

# Gibbs Sampling and Markov Chains

王璐

对 Bayesian 模型，一般很难直接从参数的联合后验分布 (joint posterior distribution) 抽样，但有时从每个参数的 full conditional distribution 中抽样较容易。这种情况下，可以使用 Gibbs sampler 得到很多服从后验分布的样本，然后用这些样本近似描述后验分布。Gibbs sampler 是一种迭代抽样算法，随着样本数增加，样本的分布会收敛到目标分布，但是它产生的样本之间有相关性。我们首先以一个简单的 Bayesian 模型估计为例介绍如何使用 Gibbs sampler.

## 1 A Bayesian Normal Model

使用 Bayesian 方法分析数据一般有以下三要素 (Hoff, 2009):

1. 模型设定：为数据的抽样分布设定具体形式  $p(\mathbf{y} | \boldsymbol{\theta})$ ，通常需要引入一些参数  $\boldsymbol{\theta}$ 。比如，假设数据独立地服从正态分布：

$$Y_i \stackrel{iid}{\sim} N(\mu, \phi^{-1}), \quad i = 1, \dots, n. \quad (1)$$

这里我们用参数  $\phi^{-1}$  表示正态分布的方差， $\phi$  被称为 precision.

2. 设定参数的先验分布 (prior): 参数  $\boldsymbol{\theta}$  的先验分布  $p(\boldsymbol{\theta})$  一般是主观设定的，可以加入参数的先验信息，其样本空间应涵盖参数所有可能的取值范围。例如，可以为模型(1)的参数设定如下的先验分布：

$$\begin{aligned} \mu &\sim N(\mu_0, \tau_0^2) \\ \phi &\sim \text{Gam}(\nu_0/2, \nu_0\sigma_0^2/2) \end{aligned} \quad (2)$$

其中  $\mu_0, \tau_0^2, \nu_0, \sigma_0^2$  都是确定的常数。

3. 计算参数的后验分布并做统计推断：得到参数  $\boldsymbol{\theta}$  的后验分布  $p(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y})$  后，可以估计参数的后验期望  $E(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y})$ 、后验方差  $\text{Var}(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y})$ 、置信区间等。参数的后验分布可如下计算：

$$p(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}) = \frac{p(\boldsymbol{\theta})p(\mathbf{y} | \boldsymbol{\theta})}{p(\mathbf{y})} = \frac{p(\boldsymbol{\theta})p(\mathbf{y} | \boldsymbol{\theta})}{\int p(\boldsymbol{\theta})p(\mathbf{y} | \boldsymbol{\theta})d\boldsymbol{\theta}} \propto p(\boldsymbol{\theta})p(\mathbf{y} | \boldsymbol{\theta}) \quad (3)$$

但  $p(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y})$  对应的分布一般很难识别或很难直接对其抽样。

如果我们为模型(1)选取如下的 conjugate prior:

$$\begin{aligned}\phi &\sim \text{Gam}\left(\frac{\nu_0}{2}, \frac{\nu_0 \sigma_0^2}{2}\right) \\ \mu \mid \phi &\sim N\left(\mu_0, \frac{1}{\kappa_0 \phi}\right)\end{aligned}$$

仿照 normal-inverse-Wishart 分布的计算, 以及等式  $\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = (\sum_{i=1}^n y_i^2) - n\bar{y}^2$ , 可得  $(\mu, \phi)$  的联合后验分布为

$$p(\mu, \phi \mid y_1, \dots, y_n) = p(\mu \mid \phi, y_1, \dots, y_n) p(\phi \mid y_1, \dots, y_n)$$

其中  $p(\phi \mid y_1, \dots, y_n)$  是一个 gamma density,  $p(\mu \mid \phi, y_1, \dots, y_n)$  是一个 normal density, 具体形式为:

$$\begin{aligned}\phi \mid y_1, \dots, y_n &\sim \text{Gam}\left(\frac{\nu_n}{2}, \frac{S_n}{2}\right) \\ \mu \mid \phi, y_1, \dots, y_n &\sim N\left(\mu_n, \frac{1}{\kappa_n \phi}\right)\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\nu_n &= \nu_0 + n \\ S_n &= \nu_0 \sigma_0^2 + \frac{n\kappa_0}{\kappa_0 + n}(\mu_0 - \bar{y})^2 + \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \\ \mu_n &= \frac{\kappa_0 \mu_0 + n\bar{y}}{\kappa_0 + n} \\ \kappa_n &= \kappa_0 + n\end{aligned}$$

如果想计算  $\mu$  的边际后验期望 (marginal posterior mean)  $E(\mu \mid y_1, \dots, y_n)$ , 可以采用如下的 Monte Carlo 方法:

- (1) 抽取  $\phi^{(s)} \sim \text{Gam}(\nu_n/2, S_n/2)$ ,  $s = 1, \dots, T$ .
- (2) 对每个  $\phi^{(s)}$ , 抽取  $\mu^{(s)} \mid \phi^{(s)} \sim N(\mu_n, (\kappa_n \phi^{(s)})^{-1})$ ,  $s = 1, \dots, T$ .

