浅谈超现实数与不平等博弈

马耀华

摘 要

本文介绍了超现实数与不平等博弈的相关理论，建立了博弈的数学模型，并引入公平博弈理论、热博弈理论、全部小博弈理论，同时介绍了相关理论在一些具体题目上的应用。

1 前言

公平博弈理论在目前的 OI 界已经非常普及，也出现了大量的题目。而近年来，更一般化的不平等博弈理论也越发受到 OI 界重视，在清华集训和若干国外比赛出现了相关的题目，甚至还由杜瑜皓学长在 WC 进行了分享。然而，由于种种原因，相关的基础理论在 OI 界还不够普及。本文力求从基础理论方面普及不平等博弈理论，希望能激发选手们对相关内容研究的热情。

本文第 2 节介绍了超现实数和博弈的定义，以及超现实数的一些基本性质；第 3 节介绍了博弈的一些基本性质；第 4 节介绍了公平博弈理论以及其在一般博弈理论中的推广；第 5 节介绍了热博弈；第 6 节介绍了全部小博弈。

2 超现实数与博弈

2.1 超现实数定义

我们先来定义超现实数。为了方便，在本文中，我们提到的“数”默认指超现实数。

定义 2.1. 令 L, R 为两个任意的数集合，且 L 中不存在 $\geq R$ 中某个元素的元素，则 $\{L|R\}$ 也是一个数。

所有的数都是由上面的构造得到的。

定义 2.2. 我们用 x^L 指代一个数 $x = \{L|R\}$ 的 L 中任意元素，用 x^R 指代 R 中任意元素。此外，我们还经常使用另一个记号 $x = \{a, b, c, \ldots|d, e, f, \ldots\}$，这里 $L = \{a, b, c, \ldots\}, R = \{d, e, f, \ldots\}$。

上述定义中，我们使用了 $\geq$，但事实上我们还没有定义 $\geq$。

定义 2.3.

1. $x \geq y$ 当且仅当不存在 $x^R \leq y$ 且不存在 $x \leq y^L$。
2. $x \leq y$ 当且仅当 $y \geq x$。

这里的 $\geq, \leq$ 都是递归定义。

定义 2.4.

1. $x = y$ 当且仅当 $x \geq y$ 且 $y \geq x$。
2. $x > y$ 当且仅当 $x \geq y$ 且 $y \ngeq x$。
3. $x < y$ 当且仅当 $y < x$。

这样定义了超现实数的大小关系。

定义 2.5.

1. $x + y = \{x^L + y, x + y^L | x^R + y, x + y^R\}$。
2. $-x = \{-x^R | -x^L\}$。
3. $x - y = x + (-y)$。
4. $xy = \{x^L y + xy^L - x^L y^L, x^R y + xy^R - x^R y^R | x^L y + xy^R - x^L y^R, x^R y + xy^L - x^R y^L\}$。

这样就定义了超现实数的加减法，加法逆元，乘法。

2.2 数的实例

上述定义都是递归定义，而一开始我们没有任何数。

不过，我们可以取 $L = R = \emptyset$，这样我们得到了一个数 $\{|\}$，我们称它为 0。容易验证，我们有 $0 \geq 0, 0 \leq 0, 0 = 0$，以及 $0 \ngtr 0, 0 \nless 0, -0 = 0$。

在图 1 的二叉树中，0 位于第 1 层。

接着，我们可以取 $L = 0, R = \emptyset$，这样我们得到了一个数 $\{0|\}$，我们称它为 1。容易验证，我们有 $1 \geq 0$ 和 $1 > 0$，但没有 $0 \geq 1$ 和 $0 > 1$。我们还可以得到 $-1 = \{| -0\} = \{|0\}$。同样容易验证，$0 + 1 = 1 + 0 = 1, 0 + (-1) = (-1) + 0 = -1$。

我们还期望有 $1 + (-1) = 0$，这满足我们通常意义下的运算性质，那这是否成立呢？显然，有 $1 + (-1) = \{0 + (-1) | 1 + 0\} = \{-1|1\}$，看起来并不是 0。但 $1 \nleq 0, 0 \nleq -1$，于是我们有

$\{-1|1\} \geq 0$ 且 $0 \geq \{-1|1\}$，这样，按我们的定义，确实有 $\{-1|1\} = 0$！这里出现了超现实数与实数的最大区别：两个形式不同的数，它们的值可能是相等的。

以上的数在二叉树中位于第 2 层。

接着，我们可以取 $L = 0, R = 1$，构造出 $\frac{1}{2} = \{0|1\}$; 取 $L = -1, R = 0$，构造出 $-\frac{1}{2} = \{-1|0\}$; 取 $L = 1, R = \emptyset$，构造出 $2 = \{1|\}$；取 $L = \emptyset, R = -1$，构造出 $-2 = \{|-1\}$。同样可以验证，这些数满足我们期望的通常意义下的一切性质。

以上的数在二叉树中位于第 3 层。

进一步，二叉树的有限层中包含了所有形如 $\frac{p}{2^q}$ 的有理数（p, q 是整数）。

那么 $\frac{1}{3}$ 呢？我们可以类似实数定义的 Dedekind 分割，用 $\frac{p}{2^q}$ 的无穷序列来逼近 $\frac{1}{3}$，从而得到 $\frac{1}{3} = \{0, \frac{1}{4}, \frac{5}{16}, \frac{21}{64}, \ldots | \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{11}{32}, \frac{43}{128}, \ldots\}$。类似地，我们可以构造出所有实数。

我们甚至能得到无穷大 $\omega = \{0, 1, 2, \ldots |\}$ 和无穷小 $\frac{1}{\omega}$，不过与本文主旨无关，下面不会讨论。

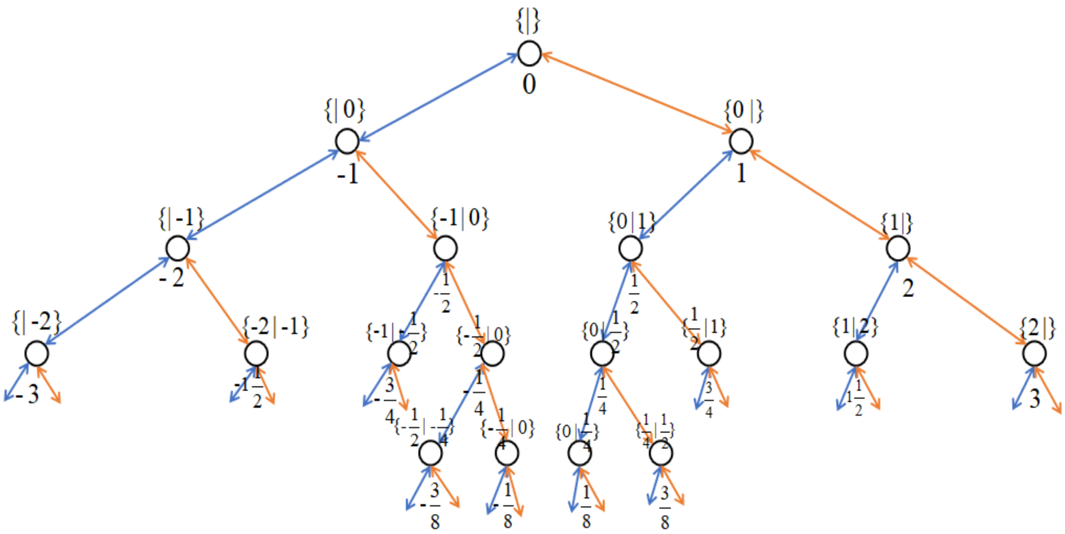


图 1: 超现实数的二叉树

2.3 博弈定义

类似地，我们可以定义博弈。[1]

定义 2.6. 令 L, R 为两个任意的博弈集合，则 $\{L|R\}$ 也是一个博弈。
所有的博弈都是由上面的构造得到的。

[1]本文中“博弈”的定义与通常中文语境中不同，具体见下。

可以发现，博弈与超现实数的定义区别仅是我们去掉了“L 中不存在 $\geq R$ 中某个元素的元素”这一限制。于是我们可以使用使用与超现实数相同的符号来描述博弈，同样定义博弈的大小关系，加法，加法逆元，乘法等。

两个博弈 G 和 H 若满足 $G=H$，我们只称它们值相等，而它们形式相等需要 L 和 R 中每个元素能对应。

我们可以将超现实数看作一种特殊博弈，称一个博弈 G 的值是数，若存在超现实数 x 使 $G=x$。

值得注意的是，这里我们所描述的博弈，仅仅是一个形式符号，还没有组合意义。我们将在下一节中详细分析它的组合意义。

2.4 基本性质

刚刚我们的例子中，隐含使用了实数的记号，那我们自然希望超现实数保持实数的性质。下面我们指出一些超现实数的性质，而其中的大部分性质是博弈同样具有的。

定理 2.1. *对一切数和博弈 x，有：*

1. $x \ngeq x^R$。
2. $x^L \ngeq x$。
3. $x \geq x$。
4. $x \leq x$。
5. $x = x$。

定理 2.2.

