

# 鞅与一类关于停时的概率与期望问题

广州大学附属中学 彭博

## 摘要

在信息学竞赛中，以随机过程作为背景的题目时有发生，这类题目往往要求解关于停止时间的期望与概率，然而由于其模型多变，推导一般没有固定的规律，因此这类问题难以通过一种通用的方法进行解决。本文从随机过程中的鞅的概念出发，介绍鞅的停时定理，并针对离散随机过程中与停时相关的问题，提出解决这类问题中一种适用范围较广的思想，以帮助计算停时相关的概率和期望问题。

## 1 引言

离散随机过程是信息学竞赛中的一类重要问题背景，然而，由于随机过程的模型变化多端，因此这类题目较难找到突破口。这一类题目由于状态的数量常常是指数级别，除了朴素高斯消元外没有较为通用且快速的算法，从而无从下手。以离散随机过程作为背景的题目，多是考察与停时相关的一些概率与期望的计算。随机过程中的鞅是研究停时问题的有力工具，是解决这一类问题的重要理论。

本文将首先介绍鞅的停时定理，并通过多个例题来解释如何利用这一定理解决离散随机过程中的停时问题。希望本文介绍的思想，可以对这类问题的有启发作用，并引出更多新颖的题目或算法。

## 2 鞅与鞅的停时定理

### 2.1 鞅

**定义 2.1.1.** (随机过程)：对于每一个参数  $t \in T$ ， $X(t, \omega)$  是一随机变量，称随机变量族  $X_T = \{X(t, \omega), t \in T\}$  为一随机过程。其中  $T \subset \mathbb{R}$  是一实数集，称为指标集。其中， $X(t, \omega)$  一般可以简记为  $X_t$ 。

参数  $t \in T$  一般表示时间或空间。在本文中，只考虑参数为离散时间的随机过程，即可以取  $T = \mathbb{N}$ 。

定义 2.1.2. 称随机过程  $X = \{X_n, n \geq 0\}$  是鞅, 若:

1.  $\forall n \geq 0, E(|X_n|) < \infty$
2.  $\forall n \geq 0, E(X_{n+1} | X_0, \dots, X_n) = X_n$

直观来讲, 鞅是满足下述条件的随机过程: 已知过去的某个时刻  $s$  及  $s$  之前的所有观测值, 对于以后的任意时刻  $t$ ,  $t$  的观测值的条件期望等于  $s$  的观测值。

例子 2.1.3. (数轴上的随机游走): 令  $X_0 = 0$ ,  $X_k, k \geq 1$  独立同分布且  $P(X_k = 1) = p \geq 0, P(X_k = -1) = q = 1 - p \geq 0$ 。记  $Y_n = \sum_{k=0}^n X_k$ , 则  $\{Y_n, n \geq 0\}$  表示一个粒子以 0 为起始点的在数轴上的随机游走过程,  $Y_n$  为  $n$  时刻的坐标。

1. 若给定的  $p = q = \frac{1}{2}$ , 那么  $Y = \{Y_n, n \geq 0\}$  是鞅, 并且设  $Z_n = Y_n^2 - n$ 。  $Z = \{Z_n, n \geq 0\}$  是关于  $\{Y_n, n \geq 0\}$  的鞅。

证明.  $\forall n \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} E(|Y_n|) &= E(|\sum_{k=0}^n X_k|) \\ &\leq E(\sum_{k=0}^n |X_k|) = n < \infty \\ E(Y_{n+1} | Y_0, \dots, Y_n) &= E(Y_n + X_{n+1} | Y_0, \dots, Y_n) \\ &= Y_n + E(X_{n+1} | Y_0, \dots, Y_n) \\ &= Y_n + E(X_{n+1}) \\ &= Y_n \end{aligned}$$

因此  $Y = \{Y_n, n \geq 0\}$  是鞅。

类似地也有

$$\begin{aligned} E(|Z_n|) &= E(|Y_n^2 - n|) \\ &\leq E(Y_n^2) + n \\ &\leq n^2 + n < \infty \\ E(Z_{n+1} | Y_0, \dots, Y_n) &= E(Y_{n+1}^2 - n - 1 | Y_0, \dots, Y_n) \\ &= E((Y_n + X_{n+1})^2 - n - 1 | Y_0, \dots, Y_n) \\ &= E(Y_n^2 + X_{n+1}^2 - 2X_{n+1}Y_n - n - 1 | Y_0, \dots, Y_n) \\ &= Y_n^2 + 1 - 2E(X_{n+1})Y_n - n - 1 \\ &= Y_n^2 - n \\ &= Z_n \end{aligned}$$

