Part 1 数学模型

1.1 问题简述

带时间窗取送货车辆路径规划问题用是有限的车辆服务一系列需求，每个需求要求在某一位置取货并送至另一位置交货。我们需要将一对位置（一个需求）交由同一车辆访问，并保证先取货后送货，同时还需要满足载重和时间窗要求。

1.2 假设、参数和变量说明

重要假设

（1）允许卡车在节点时间窗开始前到达，但只有时间窗开始时才能为节点提供服务（取货或者送货）

（2）需求不一定可以由所有的车辆服务，一部分需求只能由特定的一部分车辆服务（载重、车辆体积等原因）

（3）每辆车有载重限制，有自己的出发节点和结束节点（两者不必相同，节点均有自己的时间窗，算例中其时间窗均设为和规划期一致）；车辆的出发节点不一定相同

（4）变形：车辆具有不同的速度

参数（$\boldsymbol{n}$个需求，$\boldsymbol{m}$架车辆）

$P=\{1,\dots,n\}$	提取节点集合
$D=\{n+1,\dots,n+n\}$	交付节点集合
$(i,i+n)$	需求i
$K,\lvert K\rvert=m$	车辆集合
K_i	可服务需求i的车辆集合
P_k	车辆k的可访问提取节点集合
D_k	车辆k的可访问交付节点集合
$k\in K_i \Leftrightarrow i\in P_k \wedge i\in D_k$	对应关系
$T_k=2n+k, T_k'=2n+m+k$	车辆k的出发节点和结束节点
C_k, V_k	车辆k的载重及速度
$[a_i,b_i]$	节点i的时间窗
s_i	在节点i的服务时间
$l_i; l_i\ge 0\ for\ i\ \in P, l_i=-l_{i-n}\ for\ i\ \in D$	在节点i的载重变化
d_{ij}	节点i和节点j之间的距离

图与节点集合

$G(V,A), N=P\cup D, V=N\cup\{T_1,\dots,T_m\}\cup\{T_1',\dots,T_m'\}, A=V\times V$

$G_k(V_k,A_k), N_k=P_k\cup D_k, V_k=N_k\cup\{T_k\}\cup\{T_k{}'\}, A_k=V_k\times V_k$

变量设置

$x_{ijk}; i,j\in V, k\in K$;0-1 型	车辆k经过 (i,j)为 1，否则为 0
$S_{ik}; i\in V, k\in K$;连续型，非负	车辆k开始服务节点i的时间
$L_{ik}; i\in V, k\in K$;连续型，非负	车辆k服务节点i之后的载重
$z_i, i\in P$;0-1 型	需求i被满足为 1，否则为 0

目标及约束条件

$$\min \alpha \sum_{k\in K}\sum_{(i,j)\in A} d_{ij}x_{ijk} + \beta \sum_{k\in K}\left(S_{\tau'_k,k} - a_{\tau_k}\right) + \gamma \sum_{i\in P} z_i \tag{1}$$

Subject to:

$$\sum_{k\in K_i}\sum_{j\in N_k} x_{ijk} + z_i = 1 \quad \forall i \in P \tag{2}$$

$$\sum_{j\in V_k} x_{ijk} - \sum_{j\in V_k} x_{j,n+i,k} = 0 \quad \forall k\in K,\ \forall i \in P_k \tag{3}$$

$$\sum_{j\in P_k\cup\{\tau'_k\}} x_{\tau_k,j,k} = 1 \quad \forall k \in K \tag{4}$$

$$\sum_{i\in D_k\cup\{\tau_k\}} x_{i,\tau'_k,k} = 1 \quad \forall k \in K \tag{5}$$

$$\sum_{i\in V_k} x_{ijk} - \sum_{i\in V_k} x_{jik} = 0 \quad \forall k\in K,\ \forall j \in N_k \tag{6}$$

$$x_{ijk} = 1 \Rightarrow S_{ik} + s_i + t_{ij} \le S_{jk} \quad \forall k\in K,\ \forall (i,j)\in A_k \tag{7}$$

$$a_i \le S_{ik} \le b_i \quad \forall k\in K,\ \forall i \in V_k \tag{8}$$

$$S_{ik} \le S_{n+i,k} \quad \forall k\in K,\ \forall i\in P_k \tag{9}$$

$$x_{ijk} = 1 \Rightarrow L_{ik} + l_j \le L_{jk} \quad \forall k\in K,\ \forall (i,j)\in A_k \tag{10}$$

$$L_{ik} \le C_k \quad \forall k\in K,\ \forall i\in V_k \tag{11}$$

$$L_{\tau_k k} = L_{\tau'_k k} = 0 \quad \forall k \in K \tag{12}$$

模型目标(1)为最小化所有车辆的行驶距离总和、客户的等待时间总和、未满足需求数；

约束(2)为需求满足约束；

约束(3)为限制需求的pickup和delivery只能由同一辆车服务；

约束(4) (5)为车辆的开始约束和结束约束；

约束(6)为流量平衡约束；

约束(7)(8)为时间约束（可消除子圈）；

约束(9)为先取后送约束；

约束(10)(11)(12)为载重约束。

约束完善与变形

$$S_{ik} + s_i + d_{ij}/V_k \le S_{jk} + \left(1 - x_{ijk}\right) * M; \forall k \in K, \forall (i,j) \in A_k \tag{7'}$$

$$L_{ik} + l_j \le L_{jk} + \left(1 - x_{ijk}\right) * M; \forall k \in K, \forall (i,j) \in A_k \tag{10'-1}$$

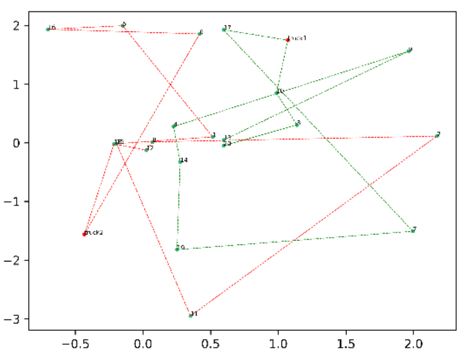
$$L_{ik} + l_j \ge L_{jk} - \left(1 - x_{ijk}\right) * M; \forall k \in K, \forall (i,j) \in A_k \tag{10'-2}$$

1.4 模型实现代码

1.5 测试及结果

（1）算例生成

（2）求解结果



1.6 GitHub 仓库

最近我在 GitHub 上建了一个仓库（Extension_of_the_vehicle_routing_problem），将分享 VRP 问题及其扩展的一些学习实现代码，包括模型复现、主流算法实现等。欢迎大家 Star 和 Fork！

https://github.com/wangqianlongucas/Extension_of_the_vehicle_routing_problem.git

现在仓库里模块化了代码（输入数据，模型，输出），还包括算例生成模块和文件夹生成模块。

1.7 参考文献

Ropke, Stefan, and David Pisinger. "An adaptive large neighborhood search heuristic for the pickup and delivery problem with time windows." *Transportation science* 40.4 (2006): 455-472.