1. *若数或博弈 x 满足 $x \geq y$ 且 $y \geq z$，则 $x \geq z$。*
2. *对于数 x，有 $x^L < x < x^R$。*
3. *对于任意两个数 x, y，有 $x \geq y$ 或 $y \geq x$ 中至少一者成立。*

(1) 告诉我们，对数和博弈来说，$\geq$ 关系具有传递性，结合前面的 $x \geq x$（反身性），以及 $x \geq y$ 且 $y \geq x$ 则有 $x = y$（反对称性），可知 $\geq$ 关系是一个偏序关系。

进一步，(3) 告诉了我们对超现实数来说，$\geq$ 是一个全序关系。于是，超现实数是有序的。

定理 2.3. *对一切数和博弈 x, y, z，有：*

1. $x + 0 = x$。

2. $x + y = y + x$。

3. $(x + y) + z = x + (y + z)$。

也即，加法具有交换律，结合律，且 0 是加法单位元。

定理 2.4. 对一切数和博弈 x, y, z，有：

1. $x \geq y$ 当且仅当 $x + z \geq y + z$。

2. $x > y$ 当且仅当 $x + z > y + z$。

3. $x = y$ 当且仅当 $x + z = y + z$。

也即，加法是保序的。

定理 2.5. 对一切数和博弈 x, y，有：

1. $-(x + y) = (-x) + (-y)$。

2. $-(-x) = x$。

3. $x + (-x) = 0$。

定理 2.6.

1. 若 x, y 是数，$x + y$ 也是数。

2. 若 x 是数，$-x$ 也是数。

也即，超现实数关于加法和加法逆元运算是封闭的。

定理 2.7. 对一切数和博弈 x, y, z，有:

1. $x0 = 0$。

2. $x1 = x$。

3. $xy = yx$。

4. $(xy)z = x(yz)$。

5. $(-x)y = x(-y) = -(xy)$。

6. $(x + y)z = xz + yz$。

也即，0 是乘法零因子，1 是乘法单位元，且乘法满足交换律，结合律，与加法逆元交换，且满足关于加法的分配律。

定理 2.8. 对于数 x,y，我们有 xy 也是数，且：

1. 若 $x=y$，z 是数，则 $xz=yz$。
2. 若 $x,y>0$，则 $xy>0$。
3. 若 $x\neq 0$，则存在唯一的数 $y\neq 0$，使 $xy=1$，记 $y=x^{-1}$ 为 x 的乘法逆元。

限于篇幅，上述定理证明略去。

结合上述所有定理，我们事实上得到了下述定理：

定理 2.9. 超现实数形成一个有序域，记作超现实数域 **No**。

进一步地，我们还可以证明下面的定理：

定理 2.10. 实数域 $\mathbb{R}$ 是超现实数域 **No** 的子域。也即，我们可以任意对值是实数的超现实数（或博弈）进行我们熟悉的实数运算，而不必担心得到相异结果。

2.5 简单性法则

定理 2.11. 对于数 $x=\{x^L|x^R\}$，若存在数 z 使得满足 $x^L\not\geq z\not\geq x^R$ 的限制，且对某个 z 的形式 $z=\{z^L|z^R\}$ 不存在 z^L 和 z^R 满足相同限制，则 $x=z$。

证明. 先证明 $x\geq z$。这等价于 $x^R\not\leq z$ 与 $x\not\leq z^L$。前者是显然满足的，而后者由于 z^L 不满足相同限制，且 $z^L<z$，于是必有 $x^L\geq z^L$，因此同样满足。同理可证 $z\geq x$，那么就有 $x=z$。 □

这引出了下面的重要推论：

推论 2.1. （简单性法则）对于一个数 $x=\{x^L|x^R\}$，若存在至少一个数 z 满足 $x^L<z<x^R$，则其中最简单的数即为 x 的值。这里的“最简单”可以理解为在二叉树中所在层数最低的（显然是唯一的）。

例如，$\{1\frac{1}{4}|2\}=1\frac{1}{2}$。这是由于 $1\frac{1}{2}\in(1\frac{1}{4},2)$，且 $1\frac{1}{2}$ 比同样满足在 $(1\frac{1}{4},2)$ 之间的其他所有数（例如 $1\frac{3}{4}$）更简单。

3 博弈基础

3.1 博弈的组合意义

在上一节中，我们定义了博弈，但仅仅是作为一个计算符号来使用。事实上，博弈是有着组合意义的。

定义 3.1. 一个（双人）博弈有两位玩家，分别为左玩家和右玩家。在博弈的某一状态中，左右玩家分别有若干个（可能为 0 个）可能的行动，可以转移到另一状态。两位玩家在某个固定的初始状态开始，按最优策略交替行动，了解一切游戏信息，且行动必须是确定性的。达到终止状态，不能行动的则为输家。

这个定义事实上与我们上一节的定义是相同的。也即，对于一个博弈 $x = \{L|R\}$，我们认为 L 是左方行动后所达到的状态集合，R 是右方行动后所达到的状态集合。于是，我们所定义的博弈的运算和大小关系，以及一切相关性质仍然成立。

特别需要指出的是，上节中我们定义了两个博弈的加法，这也是有组合意义的。

定义 3.2. 给定两个博弈 G 和 H，我们定义它们的和博弈 $G + H$ 是这样一个博弈：有两个子博弈 G 和 H，两位玩家每次只能恰好在其中一个行动，不能行动的则为输家。

显然，这与我们定义的博弈的加法是相同的，同样有 $G+H = \{G^L + H, G + H^L|G^R + H, G + H^R\}$。

在本文中，我们只讨论最简单的有限博弈，也即有下面的额外限制：

定义 3.3. 一个有限博弈是满足下述限制的博弈：仅有有限多个状态，每个状态能转移到的状态有限，且不存在一个长度无穷的双方交替行动的序列。

两个有限博弈的和仍是有限博弈。

可以证明，一个有限博弈不可能出现平局，且博弈结果只可能是以下四种之一：

1. 左方必胜
2. 右方必胜
3. 后手必胜
4. 先手必胜

下文中，我们所指的博弈，默认均指有限博弈。

此前我们定义的博弈大小关系比较复杂，不过我们可以得到下面的等价定义，这在实践中更加简便：

定理 3.1. 对博弈 G，有：

1. G 左方必胜当且仅当 $G > 0$。

2. G 右方必胜当且仅当 $G < 0$。

3. G 后手必胜当且仅当 $G = 0$。

4. 其余情况 G 先手必胜，记作 $G \parallel 0$。

这蕴含 G 左方后手必胜当且仅当 $G \geq 0$，且 G 右方后手必胜当且仅当 $G \leq 0$。

证明. 考虑归纳。

$G > 0$ 当且仅当存在 $G^L \geq 0$ 且任意 $G^R \nleq 0$。由归纳假设，这当且仅当左方先手行动后左方必胜，右方先手行动后左方也必胜，即左方必胜。

$G < 0$ 同理。

$G = 0$ 当且仅当任意 $G^L \ngeq 0$，任意 $G^R \nleq 0$。由归纳假设，这当且仅当左方先手行动后右方必胜，右方先手行动后左方必胜，即后手必胜。 □

定义 3.4.

1. $G \parallel\!> 0$ 当且仅当 $G > 0$ 或 $G \parallel 0$，也即 G 左方先手必胜。$G \parallel\!> 0$ 当且仅当 $G \nleq 0$。

2. $G <\!\parallel 0$ 当且仅当 $G < 0$ 或 $G \parallel 0$，也即 G 右方先手必胜。$G <\!\parallel 0$ 当且仅当 $G \ngeq 0$。

结合定理 2.4 和定理 3.1，易得以下推论：

推论 3.1. 对于任意博弈 G 和 H，有：

1. $G + (-H)$ 左方必胜当且仅当 $G > H$。

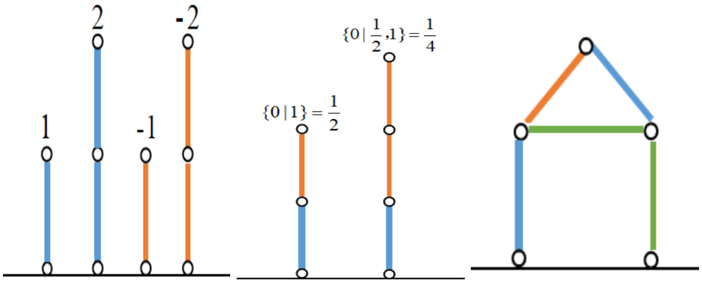
2. $G + (-H)$ 右方必胜当且仅当 $G < H$。

3. $G + (-H)$ 后手必胜当且仅当 $G = H$。

4. $G + (-H)$ 先手必胜当且仅当 $G \parallel H$。

类似可得 $G \geq H$，$G \leq H$，$G \parallel\!> H$，$G <\!\parallel H$ 等的等价定义。

这在实践中非常方便，下文我们都会采取这种方式验证博弈的大小关系。



(a) 蓝链和红链 (b) 蓝红交错的链 (c) 复杂局势

图 2: Hackenbush 局势示例

3.2 博弈的实例

我们介绍一个比较知名的博弈：Hackenbush（伐木游戏）。

Hackenbush 是在一个无向图上的游戏，其中某些点在地面上。边分为三类：蓝边，红边和绿边，其中蓝边只能由左方删去，红边只能由右方删去，绿边可以由双方删去。每次行动时，当前玩家需要删去一条他可删去的边，并将删去这条边后与地面不连通的连通块一并删去，不能行动的玩家判负。

