Dijkstra 算法

摘要：算法解决了从图中某一点分别到图中其余各点的所有最短路值。算法按照非递减顺序每次收录一个距离最小的点，然后看他的所有邻接点是否受到影响，如果该邻接点没被收录且受到了影响（有更短的距离值），那么更新它即可。当所有点都被收录时算法结束。

一、算法介绍

迪杰斯特拉算法为了解决有权图的单源最短路问题，即从图中任意一点出发，到达图中其余各点的最短距离。这里的最短距离，此距离常指欧氏距离。也可以理解为最小代价。即从某一点出发，到达其余各点的最小代价。

二、算法思想

设 G=(V,E)是一个带权有向图，把图中顶点集合 V 分成两组，第一组为已求出最短路径的顶点集合（用 S 表示，初始时 S 中只有一个源点，以后每求得一条最短路径，就将加入到集合 S 中，直到全部顶点都加入到 S 中，算法就结束了），第二组为其余未确定最短路径的顶点集合（用 U 表示），按最短路径长度的递增次序依次把第二组的顶点加入 S 中。在加入的过程中，总保持从源点 v 到 S 中各顶点的最短路径长度不大于从源点 v 到 U 中任何顶点的最短路径长度。此外，每个顶点对应一个距离，S 中的顶点的距离就是从 v 到此顶点的最短路径长度，U 中的顶点的距离，是从 v 到此顶点只包括 S 中的顶点为中间顶点的当前最短路径长度。

三、算法步骤

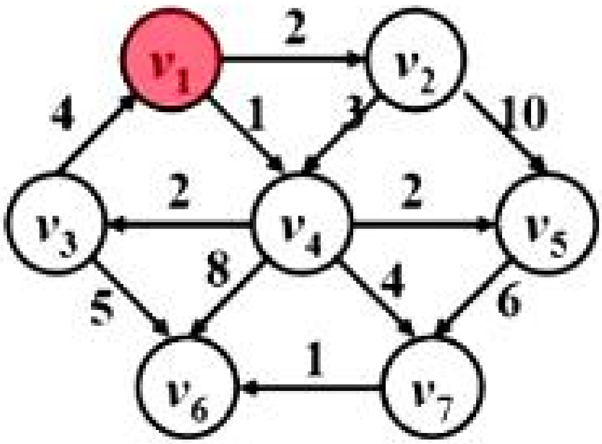
1、初始时，S 只包含源点，即 S＝{v}，v 的距离为 0。U 包含除 v 外的其他顶点，即:U={其余顶点}，若 v 与 U 中顶点 u 有边，则<u,v>正常有权值，若 u 不是 v 的出边邻接点，则<u,v>权值为∞。

2、从 U 中选取一个距离 v 最小的顶点 k，把 k，加入 S 中（该选定的距离就是 v 到 k 的最短路径长度）。

3、以 k 为新考虑的中间点，修改 U 中各顶点的距离；若从源点 v 到顶点 u 的距离（经过顶点 k）比原来距离（不经过顶点 k）短，则修改顶点 u 的距离值，修改后的距离值的顶点 k 的距离加上边上的权。

4、重复步骤 b 和 c 直到所有顶点都包含在 S 中。

四、示例



问题叙述：如图所示，求以 v1 为起始点，分别达到各点的最短距离和路径

问题解决：

1、设置数组 dist[v]表示从起点到达 v 点的最短距离，设置数组 path[v]表示到达 v 点的上

一个顶点。初始化设置所有 dist=∞，path=-1。

	v1	v2	v3	v4	v5	v6	v7
dist	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
path	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1

2、从起点 v1 开始，因为 v1 到自己的距离为 0，所以 dist[v1]=0。v1 到 v2 和 v4 的距离分别为 2 和 1，此时，dist[v2]=2, dist[v4]=1, path[v2]=v1, path[v4]=v1。

	v1	v2	v3	v4	v5	v6	v7
dist	0	2	∞	1	∞	∞	∞
path	-1	V1	-1	V1	-1	-1	-1

3、下面进入 dijkstra 算法，因为 v1 已经在 S 中，所以下面选择未收录顶点中 dist 最小的 v4 进入 S，v4 有 v3,v5,v6,v7 四个邻接点，对于每个临界点进行如下判断：首先判断该点是否已经在 S 中，若已经在 S 中则跳过该点继续判断下个点；若该点 vi（i 属于 3、5、6、7）不在 S 中，则判断经由 v4 到达该点的距离+dist[v4]是否比 dist[vi]更小，取其中更小的数值更新 dist[vi]，并将 path[vi]更新为 v4。

	v1	v2	v3	v4	v5	v6	v7
dist	0	2	3	1	3	9	5
path	-1	V1	V4	V1	V4	V4	V4

4、当 v4 的所有邻接点均判断完成后，再次选择新的顶点进入 S。观察发现 v2 是未收录的顶点中 dist 最小的，所以将 v2 加入 S。v2 有两个邻接点 v4 和 v5，其中 v4 已在 S 中，不与讨论，只看 v5,此时计算原点经过 v2 到 v5 的距离是 v2 到 v5 的距离+dist[v2]=12， 比 v5 现在的 dist[v5]还要大，因此 dist[v5]不变，path[v5]也不变。

