常微分方程第一次作业

闫磊

September 10, 2016

1 P27.3

验证下列各函数是相应微分方程的解

1.1 (7)

$y = x^2 + 1, y' = y^2 - (x^2 + 1)y + 2x$
解：把 y 求导可得 $\frac{dy}{dx} = 2x$
计算方程右边可得 $(x^2 + 1)^2 - (x^2 + 1)^2 + 2x = 2x$
这样方程两边相等 $y = x^2 + 1$ 是微分方程的解。

1.2 (8)

$$y = \frac{g(x)}{f(x)}, y' = \frac{f'(x)}{g(x)}y^2 - \frac{g'(x)}{f(x)}$$

解：对 y 求导得 $y' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{f^2(x)}$
计算右边式子 $\frac{f'(x)}{g(x)}y^2 - \frac{g'(x)}{f(x)}$
可以发现和左边相等，故 $y = \frac{g(x)}{f(x)}$ 是微分方程的解

2 P27.4

给定一阶微分方程 $\frac{dy}{dx} = 2x$

2.1 (1)

求出它的通解
解：两边积分得 $y = x^2 + c$ 其中 c 为常数

2.2 (2)

求出通过点 $(1, 4)$ 的特解
解：代入得 c=3, 特解是 $y = x^2 + 3$.

2.3 (3)

求出与直线 $y = 2x + 3$ 相切的解
解：相切意味着方程组

$$\left\{ \begin{array}{l} y = x^2 + c \\ y = 2x + 3 \end{array} \right. \tag{1}$$

有且仅有一个解，即 $\Delta = 0$, 解得 $c = 4$
故相切的解为 $y = 2x + 4$

2.4 (4)

求出满足条件 $\int_0^1 y\,dx = 2$ 的解
解：$\int_0^1 (x^2 + c)\,dx = \frac{1}{3} + c$
解 $\frac{1}{3} + c = 2$ 可得 $c = \frac{5}{3}$, 故解为
$y = 2x + \frac{5}{3}$.

2.5 (5)

绘出（2）（3）（4）中解的图形. 解：见图（1）-（3）

3 P42.1

求下列方程的解

3.1 (6)

$x\frac{dy}{dx} - y + \sqrt{x^2 - y^2} = 0$
解：移项可得 $xy' - y + \sqrt{x^2 + y^2} = 0$
若 $x^2 \neq y^2$
有 $y' = \frac{y}{x} - \sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}}$
令 $z = \frac{y}{x}$, 那么 $y = zx$
故 $y' = z'x + z$, 代入有：
$z'x + z = z - \sqrt{1 - z^2}$
分离变量有 $\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{-1}{x}dx$
积分有：$\arcsin\frac{y}{x} + \ln|x| = c$; 若 $x^2 = y^2$
代入可验证 $y^2 = x^2$ 也是方程的解.
综上，$y^2 = x^2, \arcsin\frac{y}{x} + \ln|x| = c$ 是解

3.2 （7）

$\tan y dx - \cot x dy = 0$
解：当 $\tan y \neq 0, y \neq k\pi$（k 为常数）时

分离变量得 $\tan x dx = \cot y dy$
两边积分 $\int tanxdx = \int cotydy$
得到 $\ln|\sin x| = -\ln|\cos x| + c_1$
即 $\sin x \cos x = c, c = \pm e^c{}_1$
若 $y = k\pi$ 时
代入可以发现也是解
综上 $\sin x \cos x = c, c = \pm e^c{}_1, y = k\pi$ 是解

4 P43.2

作适当的变量变换求解下列方程

4.1 (6)

$\frac{dy}{dx} = \frac{y^6 - 2x^2}{2xy^5 + x^2y^2}$
解：令 $u = y^3$
代入化简得 $\frac{3y^6 - 6x^2}{2xy^3 + x^2} = \frac{du}{dx}$
令 $v = \frac{u}{x}$
代入化简 $x\frac{dv}{dx} + v = \frac{3v^2 - 6}{2v + 1}$
分离变量得 $\frac{dx}{x} = \frac{2v+1}{v^2 - v - 6}dv$
两边积分得 $cx^5 = (v-3)^7(v+2)^3$
代回原变量 $(y^2 - 3x)^7(y^3 + 2x)^3 = cx^{15}$
c 为常数

