

常微分第九次作业

徐彬珏

November 13, 2016

P164.2

求解下列常系数常微分方程

(12)

$$x'' + 6x' + 5x = e^{2t}$$

解：方程可以表示为 $P(D)x = e^{2t}$; $P(D) = D^2 + 6D + 5$ 对应的齐次线性方程的特征方程为 $m^2 + 6m + 5 = 0$

解得 $m_1 = -1, m_2 = -5$

则 $x_c = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-5t}$

因为 2 不是 $P(D)$ 的根，故 $x_p = \frac{a}{2} e^{2t}$

故方程的通解为 $x = \frac{a}{2} e^{2t} + c_1 e^{-t} + c_2 e^{-5t}$

21

(14)

$$x'' + x = \sin t \quad \cos 2t$$

解： $P(D)x = \sin t \quad \cos 2t$, $P(D) = D^2 + 1$

对应的齐次方程的特征方程为 $m^2 + 1 = 0$

解得 $m = i$

故 $x_p = c_1 \cos t + c_2 \sin t$

接下来求特解，原方程可以看作是两个方程相加 $P(D)x = \sin t$, $P(D)x = \cos 2t$

分别求特解，再相加。

复化方程得 $P(D)y = e^{it}$; $P(D)y = e^{2it}$

对第一个方程的特解取虚部，第二个方程取实部再相加即可得到原方程特解

$$y_{p1} = \frac{1}{2i} e^{it}; y_{p2} = \frac{1}{2} e^{2it}$$

$$x_{p1} = \frac{1}{2} t \cos t, x_{p2} = \frac{1}{2} \cos 2t$$

$$\text{故通解为 } x = c_1 e^{it} + c_2 e^{-it} + \frac{1}{2} t \cos t + \frac{1}{2} \cos 2t$$

(16)

$$x'' + 9x = t \sin 3t$$

解：齐次方程的特称方程为 $m^2 + 9 = 0$

$$\text{则 } m = \pm 3i$$

$$x_c = c_1 \sin 3t + c_2 \cos 3t$$

$$\text{因为 } (D^2 + 9)^2 (D^2 + 9)x = 0$$

故 $x = c_1 \sin 3t + c_2 \cos 3t + c_3 t \sin 3t + c_4 t \cos 3t + c_5 t^2 \sin 3t + c_6 t^2 \cos 3t$ 则

$$x_p = At \sin 3t + B t \cos 3t + C t^2 \sin 3t + D t^2 \cos 3t$$

$$\text{代入原方程解得 } x_p = \frac{1}{12} t^2 \cos 3t + \frac{1}{36} t \sin 3t$$

$$\text{通解为 } x = c_1 \sin 3t + c_2 \cos 3t + \frac{1}{12} t^2 \cos 3t + \frac{1}{36} t \sin 3t$$

P165.4

求下列初值问题的解

(1)

解：齐次方程的特征方程为 $m^2 + 9 = 0$

特征根为 $m = \pm 3i$

$$x_c = c_1 \sin 3t + c_2 \cos 3t$$

$$\text{而 } x_p = \frac{6e^{3t}}{3} = e^{3t}$$

$$\text{则通解为 } x = \frac{e^{3t}}{3} + c_1 \sin 3t + c_2 \cos 3t$$

$$\text{代入初值条件得 } c_1 = c_2 = \frac{1}{3}$$

$$\text{则 } x = \frac{e^{3t}}{3} + \frac{1}{3} \sin 3t + \frac{1}{3} \cos 3t$$

(2)

解：对方程两边施加拉普拉斯变换得

$$s^4 X(s) - s^3 - s^2 - s - 1 + X(s) = s^2 - 1$$

$$\text{得 } X(s) = \frac{1}{s^4 - 1}$$

施行反变换，查表得 $x(t) = e^t$