FFT报告

计算数学　201610111094　尚晨萱

一. Fourier变换

1.周期函数的Fourier级数

定义1:

以2π为周期的函数$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上可积和绝对可积，则可令

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx, k = 0, 1...$$
$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx, k = 1, ...$$

从而得到三角级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

我们称这个三角级数为$f(x)$关于三角函数系$\{1, \cos x, \sin x, ..., \cos kx, \sin kx, ...\}$的Fourier级数，称$a_k, b_k$为$f(x)$Fourier 系数，记为

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

2.Fourier积分

定义2:

当$\lambda \to \infty$,由

$$J(\lambda, x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\lambda} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega(t - x)\, dt$$

得到的积分公式成为$f(x)$的Fourier积分，记为

$$f(x) \sim \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega(t - x)\, dt$$

3.常用Fourier变换对

定义一个新的变量s,$\omega = 2\pi s$,s表示频率，Fourier变换对取为:

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-i2\pi st)\, dt$$
$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(s)\exp(i2\pi st)\, ds$$

4.Fourier变换的性质及相关定理:

性质1:线性性:设有两个Fourier变换对

$$f(t) \sim F(s), g(t) \sim G(s)$$

则对两个任意常数a, b成立

$$af(t) + bg(t) \sim aF(s) + bG(s)$$

性质2:尺度伸缩定理.如果Fourier变换对为$f(t) \sim F(s)$,当时间尺度改变时成立

$$f(at) \sim \frac{1}{|a|} F\left(\frac{s}{a}\right), a \neq 0$$

性质3.平移定理.如果Fourier变换对为$f(t) \sim F(s)$,则

$$f(t-a) \sim \exp(-i2\pi as) F(s)$$

性质4.卷积定理.设$f(t), g(t)$皆可作Fourier变换,Fourier变换对记为$f(t) \sim F(s), g(t) \sim G(s)$,若$f(t) * g(t)$仍可作Fourier变换，则

$$f(t) * g(t) \sim F(s) \cdot G(s)$$

若$f(t) \cdot g(t)$仍可作Fourier变换,则

$$f(t) \cdot g(t) \sim F(s) * G(s)$$

性质5.乘法定理.若有Fourier变换对$f(t) \sim F(s)$,则

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t) \overline{f(t)} dt = \int_{-\infty}^{\infty} G(s) \overline{F(s)} ds$$

性质6.Parseval定理.设有Fourier变换对$f(t) \sim F(s)$,则

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |F(s)|^2 ds$$

二. 离散Fourier变换

1.离散Fourier变换的定义:

定义2.对长度为N的复序列$A_0, A_1, ...A_{N-1}$称

$$x_j = \sum_{k=0}^{N-1} A_k W_N^{-jk}, j = 0, 1, ...N-1$$

为序列$\{A_k\}$的离散Fourier变换DFT,这里$i=\sqrt{-1}$，$W_N=\exp\left(\frac{i2\pi}{N}\right)$.
2.离散Fourier变换的常用形式:

$$x_j=\sum_{k=0}^{N-1}A_kW_N^{jk}$$
$$j=0,1,...N-1$$

对应的逆变换为:

$$A_k=\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}x_jW_N^{-jk}$$
$$k=0,1,...N-1$$

3.DFT的性质:
性质1.线性性.设有两个长度为N的序列$\{A_k\},\{B_k\}$, DFT对为$A_k\sim x_j,B_k\sim y_j$,则对任意两个常数a,b成立

$$aA_k+bB_k\sim ax_j+by_j$$

.
性质2.对称性.设有DFT变换对$A_k\sim x_j$,则对称性表示为

$$A_{-k}\sim x_{-j}$$

性质3.设有DFT变换对$A_k\sim x_j$,对任意常数p，将A_k位移为A_{k+p}，则这时有DFT变换对

$$A_{k+p}\sim W_N^{pj}x_j$$

此DFT变换对称为时域位移.对任意常数q，将x_j位移为x_{j+q}，则这时有DFT变换对

$$W_N^{-qk}A_k\sim x_{j+q}$$

3.离散卷积和离散相关
定义3.称长度为N的序列$\{C_k\}$

$$C_k=\sum_{l=0}^{N-1}A_lB_{k-l},k=0,1,...N-1$$

为两个长度为N的序列$\{A_k\},\{B_k\}$的离散卷积，记为

$$C_k=A_k*B_k$$

定理1.离散卷积定理:设有DFT对为$A_k \sim x_j, B_k \sim y_j$,则关于离散卷积成立

$$A_k * B_k = \sum_{l=0}^{N-1} A_l B_{k-l} \sim x_j y_j$$

$$A_k B_k \sim \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} x_l y_{j-l}$$