则  $E(\mu \mid y_1, \dots, y_n) \approx \sum_{s=1}^T \mu^{(s)} / T$ .

如果我们选取(2)中的 prior, 则  $\phi$  的边际后验分布既不是 Gamma 分布, 也不是任何常见的容易抽样的分布 (练习)。这种情况下, 可以尝试用数值方法得到  $(\mu, \phi)$  近似的联合后验分布:

- 首先为各参数选取足够大的取值范围  $\mu \in [\mu_L, \mu_H]$ ,  $\phi \in [\phi_L, \phi_H] \subseteq (0, \infty)$ .
- 然后对区域  $[\mu_L, \mu_H] \times [\phi_L, \phi_H]$  做网格离散, 比如在区间  $[\mu_L, \mu_H]$  和  $[\phi_L, \phi_H]$  上各取等距的 1000 个点  $\{\mu_1, \dots, \mu_{1000}\}, \{\phi_1, \dots, \phi_{1000}\}$ .

- 根据(3), 点  $(\mu_i, \phi_j)$  处的后验概率密度为

$$p(\mu_i, \phi_j | y_1, \dots, y_n) \propto p(\mu_i, \phi_j) p(y_1, \dots, y_n | \mu_i, \phi_j),$$

因此网格中每个点近似的后验概率为:

$$P(\mu_i, \phi_j | y_1, \dots, y_n) = \frac{p(\mu_i, \phi_j) p(y_1, \dots, y_n | \mu_i, \phi_j)}{\sum_{i=1}^{1000} \sum_{j=1}^{1000} p(\mu_i, \phi_j) p(y_1, \dots, y_n | \mu_i, \phi_j)}. \quad (4)$$

由(4)定义的离散分布可以近似  $(\mu, \phi)$  的联合后验分布。从该离散分布, 我们也可以估计出各参数的边际后验期望和置信区间等。但是网格中大部分点的后验概率都很接近 0, 造成计算的浪费。而且该方法只适用参数较少的情况, 随着参数维度  $p$  的增加, 网格点的数目呈指数增长, 因此在高维参数情形下该方法不可行。这促使人们发明了更高效地获取参数后验分布样本的 Gibbs sampler 方法。

Gibbs sampler 需要计算每个参数的 full conditional distribution.

- 模型(1)-(2) 中  $\mu$  的 full conditional density:

$$\begin{aligned} p(\mu | \phi, y_1, \dots, y_n) &\propto p(\mu) p(\phi) p(y_1, \dots, y_n | \mu, \phi) \\ &\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2\tau_0^2} (\mu - \mu_0)^2 \right\} \exp \left\{ -\frac{\phi}{2} \sum_{i=1}^n (y_i - \mu)^2 \right\} \\ &\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ (\tau_0^{-2} + n\phi) \mu^2 - 2\mu(\tau_0^{-2} \mu_0 + \phi \sum_{i=1}^n y_i) \right] \right\} \end{aligned}$$

因此  $\mu | \phi, y_1, \dots, y_n \sim N(\mu_n, \tau_n^2)$ , 其中  $\mu_n = (\tau_0^{-2} \mu_0 + \phi \sum_{i=1}^n y_i) / (\tau_0^{-2} + n\phi)$ ,  $\tau_n^2 = (\tau_0^{-2} + n\phi)^{-1}$ .

- 模型(1)-(2) 中  $\phi$  的 full conditional density:

$$\begin{aligned} p(\phi | \mu, y_1, \dots, y_n) &\propto p(\mu) p(\phi) p(y_1, \dots, y_n | \mu, \phi) \\ &\propto \phi^{\nu_0/2-1} \exp \left( -\frac{\nu_0 \sigma_0^2}{2} \phi \right) \phi^{n/2} \exp \left\{ -\frac{\phi}{2} \sum_{i=1}^n (y_i - \mu)^2 \right\} \\ &\propto \phi^{(\nu_0+n)/2-1} \exp \left\{ -\phi \left( \nu_0 \sigma_0^2 + \sum_{i=1}^n (y_i - \mu)^2 \right) / 2 \right\} \end{aligned}$$

因此  $\phi | \mu, y_1, \dots, y_n \sim \text{Gam}(\nu_n/2, S_n/2)$ , 其中  $\nu_n = \nu_0 + n$ ,  $S_n = \nu_0 \sigma_0^2 + \sum_{i=1}^n (y_i - \mu)^2$ .