因此,  $Z = \{Z_n, n \geq 0\}$  是关于  $\{Y_n, n \geq 0\}$  的鞅。  $\square$

2. 若给定的  $p \neq q$ , 那么设  $W_n = (\frac{q}{p})^{Y_n}$ , 则  $W = \{W_n, n \geq 0\}$  是关于  $\{Y_n, n \geq 0\}$  的鞅。

证明.  $\forall n \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} E(|W_n|) &= E((\frac{q}{p})^{Y_n}) \\ &\leq (\frac{q}{p})^n < \infty \\ E(W_{n+1} | Y_0, \dots, Y_n) &= E(W_n (\frac{q}{p})^{X_{n+1}} | Y_0, \dots, Y_n) \\ &= W_n E((\frac{q}{p})^{X_{n+1}} | Y_0, \dots, Y_n) \\ &= W_n (p \cdot \frac{q}{p} + q \cdot \frac{p}{q}) \\ &= W_n \end{aligned}$$

因此,  $W = \{W_n, n \geq 0\}$  是关于  $\{Y_n, n \geq 0\}$  的鞅。  $\square$

## 2.2 鞅的停时定理

**定义 2.2.1.** (随机时刻): 设取值为非负整数 (包括  $+\infty$ ) 的随机变量  $T$ , 及随机过程  $\{X_n, n \geq 0\}$ , 若  $\forall n \geq 0$ , 事件  $\{T = n\}$  的示性函数  $I_{\{T=n\}}$  仅是  $X_0, X_1, \dots, X_n$  的函数, 则称  $T$  是随机过程  $\{X_n, n \geq 0\}$  的随机时刻。

**定义 2.2.2.** (停时): 若  $T$  是随机过程  $\{X_n, n \geq 0\}$  的随机时刻, 并且有  $P(T < \infty) = 1$ , 则称  $T$  是随机过程  $\{X_n, n \geq 0\}$  的停时。

**定义 2.2.3.** (停止过程): 若  $T$  是对过程  $\{X_n, n \geq 0\}$  的一个随机时刻, 且令

$$\bar{X}_n = \begin{cases} X_n, & n \leq T \\ X_T, & n > T \end{cases}$$

则称  $\{\bar{X}_n\}$  为停止过程。

**定理 2.2.4.** 如果  $T$  是鞅  $\{X_n, n \geq 0\}$  的一个随机时刻, 则停止过程  $\{\bar{X}_n, n \geq 0\}$  也是关于  $\{X_n, n \geq 0\}$  的一个鞅。

证明.  $\forall n \geq 0$ , 若  $n < T$ , 则有  $\bar{X}_{n+1} - \bar{X}_n = X_{n+1} - X_n$ ; 若  $n \geq T$ , 则有  $\bar{X}_{n+1} - \bar{X}_n = 0$ , 从而

$$\begin{aligned} E(\bar{X}_{n+1} | X_0, X_1, \dots, X_n) &= E(\bar{X}_{n+1} - \bar{X}_n + \bar{X}_n | X_0, X_1, \dots, X_n) \\ &= E(\bar{X}_{n+1} - \bar{X}_n | X_0, X_1, \dots, X_n) + \bar{X}_n \end{aligned}$$

由于  $\{X_n, n \geq 0\}$  是鞅, 因此  $E(X_{n+1} - X_n | X_0, X_1, \dots, X_n) = 0$ , 从而无论  $n$  与  $T$  关系如何, 都有

$$E(\bar{X}_{n+1} | X_0, X_1, \dots, X_n) = \bar{X}_n$$

也即停止过程  $\{\bar{X}_n, n \geq 0\}$  关于  $\{X_n, n \geq 0\}$  是鞅。  $\square$

**定理 2.2.5.** (鞅的停时定理): 设  $X = \{X_n, n \geq 0\}$  是一个离散时间鞅,  $T \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  是停时, 若有下列条件之一成立

