

23.

解：

$$(1) r_n \leq n(r_{n-1} - 1) + 2$$

有 $r_n \leq n(r_{n-1} - 1) + 2$ 个点，使其成为完全图后，随机染 n 种颜色，
从中选取1个点，考虑剩下的点与其连线的染色情况，
则有一种颜色的边有 r_{n-1} 条，

- 若 r_{n-1} 条中有 n 种染色，则必有一个同色三角形，
- 若 r_{n-1} 条中仅有 $n-1$ 种染色，则根据 r_{n-1} 的定义，必有一同色三角形。

即证。

(2)

(3) 对 K_7 进行三染色，选取一个点，则该点与其他点的连线至少有6条边为某一种颜色，

- 若该6点中没有这种颜色，由于 $r(3,3)=6$ ，必有一个同色三角形，
- 若六个点中有这种颜色，则存在这种颜色的三角形。

即证。