那么如何利用  $\mu$  和  $\phi$  的 full conditional distributions 得到  $(\mu, \phi)$  的联合后验分布的样本? 假设  $\phi^{(1)}$  是边际后验分布  $p(\phi | y_1, \dots, y_n)$  的一个样本。给定  $\phi^{(1)}$ , 从  $\mu$  的 full conditional distribution 抽样:

$$\mu^{(1)} \sim p(\mu | \phi^{(1)}, y_1, \dots, y_n)$$

则  $(\mu^{(1)}, \phi^{(1)})$  可以看作联合后验分布  $p(\mu, \phi \mid y_1, \dots, y_n)$  的一个样本, 且  $\mu^{(1)}$  可以看作边际分布  $p(\mu \mid y_1, \dots, y_n)$  的一个样本。因此给定  $\mu^{(1)}$ , 从  $\phi$  的 full conditional distribution 抽取

$$\phi^{(2)} \sim p(\phi \mid \mu^{(1)}, y_1, \dots, y_n)$$

则  $(\mu^{(1)}, \phi^{(2)})$  又可以看作联合后验分布  $p(\mu, \phi \mid y_1, \dots, y_n)$  的一个样本,  $\phi^{(2)}$  可看作边际分布  $p(\phi \mid y_1, \dots, y_n)$  的一个样本, 继续用来产生  $\mu^{(2)}$ , 以此类推。

因此只要给定  $\mu$  或  $\phi$  的一个初始值, 然后轮流从  $\mu$  和  $\phi$  的 full conditional distributions 抽样, 就可以得到一系列来自联合后验分布  $p(\mu, \phi \mid y_1, \dots, y_n)$  的样本  $\{(\mu^{(s)}, \phi^{(s)}) : s = 1, \dots, T\}$ , 且  $\{\mu^{(s)}\}_{s=1}^T$  和  $\{\phi^{(s)}\}_{s=1}^T$  可看作分别来自  $\mu$  和  $\phi$  的边际后验分布的样本。这种方法被称为 **Gibbs sampler**。模型(1)-(2)对应的 Gibbs sampler 的 R code 如下:

```
## create data
set.seed(1)
n = 100
y = rnorm(n, mean=-5, sd=2)

# specify prior parameters
mu0 = 0
tau02 = 10
nu0 = 4
sigma02 = 10

## posterior samples -----
ns = 1000 # number of samples
mu_samples = numeric(ns)
phi_samples = numeric(ns)
# starting values
mu = mean(y)
phi = 1/var(y)
mu_samples[1] = mu
phi_samples[1] = phi
# intermediate variables
sum_y = sum(y)

# Gibbs sampling
set.seed(10)
```

```
for (s in 2:ns){  
  # generate mu  
  mu_n = (mu0/tau02 + phi*sum_y)/(1/tau02 + n*phi)  
  tau2_n = 1/(1/tau02 + n*phi)  
  mu = rnorm(1, mean = mu_n, sd = sqrt(tau2_n))  
  mu_samples[s] = mu  
  
  # generate phi  
  nu_n = nu0 + n  
  Sn = nu0*sigma02 + sum((y-mu)^2)  
  phi = rgamma(1, shape = nu_n/2, rate = Sn/2)  
  phi_samples[s] = phi  
}
```

图1展示了上述得到的  $\mu$  和  $\phi$  的后验样本随迭代步数的移动，称为 traceplot. 从该图可以看到，本例中 Gibbs sampler 得到的样本在参数空间中“移动”的很快，此时称样本的 mixing 很好，或 mixing 速度很快。这表明样本之间的相关性较小，此时样本均值可以很好地近似后验分布的期望。

