

2022.7.6

今后可能的研究思路是，考虑间断需求的合适基准预测并建立组合预测（包括分位数与分布列预测），并考虑间断需求自身的库存管理背景（库存指标的评价以及进一步地，将组合结果放在成本函数中进行优化）。

概率（分位数）组合预测

概率预测在间断需求中需要重视 (Kolassa, 2016; Goltsos et al., 2021)；针对简单需求的组合预测也相当有限，Petropoulos (2015) 讨论了点预测的组合预测问题，而 Trapero et al. (2019) 声明其是首个在需求预测中引入分位数组合预测的研究。

目前已经基本完成了组合方法所需的基准预测，共11个模型/方法；但如果进一步完成概率预测及其组合预测，涉及到如何将分位数转换为概率的问题；以及考虑到间断需求的计数性质，需要将非整数预测结果转为整数 (coherent forecasting)。

对于概率组合预测，可以考虑两种形式：**分位数组合预测与分布列组合预测**。之前做的组合预测工作集中在分位数组合预测。

分位数组合预测

基准方法：两种Bootstrap (VZ与WSS)是采用抽取样本（样本量1000）的样本分位数估计得到的；LSTM 以及基于 Synder et al. (2013) 的泊松、负二项概率模型是模拟了1000次样本路径求样本分位数得到的；以上这些是大部分整数+小部分小数。（虽然是直接求解分布参数的模型，但分布参数时变，且上一时刻真值/预测值会影响下一时刻参数，故依然采用采样求样本分位数的设置；尽管也可求平均参数）而两种分位数方法，使用计数分位数回归的quantGAM输出是整数，而使用lgb优化pinball loss的结果是小数。

基准方法非整数分位数预测的整数化：对于除lgb之外的方法，可以考虑（四舍五入）取近似值。因其非整数结果不多，简单处理就好。对于lgb，四舍五入也可（大范围四舍五入，意味着分位数估计0.5以下估0, 0.5-1.5估1, 依此类推）；或者考虑将分位数转为分布列中的方法。（当然，如果只在分位数层面进行衡量而不涉及其它意义，不一定需要转整数）

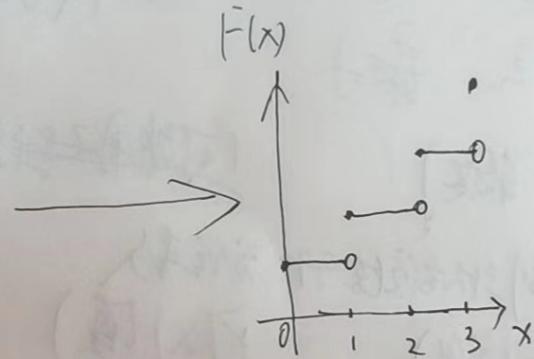
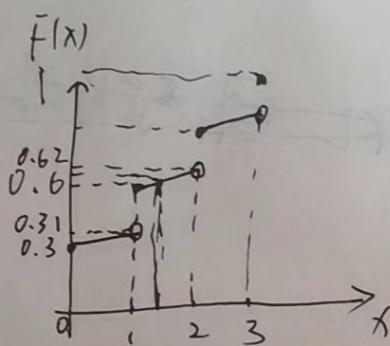
预测组合：简单平均组合、加权平均组合、分位数回归组合、计数分位数回归组合。前三种已经有实验尝试，后一种目的是直接保证组合结果的整数化（在基准不为整数时也可以）。前三种显然不能保证预测结果是整数。若需取整，可以考虑四舍五入取近似，或者转为分布列，按分布列得到整数分位数。

分位数转为分布列：基于手上现有的实验数据，可以尝试利用0.01-0.99的分位数组（分位数概率步长为0.01）来拼出分布列。分布列的尝试求法如下：

- 如果所求分位数均为整数，则可以考虑交界点对半分/按值在99个分位数中出现比例分。（如果有非整数值，则在取整数近似后进行该步）
- 用线性插值连接99个分位数中非整数点与整数交界点作为基于所求分位数的分布（左图）；使用离散分布列去拟合该分布，在一定的约束条件下最小化KL散度。（把分布函数的每一段拉平？）

基于分位数的分布

离散分布列



分位数	0.01	0.30	0.31	...	0.6	0.61	0.62	...
取值	0	0	0		1	1	1	2

分布列组合预测

离散分布中，与连续分布的密度对应的概念是分布列。可令分布列组合的支撑为各基准方法/模型支撑之并集，之后分布列组合预测结果为：

$$P_{comb}(Y = k) = \sum_{i=1}^m w_i P_i(Y = k)$$

这里 $k \in S_{comb} = \bigcup_i S_i$ ， S_i 表示各基准模型的支撑。对于间断需求， k 不小于0。 m 为组合模型/方法个数。为了保证组合后概率和为1，权重需满足 $\sum_{i=1}^m w_i = 1$ 。问题依然是对组合权重的确定。