图 2 给出了几个典型的 Hackenbush 局势：

图 2(a) 中，由 n 条蓝边组成的链博弈值为 n，由 n 条红边组成的链博弈值为 $-n$。图 2(b) 中，左边底部一条蓝边，向上一条红边的链按定义博弈值为 $\{0|1\} = \frac{1}{2}$，类似可知道右边的链博弈值为 $\{0|\frac{1}{2}, 1\} = \frac{1}{4}$。图 2(c) 中给出了一个三种边混杂的复杂 Hackenbush 局势。

3.3 模糊博弈

我们称满足 $G \parallel 0$ 的博弈为模糊博弈。

定理 3.2.

1. 若 $G \parallel\!> 0$，$H \geq 0$，则 $G + H \parallel\!> 0$。

2. 若 $G <\!\parallel 0$，$H \leq 0$，则 $G + H <\!\parallel 0$。

证明.

1. $G \parallel\!> 0$ 意味着 G 左方先手必胜，$H \geq 0$ 意味着 H 左方后手必胜。那么在 $G + H$ 中，左方先手时只需在 G 中走对应的必胜走法，随后得到两个左方后手必胜的博弈，且左方为后手，显然左方必胜。

2. 与 (1) 同理。

□

一个典型的模糊博弈是仅有一条绿边的 Hackenbush，显然不论哪方砍去它后，得到了一个 0 状态，立刻获胜。我们称这样的博弈为 $* = \{0|0\}$。$*$ 具有一些显然的性质，例如 $* = -*$，$\{*|*\} = 0$，且对于任意的正数 x，有 $x >> *, -x << *$，也即它的值非常接近于 0。

为了方便，我们引入一个记号，在不致混淆的情况下，对于任意的博弈 x，$x* = x + *$。

我们另外定义 $\uparrow = \{0|*\}$ 以及 $\downarrow = \{*|0\}$，显然 $\uparrow = -\downarrow$。容易验证，$\uparrow > 0, \downarrow < 0$，但对于任意的正数 x，有 $x >> \uparrow, -x << \downarrow$，也即它们的值非常接近于 0。同样可以验证，$\uparrow * \parallel 0, \downarrow * \parallel 0$，这意味着 $* \parallel \uparrow, * \parallel \downarrow$。

我们自然会尝试研究一类最“简单”的博弈，也即 $|L| = |R| = 1, L, R \in \{0, *, \uparrow, \downarrow\}$。上面我们已经列举了一些，另外我们还容易验证 $\{\downarrow | \uparrow\}, \{* | \uparrow\}, \{\downarrow | *\}$ 均是后手必胜的博弈，于是它们的值都为 0。剩余的一些博弈更加复杂，我们留待下一小节讨论。

3.4 博弈的化简

我们前面说过，有很多形式不同的博弈具有相等的值。一个自然的想法是，给定一个复杂的博弈，我们希望能找到与它值相等的最简单博弈，这样在绝大部分情况下，我们都可以用这个值相等的简单博弈来替换它。

定理 3.3.

1. （优超）若 $G = \{A, B, \ldots | C, D, \ldots\}$，则若 $B \le A$（称为 B 被 A 优超），则 $G = \{A, \ldots | C, D, \ldots\}$，类似地，若 $D \ge C$，则 $G = \{A, B, \ldots | C, \ldots\}$。也即，我们可以删去被优超的行动而不改变值。

2. （逆转）若 $G = \{A, B, \ldots | C, D, \ldots\}$，其中存在某个 $A^R \le G$（称 A 为可被逆转行动），$A^{RL} = \{\alpha, \beta, \ldots\}$，则 $G = \{\alpha, \beta, B, \ldots | C, D, \ldots\}$，类似地，若存在某个 $C^L \ge G$，$C^{LR} = \{\alpha, \beta, \ldots\}$，则 $G = \{A, B, \ldots | \alpha, \beta, D, \ldots\}$。也即，我们可以删去被逆转的行动，并用走两步后的状态替换而不改变值。

3. （礼品马原理）若 $G = \{A, B, \ldots | C, D, \ldots\}$，则若 $H <\parallel G$（称 H 为“礼品马”），则 $G = \{H, A, B, \ldots | C, D, \ldots\}$，类似地，若 $H \parallel> G$，则 $G = \{A, B, \ldots | H, C, D, \ldots\}$。也即，我们可以添上或删去“礼品马”作为行动而不改变值。

证明.

1. 考虑 $\{A, B, \ldots | C, D, \ldots\} - \{A, \ldots | C, D, \ldots\} = \{A, B, \ldots | C, D, \ldots\} + \{-C, -D, \ldots | -A, \ldots\}$。对于后手来说，先手大部分的行动都可以用对应的逆行动来抵消进而获胜。值得注意的是左方先手，且在 G 中选择 B，但由于 $B \le A$，此时右方后手选择 $-A$ 即可获胜。于是上述差博弈 $= 0$，也即两个博弈值相等。

2. 考虑 $\{A, B, \ldots | C, D, \ldots\} - \{\alpha, \beta, B, \ldots | C, D, \ldots\} = \{A, B, \ldots | C, D, \ldots\} + \{-C, -D, \ldots | -\alpha, -\beta, -B, \ldots\}$。对于后手来说，先手大部分的行动都可以用对应的逆行动来抵消进而获胜。值得注意的是左方先手，且在 G 中选择 A，此时右方选择走到对应的 $A^R \le G$，那么左方继续在 A^R 中采取行动则右方可直接抵消进而获胜，于是左方只能在另一博弈选择 $-C, -D$ 等，不妨设为选择 $-C$，由于 $G - C <\| 0$，且 $A^R \le G$，则 $A^R - C <\| 0$，于是此时右方先手必胜；右方先手，且在第二个博弈中选择 α, β 等，不妨设为选择 α，由于 $A^R - \alpha \|> 0$，且 $A^R \le G$，则 $G - \alpha \|> 0$，于是此时左方先手必胜。于是上述差博弈 $= 0$，也即两个博弈值相等。

3. 考虑 $\{A, B, \ldots | C, D, \ldots\} - \{H, A, B, \ldots | C, D, \ldots\} = \{A, B, \ldots | C, D, \ldots\} + \{-C, -D, \ldots | -H, -A, -B, \ldots\}$。对于后手来说，先手大部分的行动都可以用对应的逆行动来抵消进而获胜。值得注意的是右方先手，在第二个博弈中选择 $-H$，但由于 $H <\| G$，显然此时左方先手必胜。于是上述差博弈 $= 0$，也即两个博弈值相等。

□

通过不断删去被优超的行动，以及删去被逆转的行动并用走两步后的状态替换，直到不能继续进行这个操作为止，我们可以完成对一个博弈的化简，称得到的新博弈为原博弈的最简形，显然最简形与原博弈值相等。

定理 3.4. *若两个博弈 G 和 H 均是自身最简形，且 $G = H$，则 G 和 H 形式相等。也即，博弈的最简形是唯一的。*

证明. $G = H$ 意味着 $G + (-H) = 0$。考虑在博弈 $G + (-H)$ 中，左方先手在 G 中选择某个 G^L。此时右方后手必胜，他的行动要么是由 G^L 走到某个 G^{LR}，要么由 $-H$ 走到某个 $-H^L$。前者意味着 $G^{LR} \le H = G$，也即 G^L 可被逆转，显然矛盾，于是一定有后者。而后者意味着 $G^L \le H^L$，由对称性，又有某个 $G^{L'}$ 使 $H^L \le G^{L'}$，那么 $G^L \le G^{L'}$，由于没有被优超的选择，一定有 $G^L = H^L = G^{L'}$，于是 H^L 是 H 中与 G^L 对应选择。也即 G^L 和 G^R 中每个行动都在 H^L 和 H^R 中有相应行动，由对称性知 H^L 和 H^R 中每个行动都在 G^L 和 G^R 中有相应行动，于是 G 和 H 形式相等。 □

对于博弈 $* = \{0|0\}$，用礼品马原理，在两边分别添上 $\uparrow \| *$ 与 $\downarrow \| *$，我们可以得到 $* = \{0, \uparrow |0\} = \{0|0, \downarrow\} = \{0, \uparrow |0, \downarrow\}$。由于 0 分别被 $\uparrow$ 与 $\downarrow$ 优超，我们有 $\{\uparrow | \downarrow\} = \{\uparrow |0\} = \{0| \downarrow\} = *$。