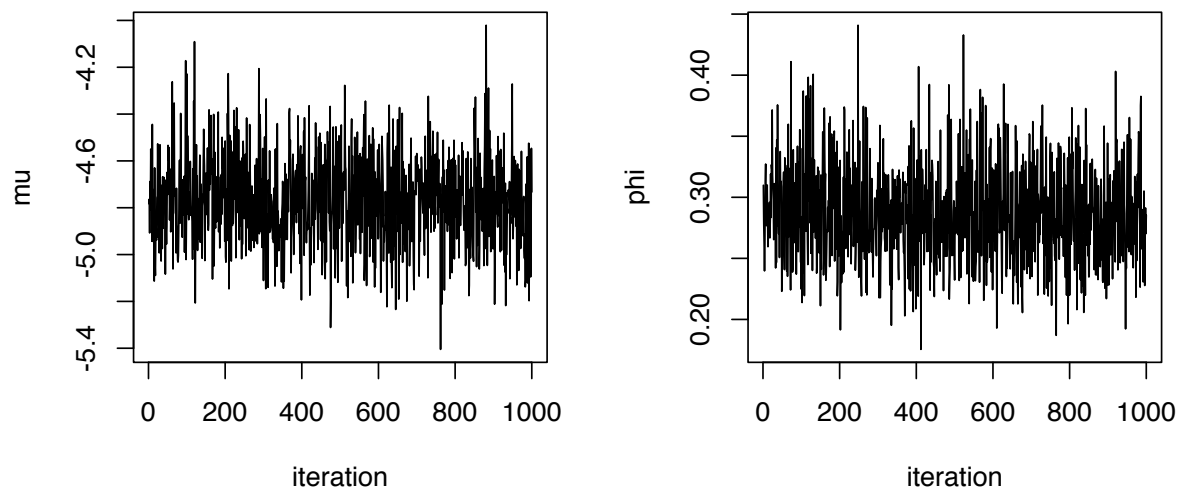


Figure 1:  $\mu$  (左) 和  $\phi$  (右) 后验样本的 traceplots.

样本之间的相关性如何影响样本均值对目标期望的近似？假设  $\{\theta^{(s)} : s = 1, \dots, T\}$  是由 Gibbs sampling 得到的一系列服从目标分布  $p(\theta)$  的样本，此时样本均值  $\bar{\theta} = \sum_{s=1}^T \theta^{(s)} / T$  到目标期望  $E(\theta) = \int \theta p(\theta) d\theta$  距离平方的期望，即  $\bar{\theta}$  的方差为

$$\begin{aligned}
 \text{Var}_G(\bar{\theta}) &= E[(\bar{\theta} - E(\theta))^2] \\
 &= E\left[\left(\frac{1}{T} \sum_{s=1}^T (\theta^{(s)} - E(\theta))\right)^2\right] \\
 &= \frac{1}{T^2} E\left[\sum_{s=1}^T (\theta^{(s)} - E(\theta))^2 + \sum_{s=1}^T \sum_{t \neq s} (\theta^{(s)} - E(\theta)) (\theta^{(t)} - E(\theta))\right] \\
 &= \frac{1}{T^2} \sum_{s=1}^T E[(\theta^{(s)} - E(\theta))^2] + \frac{1}{T^2} \sum_{s=1}^T \sum_{t \neq s} E[(\theta^{(s)} - E(\theta)) (\theta^{(t)} - E(\theta))] \\
 &= \frac{1}{T} \text{Var}(\theta) + \frac{1}{T^2} \sum_{s=1}^T \sum_{t \neq s} E[(\theta^{(s)} - E(\theta)) (\theta^{(t)} - E(\theta))] \\
 &= \text{Var}_{MC}(\bar{\theta}) + \frac{1}{T^2} \sum_{s=1}^T \sum_{t \neq s} E[(\theta^{(s)} - E(\theta)) (\theta^{(t)} - E(\theta))]
 \end{aligned}$$

其中  $\text{Var}_{MC}(\bar{\theta})$  是  $p(\theta)$  独立同分布的样本的均值对应的方差。等式右边第二项取决于样本  $\{\theta^{(s)}\}_{s=1}^T$  之间的相关性。由于 Gibbs sampler 产生的样本之间的相关性一般为正，这一项通常大于 0，因此  $\text{Var}_G(\bar{\theta}) > \text{Var}_{MC}(\bar{\theta})$ ，即 Gibbs sampling 的样本均值到目标期望的距离平均会大于独立的 Monte Carlo 样本的均值到目标期望的距离。且 Gibbs sampling 样本之间的相关性越高， $\text{Var}_G(\bar{\theta})$  就越大，均值的近似效果越差。一个衡量 Gibbs sampling 样本相关性的指标是 *effective sample size* (ESS), 定义为

$$ESS = \frac{\text{Var}(\theta)}{\text{Var}_G(\bar{\theta})}$$

ESS 可以理解为：为达到与 Gibbs sampling 样本估计量相同精度所需的独立样本的个数。R package `mcmcse` 的函数 `ess()` 可以给出 Gibbs sampling 样本的 ESS.

```
# diagnostics
library(mcmcse)
plot(mu_samples, type='l', xlab='iteration', ylab = 'mu')
plot(phi_samples, type='l', xlab='iteration', ylab = 'phi')
acf(mu_samples) # autocorrelation
acf(phi_samples)
ess(mu_samples)
ess(phi_samples)
```

