常微分第六次作业

闫磊

October 22, 2016

1 P131.1

证明：假设 $x(t), y(t)$ 在区间 $[a, b]$ 上线性相关
则有 $ax(t) + by(t) \equiv 0$ 在区间成立。其中 a,b 不全为零。
不妨设 $x(t) \neq 0$ 则有 $\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{-a}{b}$
显然与条件矛盾，故线性无关。

2 P131.2

证明：我们先定义一个线性算子 $L = D^n + a_1(t)D^{n-1} + \cdots + a_n(t)$
则由题目的条件有 $L(x_1(t)) = f_1(t), L(x_2(t)) = f_2(t)$
由于 L 为线性算子，$L(x_(t) + x_2(t)) = L(x_1(t)) + L(x_2(t))$
由上式即可得出 $x_1(t) + x_2(t)$ 是方程 $L(x) = f_1(t) + f_2(t)$ 的解

3 131.3

已知齐次线性微分方程的基本解组 x_1, x_2, 求下列方程对应的非齐次线性微分方程的通解。

3.1 (1)

解：原方程可以表示为 $(D^2 - 1)y = e^{it}$
该方程解的实部就是原方程的一个特解
根据 The exponential input theorem，$y = \frac{e^{it}}{i^2-1} = \frac{e^{it}}{-2}$
取 y 的实部，$x_p = \frac{cost}{-2}$
故通解为 $x = c_1e^t + c_2e^-t - \frac{cost}{2}$

3.2 (3)

解：令 $x = c_1(t)cos2t + c_2(t)sin2t$ 并代入方程，用常数变异法可得

$$\begin{cases} c_1'(t)cos2t + c_2'(t)sin2t = 0 \\ -2c_1'(t)sin2t + 2c_2(t)cos2t = tsin2t \end{cases} \tag{1}$$

解方程组得 $c_1'(t) = \frac{t(cos4t-1)}{4}; c_2'(t) = \frac{tsin4t}{4}$
积分得 $c_1(t) = \frac{cos4t}{64} + \frac{tsin4t}{16} - \frac{t^2}{8} + \lambda_1$
$c_2(t) = \frac{sin4t}{64} - \frac{tcos4t}{16} + \lambda_2$
故通解为 $x = c_1cos2t + c_2sin2t - \frac{t^2cos2t}{8} + \frac{tsin2t}{16}$

3.3 (5)

解：令 $x = c_1(t)t + c_2(t)tlnt$ 并代入方程得

$$\begin{cases} c_1'(t)t + c_2'(t)tlnt = 0 \\ c_1'(t)t^2 + c_2'(t)(lnt+1)t^2 = 6t + 34t^2 \end{cases} \tag{2}$$

解方程组得
$c_1'(t) = \frac{-6lnt}{t} - 34lnt$
$c_2'(t) = \frac{6}{t} + 34$
积分得
$c_1(t) = -3(lnt)^2 - 34t(lnt-1) + \lambda_1$
$c_2(t) = 6lnt + 34t + \lambda_2$
故通解 $x = c_1t + c_2tlnt + 34t^2 + 3t(lnt)^2$

4 P132.6

4.1 (1)

证明: $W'[x_1, x_2] + a_1W[x_1, x_2] = 0 \Leftrightarrow x_1x_2'' - x_1''x_2 + a_1x_1x_2' - a_1x_1'x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1x_2'' - x_1''x_2 + a_1x_1x_2' - a_1x_1'x_2 + a_2x_1x_2 - a_2x_1x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1x_2'' + a_1x_1x_2' + a_2x_1x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1(x_2'' + a_1x_2' + a_2x_2) = 0$
故 x_2 为解

4.2 (2)

证明：设另一个线性无关的解为 x_2，由于 x_1, x_2 线性无关，因此 $\frac{x_2}{x_1} \neq cc$ 为常数
那么设 $x_2 = u(t)x_1$

求一阶导数和二阶导数得

$x_2' = ux_1' + u'x_1$

$x'' = ux_1'' + u''x_1 + 2u'x_1'$

代入微分方程并化简得 $u''x_1 + (2x_1' + a_1x_1)u' = 0$

令 $w = u'$

则 $w'x_1 + (2x_1' + a_1x_1)w = 0$

分离变量并积分得 $w = \frac{c_1 e^{-\int_{t_0}^{t} a_1(t)\,dt}}{x_1^2}$

积分得 $u = c_1 \int \frac{e^{-\int_{t_0}^{t} a_1(t)\,dt}}{x_1^2}\,dt + c$

故 $x_2 = x_1(t)[c_1 \int \frac{e^{-\int_{t_0}^{t} a_1(t)\,dt}}{x_1^2}\,dt + c]$

那么通解为 $x = x_1(t)[c_1 \int \frac{e^{-\int_{t_0}^{t} a_1(t)\,dt}}{x_1^2}\,dt + c_2]$