

# 常微分方程第二次作业

闫磊

September 18, 2016

## 1 P48.1

求下列方程的解

### 1.1 (4)

$$\frac{dy}{dx} - \frac{n}{x}y = e^x x^n$$

解：令  $u = e^{\int \frac{-n}{x} dx}$

可解得  $u = \frac{1}{x^n}$

等式两边同乘  $u$ , 可得  $(\frac{y}{x^n})' = e^x$

两边同时积分可得  $y = (e^x + c)x^n$

### 1.2 (15)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{xy + x^3 y^3}$$

解：原式可以化为  $\frac{dx}{dy} = xy + x^3 y^3$

这就化为了一个伯努利方程, 两边同除  $y^3$ , 可得

$$\frac{x'}{x^3} = \frac{y}{x^2} + y^3$$

令  $v = \frac{1}{x^2}$

可化简为  $v' + 2vy = -2y^3$

令  $u = e^{\int 2y dy}$

等式两边同乘  $u$  可得  $(e^{y^2} v)' = -2y^3 e^{y^2}$

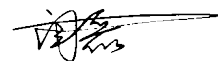
积分可得  $v = 1 - y^2 + ce^{-y^2}$

把  $v$  替换掉得到  $x^2(1 - y^2 + ce^{-y^2}) = 1$

### 1.3 (16)

$$y = e^x + \int_0^x y(t) dt$$

解：等式两边同时求导得  $y' = e^x + y$



移项得  $y' - y = e^x$   
 令  $u = e^{\int -1 dx} = \frac{1}{e^x}$  (取  $c = 0$ )  
 等式两边同乘  $u$  得  $(\frac{y}{e^x})' = 1$   
 积分得  $y = (x + c)e^x$

## 2 P50.7

求解下列方程

### 2.1 (3)

$y' \sin x \cos x - y - \sin^3 x = 0$   
 解：两边同除  $\sin x \cos x$  得  $y' - \frac{1}{\sin x \cos x} y = \frac{\sin^2 x}{\cos x}$   
 令  $u = e^{\int \frac{-1}{\sin x \cos x} dx}$   
 两边同时乘  $u$  得  $(\frac{\cos x}{\sin x} y)' = \sin x$   
 积分得  $y = -\sin x + c \tan x$

## 3 P60.1


验证下列方程是恰当微分方程，并求出方程的解

### 3.1 (1)

$(x^2 + y)dx + (x - 2y)dy = 0$   
 解：因为  $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 1$   
 所以方程是恰当微分方程，把方程分项组合得  
 $x^2 dx + y dx + x dy - 2y dy = 0$   
 即  $d(\frac{x^3}{3}) + d(xy) - d(y^2) = 0$   
 于是方程的通解为  $\frac{x^3}{3} + xy - y^2 = c$   
 $c$  为任意常数

### 3.2 (2)

$(y - 3x^2)dx - (4y - x)dy = 0$   
 解：因为  $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 1$   
 所以方程是恰当微分方程，把方程分项组合得  
 $y dx - 3x^2 dx - 4y dy + x dy = 0$   
 即  $d(xy) - d(x^3) - d(2y^2) = 0$   
 于是方程的通解为  $xy - x^3 - 2y^2 = c$   
 $c$  为任意常数



## 4 变上限求导

$$\int_x^{x_0} p(t) dt$$

解：设  $F(x) = \int_x^{x_0} p(t) dt$

由 Newtown-Leibniz 公式可得

$$F' = p(x)$$