4.2 (7)

$\frac{dy}{dx} = \frac{2x^3 + 3xy^2 + x}{3x^2y + 2y^3 - y}$
解：两边乘 $\frac{y}{x}$ 得
$\frac{ydy}{xdx} = \frac{2x^2 + 3y^2 + 1}{3x^2 + 2y^2 - 1}$
令 $u = x^2 - 1, v = y^2 + 1$
则原式化为 $\frac{dv}{du} = \frac{2u + 3v}{3u + 2v}$
令 $z = \frac{v}{u}$ 代入化简，分离变量有
$\frac{du}{u} = \frac{2z + 3}{2 - 2z^2}dz$
两边积分得 $u^4(1-z)^5 = c(1+z)$
代入原变量 $(x^2 - y^2 - 2)^5 = c(x^2 + y^2)$
c 为任意常数.

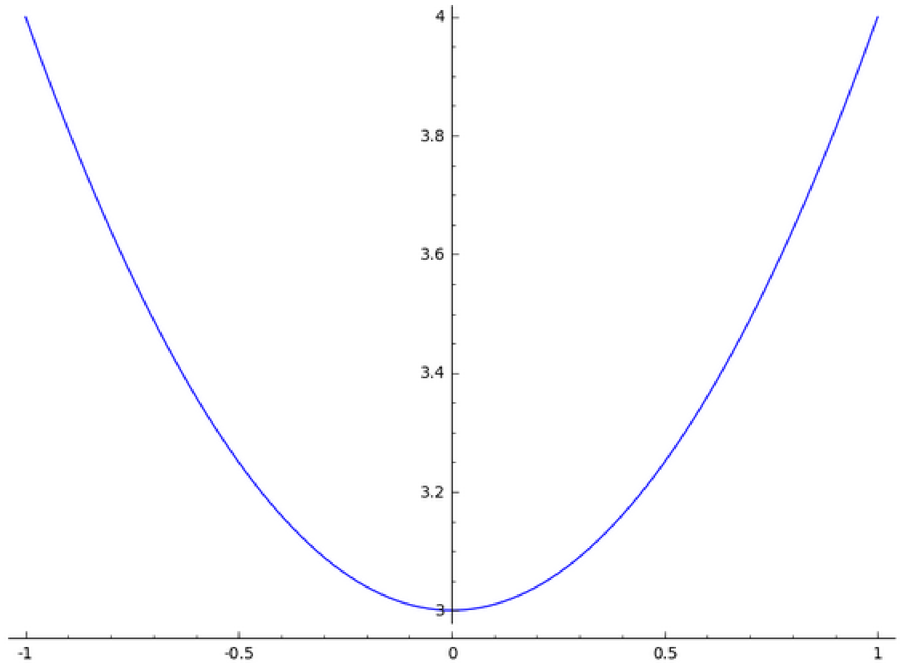

Figure 1: (2)

5 证明题

已知 $y_1(t)$ 是 $\frac{dy}{dt} = f(y), y(0) = y_0$ 的解
证明：$y_2(t) = y_1(t - t_0)$ 是 $\frac{dy}{dt} = f(y), y(t_0) = y_0$ 的解。
证：做变量代换 $v = t - t_0$，条件只是改变了初值，代入新变量就可验证。

(PS: 我不会证，瞎蒙的-.-)

