

常微分第三次作业

闫磊

September 24, 2016

1 P60.2

求下列方程的解

1.1 (8)

$$(x + 2y)dx + xdy = 0$$

解：因为 $\frac{\partial M}{\partial y} = 2 \neq 1 = \frac{\partial N}{\partial x}$

所以该方程不是恰当的.

因为 $\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{1}{x}$ 只依赖于 x

故有积分因子

$$u = e^{\int \frac{1}{x} dx}$$

取积分因子为 $u = x$, 等式两边同乘 u 得

$$x^2 dy + 2xy dx + x^2 dx = 0$$

$$\text{故 } d(x^2 y + \frac{x^3}{3}) = 0$$

$$\text{解为 } x^2 y + \frac{x^3}{3} = c$$

1.2 (9)

$$[x \cos(x + y) + \sin(x + y)]dx + x \cos(x + y)dy = 0$$

解：因为 $\frac{\partial M}{\partial y} = \cos(x + y) - x \sin(x + y) = \frac{\partial N}{\partial x}$ 故方程是恰当的

$$\text{原式易化为 } d(x \sin(x + y)) = 0$$

$$\text{故结果为 } x \sin(x + y) = c$$

1.3 (10)

$$(y \cos x - x \sin x)dx + (y \sin x + x \cos x)dy = 0$$

解：因为 $\frac{\partial M}{\partial y} = \cos x \neq y \cos x + \cos x - x \sin x = \frac{\partial N}{\partial x}$

故该方程是不恰当的



故 $\frac{N_x - M_y}{M} = 1$
 故有积分因子 $u = e^{\int 1 dy}$
 取 $u = e^y$, 等式两边同乘 u 得
 $e^y(y\cos x - x\sin x)dx + e^y(y\sin x + x\cos x)dy = 0$
 故 $\frac{\partial f}{\partial x} = e^y(y\cos x - x\sin x)$
 积分得 $f = e^y(y\sin x + x\cos x - \sin x) + g(y)$
 再对 y 求偏导数 $\frac{\partial f}{\partial y} = e^y(y\sin x + x\cos x) + g'(y)$
 故 $g'(y) = 0$
 故 $e^y(y-1)\sin x - e^y x\cos x = c$

1.4 (11)

$x(4ydy + 2xdy) + y^3(3ydx + 5xdy) = 0$
 解: 因为 $\frac{\partial M}{\partial y} = 4x + 12y^3 \neq 4x + 5y^3 = \frac{\partial N}{\partial x}$
 设积分因子 $u = x^m y^n$
 等式两边同乘 u 得

$$(4x^{m+1}y^{n+1} + 3x^m y^{n+4})dx + (2x^{m+2}y^n + 5x^{m+1}y^{n+3})dy = 0$$

设 $P = 4x^{m+1}y^{n+1} + 3x^m y^{n+4}$, $Q = 2x^{m+2}y^n + 5x^{m+1}y^{n+3}$
 因为此方程为恰当方程
 故 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$
 即有

$$\begin{cases} 4(n+1) = 2(m+2) \\ 3(n+4) = 5(m+1) \end{cases} \quad (1)$$

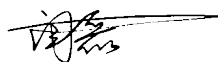
解得 $m = 2, n = 1$, 故 $u = x^2 y$
 两边同乘 u 然后分项组合得

$$d(x^3 y^5 + x^4 y^2) = 0$$

故 $x^3 y^5 + x^4 y^2 = c$

2 P61.4

证明: 充分性: 若有这样一个仅依赖于 x 的积分因子 $u = e^{\int P(x) dx}$
 那么有 $\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{-\partial f(x,y)}{\partial y} = P(x)$
 即 $f(x,y) = -P(x)y + Q(x)$
 故 $\frac{dy}{dx} = P(x)y - Q(x)$
 必要性: 若 $dy - f(x,y)dx = 0$ 是线性的
 则有 $f(x,y) = P(x)y + Q(x)$