1.  $\bar{X}_n$  一致有界;
2.  $T$  有界;
3.  $E(T) < \infty$ , 且存在  $M < \infty$  使  $E(|X_{n+1} - X_n| | X_0, \dots, X_n) < M$ ;

那么

$$E(X_T) = E(X_0)$$

**定义 2.2.6.** (非降  $\sigma$ -代数族): 记随机过程  $X = \{X_n, n \geq 0\}$ , 令  $\mathcal{F}_n := \sigma(X_k | k \leq n)$ , 则称  $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_n, n \geq 0\}$  是  $X$  导出的一个非降  $\sigma$ -代数族。

**定理 2.2.7.** (更一般的鞅的停时定理): 设  $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_n, n \geq 0\}$  是一个非降  $\sigma$ -代数族,  $X = \{X_n, n \geq 0\}$  和  $T \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  分别是关于  $\mathcal{F}$  的鞅和停时, 若有下列条件之一成立

1. 存在  $c \in \mathbb{N}$  使得  $\forall T \in \mathbb{N}, |X_{n \wedge T}| \leq c$  几乎处处成立, 其中  $n \wedge T := \min(n, T)$ ;
2.  $T$  几乎处处有界, 即存在  $c \in \mathbb{N}$ ,  $T \leq c$  几乎处处成立;
3.  $E(T) < \infty$ , 且存在  $M < \infty$  使  $E(|X_{n+1} - X_n| | \mathcal{F}_n) < M$ ;

那么

$$E(X_T) = E(X_0)$$

鞅的停时定理说明, 即使随机过程非常复杂, 甚至可能趋向无穷, 只要满足某些条件, 那么还是可以得到终态的某些性质。

**例子 2.2.8.** 考虑 2.1.3 中的随机游走过程。令  $p \neq q, -a < 0 < b$ , 停时  $T = \min\{n \geq 0 : Y_n = -a \text{ 或 } Y_n = b\}$ , 求出  $P[Y_T = -a]$  和  $E[T]$ 。<sup>1</sup>

<sup>1</sup>来源可见参考文献 [5]

沿用 2.1.3 中的记号, 并设  $r = \frac{q}{p}$ 。由于  $-a, b$  有界, 根据马氏链理论可知  $E[T] < \infty$ ; 同时  $|W_{n \wedge T}| \leq \max(r^{-a}, r^b)$  有界, 所以  $W$  满足鞅的停时定理的第三个充分条件。

根据鞅的停时定理, 有  $E[W_T] = E[W_0]$ , 而

$$\begin{aligned} E[W_0] &= r^0 = 1 \\ E[W_T] &= P[Y_T = -a] \times E[W_T | Y_T = -a] + P[Y_T = b] \times E[W_T | Y_T = b] \\ &= P[Y_T = -a]r^{-a} + P[Y_T = b]r^b \end{aligned}$$

且  $P[Y_T = -a] + P[Y_T = b] = 1$ , 可以解得  $P[Y_T = -a] = \frac{1 - r^b}{r^{-a} - r^b}$ 。

另外设  $A_n = Y_n + (1 - 2p)n$ , 则容易验证  $A = \{A_n, n \geq 0\}$  是关于  $Y$  的鞅, 且也满足鞅的停时定理的第三个充分条件, 所以有

$$\begin{aligned} E[A_T] &= E[A_0] = 0 \\ &= P[Y_T = -a] \times E[A_T | Y_T = -a] + P[Y_T = b] \times E[A_T | Y_T = b] \\ &= P[Y_T = -a] \times (-a) + P[Y_T = b] \times b + (1 - 2p)E[T] \end{aligned}$$

解得  $E[T] = \frac{P[Y_T = -a]a - (1 - P[Y_T = -a])b}{1 - 2p}$ 。

另外, 对于  $p = q$  的情况, 可以利用鞅  $Y, Z$  用类似的方法解出  $P[Y_T = -a] = \frac{b}{a+b}$ ,  $E[T] = ab$ , 留给读者作为练习。