对于博弈 $\{0| \uparrow\}$，我们可以通过差博弈验证它等于 $\Uparrow * = 2\uparrow + *$。那么用礼品马原理，在左边添上 $\uparrow \| 2\uparrow + *$，由于 0 被 $\uparrow$ 优超，我们有 $\{\uparrow | \uparrow\} = \{0| \uparrow\} = \Uparrow *$。

再考虑博弈 $\uparrow * = \uparrow + * = \{*, \uparrow |0, \uparrow\}$。右边的 $\uparrow$ 被 0 优超，可以删去，而左边的 $(\uparrow)^R = *$，其中 $* < \uparrow *$，于是可以被逆转，替换为 $(*)^L = 0$，那么就有 $\uparrow * = \{0, * |0\}$。

类似地，我们可以得到 $\{\downarrow | \downarrow\} = \{\downarrow |0\} = \Downarrow *$，$\downarrow * = \{0|0, *\}$。

L \ R	0	$*$	$\uparrow$	$\downarrow$
0	$* = \{0\|0\}$	$\uparrow = \{0\|*\}$	$\Uparrow * = \{0\|\uparrow\}$	$* = \{0\|0\}$
$*$	$\downarrow = \{*\|0\}$	$0 = \{\|\}$	$0 = \{\|\}$	$\{*\|\downarrow\}$
$\uparrow$	$* = \{0\|0\}$	$\{\uparrow\|*\}$	$\Uparrow * = \{0\|\uparrow\}$	$* = \{0\|0\}$
$\downarrow$	$\Downarrow * = \{\downarrow\|0\}$	$0 = \{\|\}$	$0 = \{\|\}$	$\Downarrow * = \{\downarrow\|0\}$

表 1: $|L| = |R| = 1, L, R \in \{0, *, \uparrow, \downarrow\}$ 的博弈的最简形

4 公平博弈与 Nimber

4.1 公平博弈定义

比起一般化的不平等博弈理论，公平博弈的理论更为大家熟知。

定义 4.1. 一个博弈 G 是公平的，若在 G 与 G 的任意后继状态中，双方的行动集合（L 集合与 R 集合）均完全相同。

显然，任意公平博弈中，双方的胜负情况只取决于先后手。也即，任意公平博弈 G 只有可能是后手必胜或先手必胜，即 $G = 0$ 或 $G \parallel 0$。

定理 4.1. 任意公平博弈 G 有 $G + G = 0$，即 $G = -G$。

证明. 在 $G + G$ 中，后手可以采用模仿策略，若先手在某一侧行动，后手只需在另一侧作相同行动即可获胜。 □

4.2 公平博弈实例

我们之前介绍的 Hackenbush 中，若只有绿边，显然双方在任意后继状态的行动集合均完全相同，于是是公平博弈。特别地，一条绿边对应的 Hackenbush，也即 $* = \{0|0\}$ 是公平博弈，因为双方后继状态都只有 0。

另一类知名的公平博弈是 Nim 游戏：给定一堆或多堆石子，每次行动时玩家需要恰好从某一堆中取走任意非零个石子，不能取（也即每堆都为空）的玩家判负。

4.3 Nimber

我们来分析一下单一堆的 Nim 游戏：

若这堆没有石子，双方均不能行动，此时博弈值为 0。

若恰有 1 个石子，则双方行动后都会变为没有石子的 0 状态，于是此时博弈值 $* = \{0|0\}$。

对于有 $n > 1$ 个石子的状态，双方行动后可以变为 $0 \sim n - 1$ 个石子，那么如何描述它们呢？

定义 4.2. 对于 $n > 1$，定义 $*_n = \{0, *, *_2, \ldots, *_{n-1} | 0, *, *_2, \ldots, *_{n-1}\}$。也即，$*_n$ 为恰有 n 个石子的单堆 *Nim* 游戏状态的博弈值。

显然 $*_n$ 是一个先手必胜态（先手可以直接行动到 0 状态获胜），于是有 $*_n \parallel 0$，容易验证 $*_n = -*_n$, 且对于任意的正数 x，有 $x >> *_n, -x << *_n$，也即它们的值非常接近于 0。

我们称 $0, *, *_2, \ldots, *_n, \ldots$ 为 Nimber。

我们发现，仅用 Nimber 就可以描述任意公平博弈的值。

定理 4.2. 任意（有限）公平博弈的值一定是某个 *Nimber*$*_n$。

证明. 考虑归纳法。不妨设公平博弈 G 能转移到的任意公平博弈的值均已证明是某个 Nimber，则有 $G = \{GS|GS\} = \{*_{n_1}, *_{n_2}, *_{n_3}, \ldots | *_{n_1}, *_{n_2}, *_{n_3}, \ldots\}$。令 $mex(S)$ 为有限非负整数集合 S 中最小没有出现的非负整数，由于 G 是有限博弈，能转移到的状态数目有限，故 $n = mex(n_1, n_2, n_3, \ldots)$ 一定存在，记 $n = SG(G)$ 成为公平博弈 G 的 SG 值，我们下面证明 $G = *_n$。

注意到按照 mex 的定义，$0 \sim *_{n-1}$ 均会出现在 GS 中，且 $*_n$ 不会出现在 GS 中，但可能有某些 $*_m (m > n)$ 出现在 GS 中。我们直接验证 $G + *_n = 0$，也即 $G = *_n$。在公平博弈 $G + *_n = \{0, \ldots, *_{n-1}, *_m, \ldots | *_0, \ldots, *_{n-1}, *_m, \ldots\} + \{0, \ldots, *_{n-1} | 0, \ldots, *_{n-1}\}$ 中，先手大部分行动都可以被后手用对应相同行动抵消而获胜，唯一值得讨论的是从 G 走到 $*_m$，但由于 $*_m$ 后继状态包含 $*_n$，后手可以走到 $*_n$ 而获胜。 □

上述证明中，我们不仅证明了定理 4.2，事实上还给出了计算任意公平博弈 G 的值的算法：只需计算出 $SG(G)$，则 $G = *_{SG(G)}$。而计算 $SG(G)$ 时，只需按定义递推，计算每个状态后继状态 SG 值的 mex 即可。

4.4 公平博弈的和

对于单个的公平博弈，计算其值通常是容易的。我们更关心的是若干个公平博弈的和。显然有限个公平博弈的和仍是公平博弈，按定理 4.2，若两个有限公平博弈的值分别是 Nimber，则它们的和的的值也是一个 Nimber，那么如何计算这个值呢？广为人知的 Sprague-Grundy 定理给出了计算方法：

定理 4.3. （*Sprague-Grundy* 定理）值为 $*_n$ 的公平博弈 G 与值为 $*_m$ 的公平博弈 H 的和 $G+H$ 值为 $*_{n \oplus m}$。这里 $\oplus$ 是二进制按位异或运算。也即，两个 *Nimber*$*_n$ 与 $*_m$ 的和 $*_n + *_m = *_{n \oplus m}$。

限于篇幅，上述定理证明略去。

4.5 综合运算

引入了 Nimber 后，我们可以研究它们与数字，$\uparrow, \downarrow$ 间的和博弈。由于 Nimber 的和还是 Nimber，且 $\uparrow = -\downarrow$，我们只需要研究形如 $a + *_b + c\uparrow (a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{Z})$ 这样的博弈。

对于 $x > 0$，我们已知 $x >> *_b, x >> \uparrow, -x << *_b, -x << \downarrow$。于是若 $a > 0$，显然有 $a + *_b + c\uparrow > 0$；若 $a < 0$，显然有 $a + *_b + c\uparrow < 0$。若 $b = 0$ 或 $c = 0$ 时也容易讨论。我们下面只讨论 $a = 0, b, c \neq 0$ 的非平凡情况。

我们已知 $\uparrow * \parallel 0, \downarrow * \parallel 0$，且 $\{\uparrow \mid \uparrow\} = \Uparrow * > 0, \{\downarrow \mid \downarrow\} = \Downarrow * < 0$。那么一般地，当 $c > 1$ 时 $* + c\uparrow > 0$；当 $c < -1$ 时 $* + c\uparrow < 0$；当 $-1 \leq c \leq 1$ 时 $* + c\uparrow \parallel 0$。

而在博弈 $\uparrow + *_n (n \geq 2)$ 中，左方先手可以将 $*_n$ 变为 0 而获胜，右方先手时，若在 $*_n$ 中行动后左方同样行动可获胜，而在 $\uparrow$ 中行动后变为 $* + *_n = *_{n\oplus 1} \parallel 0$，于是左方仍然获胜。这样，就有 $\uparrow + *_n (n \geq 2) > 0$，同理有 $\downarrow + *_n (n \geq 2) < 0$。进一步地，当 $c > 0$ 时 $*_n + c\uparrow > 0 (n \geq 2)$；当 $c < 0$ 时 $*_n + c\uparrow < 0 (n \geq 2)$。

