《数学公式 8 天记忆训练营》

第 2 天

（先阅读全文，再抄写标黄公式）

数列求和

1. 裂项相消法

$$\frac{1}{(n-1)n}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

总结如下：

$$\frac{1}{(大)(小)}=\frac{1}{大-小}\left(\frac{1}{小}-\frac{1}{大}\right)$$

特殊列项：

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$

1. 错位相减法

1. 列举；
2. 乘公比；
3. ①-②；
4. 等比求和；
5. 化简

例：$a_n=(2n-1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$,求$\{a_n\}$前$n$项和.

【列举】

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$S_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \cdots + (2n-1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad ①$$

【乘公比】

$$\frac{1}{2}S_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + (2n-1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad ②$$

【①-②】

$$\frac{1}{2}S_n = 1 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \cdots + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - (2n-1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

【等比求和】

$$\frac{1}{2}S_n = 1 + 2 \cdot \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1^{n-1}}{2}\right)}{1 - \frac{1}{2}} - (2n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

【化简】

$$\frac{1}{2}S_n = 1 + 2 \cdot \left(1 - \frac{1^{n-1}}{2}\right) - (2n-1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$S_n = (-4n-6) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + 6$$

特殊公式总结

1. 若$\{a_n\}$是等差数列，则$S_n, S_{2n}-S_n, S_{3n}-S_{2n}\cdots$也是等差数列，新等差数列的公差$d^* = n^2 d$;

2. 若$\{a_n\}$是等比数列，则$S_n, S_{2n}-S_n, S_{3n}-S_{2n}\cdots$也是等比数列，新等比数列的公比$q^* = q^n$；

3. 若$\{a_n\}$是等差数列,且已知 Sm=n，Sn=m，那么 Sm+n=-(m+n)；

4 . 若$\{a_n\}$是等差数列，且已知 Sm=Sn，那么 Sm+n=0；

5. 若$\{a_n\}$是等差数列,且已知$a_m = n$，$a_n = m$，那么$a_{m+n} = 0$；

6. 若等差数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的前 n 项和分别是S_n和T_n，则有$\frac{a_k}{b_k} = \frac{S_{2k-1}}{T_{2k-1}}$

推导：$\frac{a_k}{b_k} = \frac{2a_k}{2b_k} = \frac{a_1+a_{2k-1}}{b_1+b_{2k-1}} = \frac{\frac{a_1+a_{2k-1}}{2}(2k-1)}{\frac{b_1+b_{2k-1}}{2}(2k-1)} = \frac{S_{2k-1}}{T_{2k-1}}$

7. $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

8. $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

9. $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

算术与代数

一. 实数的分类

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\left\{\begin{array}{l}\text{正有理数}\begin{cases}\text{正分数}\\\text{正整数}\end{cases}\\0\\\text{负有理数}\begin{cases}\text{负分数}\\\text{负整数}\end{cases}\end{array}\right\}\text{有限小数，无限循环小数}\\\text{无理数}\left\{\begin{array}{l}\text{正无理数}\\\text{负无理数}\end{array}\right\}\text{无限不循环小数}\end{cases}$$

二. 数的概念和性质

1. **自然数（N）：** 零和正整数统称为自然数。

2. **整数（Z）：** 正整数、零、负整数，统称为整数。

3. **分数：** 将单位“1”平均分成若干份，表示这样的一份或几份的数叫做分数。

4. **百分数：** 表示一个数是另一个数的百分之几的数叫做百分数，通常用“%”表示。

5. **质数：** 大于 1 的正整数，如果除了 1 和自身之外，没有其他约数的数就称为质数（素数）。

6. **合数：** 一个正整数除了能被 1 和自身整除之外，还能被其他正整数整除，这样的正整数就称为合数。

7. **倍数与约数**：如果有一个自然数 a 能被自然数 b 整除，则称 a 为 b 的倍数，称 b 为 a 的约数。

8. **公约数与最大公约数**：几个自然数公有的约数，称为这几个自然数的公约数；公约数中最大的一个公约数，称为这几个自然数的最大公约数。

9. **公倍数与最小公倍数**：几个自然数共有的倍数称为这几个自然数的公倍数；其中除 0 以外最小的一个公倍数，称为这几个数的最小公倍数。

10. **奇数**：不能被 2 整除的整数。

11. **偶数**：能被 2 整除的整数，包括 0。

12. **偶数奇数运算性质：**

奇数±奇数=偶数， 奇数±偶数=奇数， 偶数±偶数=偶数；

奇数×奇数=奇数， 奇数×偶数=偶数， 偶数×偶数=偶数。

三. 实数的运算

乘方与开方（乘积与分式的方根、根式的乘方与化简）：

$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$，$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

$(ab)^x = a^x b^x$，$(a^x)^y = a^{xy}$

$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$，$(\frac{a}{b})^m = \frac{a^m}{b^m}$，$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$

$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$，$\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}(a \geq 0)$

注意：$a^0 = 1(a \neq 0)$

扫码了解活动详情