常微分第九次作业

胡鹏

November 13, 2016

P164.2

求解下列常系数常微分方程

(12)

$x'' + 6x' + 5x = e^{2t}$

解：方程可以表示为 $P(D)x = e^{2t}$; $P(D) = D^2 + 6D + 5$ 对应的齐次线性方程的特征方程为 $m^2 + 6m + 5 = 0$

解得 $m_1 = 1$; $m_2 = 5$

则 $x_c = c_1 e^{t} + c_2 e^{5t}$

因为 2 不是 $P(D)$ 的根，故 $x_p = \frac{e^{2t}}{21}$

故方程的通解为 $x = \frac{e^{2t}}{21} + c_1 e^{t} + c_2 e^{5t}$

(14)

$x'' + x = sint \quad cos2t$

解:$P(D)x = sint \quad cos2t$, $P(D) = D^2 + 1$

对应的齐次方程的特征方程为 $m^2 + 1 = 0$

解得 $m = i$

故 $x_p = c_1 cost + c_2 sint$

接下来求特解，原方程可以看作是两个方程相加 $P(D)x = sint$, $P(D)x = cos2t$

分别求特解，再相加 。

复化方程得 $P(D)y = e^{it}$; $P(D)y = e^{2it}$

对第一个方程的特解取虚部，第二个方程取实部再相加即可得到原方程特解

$y_p1 = \frac{te^{it}}{2i}$; $y_p2 = \frac{e^{2it}}{3}$

$x_p1 = \frac{1}{2} tcost$, $x_p2 = \frac{1}{3} cos2t$

故通解为 $x = c_1 e^{it} + c_2 e^{it} + \frac{1}{2} tcost + \frac{1}{3} cos2t$

(16)

$x'' + 9x = t\sin 3t$

解：齐次方程的特称方程为 $m^2 + 9 = 0$

则 $m = \quad 3i$

$x_c = c_1\sin 3t + c_2\cos 3t$

因为 $(D^2 + 9)^2(D^2 + 9)x = 0$

故 $x = c_1\sin 3t + c_2\cos 3t + c_3 t\sin 3t + c_4\cos 3t + c_5 t^2\sin 3t + c_6 t^2\cos 3t$ 则

$x_p = At\sin 3t + B\cos 3t + Ct^2\sin 3t + Dt^2\cos 3t$

代入原方程解得 $x_p = \frac{1}{12}t^2\cos 3t + \frac{1}{36}t\sin 3t$

通解为 $x = c_1\sin 3t + c_2\cos 3t + \frac{1}{12}t^2\cos 3t + \frac{1}{36}t\sin 3t$

P165.4

求下列初值问题的解

(1)

解：齐次方程的特征方程为 $m^2 + 9 = 0$

特征根为 $m = 3i$

$x_c = c_1\sin 3t + c_2\cos 3t$

而 $x_p = \frac{6e^{3t}}{18} = \frac{e^{3t}}{3}$

则通解为 $x = \frac{e^{3t}}{3} + c_1\sin 3t + c_2\cos 3t$

代入初值条件得 $c_1 = c_2 = \quad \frac{1}{3}$

则 $x = \frac{e^{3x}}{3} \quad \frac{1}{3}\sin 3t \quad \frac{1}{3}\cos 3t$

(2)

解：对方程两边施加拉普拉斯变换得

$s^4X(s) \quad s^3 \quad s^2 \quad s \quad 1 + X(s) = \frac{2}{s \quad 1}$

得 $X(s) = \frac{1}{s \quad 1}$

施行反变换，查表得 $x(t) = e^t$