例题 1. 福若格斯[2]

有一种“跳青蛙”博弈：在一个 5 格棋盘上，初始时左边两格各有一只向右的青蛙，右边两格各有一只向左的青蛙，中间空出一格，左方只能操作向右的青蛙，右方只能操作向左的青蛙。每次行动为让己方的某只青蛙向对应方向行动：若它前一格是唯一的空格，可以直接走一格；若它前一格是一只不同朝向的青蛙，且再前一格是唯一空格，可以跳过那只青蛙到达空格。显然，任意时刻某方要么有唯一的行动方式，要么不能行动。

有多次询问。每次给定一个大小为 m 的博弈可重集合，其中每个博弈都是由初始状态经过若干次行动后可得到的状态（但不保证是由双方交替行动所得），共有 23 种不同状态。可重集里的每个博弈都可出现也可不出现，你需要回答所有可能的情况的各自和博弈中，左方必胜，右方必胜，后手必胜，先手必胜的各有多少种，答案对 998 244 353 取模。

询问组数 $T \leq 100$，每组询问 $m \leq 10^6$，且每种不同状态出现次数大致相同。

我们用一个长度为 5 的字符串表示一个博弈，从左到右每个字符表示该格状态，L 表示有一只向右青蛙，R 表示有一只向左青蛙，_ 表示一个空格。由于博弈状态只有 23 种，且每种状态下每方最多只有一种行动，通过递推我们不难得到所有状态的博弈值：

从图中可看出，所有状态的博弈值只可能是 $0, \pm 1, \pm\frac{1}{2}, *, \uparrow, \downarrow$。于是我们可以预见到若干个博弈的和一定是 $a + *_b + c\uparrow$ 形式。特别地，这里 a 是 $\frac{1}{2}$ 的整数倍，且 b 只能是 0 或 1。

由于不同类型博弈之间无关，只需分别对值是数的博弈计算出 $a > 0, a = 0, a < 0$ 的方案数，对值是 $*$ 的博弈计算出 $b = 0, b = 1$ 的方案数，对值是 $\uparrow$ 与 $\downarrow$ 的博弈计算出 $c > 1, c < -1, -1 \leq c \leq 1$ 的方案数，即可简单统计出答案。这些计算大部分是类似的，我们只讨论最复杂的值是数的博弈的计数。我们可以将所有数 $\times 2$ 后变为整数，方便计算。显然值为 0 的博弈不需要关注，而对于其它绝对值为 x 的博弈，是否出现会让和的博弈值改变 x。那么容易将问题转化为给定 p 个 0/1 变量与 q 个 0/2 变量，询问和 $>, <, =$ 某个给定常数 r 的方案数。这只需要枚举 q 个 0/2 变量中选了多少个 2，对 p 个 0/1 变量中选择 1 的个数的方案数做前缀和即可，每部分的系数都是一个组合数。

[2]来源：清华集训 2017

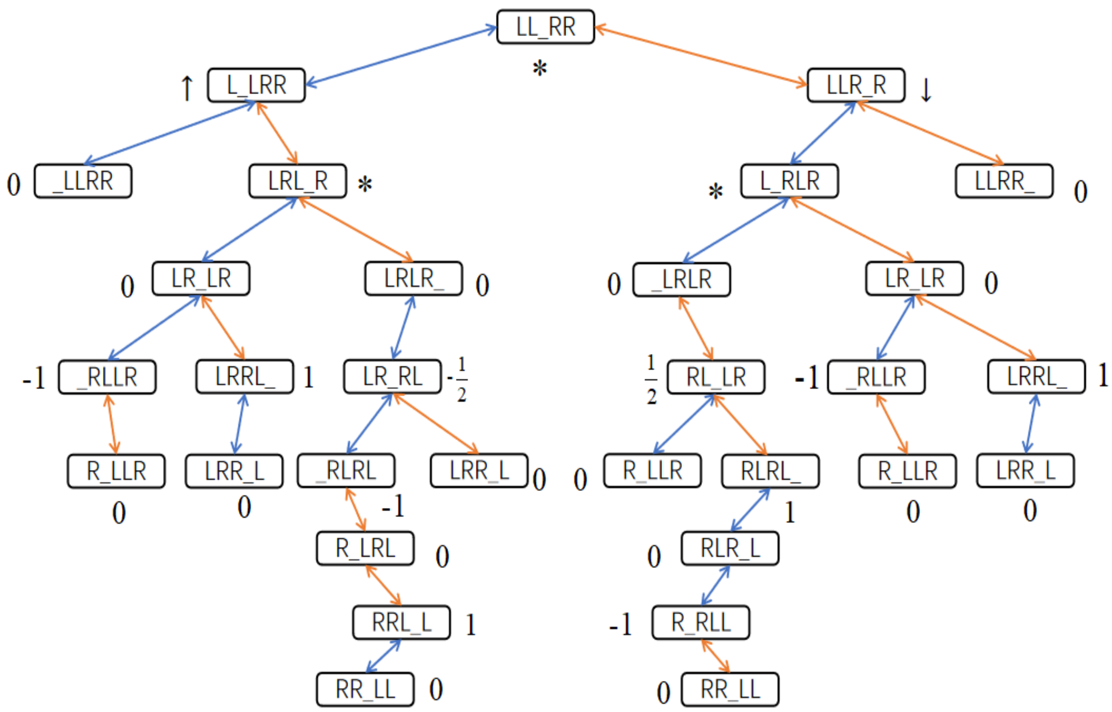


图 3: 例题 1 所有状态及对应博弈值

若预处理阶乘和阶乘逆，可 $O(1)$ 计算出组合数。因为 $p+q \leq m$，故总时间复杂度为 $O(Tm)$。但由于不同状态出现次数大致相同，因此 $p+q$ 大约只有 $\frac{8}{23}m$，实际运行效率很快。

5 热博弈

5.1 平移原理

定理 5.1. （平移原理）对于一个值不是数字的博弈 $G = \{G^L|G^R\}$ 与值是数字的博弈 x，我们有 $G + x = \{G^L + x|G^R + x\}$。也即，给定若干个博弈，若其中还有值不是数字的，则每位玩家的最佳走法都是在这些博弈中行动。

证明我们留待后文给出。

例题 2. もう、諦めない[3]

给定 n 个矩形，第 i 个大小为 $w_i \times h_i$。现在有一个博弈，每次玩家可以选择一个矩形，以及一个**可以切**的方向，均匀切成 $n > 1$ 份，要求切完后长宽仍是整数。对于第 i 个矩形，

[3]来源：Atcoder いろはちゃんコンテスト，Day4，Problem J

还会有参数 $a_i, b_i \in \{0,1\}$。若 $a_i = 1$，则第 i 个矩形与它切出来的所有小矩形双方都可以在 w 这一维横着切，否则只有左方能横着切。若 $b_i = 1$，则第 i 个矩形与它切出来的所有小矩形双方都可以在 h 这一维竖着切，否则只有右方能竖着切。

现在给定 q 个询问，第 i 个询问为若仅留下第 $l \sim r$ 个矩形，左方先手能否获胜。

$n, q \le 10^5, 1 \le w, h \le 10^5$。

首先显然需要算出每个矩形单独博弈时的博弈值。令 $\lambda(n)$ 为 n 的可重质因子个数，$\lambda^*(n)$ 为 n 的可重奇质因子个数，下面对 a, b 分类讨论。

若 $a = b = 1$，则这是一个公平博弈。注意到每次切割后的所有矩形都相同，因此出现奇数个时相当于只有 1 个，偶数个时直接变为 0。通过对 w 和 h 小时情况观察，我们可以猜测并证明如下结论：

引理 5.1. 当，$a = b = 1$ 时，一个 $w \times h$ 的矩形对应博弈值为：

$$\begin{cases} *_{\lambda^*(w) \oplus \lambda^*(h)}, & \textit{if } w \times h \textit{ is odd} \\ *_{(\lambda^*(w) \oplus \lambda^*(h))+1}, & \textit{if } w \times h \textit{ is even} \end{cases}$$

证明考虑归纳，只需注意到双方每次可以除去任意个数的奇质因子，且可能可以通过除去一个偶质因子得到 0 状态。这里略去具体证明。

若 $a = b = 0$，通过对 $\lambda(w)$ 和 $\lambda(h)$ 小时情况观察，我们可以猜测并证明如下结论：

引理 5.2. 令 w 的可重质因子降序排列为 $p_1 \ge p_2 \ge \ldots \ge p_{\lambda(w)}$，$h$ 的可重质因子降序排列为 $q_1 \ge q_2 \ge \ldots \ge q_{\lambda(h)}$。则当 $a = b = 0$ 时，一个 $w \times h$ 的矩形对应博弈值为：

