

11. 证明:一个有理数的十进制数展开式自某一位后必是循环的.

12. 证明:对任意的整数 N ,存在着 N 的一个倍数,使得它仅由数字 0 和 7 组成 (例如, $N = 3$,我们有 $3 \times 259 = 777$; $N = 4$,有 $4 \times 1925 = 7700$; $N = 5$,有 $5 \times 14 = 70$;……).

13. (1) 在一边长为 1 的等边三角形中任取 5 个点,则其中必有两点,该两点的距离至多为 $\frac{1}{2}$;

(2) 在一边长为 1 的等边三角形中任取 10 个点,则其中必有两点,该两点的距离至多为 $\frac{1}{3}$;

(3) 确定 m_n ,使得在一边长为 1 的等边三角形中任取 m_n 个点,其中必有两点,它们之间的距离至多为 $\frac{1}{n}$.

22. 平面上有 6 个点,任何三点都是一个不等边三角形的顶点,则这些三角形中,有一个三角形的最短边是另一个三角形的最长边.

11.

解:

12.

解:

13.

解:

(1) 取三条边的中点各自相连,则原等边三角形被分割为四个边长为 $\frac{1}{2}$ 的小等边三角形,根据鸽巢原理,至少有两个点在同一个等边三角形内,两个点间的距离至多为 $\frac{1}{2}$,原命题得证.

(2) 取三条边的三等分点各自相连,则原等边三角形被分割为九个边长为 $\frac{1}{3}$ 的小等边三角形,根据鸽巢原理,至少有两个点在同一个等边三角形内,两个点间的距离至多为 $\frac{1}{3}$,原命题得证.

(3) 令 $m_n = n^2 + 1$,
取三条边的 n 等分点各自相连,
则原等边三角形被分割为 n^2 个边长为 $\frac{1}{n}$ 的小等边三角形,

根据鸽巢原理，至少有两个点在同一个小等边三角形内，
两个点间的距离至多为 $\frac{1}{n}$ 。

22.

解：对六个点两两相连，可以得到六个顶点的完全图 K_6 ，
对其中所有三角形的最长边染红色，其他边不染色，
易知必然存在红色三角形，此三角形的最短边即满足要求。