定义4.称长度为N的序列$\{C_k\}$

$$C_k = \sum_{l=0}^{N-1} A_l B_{k-l}, k = 0, 1, ...N-1$$

为两个长度为N的序列$\{A_k\}, \{B_k\}$的离散相关，可记为

$$C_k = corr\left(A, B\right)_k$$

离散相关和DFT之间成立以下定理:

定理1.设有长度为N序列的DFT对$A_k \sim x_j, B_k \sim y_j, \overline{A_k} \sim x_j^*, C_k \sim z_j$,

则$\{A_k\}, \{B_k\}$的离散相关序列$\{C_k\}$的DFTz_j之间成立关系

$$z_j = \overline{x_j^*} y_j$$

$$j = 0, 1, ...N-1$$

定理2.(Paseval)设有长度为N序列的$\{A_k\}$,设其DFT为$\{x_j\}$,则

$$\sum_{k=0}^{N-1} |A_k|^2 = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} |x_j|^2$$

三. Fourier变换的离散误差

1.频谱混叠效应

对于两个不同频率的谐波，在等距离散点上分别得到的离散序列是完全重合的,也即当以$\triangle t$为间距取样时，这两个频率完全混同无法分辨，这就是等距离离散取样导致的频谱混叠效应.

2.采样定理

采样过程所应遵循的规律,又称取样定理,抽样定理.采样定理说明采样频率与信号频谱之间的关系,是连续信号离散化的基本依据.在进行模拟和数字信号的转换过程中,当采样频率大于信号中最高频率的2倍时,采样之后的数字信号完整地保留了原始信号中的信息,一般实际应用中保证采样频率为信号最高频率的2.56至4倍;采样定理又称奈奎斯特定理.

时域采样定理:

频带为F的连续信号$f(t)$可用一系列离散的采样值来表示,只要$f(t_1), f(t_1 + \triangle t), ...$这些采样点的时间间隔$\triangle t \leq \frac{1}{2F}$，便可根据各采样值完全恢复原来的信号$f(t)$.

频域采样定理:

对于时间上受限制的连续信号$f(t)$（即当$|t|>T$时,$f(t)=0$,这里$T=T_2-T_1$是信号的持续时间）,若其频谱为$F(w)$,则可在频域上用一系列离散的采样值来表示,只要这些采样点的频率间隔$w\le\frac{\pi}{tm}$.

四. DFT的快速算法（FFT)

1.直接计算DFT的问题和改进的途径.

设$x(n)$为N点有限长序列，其DFT正变换为

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk}$$
$$k=0,1,...N-1$$

其逆变换为

$$x(k)=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N-1}X(n)W_N^{-nk}$$
$$k=0,1,...,N-1$$

考虑$x(n)$为复数序列的一般情况,每计算一个$X(k)$，需要N次复数乘法和N-1次复数加法.因此对所有N个k值,共需要N^2次复数乘法和$N(N-1)$次复数加法.所以直接计算DFT,乘法次数和加法次数都是和N^2成正比的.当N很大时,运算量非常大，因而需要改进的DFT的计算方法,以减少运算次数.利用W_N^{nk}的以下固有特性,就可以减少DFT的运算量.

(1)对称性:$\left(W_N^{nk}\right)^*=W_N^{-nk}$

(2)周期性:$W_N^{nk}=W_N^{(n+Nk)}=W_N^{n(k+N)}$

(3)可约性:$W_N^{nk}=W_{mN}^{nmN}=W_{N/m}^{nk/m}$

2.时域抽取法基2FFT原理:

先设序列点数$N=2^m$，M为整数.如果不满足这个条件，可以人为的加上若干个零值点，使之达到这一要求.这种N为2的整数幂的FFT称为基2FFT.设输入序列长度为$N=2^m$,将该序列按时间顺序的奇偶分解为越来越短的子序列，称为时域抽取法的FFT算法.