对上述 Bayesian 模型(1)-(2), Gibbs sampler 得到的  $\mu$  的 1000 个后验样本的 ESS 为 930,  $\phi$  的后验样本的 ESS 为 961, 说明 Gibbs sampler 在该模型中表现得非常好。利用这些后验样本, 我们可以估计参数的后验期望和后验置信区间 (credible interval):  $\mu$  的后验均值为  $\bar{\mu} = -4.77$ , 95% credible interval 为  $(-5.14, -4.38)$ ;  $\phi$  的后验均值为  $\bar{\phi} = 0.29$ , 95% credible interval 为  $(0.22, 0.37)$ 。

## 2 Gibbs Sampling

本节我们给出一般的 Gibbs sampling 算法。假设模型的参数向量为  $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_p)$ , 其中每个分量  $\theta_j$  可以是一个数或一个向量,  $j = 1, \dots, p$ . 抽样的目标分布为  $p(\boldsymbol{\theta})$ , 但很难直接从  $p(\boldsymbol{\theta})$  中抽样, 比如在上述 Bayesian 模型 (1)-(2) 中, 目标分布为  $p(\mu, \phi | y_1, \dots, y_n)$ . 如果我们知道  $\boldsymbol{\theta}$  每个分量的 full conditional distribution  $p(\theta_j | \{\theta_k\}_{k \neq j})$ ,  $j = 1, \dots, p$ , 给定  $\boldsymbol{\theta}$  的一个初始值  $\boldsymbol{\theta}^{(0)} = (\theta_1^{(0)}, \dots, \theta_p^{(0)})$ , Gibbs sampler 可以如下从当前样本  $\boldsymbol{\theta}^{(s-1)}$  产生新的样本  $\boldsymbol{\theta}^{(s)}$ :

1. 抽取  $\theta_1^{(s)} \sim p(\theta_1 | \theta_2^{(s-1)}, \theta_3^{(s-1)}, \dots, \theta_p^{(s-1)})$
2. 抽取  $\theta_2^{(s)} \sim p(\theta_2 | \theta_1^{(s)}, \theta_3^{(s-1)}, \dots, \theta_p^{(s-1)})$
3. 抽取  $\theta_3^{(s)} \sim p(\theta_3 | \theta_1^{(s)}, \theta_2^{(s)}, \theta_4^{(s-1)}, \dots, \theta_p^{(s-1)})$
- $\vdots$
- p. 抽取  $\theta_p^{(s)} \sim p(\theta_p | \theta_1^{(s)}, \theta_2^{(s)}, \dots, \theta_{p-1}^{(s)})$ .

在上述过程中, 如果能将  $\boldsymbol{\theta}$  的一些一元分量“合并”成一个子向量进行更新, 就可以减少样本之间的相关性, 这种方法称为 *block sampling*.

不断重复上述过程, Gibbs sampler 可以产生一系列不独立的样本  $\boldsymbol{\theta}^{(1)}, \boldsymbol{\theta}^{(2)}, \dots, \boldsymbol{\theta}^{(T)}$ , 且每个样本  $\boldsymbol{\theta}^{(s)}$  与之前的样本  $\boldsymbol{\theta}^{(0)}, \dots, \boldsymbol{\theta}^{(s-1)}$  的相关性只取决于  $\boldsymbol{\theta}^{(s-1)}$ , 即给定  $\boldsymbol{\theta}^{(s-1)}$ ,  $\boldsymbol{\theta}^{(s)}$  与  $\boldsymbol{\theta}^{(0)}, \dots, \boldsymbol{\theta}^{(s-2)}$  条件独立, 这被称为 Markov 性, 因此称这一列样本是一条 **Markov chain**.

