常微分第九次作业

闫磊

November 13, 2016

1 P164.2

求解下列常系数常微分方程

1.1 (12)

$x'' + 6x' + 5x = e^{2t}$
解：方程可以表示为 $P(D)x = e^{2t}; P(D) = D^2 + 6D + 5$ 对应的齐次线性方程的特征方程为 $m^2 + 6m + 5 = 0$
解得 $m_1 = -1, m_2 = -5$
则 $x_c = c_1e^{-t} + c_2e^{-5t}$
因为 2 不是 $P(D)$ 的根，故 $x_p = \frac{e^{2t}}{21}$
故方程的通解为 $x = \frac{e^{2t}}{21} + c_1e^{-t} + c_2e^{-5t}$

1.2 (14)

$x'' + x = sint - cos2t$
解:$P(D)x = sint - cos2t; P(D) = D^2 + 1$
对应的齐次方程的特征方程为 $m^2 + 1 = 0$
解得 $m = \pm i$
故 $x_p = c_1cost + c_2sint$
接下来求特解，原方程可以看作是两个方程相加 $P(D)x = sint; P(D)x = -cos2t$
分别求特解，再相加。
复化方程得 $P(D)y = e^{it}; P(D)y = e^{2it}$
对第一个方程的特解取虚部，第二个方程取实部再相加即可得到原方程特解
$y_p1 = \frac{te^{it}}{2i}; y_p2 = \frac{e^2it}{-3}$
$x_p1 = \frac{-1}{2}tcost; x_p2 = \frac{1}{3}cos2t$
故通解为 $x = c_1e^{-t} + c_2e^{-5t} + \frac{-1}{2}tcost + \frac{1}{3}cos2t$

1.3 （16）

$x'' + 9x = tsin3t$
解：齐次方程的特称方程为 $m^2 + 9 = 0$
则 $m = \pm 3i$
$x_c = c_1 sin3t + c_2 cos3t$
因为 $(D^2+9)^2(D^2+9)x = 0$
故 $x = c_1 sin3t + c_2 cos3t + c_3 tsin3t + c_4 cos3t + c_5 t^2 sin3t + c_6 t^2 cos3t$
则 $x_p = Atsin3t + Bcos3t + Ct^2 sin3t + Dt^2 cos3t$
代入原方程解得 $x_p = \frac{-1}{12} t^2 cos3t + \frac{1}{36} tsin3t$
通解为 $x = c_1 sin3t + c_2 cos3t + \frac{-1}{12} t^2 cos3t + \frac{1}{36} tsin3t$

2 P165.4

求下列初值问题的解

2.1 (1)

解：齐次方程的特征方程为 $m^2 + 9 = 0$
特征根为 $m = \pm 3i$
$x_c = c_1 sin3t + c_2 cos3t$
而 $x_p = \frac{6e^{3t}}{18} = \frac{e^{3t}}{3}$
则通解为 $x = \frac{e^{3t}}{3} + c_1 sin3t + c_2 cos3t$
代入初值条件得 $c_1 = c_2 = -\frac{1}{3}$
则 $x = \frac{e^{3x}}{3} - \frac{1}{3} sin3t - \frac{1}{3} cos3t$

2.2 (2)

解：对方程两边施加拉普拉斯变换得
$s^4 X(s) - s^3 - s^2 - s - 1 + X(s) = \frac{2}{s-1}$
得 $X(s) = \frac{1}{s-1}$
施行反变换，查表得 $x(t) = e^t$