将$N=2^m$的序列$x(n)$先按n的奇偶分成以下两组:

$$x(2r)=x_1(r)$$
$$x(2r+1)=x_2(r)$$
$$r=0,1,...\frac{N}{2}-1$$

则$x(n)$的DFT为

$$X(k)=DFT[x_n]=\sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1}x_1(r)W_{N/2}^{rk}+W_N^k\sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1}x_2(r)W_{N/2}^{rk}=X_1(k)+W_N^kX_2(k)$$

,

$$k=0,1,...,N-1$$

上式中,$X_1(k)$与$X_2(k)$分别是$x_1(r)$及$x_2(r)$的$\frac{N}{2}$点DFT,一个N点DFT已分解成两个$\frac{N}{2}$点DFT.此外,
$X_1\left(k+\frac{N}{2}\right)=X_1(k)$,$X_2\left(k+\frac{N}{2}\right)=X_2(k)$.
因此

$$X(k)=X_1(k)+W_N^kX_2(k),k=0,1,...\frac{N}{2}-1$$
$$X\left(k+\frac{N}{2}\right)=X_1(k)-W_N^kX_2(k),k=0,1,...\frac{N}{2}-1$$

这样只要求出0到$\frac{N}{2}-1$区间的所有$X_1(k)$和$X_2(k)$值,即求出0到$N-1$区间内的所有$X(k)$.

由于$N=2^M$,因而$\frac{N}{2}$仍为偶数，可以进一步把每个$\frac{N}{2}$点子序列再按其奇偶部分分解为两个$\frac{N}{4}$点的子序列,

$$x_1(2r)=x_3(r)$$
$$x_1(2r+1)=x_4(r)$$
$$r=0,1,...\frac{N}{4}-1$$
$$X_1(k)=X_3(k)+W_{N/2}^kX_4(k)$$
$$X_1\left(k+\frac{N}{4}\right)=X_3(k)-W_{N/2}^kX_4(k)$$
$$k=0,1,...\frac{N}{4}-1$$

同理，$X_2(k)$也可进行同样的分解

$$X_2(k)=X_5(k)+W_{N/2}^kX_6(k)$$
$$X_2\left(k+\frac{N}{4}\right)=X_5(k)-W_{N/2}^kX_6(k)$$
$$k=0,1,...\frac{N}{4}-1$$

进一步具体化,过程如下图所示,$N=8=2^3$.

3.频域抽取法基2FFT算法

设序列点数为$N=2^m$，M为整数，则$x(n)$的DFT表示为

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk},k=0,1,...N-1$$

先把输入按n的顺序分成前后两部分,表示为

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk}=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}x(n)W_N^{nk}+\sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1}x(n)W_N^{nk}=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}\left[x(n)+x\left(n+\frac{N}{2}\right)W_N^{Nk/2}\right]W_N^{nk}$$

