王磊 2020211538

1. 任何一组人中都有两个人，它们在该组内认识的人数相等.

2. 任取 11 个整数，求证其中至少有两个数，它们的差是 10 的倍数.

3. 任取 $n+1$ 个整数，求证其中至少有两个数，它们的差是 n 的倍数.

4. 在 1.1 节例 4 中，证明存在连续的一些天，棋手恰好下了 k 盘棋（$k=1,2,\cdots,21$）. 问是否可能存在连续的一些天，棋手恰好下了 22 盘棋？

5. 将 1.1 节例 5 推广成从 $1,2,\cdots,2n$ 中任选 $n+1$ 个数的问题.

6. 从 $1,2,\cdots,200$ 中任取 100 个整数，其中之一小于 16，那么必有两个数，一个能被另一个整除.

7. 从 $1,2,\cdots,200$ 中取 100 个整数，使得其中任意两个数之间互相不能整除.

8. 任意给定 52 个数，它们之中有两个数，其和或差是 100 的倍数.

9. 在坐标平面上任意给定 13 个整点（即两个坐标均为整数的点），则必有一个以它们中的三个点为顶点的三角形，其重心也是整点.

1.

解：设组内共有n个人，每个人认识的人的数量为$a_1,a_2,...,a_n$，
则有$1 \leqslant a_1,a_2,...,a_n \leqslant n-1$，
共有n-1个数，根据鸽巢原理，
一定存在两个人认识的人的个数相等。

2.

解：设这11个数为$b_1,b_2,...,b_{11}$，
也可表示为$10k_1+a_1,10k_2+a_2,...,10k_{11}+a_{11}$，
其中k的取值为自然数，$0 \leqslant a_1,a_2,...,a_{11} \leqslant 9$，
根据鸽巢原理，一定存在$a_i=a_j(i \neq j)$，
此时$b_i-b_j=10(k_i-k_j)$，
故至少有两个数的差是10的倍数。

3.

解：设这n+1个数为$b_1,b_2,...,b_{n+1}$，
也可以表示为$nk_1+a_1,nk_2+a_2,...,nk_{n+1}+a_{n+1}$，
其中k的取值为自然数，$0 \leqslant a_1,a_2,...,a_{n+1} \leqslant n-1$，
根据鸽巢原理，一定存在$a_i=a_j(i \neq j)$，
故至少有两个数的差是n的倍数。

6.

解：将这两百个数按奇数因子分为100组，表示为

$1, 1 \times 2, 1 \times 4 \ldots$

$3, 3 \times 2, 3 \times 4 \ldots$

$5, 5 \times 2, 5 \times 4 \ldots$

……

197

199,

假设在有一个数小于16的情况下，这100个数都不能相互整除，

由于每组中的数都能相互整除，故若想取100个数相互不能整除，则要从这100组内每组取一个，

设取的数为：

$a_1 = 1 \times 2^{k_1}$

$a_3 = 3 \times 2^{k_3}$

…

$a_199 = 199 \times 2^{k_199}$

设那个小于16的数为$a_i = i \times 2^{k_i}$，

则$a_{3i} = 3i \times 2^{k_31}$,则必有$k_{3i} \leqslant k_i - 1$,

故$a_1 < 16$,$a_{3i} < 24, \ldots, a_{81i} < 81$,

而$a_{81i} = 81 \times (i \times 2^{k_{81i}}) \geqslant 81$,故矛盾，命题得证。

7.

解：将这两百个数按奇数因子分为100组，表示为

$1, 1 \times 2, 1 \times 4 \ldots$

$3, 3 \times 2, 3 \times 4 \ldots$

$5, 5 \times 2, 5 \times 4 \ldots$

……

197

199,

从每组中选一个数，即可保证互相之间不能整除。

9.

解：将13个点的x坐标表示为$k_i \times 3 + a_i$,则$a_i = 0, 1, 2$,

根据抽屉原理，这三组数中必有一组至少包含五个数，在这五个数中任取三个，他们的重心为整点，

他们的y值也可以这样分为三组，在一组里取三个数或者三组每组取一个数都能保证重心的y坐标为整数，

即证。