也可以相应地分解为三项"子任务"：

（1）访问根结点；

（2）遍历左子树（即依次访问左子树上的全部结点）；

（3）遍历右子树（即依次访问右子树上的全部结点）；

这三个任务的完成次序不同，即构成了二叉树遍历的三种不同方式，分别描述如下：

1 先序（根）遍历方式

若二叉树为空，则返回；否则依次执行以下操作：

（1）访问根结点；

（2）先序遍历左子树；

（3）先序遍历右子树。

2 中序（根）遍历方式

若二叉树为空，则返回；否则依次执行以下操作：

（1）中序遍历左子树；

（2）访问根结点；

（3）中序遍历右子树。

3 后序（根）遍历方式

若二叉树为空，则返回；否则依次执行以下操作：

（1）后序遍历左子树；

（2）后序遍历右子树；

（3）访问根结点。

先序遍历方式也称为前序遍历方式。

例 9.13 给出图 9.23 所示的表达式树的先序、中序和后序遍历序列。

解：先序遍历序列：$-*a+bcd$ ；

中序遍历序列：$a*b+c-d$ ；

后序遍历序列：$abc+*d-$。

实际上，如果忽略圆括号的话，对表达式树进行中序遍历的结果与表达式原来的书写次序是相同的。先序遍历序列是将运算符写在两个操作数的前面，得到的式子称为波兰式。后序遍历序列是将运算符写在两个操作数的后面，得到的式子称为逆波兰式。这三种遍历序列中，操作数的次序是完全一样的。

这个结论也可以推广到对任意二叉树的遍历。二叉树的三种遍历序列中，叶子结点的相对排列次序是不变的。

树的遍历有以下两种方法：

（1）先序（根）遍历

先访问树的根结点，再依次先序遍历根结点的各棵子树。

（2）后序（根）遍历

若树的根结点有子树，则依次后序遍历各棵子树，然后再访问根结点；否则（根结点无子树），只访问根结点。

练习题

1.具有 6 个顶点的非同构的无向树的数目是（ ）
A 3
B 4
C 5
D 6
2.下面所给的图中，不一定是树的是（ ）
A 无回路的连通图
B 有 n 个顶点，n-1 条边的连通图
C 每对顶点间都有路的图
D 连通但删去一条边则不连通的图
3.若要保证连通图 G 是一棵树，下面所给出的条件中，当且仅当必须满足的是（ ）
A 有些边不是割边
B 每条边都是割边
C 无割边集
D 每条边都不是割边

答案

1.D。
2.C。
3.B。