### 3 例题分析

在信息学竞赛中, 题目给定的离散随机过程 (记为  $X = \{X_n, n \geq 0\}$ ) 实际上天然地导出了一个非降  $\sigma$ -代数族  $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_n, n \geq 0\}$ , 因此如果能够关于其构造一个合适的鞅, 结合初态  $X_0$  及终态  $X_T$  中的信息, 就可以通过 2.2.7 得到和停时相关的一些结论。

以下通过一些实际案例来解释鞅的停时定理在这一类有关离散随机过程的竞赛题中的作用。

#### 3.1 猴子打字问题<sup>2</sup>

##### 3.1.1 问题描述

给定大小  $|\Sigma| = 26$  的字符集以及长度为  $n$  的串  $s$ 。令字符串  $t$  初始为空, 每次在  $t$  后面随机拼接  $\Sigma$  中的一个字符, 求  $s$  第一次成为  $t$  的后缀的期望时间。

<sup>2</sup>来源可见参考文献 [6]

### 3.1.2 问题解析

通过经典的概率生成函数做法，可以求出答案为  $\sum_{i=1}^n [s[1, i] = s[n - i + 1, n]] |\Sigma|^i$ ，其中  $s[l, r]$  表示  $s$  的子串  $s_l s_{l+1} \dots s_r$ 。这里用停时定理给出另外一种证明。

假设每个时刻有一个赌徒带着 1 美元入场，并押这一次随机加入的字符是  $s_1$ 。如果没有押中那么输光离场，否则资金乘上  $|\Sigma|$ ，并在下一次用全部资金押加入的字符为  $s_2$ ，如果继续押中了就继续用全部资金押  $s_3$ ，以此类推。当某个赌徒押中了  $s_n$ ，则结束。

容易发现每个赌徒每一次的期望收益都是 0，在  $t_m$  公布后  $t_{m+1}$  公布前这一时刻，设所有赌徒的总财富为  $A_m$ ，那么由于每个时刻会新出现一个持有一美元的赌徒，易知  $\{A_m - m, m \geq 0\}$  是一个鞅。

设  $T = \min\{m : t[m - n + 1, m] = s\}$ ，则  $T$  是一个停时，并且注意到  $A_{m \wedge T} \leq \sum_{i=1}^n |\Sigma|^i$  有界，根据停时定理有

$$E[A_T - T] = E[A_0 - 0] = 0$$

$$A_T = \sum_{i=1}^n [s[1, i] = s[n - i + 1, n]] |\Sigma|^i$$

所以  $E[T] = \sum_{i=1}^n [s[1, i] = s[n - i + 1, n]] \Sigma^i$ 。

## 3.2 Company Acquisitions<sup>3</sup>

### 3.2.1 问题描述

有  $m$  个人组成若干个小组，每个小组由若干个组员和一个组长组成，初始分组情况给定。在只剩下一个小组之前反复执行以下操作：等概率随机选取两个不同的组长，然后让其中一位组长加入另一个小组并成为组员，该组长原来的小组中所有的组员各自组成一个只有其自己的新小组并成为其组长，求只剩一个小组时所需要的平均操作次数。

$m \leq 500$ 。

### 3.2.2 问题解析

假设某一小组有  $x$  个组员（不包含组长），定义它的势为  $2^x - 1$ 。注意到一次操作中，设选取出来的两个组长为  $A, B$ ，其原来各自的小组中组员数量分别为  $a, b$ ，那么一次操作之后双方势的期望变化量为

$$\frac{1}{2}((2^{b+1} - 1) + (a - 1)(2^0 - 1)) + \frac{1}{2}((2^{a+1} - 1) + (b - 1)(2^0 - 1)) - ((2^a - 1) + (2^b - 1)) = 1$$

<sup>3</sup>CF1025G, <https://codeforces.com/problemset/problem/1025/G>

$\forall n \geq 0$ , 记  $X_n$  为经过  $n$  次操作之后所有小组的势的和,  $Y_n = X_n - n$ , 那么  $E[|Y_n|] < \infty$ , 易证  $Y = \{Y_n, n \geq 0\}$  是鞅。设停时  $T = \min\{n : n\}$ 。不难证明  $X_n \leq 2^m - 1$ , 因此  $E[|Y_{n+1} - Y_n|]$  有界。而  $E[|Y_n|] = E[Y_n] < \infty$ , 且  $E[T] < \infty$ , 由停时定理有