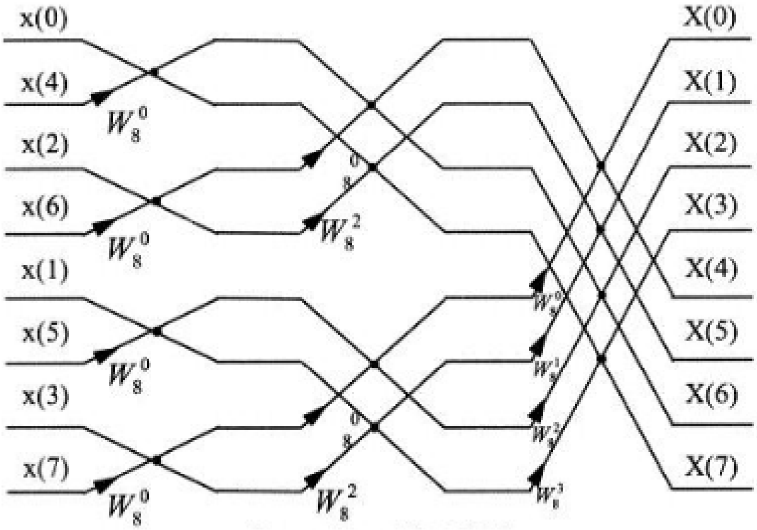

图 1 8点$DIT-FFT$运算流图

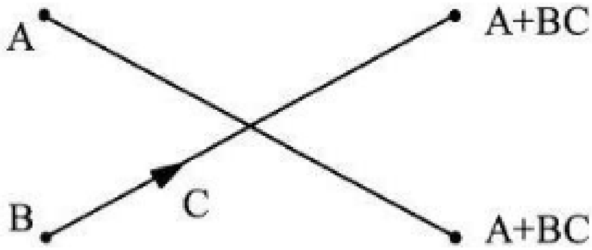

图 2 蝶形图

其中

$$W_N^{Nk/2} = (-1)^k, k = 0, 1, ...N-1$$

将$X(k)$分解成偶数组和奇数组.当k取偶数，即$k = 2r \left(r = 0, 1, ...\frac{N}{2} - 1\right)$时,有

$$X(2r) = \sum_{n=0}^{N/2-1} \left[x(n) + x\left(n + \frac{N}{2}\right)\right] W_{N/2}^{nr}$$

当k取奇数，即$k = 2r + 1 \left(r = 0, 1, ...\frac{N}{2} - 1\right)$时,有

$$X(2r+1) = \sum_{n=0}^{N/2-1} \left[x(n) - x\left(n + \frac{N}{2}\right)\right] W_{N/2}^{nr}$$

令

$$x_1(n) = x(n) + x\left(n + \frac{N}{2}\right)$$

$$x_2(n) = x(n) - x\left(n + \frac{N}{2}\right)$$

,

$$n=0,1,...\frac{N}{2}-1$$

$$X\left(2r\right)=\sum_{n=0}^{N\diagup 2-1}x_1\left(n\right)W_{N\diagup 2}^{nr}$$

$$X\left(2r+1\right)=\sum_{n=0}^{N\diagup 2-1}x_2\left(n\right)W_{N\diagup 2}^{nr}$$

由于$N=2^M$,因而$\frac{N}{2}$仍为偶数，继续将$\frac{N}{2}$点DFT分成偶数组和奇数组.

这种算法是对$X\left(k\right)$进行奇偶抽取分解的结果，所以称为频域抽取法FFT.DIT-FFT算法与DIF-FFT算法类似,不同的是DIF-FFT算法的输入序列为自然顺序,而输出为倒序排列.进一步具体化,过程如下图所示,$N=8=2^3$.

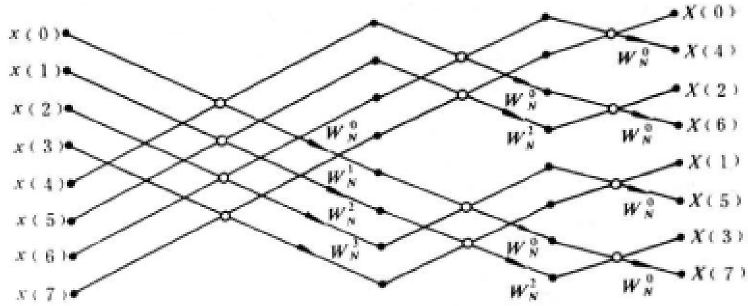

图 3 8点$DIF-FFT$运算流图

参考文献

[1] 杨军;丁洪伟.≪ 基于$FPGA$的FFT处理系统的研究与应用 ≫,2012,2-32.

[2] K.R.Rao;D.N.Kim,Fast Fourier Transform:Algorithms And Applications,2012,4-75.

[3] William H.Press,Saul A.Teukolsky,William T.Vetterling,NUMERICAL RECIPES The Art of Scientific computing,600-637.

[4] 蒋长锦,蒋勇.≪ 快速傅里叶变换及其C程序 ≫,2004,1-142.