当满足一些条件时 (后面会介绍), 从任何初始值  $\boldsymbol{\theta}^{(0)}$  出发, Gibbs sampler 产生的样本  $\boldsymbol{\theta}^{(s)}$  的分布在  $s \rightarrow \infty$  时收敛到目标分布  $p(\boldsymbol{\theta})$ , 即

$$P(\boldsymbol{\theta}^{(s)} \in A) \rightarrow \int_A p(\boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta}.$$

并且对任意可积函数  $g$  有

$$\frac{1}{T} \sum_{s=1}^T g(\boldsymbol{\theta}^{(s)}) \rightarrow E[g(\boldsymbol{\theta})] = \int g(\boldsymbol{\theta}) p(\boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta}, \quad T \rightarrow \infty.$$

这说明我们可以用  $\{g(\boldsymbol{\theta}^{(s)})\}$  的样本均值近似  $E[g(\boldsymbol{\theta})]$ , 这与 Monte Carlo 方法相似, 因此上述过程被称为 **Markov chain Monte Carlo (MCMC)** 方法。

### 3 Markov Chains

本节介绍 Markov chains 的一些基本理论。

从一个  $p$  维状态空间 (state space)  $\mathcal{X}$  上按如下方式随机抽取一系列向量：给定一个初始值  $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathcal{X}$ ，按照某个条件分布  $p(\mathbf{x} | \mathbf{x}')$  依次抽取

$$\mathbf{x}^{(t)} \sim p(\mathbf{x} | \mathbf{x}^{(t-1)}) \quad \text{且} \quad \mathbf{x}^{(t)} \perp \mathbf{x}^{(t-k)} | \mathbf{x}^{(t-1)}, \quad k > 1.$$

称这样得到的序列  $\{\mathbf{x}^{(t)}\}$  为状态空间  $\mathcal{X}$  上的一条 Markov chain，或一阶 Markov process.

与 Markov chain 有关的一些基本概念：

- **Transition densities.** 在 Markov chain 中，对任意正整数  $k$ ，定义如下的  $k$ -step transition density

$$\begin{aligned} & - p^1(\mathbf{x}^{(t+1)} | \mathbf{x}^{(t)}) = p(\mathbf{x}^{(t+1)} | \mathbf{x}^{(t)}) \\ & - p^2(\mathbf{x}^{(t+2)} | \mathbf{x}^{(t)}) = \int_{\mathcal{X}} p(\mathbf{x}^{(t+2)} | \mathbf{x}^{(t+1)}) p(\mathbf{x}^{(t+1)} | \mathbf{x}^{(t)}) d\mathbf{x}^{(t+1)} \\ & - p^3(\mathbf{x}^{(t+3)} | \mathbf{x}^{(t)}) = \int_{\mathcal{X}} p(\mathbf{x}^{(t+3)} | \mathbf{x}^{(t+2)}) p^2(\mathbf{x}^{(t+2)} | \mathbf{x}^{(t)}) d\mathbf{x}^{(t+2)} \\ & \quad \vdots \\ & - p^k(\mathbf{x}^{(t+k)} | \mathbf{x}^{(t)}) = \int_{\mathcal{X}} p(\mathbf{x}^{(t+k)} | \mathbf{x}^{(t+k-1)}) p^{k-1}(\mathbf{x}^{(t+k-1)} | \mathbf{x}^{(t)}) d\mathbf{x}^{(t+k-1)} \end{aligned}$$

如果 transition density  $p(\mathbf{x} | \mathbf{x}') > 0, \forall \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathcal{X}$ ，则对任意正整数  $k$ ， $k$ -step transition density  $p^k(\mathbf{x} | \mathbf{x}') > 0, \forall \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathcal{X}$ 。这说明从  $\mathbf{x}^{(t)}$  出发，该过程在  $k$  步后到达任意  $\mathbf{x}^{(t+k)} \in \mathcal{X}$  的概率密度都为正，即该过程可以“漫游”到状态空间的任何地方。通常具有该性质的 Markov process 会收敛到唯一的极限分布。

- **Stationary distribution.** 如果存在一个分布  $\pi(\mathbf{x})$  使 Markov process 满足

$$\pi(\mathbf{x}) = \int_{\mathcal{X}} p(\mathbf{x} | \mathbf{x}') \pi(\mathbf{x}') d\mathbf{x}'. \quad (5)$$

称分布  $\pi(\mathbf{x})$  为该 Markov process 的一个 **stationary distribution**。(5)表明如果 Markov chain 的当前状态  $\mathbf{x}'$  服从 stationary distribution  $\pi(\cdot)$ ，按照 transition density  $p(\mathbf{x} | \mathbf{x}')$  产生的新状态  $\mathbf{x}$  的边际分布依然是  $\pi(\cdot)$ 。