$$\begin{aligned} E[Y_T] &= E[Y_0] \\ E[X_T] - E[T] &= E[X_0] \end{aligned}$$

而  $E[X_T] = 2^m - 1$ ,  $E[Y_0] = X_0$  给定, 由此马上可以得到  $E[T]$ 。

### 3.3 Slime and Biscuits<sup>4</sup>

#### 3.3.1 问题描述

有  $n$  个人, 每个人初始有  $a_i$  个球。在每一秒, 随机选择一个球并把它交给另一个人。当某个人获得所有球时此人胜出, 停止游戏。求游戏进行时长的期望。

#### 3.3.2 问题分析

本题的一个关键性质是, 如果只考虑一个人的球数的变化, 那么不需要知道其他人的具体状态就可以求出这个人经过一步之后的球数的概率分布, 也就是说每个人的状态之间相互是独立的。另外一个特点是每一步对当前状态的影响比较小, 只会使两个人的球数加減一。

#### 3.3.3 官方题解

设  $E_x$  表示  $x$  胜出时总时长的条件期望, 那么答案即为  $\sum_{i=1}^n E_i$ 。

设  $E'_x$  表示, 如果修改游戏规则, 只有  $x$  胜出时才停止游戏, 游戏时长的期望。

设  $P_x$  为  $x$  胜出的概率, 显然有  $\sum_{i=1}^n P_i = 1$ 。

设常数  $C$  表示所有球从一个人手中转移到至另一个指定的人中的期望时间。

考虑  $E'_x$  比  $E_x$  多算了什么, 发现恰好是所有球先集中到某个人的手上, 再全部转移过来, 的期望时间。所以可以发现有以下恒等式

$$E_x = E'_x - \sum_{i=1, i \neq x}^n (E_i + P_i C)$$

移项得到

<sup>4</sup>CF1349D, <https://codeforces.com/problemset/problem/1349/D>

$$\sum_{i=1}^n E_i = E'_x - C(1 - P_x)$$

将等式对  $x = 1, 2, \dots, n$  求和, 得到

$$n \sum_{i=1}^n E_i = \sum_{i=1}^n E'_i - C(n-1)$$

所以问题转化为求  $E'_x$  和  $C$ 。

求  $E'_x$  和  $C$  时, 由前述的关键性质, 可以设  $g_i$  表示  $x$  现在有  $i$  个球, 到第一次有  $i+1$  个球的期望时间。设  $m = \sum_{i=1}^n a_i$ , 有方程

$$g_i = 1 + \frac{(n-2)(m-i)}{(n-1)m} g_i + \frac{i}{m} (g_{i-1} + g_i), 0 < i < m$$

可以从这个方程解出  $g_i$  关于  $g_{i-1}$  的递推式

$$g_i = \frac{m(n-1)}{m-i} + \frac{(n-1)i}{m-i} g_{i-1}, 0 < i < m$$

有初始值  $g_0 = n-1$ 。

然后设  $f_i = \sum_{k=i}^{m-1} g_k$ , 得到  $E'_x = f_{a_x}, C = f_0$ , 从而求出答案。

### 3.3.4 问题再解——基于鞅的停时定理

设经过  $t$  步之后的状态是  $A_t$ , 其中每个人的球数为  $a_{t,i}$ 。设  $m$  为总球数。

考虑类似 3.2 中的做法, 构造势函数  $\phi$ , 使得  $\mathbb{E}[\phi(A_{t+1}) + (t+1) | A_t, \dots, A_0] = \phi(A_t) + t$ , 然后运用停时定理求出  $E(T)$ 。

在本例中, 可以设  $\phi(A_t) = \sum f(a_{t,i})$ , 其中  $f$  是一个需要构造的函数<sup>5</sup>。

显然  $E[\phi(A_{t+1})]$  只和  $E[\phi(A_t)]$  有关, 所以  $E[\phi(A_{t+1}) | A_t, \dots, A_0] = E[\phi(A_{t+1}) | A_t]$ 。