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{\lambda(w)-\lambda(h)} \prod_{j=1}^{i-1} p_j, & \textit{if } \lambda(w) > \lambda(h) \\ -\sum_{i=1}^{\lambda(h)-\lambda(w)} \prod_{j=1}^{i-1} q_j, & \textit{if } \lambda(w) < \lambda(h) \\ 0, & \textit{if } \lambda(w) = \lambda(h) \end{cases}$$

证明考虑归纳，只需注意到双方每次选的 n 若质因子数目 > 1 一定不优，同时一定选择最大质因子。这里略去具体证明。

若 $a = 0, b = 1$，我们同样可以观察和猜测下述结论：

引理 5.3. 令 w 的可重质因子降序排列为 $p_1 \ge p_2 \ge \ldots \ge p_{\lambda(w)}$。则当 $a = 0, b = 1$ 时，一个 $w \times h$ 的矩形对应博弈值为 $h \cdot (\sum_{i=1}^{\lambda(w)} \prod_{j=1}^{i-1} p_j) + *_{\lambda^*(h)+[2|h]}$。

证明. 考虑归纳。

当 $h = 1$ 时由引理 5.2 易得。

当 $h > 1$ 时，令 $f(w) = \sum_{i=1}^{\lambda(w)} \prod_{j=1}^{i-1} p_j$，则 h 个 $w \times 1$ 的矩形博弈值即为 $h \cdot f(w)$。若先手在 h 这一维竖着切，根据归纳假设，行动后得到的博弈值一定形如 $hf(w) + *_k$。具体来说，若 n 为偶数，则 $k = 0$，否则 $k = \lambda^*(h) - \lambda^*(n)$。那么显然有右方先手行动后的博弈值集合 $\{hf(w), hf(w)+$

$*_1,\ldots,hf(w)+*_{\lambda^*(h)+[2|h]-1}\}$，这个集合中的博弈值也是左方能达到的。而若左方在 w 这一维竖着切，显然会发现得到的博弈值数字部分 $< hf(w)$，会被优超，可以不必考虑。那么最后的博弈值就是 $\{hf(w),hf(w)+*_1,\ldots,hf(w)+*_{\lambda^*(h)+[2|h]-1}|hf(w),hf(w)+*_1,\ldots,hf(w)+*_{\lambda^*(h)+[2|h]-1}\}$，根据平移原理，这就是 $hf(w)+\{0,*_1,\ldots,*_{\lambda^*(h)+[2|h]-1}|0,*_1,\ldots,*_{\lambda^*(h)+[2|h]-1}\}=hf(w)+*_{\lambda^*(h)+[2|h]}$。 □

$a=1,b=0$ 的情况与 $a=0,b=1$ 类似。

这样，我们计算出了每个矩形的博弈值，发现都是 $a+*_b$ 的形式。那么一个区间的和博弈值仍然是一个 $a+*_b$ 的形式，只需要预处理前缀和即可 $O(1)$ 查询。知道博弈值后，通过它与 0 的大小关系就容易知道胜负了。

时间复杂度为 $O(n+\max\{w,h\}+q)$。

5.2 热博弈与转换

根据平移原理，给定若干个不是数的博弈 $G_1,G_2,\ldots$ 与若干个是数的博弈 $x_1,x_2,\ldots$，则在和博弈 $G_1+G_2+\ldots+x_1+x_2+\ldots$ 中，两位玩家都尽可能在 $G_1,G_2,\ldots$ 中行动而避开 $x_1,x_2,\ldots$，直到 $G_1,G_2,\ldots$ 等都变成确定的数。此时，我们的和博弈变成了若干个数之和，显然只需要直接将数字加起来得到一个数字和，再根据数字和与 0 的大小关系以及当前玩家就可以判定胜负了。

这给了我们启发：每个不是数的博弈具有一定的**热度**，因此是**热博弈**，与之相对，是数的博弈则是冷的。那么在一堆冷的和热的博弈的和中，直观来看，玩家通常会选择在较热的博弈中行动。

热博弈通常是很复杂的，我们先研究其中最简单的一类：

定义 5.1. *称一个博弈 $\{x|y\}$ 为转换，若 x,y 都是数且 $x\geq y$。*
特别地，当 $x=y$ 时，显然有 $\{x|y\}=x*$；当 $x=-y$ 时，我们记 $\{x|y\}=\pm x$。

根据平移原理，对于转换 $\{x|y\}$ 和数 z，我们有 $\{x|y\}+z=\{x+z|y+z\}$。类似地，我们有 $\{x|y\}+*=\{x*|y*\}(x\geq y)$ 和 $\{x*|y\}+*=\{x|y*\}(x>y)$。

对于一个转换 $\{x|y\}$，令 $u=\frac{1}{2}(x+y),v=\frac{1}{2}(x-y)$，则有 $\{x|y\}=u\pm v$。我们认为一个转换的热度就是 v，显然，v 越大转换就越热。那么对于若干个转换的和博弈 $\{x_1|y_1\}+\{x_2|y_2\}+\ldots$，由于平移原理，双方需要恰好在每个转换中行动一次，而为了获得优势，显然双方都会选择当前剩余转换中热度最大的行动。这样，我们就有了一个简单的算法判定转换的和博弈的胜负：直接按转换热度降序排列，则双方会依次选取最前面的。

5.3 停止值与模糊区间

为了研究更一般的热博弈，我们引入停止值的概念。

定义 5.2. 对数 x，定义 $L(x) = \{\{y|y < x\}|\{y|y \geq x\}\}, R(x) = \{\{y|y \leq x\}|\{y|y > x\}\}$。直观来看，$L(x)$ 比 x 小，但比任何比 x 小的数大，$R(x)$ 比 x 大，但比任何比 x 大的数小。显然，对任意数 $x < y$，有 $L(x) < x < R(x) < L(y) < y < R(y)$。

定义 5.3. 我们递归定义博弈 G 的左方停止值 $L(G)$ 和右方停止值 $R(G)$ 如下：

对于博弈 G，令 $L = \max_{G^L} R(G^L)$（不存在 G^L 设为 $-\infty$）,$R = \min_{G^R} L(G^R)$（不存在 G^R 设为 $+\infty$）。

若 $G = x$，其中 x 是数，则令 $L(G) = L(x), R(G) = R(x)$。

否则，令 $L(G) = L, R(G) = R$。

显然，$L(-G) = -R(G), R(-G) = -L(G)$。

例如，$* = \{0|0\}$ 有 $L(*) = R(0), R(*) = L(0)$，$\uparrow = \{0|*\}$ 有 $L(\uparrow) = R(\uparrow) = R(0)$，$\downarrow = \{*|0\}$ 有 $L(\downarrow) = R(\downarrow) = L(0)$。

直观来看，对于通常博弈 G，$L(G)$ 和 $R(G)$ 就是博弈 G 中左方先手和右方先手的情况下，双方轮流行动直到博弈值变成数时的值，而最终数的符号 L 和 R 则表明了此时下一次行动的对象。

定理 5.2.

1. $L < R$ 当且仅当 G 的值是数。

2. 若 $L < R$，则 G 的值即为满足 $L < x < R$ 的数中最简单的那个。

3. 若 $L \geq R$，则对数 x，$x > L$ 当且仅当 $G < x$，$x < R$ 当且仅当 $G > x$，$R < x < L$ 当且仅当 $x \parallel G$。

证明. 考虑归纳。

当 G^L, G^R 中至少一者不存在时，G 的值显然是一个整数，容易验证定理成立。

当 G^L, G^R 均存在时，根据归纳假设，不论 G^L, G^R 值是否是数，都有 $\forall G^L <\parallel x$ 当且仅当 $x > R(G^L) = L$，且 $\forall G^R \parallel> x$ 当且仅当 $x < L(G^R) = R$。

若 $L < R$，则由于 x 是满足 $L < x < R$ 的数 x 中最简单的，于是对某个 x 的形式 $x = \{x^L|x^R\}$ 有 $x^L < L < x < R < x^R$。那么在差博弈 $G - x$ 中，左方先手走到某个 $G^L - x$ 或右方先手走到某个 $G^R - x$ 都显然必败，且若左方先手走到 $G - x^R$，右方走到 $G^R - x^R$，由于 $x^R > R$ 于是 $G^R \leq x^R$，右方必胜，同理右方先手走到 $G - x^L$ 左方也必胜。这样不论谁先手都有 $G - x$ 后手必胜，也即 $G = x$。

若 $L \geq R$，则在差博弈 $G - x$ 中：若 $x > L$，右方先手走到 $G^R - x$ 可获胜，且左方先手走到 $G^L - x$ 显然必败，而走到 $G - x^R$ 右方可走到 $G^R - x^R$ 获胜，于是右方必胜，也即 $G < x$；同理若 $x < R$ 左方必胜，也即 $G > x$；而若 $R < x < L$，左方先手走到 $G^L - x$ 与右方先手走到 $G^R - x$ 都必胜，也即 $G \parallel x$。那么不论 x 取值如何，均没有 $G = x$，也即 G 的值不是数。