由(5)得

$$\pi(\mathbf{x}) = \int_{\mathcal{X}} p^k(\mathbf{x} | \mathbf{x}') \pi(\mathbf{x}') d\mathbf{x}', \quad \forall k \in \mathbb{N}^+. \quad (6)$$

(6)表明，如果 Markov chain 的初始值服从 stationary distribution，整个过程的边际分布会永远“保持” stationary distribution。



在 Bayesian 分析中, Gibbs sampler 产生的 Markov chain 的 transition density 是

$$p(\boldsymbol{\theta}^{(s)} | \boldsymbol{\theta}^{(s-1)}) = p(\theta_1^{(s)} | \theta_2^{(s-1)}, \dots, \theta_p^{(s-1)})p(\theta_2^{(s)} | \theta_1^{(s)}, \theta_3^{(s-1)}, \dots, \theta_p^{(s-1)}) \cdots p(\theta_p^{(s)} | \theta_1^{(s)}, \dots, \theta_{p-1}^{(s)}) \quad (7)$$

其中每个分量的条件分布都是该参数的 full conditional distribution. 如果  $\forall \boldsymbol{\theta}^{(s-1)}, \boldsymbol{\theta}^{(s)}$ ,  $p(\boldsymbol{\theta}^{(s)} | \boldsymbol{\theta}^{(s-1)}) > 0$ , 该过程会收敛到唯一的 stationary distribution, 且这个分布是参数的后验分布  $p(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y})$ .  $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^2$  的证明如下, 对任意  $p$  维向量  $\boldsymbol{\theta}$  也可类似证明。

*Proof.* 假设  $\boldsymbol{\theta}^{(s-1)} = (\theta_1^{(s-1)}, \theta_2^{(s-1)})$  服从后验分布  $p(\theta_1, \theta_2 | \mathbf{y})$ , 则由 Gibbs sampler 产生的  $\boldsymbol{\theta}^{(s)} = (\theta_1^{(s)}, \theta_2^{(s)})$  的边际分布为

$$\begin{aligned} & \int \int p(\theta_1^{(s)}, \theta_2^{(s)} | \theta_1^{(s-1)}, \theta_2^{(s-1)}, \mathbf{y}) p(\theta_1^{(s-1)}, \theta_2^{(s-1)} | \mathbf{y}) d\theta_1^{(s-1)} d\theta_2^{(s-1)} \\ &= \int p(\theta_2^{(s)} | \theta_1^{(s)}, \mathbf{y}) p(\theta_1^{(s)} | \theta_2^{(s-1)}, \mathbf{y}) \int p(\theta_1^{(s-1)}, \theta_2^{(s-1)} | \mathbf{y}) d\theta_1^{(s-1)} d\theta_2^{(s-1)} \\ &= p(\theta_2^{(s)} | \theta_1^{(s)}, \mathbf{y}) \int p(\theta_1^{(s)} | \theta_2^{(s-1)}, \mathbf{y}) p(\theta_2^{(s-1)} | \mathbf{y}) d\theta_2^{(s-1)} \\ &= p(\theta_2^{(s)} | \theta_1^{(s)}, \mathbf{y}) p(\theta_1^{(s)} | \mathbf{y}) \\ &= p(\theta_1^{(s)}, \theta_2^{(s)} | \mathbf{y}) \end{aligned}$$

即  $\boldsymbol{\theta}^{(s)}$  也服从后验分布  $p(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y})$ . □

- **Irreducibility.** 如果从任意初始状态  $\mathbf{x}' \in \mathcal{X}$  出发, Markov process 可以在有限步到达任意其它状态  $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ , 称 Markov process 为 irreducible. 严格的定义如下:

**Definition 3.1** (Irreducibility). 如果  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathcal{X}, \exists k < \infty$  使得  $k$ -step transition probability  $P^k(\mathbf{x} | \mathbf{x}') > 0$ , 称该 Markov process 为 irreducible.

如果 Markov chain 的 transition density 满足  $p(\mathbf{x} | \mathbf{x}') > 0, \forall \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathcal{X}$ , 则该 Markov chain 是 irreducible.

