常微分第三次作业

闫磊

September 24, 2016

1 P60.2

求下列方程的解

1.1 (8)

$(x+2y)dx + xdy = 0$
解：因为 $\frac{\partial M}{\partial y} = 2 \neq 1 = \frac{\partial N}{\partial x}$
所以该方程不是恰当的.
因为 $\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{1}{x}$ 只依赖于 x
故有积分因子

$$u = e^{\int \frac{1}{x} dx}$$

取积分因子为 $u = x$, 等式两边同乘 u 得
$x^2dy + 2xydx + x^2dx = 0$
故 $d(x^2y + \frac{x^3}{3}) = c$
解为 $x^2y + \frac{x^3}{3} = c$

1.2 (9)

$[xcos(x+y) + sin(x+y)]dx + xcos(x+y)dy = 0$
解：因为 $\frac{\partial M}{\partial y} = cos(x+y) - xsin(x+y) = \frac{\partial N}{\partial x}$ 故方程是恰当的
原式易化为 $d(xsin(x+y)) = 0$
故结果为 $xsin(x+y) = c$

1.3 (10)

$(ycosx - xsinx)dx + (ysinx + xcosx)dy = 0$
解：因为 $\frac{\partial M}{\partial y} = cosx \neq ycosx + cosx - xsinx = \frac{\partial N}{\partial y}$
故该方程是不恰当的

故 $\frac{N_x-M_y}{M}=1$
故有积分因子 $u=e^{\int 1\,dy}$
取 $u=e^y$, 等式两边同乘 u 得
$e^y(ycosx-xsinx)dx+e^y(ysinx+xcosx)dy=0$
故 $\frac{\partial f}{\partial x}=e^y(ycosx-xsinx)$
积分得 $f=e^y(ysinx+xcosx-sinx)+g(y)$
再对 y 求偏导数 $\frac{\partial f}{\partial y}=e^y(ysinx+xcosx)+g'(y)$
故 $g'(y)=0$
故 $e^y(y-1)sinx-e^yxcosx=c$

1.4 (11)

$x(4ydy+2xdy)+y^3(3ydx+5xdy)=0$
解：因为 $\frac{\partial M}{\partial y}=4x+12y^3\neq 4x+5y^3=\frac{\partial N}{\partial x}$
设积分因子 $u=x^my^n$
等式两边同乘 u 得

$$(4x^{m+1}y^{n+1}+3x^my^{n+4})dx+(2x^{m+2}y^n+5x^{m+1}y^{n+3})dy=0$$

设 $P=4x^{m+1}y^{n+1}+3x^my^{n+4};Q=2x^{m+2}y^n+5x^{m+1}y^{n+3}$
因为此方程为恰当方程
故 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$
即有

$$\begin{cases} 4(n+1)=2(m+2) \\ 3(n+4)=5(m+1) \end{cases} \tag{1}$$

解得 $m=2\ y=1$, 故 $u=x^2y$
两边同乘 u 然后分项组合得

$$d(x^3y^5+x^4y^2=0$$

故 $x^3y^5+x^4y^2=c$

2 P61.4

证明：充分性: 若有这样一个仅依赖于 x 的积分因子 $u=e^{\int P(x)\,dx}$
那么有 $\frac{M_y-N_x}{N}=\frac{-\partial f(x,y)}{\partial y}=P(x)$
即 $f(x,y)=-P(x)y+Q(x)$
故 $\frac{dy}{dx}=P(x)y-Q(x)$
必要性：若 $dy-f(x,y)dx=0$ 是线性的
则有 $f(x,y)=P(x)y+Q(x)$

因为 $\frac{M_y - N_x}{N} = -P(x)$
故 $u = e^{\int -P(x)\,dx}$
即方程有仅依赖于 x 的积分因子

3 P61.8

求伯努利方程的积分因子
证明：
因为 $y' = P(x)y + Q(x)y^n$
故 $\frac{y'}{y^n} = \frac{P(x)}{y^{n-1}} + Q(x)$
令 $v = \frac{1}{y^{n-1}}$
可化为 $\frac{v'}{1-n} = P(x)v + Q(x)$
故 $v' = (1-n)P(x)v + Q(x)(1-n)$
故 $u = e^{\int (n-1)P(x)\,dx}$
两边同乘 u , 并把 v 换掉可得

$$\frac{e^{\int (n-1)P(x)\,dx}}{y^n}$$

4 P69.1

解下列方程

4.1 (1)

$xy'^3 = 1 + y'$
解：令 $y' = \frac{1}{t}$
代入原方程解得 $x = t^3 + t^2$
由于 $dy = \frac{dx}{t} = (3t + 2)dt$
积分得 $y = 3t^2 + 2t + c$
故方程的通解为

$$\begin{cases} x = t^3 + t^2 \\ y = 3t^2 + 2t + c \end{cases} \tag{2}$$

4.2 (2)

$y'^3 - x^3(1 - y') = 0$
解：令 $y' = p = tx$
代入原方程得 $x = \frac{1}{t} - t^2$
同时 $p = 1 - t^3$

因为 $dy = pdx = (t - \frac{1}{t^2} + 2t^4 - 2t)dt$
积分得 $y = \frac{-t^2}{2} + \frac{1}{t} + \frac{2t^5}{5} + c$
故方程的通解为

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{t} - t^2 \\ y = \frac{-t^2}{2} + \frac{1}{t} + \frac{2t^5}{5} + c \end{array} \right. \tag{3}$$

4.3 (3)

$y = y'^2 e^{y'}$
解：令 $y' = p$
代入原方程 $y = p^2 e^p$
上式两边对 x 求导得 $p = (2p + p^2)e^p \frac{dp}{dx}$
分离变量并积分得 $x = (p+1)e^p + c$
故方程的通解为

$$\left\{ \begin{array}{l} x = (p+1)e^p + c \\ y = p^2 e^p \end{array} \right. \tag{4}$$

4.4 (4)

$y(1 + y'^2) = 2a$
解：令 $y' = p$
代入原方程得 $y = \frac{2a}{1+p^2}$
由 $\frac{dp}{dx} = \frac{(1+p^2)^2}{-4a}$
分离变量并积分得 $x = -2aarctanp - \frac{2ap}{1+p^2} + c$
故方程的通解为

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -2aarctanp - \frac{2ap}{1+p^2} + c \\ y = \frac{2a}{1+p^2} \end{array} \right. \tag{5}$$

4.5 (5)

$x^2 + y'^2 = 1$
解：令 $y' = cost$
代入解得 $x = sint$
因为 $dy = cos^2 tdt$
两边积分得 $y = \frac{t}{2} + \frac{sin2t}{4} + c$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = sint \\ y = \frac{t}{2} + \frac{sin2t}{4} + c \end{array} \right. \tag{6}$$

4.6 (6)

$y^2(y' - 1) = (2 - y')^2$
解：令 $2 - y' = ty$

代入原方程 $y = \frac{1}{t} - t$
同时有 $y' = 1 + t^2$
$dx = \frac{dy}{y'}$
两边积分得 $x = \frac{1}{t} + c$
方程的通解为

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{t} + c \\ y = \frac{1}{t} - t \end{array} \right. \tag{7}$$