由上述讨论知，$L < R$ 当且仅当 G 的值是数。 □

由定理 5.2 我们容易得到下述推论：

推论 5.1. 对于博弈 G, H 和数 x，有：

1. 若 $G \geq H$，则 $L(G) \geq L(H), R(G) \geq R(H)$。特别地，若 $G = H$，则 $L(G) = L(H), R(G) = R(H)$。也即，博弈的左右停止值与形式无关，只与值有关。

2. $L(x + G) = x + L(G), R(x + G) = x + R(G)$。

3. $L(x - G) = x - L(G), R(x - G) = x - R(G)$。

现在我们可以给出平移原理的证明了：

证明.（平移原理）考虑博弈 $G + x - \{G^L + x | G^R + x\}$，对于后手来说，先手大部分的行动都可以用对应的逆行动来抵消进而获胜。值得讨论的是左方先手从 x 走到 x^L 或右方先手从 x 走到 x^R。对于前者来说，行动后得到的新博弈为 $(G + x^L) - \{G^L + x | G^R + x\}$，若行动后左方必胜，意味着新博弈 ≥ 0，即 $G + x^L \geq \{G^L + x | G^R + x\}$，于是 $L(G + x^L) \geq L(\{G^L + x | G^R + x\})$，但 $L(G + x^L) = L(G) + x^L < R(G^L) + x = R(G^L + x) = L(\{G^L + x | G^R + x\})$，矛盾。同理后者右方也无法获胜。

于是博弈 $G + x - \{G^L + x | G^R + x\}$ 后手必胜，即 $G + x = \{G^L + x | G^R + x\}$。 □

定理 5.2.2 可以认为是数的简单性法则在一般值为数的博弈的自然推广，使用起来非常方便。例如，对于博弈 $G = \{\{2 | -1\} | 0\}$，我们只需要注意到 $L(G) = L(-1), R(G) = L(0)$，立刻便可以知道 $G = -1$。

定理 5.2.3 事实上描述了与值非数博弈 G 模糊的所有数 x 的范围，我们记为 G 的模糊区间：

定义 5.4. 值非数博弈 G 的模糊区间是 $(L(G), R(G))$，一个数 $x \parallel G$ 当且仅当 $x \in (L(G), R(G))$。

5.4 平均值, 冷却与热图

一般的热博弈十分复杂，但利用下面介绍的平均值，我们可以得到它们的一个比较好的近似值。

定义 5.5. 我们递归定义一个博弈 G 冷却 $t \geq 0$ 度的值 G_t 如下：

$G_t = \{{G^L}_t - t | {G^R}_t + t\}$，但若存在某个最小的 t_0 使 G_{t_0} 无限接近于某个数 x（例如 x 或 $x*$），我们便定义 G 的平均值 $m(G) = x$，热度 $t(G) = t_0$，且定义所有 $t > t_0$ 均有 $G_t = x$。

显然，数 x 的平均值就是 x 本身，且热度为 0。

显然，$m(-G) = -m(G), t(-G) = t(G)$。

例如，$G = \{2|-1\}$ 有：

$$G_t = \begin{cases} \{2-t|-1+t\}, & 0 \le t < \frac{3}{2} \\ \{2-\frac{3}{2}|-1+\frac{3}{2}\} = \frac{1}{2}*, & t = \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2}, & t > \frac{3}{2} \end{cases}$$

于是它的平均值为 $\frac{1}{2}$，热度为 $\frac{3}{2}$。

又例如，$* = \{0|0\}, \uparrow = \{0|*\}, \downarrow = \{*|0\}$ 的平均值和热度均为 0，而 $G = \{\{2|1\}|0\}$ 的平均值和热度均为 $\frac{3}{4}$。

直接按定义计算平均值是麻烦的，不过由定理 5.2 和平移原理，我们只需要知道 $L(G_t)$ 和 $R(G_t)$，并找出它们无限接近时最小的 t 即可，而若我们知道了 $\max_{G^L} R({G^L}_t)$ 和 $\min_{G^R} L({G^R}_t)$（可以归纳证明都是关于 t 的分段线性函数），我们只需作一些平移。我们可以将 $L(G_t)$ 与 $R(G_t)$ 的函数图像同时画在一个图中，从而得到博弈 G 的**热图**（为了方便，热图的坐标轴与通常意义相反）。

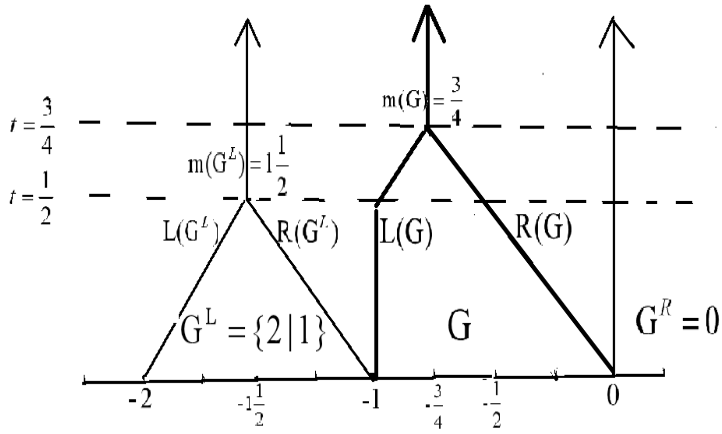


图 4: 博弈 $G = \{\{2|1\}|0\}$ 热图

容易看出，博弈 G 的热图左侧部分斜率一定是 1 或 ∞，右侧部分斜率一定是 -1 或 ∞，最顶部一定是左右两侧交点处发起的一条竖直向上的射线，射线的横坐标就是 $m(G)$，而交点纵坐标就是 $t(G)$。

通过冷却定义，对热图观察及归纳法，我们容易得到下述结论：

引理 5.4. 对博弈 G 和数 x，有：

1. $L(G_t)$ 与 $R(G_t)$ 的值即为热图上对应纵坐标处两条函数图像横坐标，而它们的符号 L, R 满足下述法则：在斜的部分靠外，在直的部分靠内，而在边界点符号与稍靠下部分相同。特别地，取 $t = 0$，由于斜率绝对值至少为 1，于是 $L(G) < m(G) + t(G) + \epsilon, R(G) > m(G) - t(G) - \epsilon$，其中 ϵ 是任意小的正数字。

2. 若 $G \geq x$，则 $G_t \geq x$。

3. $(x+G)_t = x + G_t$。

4. $(x-G)_t = x - G_t$。

5. $(G_u)_v = G_{u+v}$。

作为推论，我们可以得到下述重要定理：

定理 5.3. 对任意博弈 G, H，均有 $(G+H)_t = G_t + H_t$。特别地，取 $t = \infty$ 有 $m(G+H) = m(G) + m(H)$。

证明. 当 $G, H, G+H$ 中至少有一者是数时，由引理 5.4.3 和 5.4.4 显然成立。

当 $G_t, H_t, (G+H)_t$ 均不是数时，显然有：

$$\begin{aligned} G_t + H_t &= \{{G^L}_t + H_t - t, G_t + {H^L}_t - t | {G^R}_t + H_t + t, G_t + {H^R}_t + t\} \\ &= \{{(G+H)^L}_t - t | {(G+H)^R}_t + t\} \\ &= \{{(G+H)_t}^L | {(G+H)_t}^R\} \\ &= (G+H)_t \end{aligned}$$

其它情况可以用引理 5.4.5 转化为上述两种情况。 □

推论 5.2. 若 $G \geq H$，则 $G_t \geq H_t$。特别地，取 $G = H$ 则有 $G_t = H_t$，于是 $m(G) = m(H), t(G) = t(H)$。也即，博弈的平均值与热度与形式无关，只与值有关。

证明. $G \geq H$ 有 $G - H \geq 0$，于是 $G_t - H_t = (G-H)_t \geq 0$。 □

进一步地，我们还有下述推论：

推论 5.3. 对博弈 G 和 $\forall k \in \mathbb{N}^*$，有 $(kG)_t = kG_t$，于是 $L(kG) < km(G) + t(G) + \epsilon, R(kG) > km(G) - t(G) - \epsilon$，故 $km(G) - t(G) - \epsilon < kG < km(G) + t(G) + \epsilon$。

也即，我们可以用 $km(G)$ 作为 kG 的近似值，误差不会超过常数 $t(G) + \epsilon$，这也解释了“平均值”的名字由来。

6 全部小博弈

6.1 全部小博弈与顺序和

我们先定义全部小博弈：

定义 6.1. 一个博弈是全部小的，若它的每个后继状态中，要么双方都不能行动，要么双方都能行动。公平博弈是一种特殊的全部小博弈。

显然，有限个全部小博弈的和还是全部小的。

例如，博弈 $0, *_n, n\uparrow, n\uparrow + *$ 都是全部小的。

定理 6.1. 对于全部小博弈 G 和任意数 $x > 0$，有 $-x < G < x$。

证明. 只需证明 $G + x > 0$ 和 $G - x < 0$。对于前者，在博弈 $G + x$ 中，左方只需不管 x 在 G 中行动，而右方在 x 中的行动只会增大 x，同时由于 x 是全部小的，左方不能在 G 中行动仅当 $G = 0$，此时显然有 $G + x = x > 0$，即左方必胜，于是前者成立。类似可知后者也成立。 □

