常微分第八次作业

闫磊

November 6, 2016

1 P165.3

求下列方程的通解

1.1 (1)

$t^2 x'' + tx' - x = 0$
解：设 $x = t^k$
代入方程有 $(k+1)(k-1)t^k = 0$
设 $t \neq 0$, 有 $k_1 = -1, k_2 = 1$
故通解有 $x = c_1 t + c_2 \frac{1}{t}$, 包含了 $x = 0$ 的情况。

1.2 (2)

$t^2 x'' - 4tx' + 6x = t$
解：$x = x_c + x_p$
先求方程对应的齐次线性方程的通解 x_c, 同上一题，设 $x_c = t^k$
代入得 $(k-2)(k-3)t^k = 0$
得到 $x_c = c_1 t^2 + c_2 t^3$
令 $x_1 = t^2; x_2 = t^3$, 设 $x_p = u_1 x_1 + u_2 x_2$
用常数变异法，$W[t^2, t^3] = t^4$
$u_1' = \frac{W_1}{W} = \frac{-1}{t^2}; u_2' = \frac{W_2}{W} = \frac{1}{t^3}$
积分得 $u_1 = \frac{1}{t}; u_2 = \frac{-1}{2t^2}$
则 $x_p = \frac{t}{2}$
通解为 $x = c_1 t^2 + c_2 t^3 + \frac{t}{2}$