《数学公式 8 天记忆训练营》

第 1 天

(先阅读全文，再抄写标黄公式)

一. 数列的定义

通常简记为$\{a_n\}$

二. 数列的通项公式

a_n与 n 之间的关系，一般用$a_n = f(n)$来表示

三. 数列的分类

①有穷数列和无穷数列

②单调数列、摆动数列、常数列

四. a_n与S_n的关系

$$a_n = \begin{cases} s_1 \quad (n=1) \\ s_n - s_{n-1} (n \ge 2) \end{cases}$$

等差数列

1. 等差数列的定义

$a_n - a_{n-1} = d\left(n \in N^*,\ n \ge 2\right)$或$a_{n+1} - a_n = d(n \in N^*)$

2. 等差数列的通项公式

$a_n = a_1 + (n-1)d = a_1 + dn - d = dn + a_1 - d$

⇓ ⇓

$d = \dfrac{a_n - a_1}{n-1}$ a_n与 n 的一次函数关系，其斜率为 d，在 y 轴上的截距为$a_1 - d$

$a_n = a_m + (n-m)d$

$$\Downarrow$$

$$d=\frac{a_n-a_m}{n-m}\quad(n\neq m)$$

3. 等差数列的增减性

$d>0$　　递增数列

$d<0$　　递减数列

$d=0$　　常数列

4. 等差中项

$A=\frac{a+b}{2}\Leftrightarrow a,A,b$ 三个数构成等差数列

5. 等差数列的前 n 项和公式（重点）

$$S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=\frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n$$

(当公差 d 不为 0 时，可将其抽象为关于 n 的二次函数 $f(n)=\frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n$)

6. 等差数列的性质

① 若公差 $d>0$，次数列为递增数列；若公差 $d<0$，次数列为递减数列；若 $d=0$，次数列为常数列。

② 有穷等差数列中，与首末两项距离相等的两项和相等，并且等于首末两项之和；特别的若项数为奇数，还等于中间项的 2 倍。

③ 若 $m,n,p,k\in N^*$，且 $m+n=p+k$，则$a_m+a_n=a_p+a_k$，特别的若 $m+n=2p$，则$a_m+a_n=2a_p$ 此条性质可推广到多项的情形，但要注意等式两边下标和相等，并且两边和的项数相等。

④ 等差数列每隔相同项抽出来的项按照原来的顺序排列，构成新数列依然是等差数列，但剩下的项不一定是等差数列。

⑤ 等差数列连续几项之和构成的新数列依然是等差数列，即S_n,$S_{2n}-S_n$,$S_{3n}-S_{2n}$⋯是等差数列，$d^*=n^2d$（n代表片段里面的元素个数）

总结为：片段和公式$(S_{2n}-S_n)-S_n=n^2d$

⑥ 若数列$\{a_n\}$和数列$\{b_n\}$是等差数列，则$\{ma_n+kb_n\}$也是等差数列，其中m,k为常数。

⑦ 项数为偶数 $2n$的等差数列a_n，有$S_{2n}=n(a_1+a_{2n})$

7. 等差数列的判定方法

① 定义法：$a_n-a_{n-1}=d\Leftrightarrow\{a_n\}$是等差数列；

② 通项公式法：$a_n=pn+q\Leftrightarrow\{a_n\}$是等差数列；

③ 中项公式法：$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}\Leftrightarrow\{a_n\}$是等差数列；

④ 前 n 项和公式法：$S_n=An^2+Bn\Leftrightarrow\{a_n\}$是等差数列。

等比数列

1. 等比数列的定义

$\frac{a_n}{a_{n-1}}=q(n\in N^*,n\geq 2)$或者$\frac{a_{n+1}}{a_n}=q(n\in N^*)$

（公比不能为 0；当 $q=1$ 时，数列为常数列）

2. 等比数列的通项公式

$$a_n=a_1q^{n-1}=a_kq^{n-k}=\frac{a_1}{q}q^n$$

3. 等比数列的增减性

$\begin{cases}a_1>0\\q>1\end{cases}$或$\begin{cases}a_1<0\\0<q<1\end{cases}\Leftrightarrow\{a_n\}$为递增数列

$\begin{cases}a_1>0\\0<q<1\end{cases}$或$\begin{cases}a_1<0\\q>1\end{cases}\Leftrightarrow\{a_n\}$为递减数列

$q=1 \Leftrightarrow \{a_n\}$为常数列

$q<0 \Leftrightarrow \{a_n\}$为摆动数列

4. 等比中项

若 G 是 a 与 b 的等比中项，则$G^2=ab$

5. 等比数列的前 n 项和公式（重点）

当 $q \neq 1$ 时，$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{a_1-a_nq}{1-q}$

当 $q=1$ 时，$S_n=na_1$

特点：当 $q \neq 0$，且 $q \neq 1$ 可以化为：$S_n=\frac{a_1}{1-q}-\frac{a_1}{1-q}q^n$

6. 等比数列的性质

① 有穷等比数列中，与首末两项等距离的两项积相等，并且等于首末两项之积；特别地若项数为奇数，还等于中间项的平方;

② 若 $m,n,p,k \in N^{*}*$，且 $m+n=p+k$，则$a_m a_n=a_p a_k$，特别地若 $m+n=2p$，则$a_m a_n={a_p}^2$;

③ 等比数列每隔相同项抽出来的项按照原来的顺序排列，构成新数列依然是等比数列，但剩下的项不一定是等比数列;

④ $\{\lambda a_n\}(a \neq 0)$，$\{|a_n|\}$皆为等比数列;

⑤ 等比数列连续几项之和构成的新数列依然是等比数列，即$S_n,S_{2n}-S_n,S_{3n}-S_{2n}$是等比数列，即$q^*=q^n$;

总结为：片段和公式,$\frac{S_{2n}-S_n}{S_n}=q^n$

⑥ 若数列$\{a_n\}$和数列$\{b_n\}$是等比数列，则$\{ma_nb_n\}$，$\left\{\frac{ma_n}{b_n}\right\}$也是等比数列，其中$m$为常数。

7. 等比数列的判定方法

① 定义法：$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \mathrm{q} \Leftrightarrow \{a_n\}$是等比数列

② 通项公式法：$a_n = cq^n \Leftrightarrow \{a_n\}$是等比数列

③ 中项公式法：${a_{n+1}}^2 = a_n a_{n+2} \Leftrightarrow \{a_n\}$是等比数列

④ 前 n 项和公式法：$S_n = A - Aq^n \Leftrightarrow \{a_n\}$是等比数列