	v1	v2	v3	v4	v5	v6	v7

dist	0	2	3	1	3	9	5
path	-1	V1	V4	V1	V4	V4	V4

5、当 v2 的所有邻接点判断完后，从剩余的未被收录到 S 中的顶点里选择 dist 最小的 v3（或者 v5）加入 S。v3 的邻接点有 v1 和 v6，其中 v1 已经在 S 中，只需要判断 v6，从原点经过 v3 到 v6 的距离等于从 v3 到 v6 的距离+dist[v3]=8。比 v6 现在的 dist[v6]的值要小，所以更新 dist[v6]=8，并且更新 path[6]=v3。

	v1	v2	v3	v4	v5	v6	v7
dist	0	2	3	1	3	8	5
path	-1	V1	V4	V1	V4	V3	V4

6、当 v3 的所有邻接点判断完后，从剩余的未被收录到 S 中的顶点里选择 dist 最小的 v5 加入到 S。v5 的邻接点只有 v7，从原点经过 v5 到 v7 的距离等于 v5 到 v7 的距离+dist[v5]=9。比现在 v7 的距离 dist[v7]还大，所以 dist[v7]不变，path[v7]不变。

	v1	v2	v3	v4	v5	v6	v7
dist	0	2	3	1	3	8	5
path	-1	V1	V4	V1	V4	V3	V4

7、当 v5 的所有邻接点判断完后，从剩余的未被收录到 S 中的顶点里选择 dist 最小的 v7 加入到 S，v7 的邻接点只有 v6，从原点经过 v7 到 v6 的距离等于 v7 到 v6 的距离+dist[v7]=6，比现在的 dist[6]要小，所以更新 dist[v6]=6，path[v6]=v7。

	v1	v2	v3	v4	v5	v6	v7
dist	0	2	3	1	3	6	5
path	-1	V1	V4	V1	V4	V7	V4

8、当 v7 的所有邻接点判断完后，只剩下 v6 了，将 v6 加入 S 中。此时 v6 已经没有邻接

点了。故此时算法结束。

	v1	v2	v3	v4	v5	v6	v7
dist	0	2	3	1	3	6	5
path	-1	V1	V4	V1	V4	V7	V4

五、代码（C 语言）

```
/* 邻接矩阵存储 - 有权图的单源最短路算法 */

Vertex FindMinDist( MGraph Graph, int dist[], int collected[] )
{ /* 返回未被收录顶点中 dist 最小者 */
    Vertex MinV, V;
    int MinDist = INFINITY;

    for (V=0; V<Graph->Nv; V++) {
        if ( collected[V]==false && dist[V]<MinDist) {
            /* 若 V 未被收录，且 dist[V]更小 */
            MinDist = dist[V]; /* 更新最小距离 */
            MinV = V; /* 更新对应顶点 */
        }
    }
    if (MinDist < INFINITY) /* 若找到最小 dist */
        return MinV; /* 返回对应的顶点下标 */
    else return ERROR;  /* 若这样的顶点不存在，返回错误标记 */
}

bool Dijkstra( MGraph Graph, int dist[], int path[], Vertex S )
{
    int collected[MaxVertexNum];
    Vertex V, W;

    /* 初始化：此处默认邻接矩阵中不存在的边用 INFINITY 表示 */
    for ( V=0; V<Graph->Nv; V++ ) {
        dist[V] = Graph->G[S][V];
        if ( dist[V]<INFINITY )
            path[V] = S;
        else
            path[V] = -1;
        collected[V] = false;
    }
    /* 先将起点收入集合 */
```

```
dist[S] = 0;
collected[S] = true;

while (1) {
    /* V = 未被收录顶点中 dist 最小者 */
    V = FindMinDist( Graph, dist, collected );
    if ( V==ERROR ) /* 若这样的 V 不存在 */
        break;      /* 算法结束 */
    collected[V] = true;  /* 收录 V */
    for( W=0; W<Graph->Nv; W++ ) /* 对图中的每个顶点 W */
        /* 若 W 是 V 的邻接点并且未被收录 */
        if ( collected[W]==false && Graph->G[V][W]<INFINITY ) {
            if ( Graph->G[V][W]<0 ) /* 若有负边 */
                return false; /* 不能正确解决，返回错误标记 */
            /* 若收录 V 使得 dist[W]变小 */
            if ( dist[V]+Graph->G[V][W] < dist[W] ) {
                dist[W] = dist[V]+Graph->G[V][W]; /* 更新 dist[W] */
                path[W] = V; /* 更新 S 到 W 的路径 */
            }
        }
} /* while 结束*/
return true; /* 算法执行完毕，返回正确标记 */
```