常微分第四次作业

闫磊

October 5, 2016

1 P88.3

解：易知 $M = \max\limits_{(x,y)\in R} |x^2 - y^2| = 4$
$h = \min 1, \frac{1}{4}$
因为 $|\frac{\partial f}{\partial y} = |-2y| \leq 2$
我们取 $L = 2$
于是有 $\varphi_0(x) = y_0 = 0$
$\varphi_1(x) = y_0 + \int_{-1}^{x} (x^2 - y_0^2)\,dx = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{3}$ $\varphi_2(x) = y_0 + \int_{-1}^{x} (x^2 - (\frac{x^3}{3} + \frac{1}{3})^2)\,dx$
结果是 $\varphi_2(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{63} - \frac{x}{9} - \frac{x^4}{18} + \frac{11}{42}$
由误差估计公式可得 $|\varphi_2(x) - \varphi(x)| \leq \frac{4*2^2}{3!} * \frac{1}{4^3} = \frac{1}{24}$
故初值问题的解的存在区间为 $[-\frac{5}{4}, -\frac{3}{4}]$
第二次近似解为 $y_2 = \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{63} - \frac{x}{9} - \frac{x^4}{18} + \frac{11}{42}$
误差估计为 $|y - y_2| \leq \frac{1}{24}$

2 P89.6

证明：

2.1 (1)

首先证明 GronWall 不等式
当 $K \geq 0$ 时, 令 $u(t) = K + \int_{\alpha}^{t} f(s)g(s)\,ds$
求导有 $u'(t) = f(t)g(t) \leq u(t)g(t)$
有 $\frac{u'(t)}{u(t)} \leq g(t)$
即 $(ln(u(t)))' \leq g(t)$
两边积分得 $ln(\frac{u(t)}{u(\alpha)} \leq \int_{\alpha}^{t} g(s)\,ds$
所以 $f(t) \leq u(t) \leq K * e\int_{\alpha}^{t} g(s)\,ds, K = u(\alpha)$

当 $K = 0$ 时, 取任意的 $\varepsilon \geq 0$

那么 $f(t) \le \varepsilon + \int_{\alpha}^{t} f(s)g(s)\,ds$
那么根据上面的结论有 $f(t) \le \varepsilon * e^{\int_{\alpha}^{t} g(s)\,ds}$
当 $\varepsilon \to 0^{+}$ 时，$f(t) \le 0$ 又有 $f(t) \ge 0$
从而有 $f(t) = 0$

综上，我们有结论 $f(t) \le u(t) \le K * e^{\int_{\alpha}^{t} g(s)\,ds}, K = u(\alpha)$

2.2 (2)

再证明命题 5
设 $\varphi(t), \psi(t)$ 是初值问题的两个解
有 $\varphi(t) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi(\xi))\,d\xi$
$\psi(t) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, \psi(\xi))\,d\xi$
于是

$$|\varphi(x) - \psi(x)| = \int_{x_0}^{x} |f(\xi, \varphi(\xi)) - f(\xi, \psi(\xi))|\,d\xi \le L \int_{x_0}^{x} |\varphi(\xi) - \psi(\xi)| d\xi$$

由 Gronwall 不等式得
$0 \le |\varphi(x) - \psi(x)| \le K * e^{\int_{t_0}^{t} L d\xi} = 0$
于是 $\varphi(x) = \psi(x)$
命题得证

3 P89.8

证明：题目的条件与书中的略有不同，如果能给出这个命题的 M,h,b 的话, 证明的过程就和书中的过程一样了
首先有

$$M = \max_{x \in [\alpha, \beta]} |f(x, y_0)|, h = \beta - \alpha, b = Mh$$

这样做的目的是让

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| = |\varphi(x) - y_0| \le M|x - x_0| \le Mh = b$$

成立
这样下面的过程就和书中命题 3，4 的过程一样了
当我们得到 $\varphi(x)$ 是定义于 $\alpha \le x_0 \le \beta, \alpha \le x \le \beta$
上的一个连续解时, 我们用 Gronwall 不等式证明唯一性，证明同第六题（2）

4 P89.10

证明：做逐步逼近函数序列
$\varphi_0(x) = f(x)$
$\varphi_{n+1}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,\xi)\varphi_(n)(\xi)\, d\xi$
然后仿照命题 3 我们得到
$|\varphi_{n+1}(x) - \varphi_(n)(x)| \leq |\lambda|^{n+1} L^{n+1} M(b-a)^{n+1}$
下面我们证一致收敛
设 $a_{n+1} = \lambda|^{n+1} L^{n+1} M(b-a)^{n+1}$
则 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = |\lambda| L(b-a)$ 若一致收敛则上式必须小于 1
于是当 $|\lambda| \leq \frac{1}{L(b-a)}$ 时，级数一致收敛
同命题四可证当 $|\lambda| \leq \frac{1}{L(b-a)}$ 时, 极限函数 $\varphi(x)$ 连续
接下来证明唯一性 $(|\lambda| \leq \frac{1}{L(b-a)})$
设有不等于 $\varphi(x)$ 的解 $\phi(x)$
$\phi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,\xi)\phi(\xi)\, d\xi$
那么

$$|\varphi(x) - \phi(x)| = |\lambda \int_a^b K(x,\xi)(\varphi(\xi) - \phi(\xi))\, d\xi \leq |\lambda LM(b-a)$$

也就是有 $M \leq \lambda LM(b-a)$
有 $|\lambda \geq \frac{1}{L(b-a)}$ 这与条件矛盾，故唯一性得证。