因为 $\frac{M_y - N_x}{N} = -P(x)$
 故 $u = e^{\int -P(x) dx}$
 即方程有仅依赖于 x 的积分因子

3 P61.8

求伯努利方程的积分因子
 证明：
 因为 $y' = P(x)y + Q(x)y^n$
 故 $\frac{y'}{y^n} = \frac{P(x)}{y^{n-1}} + Q(x)$
 令 $v = \frac{1}{y^{n-1}}$
 可化为 $\frac{v'}{1-n} = P(x)v + Q(x)$
 故 $v' = (1-n)P(x)v + Q(x)(1-n)$
 故 $u = e^{\int (n-1)P(x) dx}$
 两边同乘 u ，并把 v 换掉可得

$$\frac{e^{\int (n-1)P(x) dx}}{y^n}$$

4 P69.1

解下列方程

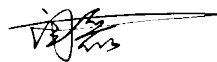
4.1 (1)

$xy'^3 = 1 + y'$
 解：令 $y' = \frac{1}{t}$
 代入原方程解得 $x = t^3 + t^2$
 由于 $dy = \frac{dx}{t} = (3t + 2)dt$
 积分得 $y = 3t^2 + 2t + c$
 故方程的通解为

$$\begin{cases} x = t^3 + t^2 \\ y = 3t^2 + 2t + c \end{cases} \quad (2)$$

4.2 (2)

$y'^3 - x^3(1 - y') = 0$
 解：令 $y' = p = tx$
 代入原方程得 $x = \frac{1}{t} - t^2$
 同时 $p = 1 - t^3$



因为 $dy = p dx = (t - \frac{1}{t^2} + 2t^4 - 2t) dt$

积分得 $y = -\frac{t^2}{2} + \frac{1}{t} + \frac{2t^5}{5} + c$

故方程的通解为

$$\begin{cases} x = \frac{1}{t} - t^2 \\ y = -\frac{t^2}{2} + \frac{1}{t} + \frac{2t^5}{5} + c \end{cases} \quad (3)$$

4.3 (3)

$y = y'^2 e^{y'}$

解: 令 $y' = p$

代入原方程 $y = p^2 e^p$

上式两边对 x 求导得 $p = (2p + p^2) e^p \frac{dp}{dx}$

分离变量并积分得 $x = (p + 1) e^p + c$

故方程的通解为

$$\begin{cases} x = (p + 1) e^p + c \\ y = p^2 e^p \end{cases} \quad (4)$$

4.4 (4)

$y(1 + y'^2) = 2a$

解: 令 $y' = p$

代入原方程得 $y = \frac{2a}{1+p^2}$

由 $\frac{dp}{dx} = \frac{(1+p^2)^2}{-4a}$

分离变量并积分得 $x = -2a \arctan p - \frac{2ap}{1+p^2} + c$

故方程的通解为

$$\begin{cases} x = -2a \arctan p - \frac{2ap}{1+p^2} + c \\ y = \frac{2a}{1+p^2} \end{cases} \quad (5)$$

4.5 (5)

$x^2 + y'^2 = 1$

解: 令 $y' = \cos t$

代入解得 $x = \sin t$

因为 $dy = \cos^2 t dt$

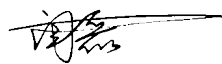
两边积分得 $y = \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} + c$

$$\begin{cases} x = \sin t \\ y = \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} + c \end{cases} \quad (6)$$

4.6 (6)

$y^2(y' - 1) = (2 - y')^2$

解: 令 $2 - y' = ty$



代入原方程 $y = \frac{1}{t} - t$

同时有 $y' = 1 + t^2$

$dx = \frac{dy}{y'}$

两边积分得 $x = \frac{1}{t} + c$

方程的通解为

$$\begin{cases} x = \frac{1}{t} + c \\ y = \frac{1}{t} - t \end{cases} \quad (7)$$