《数学公式 8 天记忆训练营》

第 3 天

(先阅读全文，再抄写标黄公式)

绝对值

一. 绝对值定义

1. 实数 a 的绝对值定义为：$|a|=\begin{cases} a & a\geq 0 \\ -a & a<0 \end{cases}$

2. 正数的绝对值是它本身；负数的绝对值是它的相反数；零的绝对值还是零。

3. 绝对值的几何意义：表示一个实数 a 在数轴上所对应的点到原点的距离。

其中：$|x|=a$ 表示与原点的距离为 a 的点；$|x-b|=a$ 表示与 b 点的距离为 a。

二. 绝对值的性质

1. 对称性：$|-a|=|a|$，即互为相反数的两个数绝对值相等。

2. 等价性：$\sqrt{a^2}=|-a|$，$|-a|^2=a^2$ （$a\in R$）。

3. 自比性：$-|-a|\leq -a\leq |-a|$，进而推理可得$\frac{|x|}{x}=\frac{x}{|x|}=\begin{cases} 1,(x>0) \\ -1,(x<0) \end{cases}$

4. 非负性：即$|a|\geq 0$，任何实数 a 的绝对值非负，其他具有非负性的因素：平方数（或偶次乘方），如a^2,a^4；开偶次根号,$\sqrt{a},\sqrt[4]{a}$。

5. 同号异号性质：$|x+y|=|x|+|y|\Rightarrow xy\geq 0$

$$|x-y|=|x|+|y|\Rightarrow xy\leq 0$$

$$|x-y|<|x|+|y| \Rightarrow xy>0$$

$$|x+y|<|x|+|y| \Rightarrow xy<0$$

6. 三角不等式：$|a|-|b| \le |a+b| \le |a|+|b|$

（其中：左边等号成立条件：$ab \le 0$ 且 $|a| \ge |b|$； 右边等号成立条件：$ab \ge 0$）

推论：$|a|-|b| \le |a-b| \le |a|+|b|$，此时，左边等号成立条件为 $ab \ge 0$ 且$|a| \ge |b|$；右边等号成立条件为 $ab \le 0$。

三．两个特殊绝对值模型

1. 和模型：$f(x)=|ax-m|+|ax-n|$，此种函数表达式，没有最大值，只有最小值。且在两个零点之间取得最小值$|m-n|$。图像的表现为两头高，中间平。

2. 差模型：$f(x)=|ax-m|-|ax-n|$，此种函数表达式，既有最大值，也有最小值，分别在零点的两侧取得且两个最值为$\pm|m-n|$。图像的表现为两头平，中间斜。

例： $f_{(x)}=|x-1|-|x-3|$ $max=2$ $min=-2$

四．基本不等式

$|x|<a(a>0)$的实数所有对应的就是全部与原点距离小于 a 的点

即$|x|<a \Rightarrow -a<x<a$ （$a>0$）；同理可得$|x|>a \Rightarrow x<-a$ 或 $x>a$ （$a>0$）

总结：大于取两边，小于取中间

比与比例

一. 比

两个数相除，又称为这两个数的比，即 $a:b=\frac{a}{b}$；

二. 比例的基本性质

1. 两个外项的积等于两个内项的积，即 $a:b=c:d \Leftrightarrow ad=bc$

2. 比的前项后项同时乘或除以相同的数（除 0），比值不变；

3. $a:b=c:d \Leftrightarrow b:a=d:c \Leftrightarrow a:c=b:d \Leftrightarrow c:a=d:b$

三. 比例的基本定理

1. 合比定理：$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$

2. 分比定理：$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$

3. 合分比定理：$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a\pm mc}{b\pm md}$

4. 等比定理：$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{a+c+e}{b+d+f}(b+d+f\neq 0)$

平均值

一. 算术平均值

设 n 个数 $x_1,x_2,\cdots x_n$，称 $\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$ 为这 n 个数的算术平均值，简记为 $\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}$

二. 几何平均值

设 n 个正整数 $x_1,x_2,\cdots x_n$，称 $x_g=\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$ 为这 n 个数的几何平均值，简记为 $x_g=\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}x_i}$

（几何平均值是相对于正数而言）

三. 基本定理

当$x_1, x_2,\cdots x_n$为 n 个正数时，他们的算术平均值不小于几何平均值

即:$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$ ，当且仅当$x_1 = x_2 = \cdots = x_n$时，等号成立。

四. 其他定理

1. 若 $a>0, b>0$,则$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$当且仅当 $a=b$ 时等号成立。

2. 当 $a+\frac{1}{a} \geq 2, (a>0)$,即对正数而言，互为倒数的两个数之和不小于 2，且当 $a=1$ 时取得最小值是 2。

代数式

一. 代数式的分类

- **代数式**
  - **有理式**
    - **整式**
      - **单项式**
      - **多项式**
    - **分式**
  - **无理式**

二. 整式（单项式、多项式）

1. 常用公式

- 平方差公式：$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$
- 完全平方公式：$(a \pm b)^2=a^2 \pm 2ab+b^2$
- 立方和与立方差公式：$a^3 \pm b^3=(a \pm b)(a^2 \mp ab+b^2)$

- 三元完全平方和公式：$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$
- 完全立方和公式：$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
- $(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2=2[a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac]$

2. 多项式因式的分解

把一个多项式表示成几个整式之积的形式，叫作多项式的因式分解。在指定数集内因式分解时，通常要求最后结果中的每一个因式均不能在该数集内继续分解。多项式因式分解常用方法如下：

方法一：提公因式法

方法二：公式法（乘法公式从右至左，即为因式分解公式）

方法三：求根法

若方程$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n=0$

有 n 个根$x_1,x_2,\cdots,x_n$，则多项式$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n=a_0(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n)$

方法四：二次三项式的十字相乘法

方法五：分组分解法

方法六：待定系数法

3. 余数定理和因式定理

①余数定理：$F(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n$，则 $F(x)$除以一次因式$(x-a)$所得的余数一定是 $F(a)$；因为 $F(x)=(x-a)g(x)+r$，令 $x=a$，必有 $F(a)=r$.

②因式定理：多项式 $F(x)$含有因式$(x-a)$，即 $F(x)$被$(x-a)$整除的充要条件是 $F(a)=0$（即 r=0）

三. 分式及运算

1. 定义：若 A、B 表示两个整式，且 B≠0，B 中含有字母，则称$\frac{A}{B}$是分式。分子和分母没有正次数的公因式的分式，称为最简分式（或既约分式）.

2. 基本性质：分式的分子和分母同时乘以（或除以）同一个不为零的式子，分式的值不变，即有$\frac{A}{B}=\frac{mA}{mB}(m\neq 0)$.

扫码了解活动详情