如何组合分布列？基于分数的加权（对数分数、CRPS）、优化对数分数的线性意见池（linear opinion pool）、动态池（dynamic pool）、BMA等似乎都可以备选，目前没有主意。如果考虑下一节内容，甚至可以将组合的分布列信息写在成本函数中，进行面向成本的组合优化。

间断需求特性

两个问题：

- 统计学性质：其属于计数数据，应使用可应用在计数数据的方法。这一点在基准模型池选择以及组合预测中需考虑，以保证是一个整值预测（coherent forecasting）。
- 管理学意义：其来自于库存管理领域的研究。因而，预测结果需要与库存的经济含义结合考虑，使研究更有现实意义。Goltsos et al. (2021) 倡议在需求领域将预测及库存管理结合起来，并研究了结合两种研究的文献。可以有两种结合方式：
 - 在预测之后，讨论预测结果带来的库存指标；
 - 将库存目标与预测融为一体（如结合成一个损失函数），同时优化预测与库存。

组合的整值预测

对于分位数组合层次，可以使用先组合各分位数再做近似或者前述分位数——分布列转换后取分布列分位数；或者使用计数分位数回归等方式，直接得到一个整值组合分位数结果。

对于分布列组合层次，其实只要做了分位数——分布列的转换，则都能是一个整值分布。

因此，组合的整值预测关键可能是分位数——分布列的转换。当然，在这里的情境中，WSS、VZ、LSTM以及基于 Synder et al. (2013) 的模型都是可以直接给出分布列的，（尽管上一节为了搭上分位数组合的边而用它们生成分位数结果），故不一定需要将它们的分位数结果再转回分布列。故所提出的分位数转分布列的方法主要面对于分位数组合的后处理，其次是不满足整值输出的分位数方法。

库存管理的结合

库存指标评价：如 Trapero et al. (2019) 研究所示，其考虑了诸多库存管理中需要考虑的经济量，如**循环服务水平** (cycle service level, CSL；该研究是制定了一个目标CSL，即销售中不缺货的概率)、**库存投资量**、**缺货量** (backorder) 等，除对预测误差进行评价外，还对这些经济量进行评估。循环服务水平的一个容易混淆的指标是供货率 (fill rate)，两者定义区别如下，其中 X 是下个周期的需求， s 是可用库存：

$$CSL = P(X < s)$$

$$fr = \frac{E[min(X, s)]}{E[X]}$$

另外更好的库存评价应该是成本，包括库存成本与缺货成本；但是此数据不易得（如，M5数据只有销售价格，最多可以衡量缺货减少的销售额）。故以库存量的评价为主。

预测与库存优化集成：Huber et al. (2019) 的工作，将分位数预测嵌入在缺货/库存过量的报童框架下，以优化如下损失函数（基于已知的缺货/库存成本）：

$$\min_{\Phi} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [c_u(d_i - q_i(\Phi, \mathbf{x}_i))^+ + c_o(q_i(\Phi, \mathbf{x}_i) - d_i)^+],$$

而在成本不易得的情况下，Kourentzes et al. (2020) 以目标CSL与实际CSL差值的平方作为成本（损失），对使用指数平滑预测与order-to-up策略的“库存预测”问题进行解决。

鉴于此，可以考虑在优化预测损失（如Pinball loss、DRPS、log score等）之外，尝试基于库存指标的预测优化（预测得到对未来需求的估计，基于估计的未来需求执行简单的库存政策（如order-to-up），得到库存管理相关指标）。

总结

预测组合：在已进行的基准方法基础上，针对一般的分位数组合可能结果不满足整数输出的问题，考虑用KL散度用离散分布列拟合分位数结果代表的分布，再得到整值分位数。（在分布列框架下得到整分位数）。当然，也可以对各基准方法进行整值调整，用整值分布列来进行分布列组合。由于分布列与连续分布的密度函数是对应概念，故密度组合的方法可能都可以移植到分布列组合，其方法较多，一时不知如何选择。

库存管理结合：简单的做法是预测之后用库存指标评价；可能更有意思的做法是以库存成本/服务水平等经济量作为优化目标，将预测与库存问题结合，并且可以比较基于预测评价与基于成本组合的不同效果评价。