为了求出  $E[\phi(A_{t+1}) | A_t]$ , 可以枚举每一种情况, 得到

$$\begin{aligned} E[\phi(A_{t+1}) | A_t] &= \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{a_{t,i}}{m(n-1)} \left[ f(a_{t,i}-1) + f(a_{t,j}+1) + \sum_{k \notin \{i,j\}} f(a_{t,k}) \right] \\ &= \sum_i \left[ \frac{a_{t,i}}{m} f(a_{t,i}-1) + \frac{m-a_{t,i}}{m(n-1)} f(a_{t,i}+1) + \frac{(m-a_{t,i})(n-2)}{m(n-1)} f(a_{t,i}) \right] \end{aligned}$$

令  $E[\phi(A_{t+1}) - \phi(A_t) | A_t] = -1$ , 得到

$$\begin{aligned} \sum_i f(a_{t,i}) &= 1 + \sum_i \left[ \frac{a_{t,i}}{m} f(a_{t,i}-1) + \frac{m-a_{t,i}}{m(n-1)} f(a_{t,i}+1) + \frac{(m-a_{t,i})(n-2)}{m(n-1)} f(a_{t,i}) \right] \\ &= \sum_i \left[ \frac{a_{t,i}}{m} f(a_{t,i}-1) + \frac{m-a_{t,i}}{m(n-1)} f(a_{t,i}+1) + \frac{(m-a_{t,i})(n-2)}{m(n-1)} f(a_{t,i}) + \frac{a_{t,i}}{m} \right] \end{aligned}$$

<sup>5</sup>思路来自参考资料 [1]



注意这里把 1 拆成了  $\sum \frac{a_i}{m}$ ，可以使得每个  $a_i$  互不影响。当然，换成  $\sum \frac{1}{n}$  或是其他和为 1 的值都是可以的。

于是构造  $f(a)$  满足

$$f(a) = \frac{a}{m}f(a-1) + \frac{m-a}{m(n-1)}f(a+1) + \frac{(m-a)(n-2)}{m(n-1)}f(a) + \frac{a}{m}$$

移项得到

$$f(a+1) = \left[ \frac{m(n-1)}{m-a} - (n-2) \right] f(a) - \frac{a(n-1)}{m-a} (f(a-1) + 1)$$

将  $a=0$  代入可以得到  $f(0) = f(1)$ ，所以初值可以取  $f(0) = f(1) = 0$ ，或是其他任意一个数。然后递推即可得到  $f$  的所有函数值。

$a=m$  时并不满足这个式子，但由于出现  $a=m$  时随机过程一定已经停止了，所以这个条件不需要被满足。

现在设  $X_t = \phi(A_t) + t$ ，就有  $E[X_{t+1} - X_t | A_t] = 0$ ，另一方面，由于  $X_t = \phi(A_t) + t$ ， $\phi(A_t)$  有界且  $t$  非负，所以  $0 \leq |X_t| \leq X_t + 2|\phi|_{\max}$ ，所以  $E[|X_t|] < \infty$ ，从而根据定义知道  $\{X_t, t \geq 0\}$  关于  $\{A_t, t \geq 0\}$  是一个鞅。

另一方面，由于这个随机过程可以看做在一张确定的图上随机游走，状态数有限，且每个点都可以到达终点，由常返马氏链的性质知道  $E[T] < \infty$ 。而  $E[|X_{n+1} - X_n| | A_0, \dots, A_n] = 1 + E[|\phi(A_{n+1}) - \phi(A_n)| | A_0, \dots, A_n]$  有界，因此可以应用停时定理，得到  $E[X_T] = \phi(A_T) + E[T] = E[X_0] = \phi(A_0)$ 。由于  $\phi(A_0), \phi(A_T)$  都是定值，所以有  $E[T] = \phi(A_0) - \phi(A_T)$ ，即

$$E[T] = \sum_i f(a_{0,i}) - (f(m) + (n-1)f(0))$$

在官方题解中，为什么定义  $E'_x$ ，以及定义了  $E'_x$  之后有什么用，并不是非常清晰；而基于鞅的停时定理的做法，从问题中每个人状态之间的相互独立性出发，引导势函数  $\phi(A) = \sum_{i=1}^n f(a_i)$  的构建，使整个解题思路有迹可循，这体现了鞅论可以帮助思考 and 解决与随机过程相关的题目。

