常微分方程第二次作业

闫磊

September 18, 2016

1 P48.1

求下列方程的解

1.1 (4)

$\frac{dy}{dx} - \frac{n}{x}y = e^x x^n$
解：令 $u = e^{\int \frac{-n}{x}\, dx}$
可解得 $u = \frac{1}{x^n}$
等式两边同乘 u, 可得 $(\frac{y}{x^n})' = e^x$
两边同时积分可得 $y = (e^x + c)x^n$

1.2 (15)

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{xy + x^3y^3}$
解：原式可以化为 $\frac{dx}{dy} = xy + x^3y^3$
这就化为了一个伯努利方程, 两边同除 y^3, 可得
$\frac{x'}{x^3} = \frac{y}{x^2} + y^3$
令 $v = \frac{1}{x^2}$
可化简为 $v' + 2vy = -2y^3$
令 $u = e^{\int 2y\, dy}$
等式两边同乘 u 可得 $(e^{y^2}v)' = -2y^3e^{y^2}$
积分可得 $v = 1 - y^2 + ce^{-y^2}$
把 v 替换掉得到 $x^2(1 - y^2 + ce^{-y^2}) = 1$

1.3 (16)

$y = e^x + \int_0^x y(t)\, dt$
解：等式两边同时求导得 $y' = e^x + y$

移项得 $y' - y = e^x$
令 $u = e^{\int -1\,dx} = \frac{1}{e^x}$(取 $c = 0$)
等式两边同乘 u 得 $(\frac{y}{e^x})' = 1$
积分得 $y = (x + c)e^x$

2 P50.7

求解下列方程

2.1 (3)

$y' sinxcosx - y - sin^3x = 0$
解：两边同除 sinxcosx 得 $y' - \frac{1}{sinxcosx}y = \frac{sin^2x}{cosx}$
令 $u = e^{\int \frac{-1}{sinxcosx}\,dx}$
两边同时乘 u 得 $(\frac{cosx}{sinx}y)' = sinx$
积分得 $y = -sinx + ctanx$

3 P60.1

验证下列方程是恰当微分方程，并求出方程的解

3.1 (1)

$(x^2 + y)dx + (x - 2y)dy = 0$
解：因为 $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 1$
所以方程是恰当微分方程，把方程分项组合得
$x^2dx + ydx + xdy - 2ydy = 0$
即 $d(\frac{x^3}{3}) + d(xy) - d(y^2) = 0$
于是方程的通解为 $\frac{x^3}{3} + xy - y^2 = c$
c 为任意常数

3.2 (2)

$(y - 3x^2)dx - (4y - x)dy = 0$
解：因为 $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 1$
所以方程是恰当微分方程，把方程分项组合得
$ydx - 3x^2dx - 4ydy + xdy = 0$
即 $d(xy) - d(x^3) - d(2y^2) = 0$
于是方程的通解为 $xy - x^3 - 2y^2 = c$
c 为任意常数

4 变上限求导

$\int_{x}^{x0} p(t)\, dt$

解：设 $F(x) = \int_{x}^{x0} p(t)\, dt$

由 Newtown-Leibniz 公式可得

$F' = p(x)$