直观来看，全部小博弈的值的“绝对值”非常小。

我们再定义顺序和：

定义 6.2. 两个博弈 G 和 H 的顺序和 $G : H = \{G^L, G : H^L | G^R, G : H^R\}$。也即，对 G 的行动会令 H 消失，但对 H 的行动不会改变 G。

显然，$-(G : H) = (-G) : (-H)$。

例如，顺序和 $G : 0 = G$，且 $0 : H = \{0 : H^L | 0 : H^R\}$，于是可以归纳证明 $0 : H = H$。

定理 6.2. 对于博弈 G, H, K，$G : H$ 与 $G : K$ 大小关系同 H 与 K 大小关系相同。特别地，若 $H = K$，则 $G : H = G : K$。

证明. 考虑博弈 $G : H - G : K$。若左方在 $H - K$ 中某方先手时有必胜走法，则左方只需要按这个走法走，直到右方选择在某一侧 G 中行动。但左方此时显然只需在另一侧作相同行动，即可得到 0 状态而获胜。类似将左方换成右方也成立。 □

值得注意的是，若 $G = H$，$G : K = H : K$ 未必成立。一个反例是 $\{-1|1\} = 0$，但 $\{-1 : 1\} : 1 = \frac{1}{2} \neq 0 : 1$。

直观来看，在顺序和 $G : H$ 中，H 对局势影响远小于 G：

定理 6.3. （*Norton* 引理）若 G 与博弈 K 的任何一个后继状态值均不相同，则 $G : H$ 与 K 大小关系同 G 与 K 大小关系相同。

证明. 考虑博弈 $G : H - K$。若左方在 $G - K$ 中某方先手时有必胜走法，则左方只需要按这个走法走，直到右方选择在 H 中行动。但由于左方在右方行动前的 $G - K$ 中必胜，于是 $G - K \geq 0$，但 G 与 K 值不相同，于是 $G - K > 0$，则左方可以换成他先手必胜走法继续行动从而最终获胜。类似将左方换成右方也成立。 □

6.2 全部小博弈实例

一个典型的无穷小博弈是仅由绿边组成的一棵倒着的有根树形态的 Hackenbush。由于一条绿边的博弈值为 $*$，于是一个这样的博弈 G 可以被写为 $*:H$，其中 H 是 G 去掉最底部绿边剩余部分。我们尝试求出 G 的博弈值，注意到 H 是若干棵有根树 Hackenbush$H_1, H_2, \ldots, H_k$ 的和博弈，因此若递归计算出 $H_1 = *_{n_1}, H_2 = *_{n_2}, \ldots, H_k = *_{n_k}$，我们可以求出 H 的值 $*_n = *_{n_1 \oplus n_2 \oplus \ldots \oplus n_k}$，由定理 6.2，我们有 $G = * : H = * : *_n = *_{n+1}$。

另一类全部小博弈是一种被称为“花”，接地部分是一条由绿边组成的链，链顶端只有蓝边或只有红边的 Hackenbush。若顶端只有蓝边，我们称为蓝花，若顶端只有红边，我们称为红花。

6.3 原子量

全部小博弈的和博弈值通常没有简单表示，但若我们只关心它的胜负关系，下面介绍的原子量理论可以提供帮助。

定义 6.3. 远星 $☆$ 是一个 n 足够大的 $*_n$。这里的“足够大”的 n，可以认为是比涉及的其它博弈后继状态中的任何 $*_k$ 的 k 都要严格大的任意整数。

定义 6.4. 我们递归定义一个全部小博弈 G 的原子量 G'' 如下：

$G'' = \{G^{L''} - 2 | G^{R''} + 2\}$，除非如此定义得到的 G'' 是一个整数，且 $G > ☆$ 或 $G < ☆$。对于前者，我们令 G'' 为 $<\| G^{R''} + 2$ 的最大整数，对于后者，我们令 G'' 为 $\|> G^{L''} - 2$ 的最大整数。

例如，0 的原子量显然是 0；$* = \{0|0\}$ 的原子量为 $\{0-2|0+2\} = 0$，类似地，一切 $*_n$ 的原子量均为 0；$\uparrow = \{0|*\}$ 的原子量直接计算是 $\{0-2|0+2\} = 0$，但由于 $\uparrow > ☆$，于是真实原子量是 $<\| 2$ 的最大整数 1，类似地，$n\uparrow (n \in \mathbb{Z})$ 的原子量为 n；$\Uparrow * = \{0|\uparrow\}$ 的原子量直接计算是 $\{0-2|1+2\} = 0$，但由于 $\Uparrow * > ☆$，于是真实原子量是 $<\| 1+2$ 的最大整数 2。

原子量未必是整数，甚至未必是数。例如，我们有 $\{\Uparrow | \Downarrow\}$ 的原子量是 $\{2-2|-2+2\} = *$。

关于原子量，我们有下述定理：

定理 6.4. 对于全部小博弈 G, H，有：

1. $(-G)'' = -(G'')$。
2. $(G+H)'' = G'' + H''$。
3. $G'' \geq 1$ 当且仅当 $G > ☆$。
4. $G'' \leq -1$ 当且仅当 $G < ☆$。

5. $-1 <\| G'' <\| 1$ 当且仅当 $G \| ☆$。

6. 若 $G'' \geq 2$，则 $G > 0$。

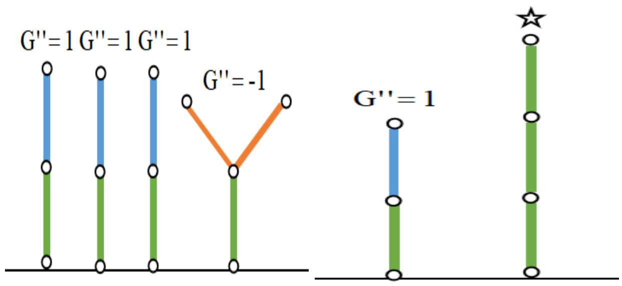
7. 若 $G'' \leq -2$，则 $G < 0$。

8. 若 $G'' \|> 0$，则 $G \|> 0$。

9. 若 $G'' <\| 0$，则 $G <\| 0$。

限于篇幅，上述定理证明略去。

我们最后给出一个原子量理论的应用实例。考虑 Hackenbush 中的花，容易验证一朵蓝花的原子量为 1，一朵红花的原子量为 -1，而一条由绿边组成的链的原子量则是 0。图 5(a) 中，我们有总和原子量 $= 2$，于是可以知道对应和博弈值 > 0，事实上不论哪方先手，左方只需要在第一次行动中将红花的绿边砍去即容易获胜。图 5(b) 中，我们有第一朵蓝花原子量量 $= 1$，而后面是一条较长的由绿边组成的链（可被认为是 ☆），于是可以知道对应和博弈值 > 0，事实上若左方先手，左方可以忽略蓝边而获胜，若右方先手，右方在忽略蓝边后的博弈中唯一获胜手段是在 ☆ 中行动，此时左方只需砍去蓝边，先后手便会交换从而获胜。



(a) 原子量 = 2　　(b) 原子量 = 1 且有 ☆

图 5: 花的和

7 总结

本文介绍了超现实数与不平等博弈的相关理论，通过引入超现实数，建立了较为严密的博弈数学模型，在一定程度上给出了博弈问题的一些通用解法。

超现实数与不平等博弈的理论博大精深，本文仅起到抛砖引玉的作用。例如，本文仅研究了有限博弈，没有涉及更一般的无限及带圈（平局）博弈的理论。希望本文能激发选手们对相关理论研究的热情，也希望有更多利用超现实数与不平等博弈理论的有趣题目出现在 OI 中。

8 致谢

感谢中国计算机学会提供学习和交流的平台。
感谢父母对我多年的培养与教导。
感谢国家集训队高闻远教练的指导。
感谢林盛华老师、陈旭龙老师对我的培养与教导。
感谢杜瑜皓学长、虞皓翔同学、代晨昕同学对本文的帮助。
感谢钟子谦学长、罗恺同学、张家瑞同学为本文验稿。

参考文献

[1] John Conway.*On Numbers And Games*, 1976.

[2] Elwyn R. Berlekamp, John Conway, Richard Guy.*Winning Ways For Your Mathematical Plays,Volume 1*, 1982.

[3] 方展鹏. 浅谈如何解决不平等博弈问题. IOI2009 中国国家候选队论文集, 2009.

[4] 贾志豪. 组合游戏略述——浅谈 SG 游戏的若干拓展及变形. IOI2009 中国国家候选队论文集, 2009.