### 3.4 Slime and Biscuits Strikes Back<sup>6</sup>

#### 3.4.1 问题描述

有  $n$  个人，每个人初始有  $a_i$  个球。在每一秒，随机选择一个球并把它交给另一个人。当某个人获得所有球时此人胜出，停止游戏。对于每个人，求游戏停止时所有球在这个人手上的概率。

<sup>6</sup>改编自 CF1349D

### 3.4.2 问题分析

事实上, 3.3.3 中的推导已经可以解决这一问题, 沿用其记号, 考虑在上文中的式子

$$\sum_{i=1}^n E_i = E'_x - C(1 - P_x)$$

由于  $\sum_{i=1}^n E_i = E[T]$  已知, 而  $E'_x, C$  也都可以被求出来, 所以可以解出  $P_x$ , 复杂度  $O(n + \sum a_i)$ 。

下面通过鞅论给出另一种思路更加直接的解答:

设  $p_i$  表示球最终聚集在第  $i$  个人手上的概率。类似 2.2.8, 考虑通过鞅和停时定理构造出关于  $p_i$  的  $n$  个方程, 解出所有  $p_i$ 。

仍然设经过  $t$  步之后的状态是  $A_t$ , 其中每个人的球数为  $a_{t,i}$ ,  $m = \sum a_i$  为总球数。设  $B_i$  表示所有球都聚集到  $i$  手上的状态。

### 3.4.3 构造一

继续沿用之前构造势函数的方法, 但为了区分不同的位置, 要给每个位置构造不同的势函数, 设  $\phi(A_t) = \sum_i f_i(a_{t,i})$ , 并直接令  $\{\phi(A_t), t \geq 0\}$  为鞅。用例题三的方法, 可以推导出

$$\begin{aligned} f(1) &= f(0) \\ f(a+1) &= \left[ \frac{m(n-1)}{m-a} - (n-2) \right] f(a) - \frac{a(n-1)}{m-a} f(a-1) \quad 1 \leq a < m \end{aligned}$$

而应用鞅的停时定理, 有方程

$$E[\phi(A_T)] = \sum_{i=1}^n p_i \phi(B_i) = \phi(A_0)$$

考虑给每个  $i$  随机  $f_i(0)$ , 即可得到一个方程, 重复  $n$  次即可得到  $n$  个方程。

但是这个做法出现了一个重大的漏洞: 这  $n$  个方程组成的矩阵不满秩。由于递推式中  $f(a)$  和  $f(a-1)$  的系数相加恰好是 1, 我们其实解出了  $f(a) = f(0), \forall 1 \leq a \leq m$ , 因此无法解出这一方程组。事实上, 由于在每个  $f_i$  中自由度为 1, 因此合法的  $f$  只有常数序列。

### 3.4.4 构造二

考虑对所构造鞅的形式进行微调, 设  $\phi(A_t) = \sum_i f_i(a_{t,i})$ , 并令  $\{\phi(A_t) + t, t \geq 0\}$  为鞅, 类似地,

$$\begin{aligned} f(1) &= f(0) \\ f(a+1) &= \left[ \frac{m(n-1)}{m-a} - (n-2) \right] f(a) - \frac{a(n-1)}{m-a} (f(a-1) + 1) \quad 1 \leq a < m \end{aligned}$$

而应用鞅的停时定理，有方程

$$\begin{aligned} E[\phi(A_T)] &= \sum_{i=1}^n p_i (\phi(B_i) + E[T \mid A_T = B_i]) \\ &= E[T] + \sum_{i=1}^n p_i \phi(B_i) \\ &= \phi(A_0) \end{aligned}$$

同样可以通过随机  $f_i(0)$  获得  $n$  个方程，遗憾的是，这与思路一并没有本质上的区别。由于递推式中的系数相加依然为 1，这一构造获得的序列仅仅是在  $f(0) = 0$  导出的序列的基础上加上一个常数序列而已。