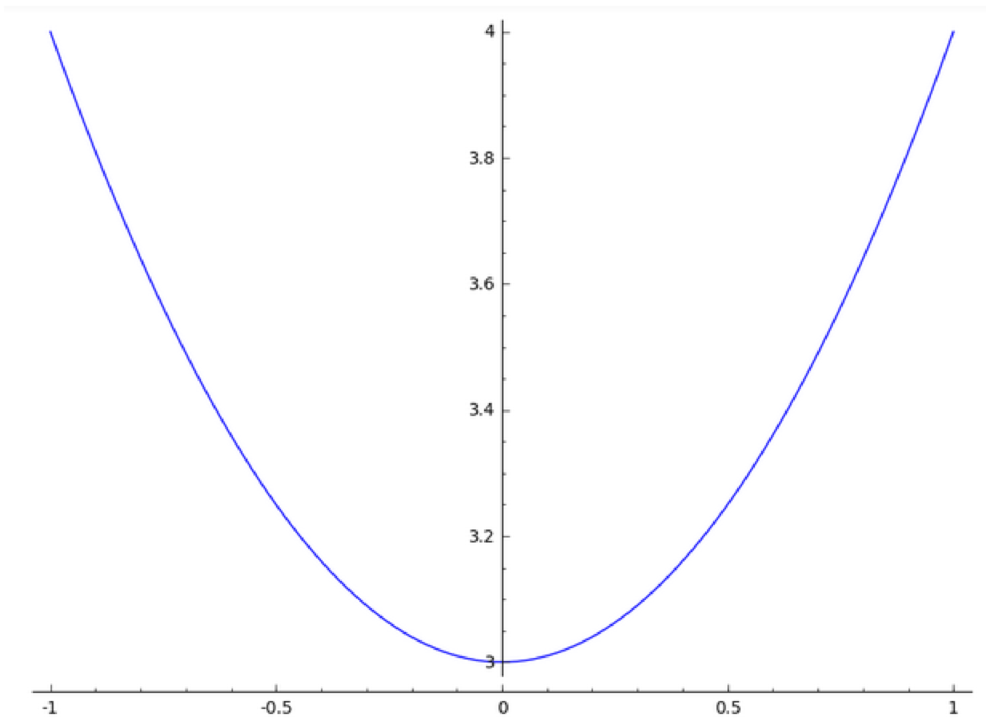

Figure 2: (3)

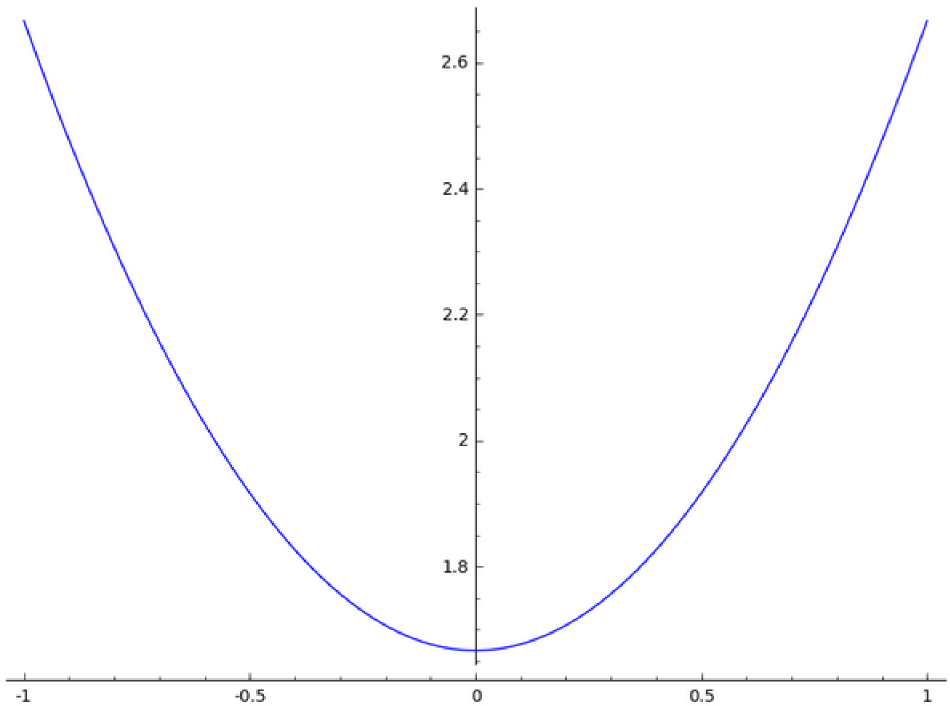

Figure 3: (4)