- A non-irreducible Markov process. 令状态空间  $\mathcal{X} = (-1, 1)$  上的一个 Markov chain 有如下的 transition distribution:

$$p(x | x') = \begin{cases} x \sim U(0, 1), & \text{if } x' \geq 0 \\ x \sim U(-1, 0), & \text{if } x' < 0 \end{cases}$$

该过程不是 irreducible, 因为从任意  $x' < 0$  出发, 该过程会一直停留在区间  $(-1, 0)$  上, 无法到达  $\mathcal{X}$  的另一半区间  $[0, 1)$ ; 同理, 如果从任意  $x' > 0$  出发, 该过程会一直停留在区间  $[0, 1)$  上。即总有一半的状态空间是可以“去掉”的。

- **非周期性 (Aperiodicity)** . 如果  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathcal{X}$ ,  $\gcd\{k : P^k(\mathbf{x} | \mathbf{x}') > 0\} = 1$ , 其中  $\gcd$  表示该整数集合的最大公约数 (greatest common divisor), 称该过程具有**非周期性**。显然当 transition density 满足  $p(\mathbf{x} | \mathbf{x}') > 0, \forall \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathcal{X}$ , Markov chain 是非周期的。

– 一个周期性的 Markov process. 令状态空间  $\mathcal{X} = (-1, 1)$  上的一个 Markov chain 有如下的 transition distribution:

$$p(\mathbf{x} | \mathbf{x}') = \begin{cases} x \sim U(0, 1), & \text{if } x' < 0 \\ x \sim U(-1, 0), & \text{if } x' \geq 0 \end{cases}$$

该过程是 irreducible 但不是非周期的: 如果该 Markov chain 从  $x' \in A \subseteq (-1, 0)$  出发, 它需要先移动到区间  $[0, 1)$  上才能再次返回集合  $A$  上。因此对任何集合  $A \subseteq (-1, 0)$  或  $A \subseteq [0, 1)$ , Markov chain 每经过两步才有可能访问到  $A$ , 此时称  $A$  的周期为 2。

- **遍历性 (Ergodicity)** . 我们称一个 irreducible 且非周期的 Markov chain 具有**遍历性**。具有遍历性的 Markov chain 有以下重要性质:

1. 存在唯一的 stationary distribution  $\pi(\mathbf{x})$ .
2. 从任意初始值出发, 该过程都会收敛到 stationary distribution  $\pi(\mathbf{x})$ , 即对  $\forall \mathbf{x}' \in \mathcal{X}$ , 当  $k \rightarrow \infty$ ,

$$p^k(\mathbf{x} | \mathbf{x}') \rightarrow \pi(\mathbf{x}).$$

这说明对遍历的 Markov chain, 从任何初始状态  $\mathbf{x}'$  出发, 未来状态  $\mathbf{x}$  的分布会随  $k$  的增加越来越接近 stationary distribution  $\pi(\mathbf{x})$ . 而初始状态会被“遗忘”, 当  $k \rightarrow \infty$ , 该过程产生的  $\mathbf{x}^{(k)} \sim \pi(\mathbf{x})$ .

因此对遍历的 Markov chain  $\{\mathbf{x}^{(t)}\}$ , 样本均值会 (almost surely) 收敛到 stationary distribution 的期望, 且对任何可积的函数  $g(\cdot)$ , 当  $T \rightarrow \infty$ ,

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T g(\mathbf{x}^{(t)}) \rightarrow \int g(\mathbf{x}) \pi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

一个 irreducible 且非周期的 Markov chain 等价于  $\exists k < \infty$  使得  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathcal{X}$ ,  $P^k(\mathbf{x} | \mathbf{x}') > 0$ . 在更严格的定义中, Markov chain 的遍历性还需要满足 positive recurrence 条件: 从  $\mathcal{X}$  上的任意集合  $A$  的一点  $\mathbf{x} \in A$  出发, 持续运行 Markov chain, 它可以无穷次回到  $A$ ; 或者 Markov chain 会在期望有限的步数内再次回到  $A$ . 当 transition density 满足  $p(\mathbf{x} | \mathbf{x}') > 0, \forall \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathcal{X}$  时, irreducibility 与 positive recurrence 是等价的。在有些情形下, irreducible Markov chain 不一定是 positive recurrent.

在 Bayesian 分析中, 通过 Gibbs sampler 产生的 Markov chain 一般是遍历的, 上述结果表明通过产生一条很长的 Markov chain, 该过程的样本可以近似描述后验分布 (stationary distribution).

有时当初始值选取得不太好, Markov chain 可能会移动很长时间才收敛到 stationary distribution 概率 (密度) 较高的区域, 我们称这段时间为 *burn-in*. 用样本均值估计目标期望时通常舍弃 burn-in 阶段的样本。

## References

Hoff, P. D. (2009). *A first course in Bayesian statistical methods*. Springer Science & Business Media.