### 3.4.5 构造三

回顾 3.3.4 节中  $f$  的构造，关注这一步：

$$\begin{aligned} \sum_i f(a_{t,i}) &= 1 + \sum_i \left[ \frac{a_{t,i}}{m} f(a_{t,i} - 1) + \frac{m - a_{t,i}}{m(n-1)} f(a_{t,i} + 1) + \frac{(m - a_{t,i})(n-2)}{m(n-1)} f(a_{t,i}) \right] \\ &= \sum_i \left[ \frac{a_{t,i}}{m} f(a_{t,i} - 1) + \frac{m - a_{t,i}}{m(n-1)} f(a_{t,i} + 1) + \frac{(m - a_{t,i})(n-2)}{m(n-1)} f(a_{t,i}) + \frac{a_{t,i}}{m} \right] \end{aligned}$$

注意到第二个等号的右边并不是唯一合法的结果。除了把 1 拆成  $\sum \frac{a_{t,i}}{m}$ ，还可以拆成其他和为 1 的组合。

那么不妨随机  $\{w_i, 1 \leq i \leq n\}$  使得  $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ ，然后令

$$f_i(a) = \frac{a}{m} f_i(a-1) + \frac{m-a}{m(n-1)} f_i(a+1) + \frac{(m-a)(n-2)}{m(n-1)} f_i(a) + w_i$$

解得

$$\begin{aligned} f_i(1) &= f(0) - (n-1)w_i \\ f_i(a+1) &= \left[ \frac{m(n-1)}{m-a} - (n-2) \right] f_i(a) - \frac{a(n-1)}{m-a} f_i(a-1) - \frac{m(n-1)w_i}{m-a} \quad 1 \leq a < m \end{aligned}$$

不妨设  $f(0) = 0$ ， $F$  为  $w = 1$  时得到的  $f$ ，那么有  $f_i(a) = w_i F(a)$ 。随机  $w_i$  并重复  $n$  次这一过程，即可得到  $n$  个线性无关的方程（否则可以再次随机  $w_i$  寻求新的方程），并解出  $p_i$ 。这一方法的时间复杂度  $O(n^3 + m)$ 。

尽管随机  $w_i$  的做法可以得到  $n$  个线性无关的方程使得  $p_i$  可解，但是得到的方程组可能十分复杂。考虑在第  $k$  个方程中令  $w_i = I_{\{i=k\}}$ ，那么得到的方程组的系数矩阵中只有主对角线有值，显然也是满秩可解的，此时可以直接得到  $p_i = \frac{F(a_i) - E}{F(m)}$ ，从而也在  $O(n+m)$  的复杂度内解决了该问题。

## 4 总结

本文简述了鞅的定义和停时定理，并选取了四道例题来说明，涵盖了概率和期望的各个方面。

综合来看，这种方法所适用的赛题中，所定义的随机过程一般有两个特点：各个部分相对独立，且一次操作不会带来太大的变化。如果题目满足这两个特点，那么基于鞅论的解法往往能得到关于终态的很多信息。如果题目有比较好的性质或是比较特殊的结构，那么也可能有更加简便精巧的做法，这有待进行进一步的研究。

本文介绍思想和算法还值得进行更深入的研究，希望本文能起到抛砖引玉的作用，启发读者扩展出适用性更加广泛的算法，并引出更多新颖的题目。

## 致谢

感谢中国计算机学会提供学习和交流的平台。

感谢国家集训队高闻远教练的指导。

感谢王晓鹏老师、蔡子健老师、曹路路老师对我的培养和教导。

感谢王启圣学长、袁隽学长、曾相如学长等给予我的灵感。

感谢袁隽学长、林昊翰同学为本文验稿。

感谢广大附中信息组全体同学四年来的陪伴。

感谢父母对我的理解和支持。

## 参考文献

- [1] 王启圣, “一类概率期望问题的杀器：势函数和鞅的停时定理”,  
<https://www.cnblogs.com/TinyWong/p/12887591.html>
- [2] Wikipedia, the free encyclopedia, “Optional Stopping Theorem”,  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Optional\\_stopping\\_theorem](https://en.wikipedia.org/wiki/Optional_stopping_theorem)
- [3] Wikipedia, the free encyclopedia, “Martingale”,  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Martingale\\_\(probability\\_theory\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Martingale_(probability_theory))
- [4] Scott M. LaLonde, “The Martingale Stopping Theorem”,  
<https://math.dartmouth.edu/pw/math100w13/lalonde.pdf>
- [5] 林元烈, 《应用随机过程》, 清华大学出版社
- [6] 何书元, 《随机过程》, 清华大学出版社