

2021.12.22

分位数组合

Quantile forecast optimal combination to enhance safety stock estimation

(Trapero et al., 2019) (International Journal of Forecasting)

动机：为了克服在安全库存制定中用 i.i.d 高斯分布假定的预测误差带来的问题（计数需求的预测误差很难服从高斯分布，以及独立同分布是否合理）。

方法：考虑使用 GARCH 与核密度估计 (KDE) 来克服上述问题，确定分位数以确定安全库存水平，并使用组合方法避免对模型的选择问题。

安全库存(safety stock,SS)定义：可以解释为在给定的概率水平（target cycle service level, CSL）下的一个分位数（代表着需求预测的误差水平）。可以表示为 $SS = k\sigma_L$ ，其中 $k = \Phi^{-1}(CSL)$ （标准正态对于给定概率水平CSL的分位数）。实际中 σ_L 可由MSE估计，为了更好的刻画误差，文中如此应用两个基准方法：

- GARCH：对提前期为 L 的预测误差可以如下表示（带常数的GARCH(1,1)），之后代入SS的表达式：

$$\sigma_{L,t+1}^2 = \omega' + a_1' \epsilon_{L,t}^2 + \beta_1' \sigma_{L,t}^2$$

- KDE：此时 $SS = Q_L(CSL)$ ，即给定CSL下提前期预测误差分位数，所需分布由KDE方法估计。

$$f(x) = \frac{1}{Nh} \sum_{j=1}^N K\left(\frac{x - X_j}{h}\right)$$

分位数组合：将这两个方法估计的分位数组合构造新的安全库存水平，简单加权线性组合（两个权重无约束）。

$$SS_t = w_1 \cdot Q_{L,t}^1(CSL) + w_2 \cdot Q_{L,t}^2(CSL),$$

目标是使组合的tick loss（或者叫pinball loss）的期望最小：

$$(w_1^* w_2^*) = \underset{(w_1, w_2)}{\operatorname{argmin}} E_t [TL_{CSL}(y_t, F_t + SS_t)]$$

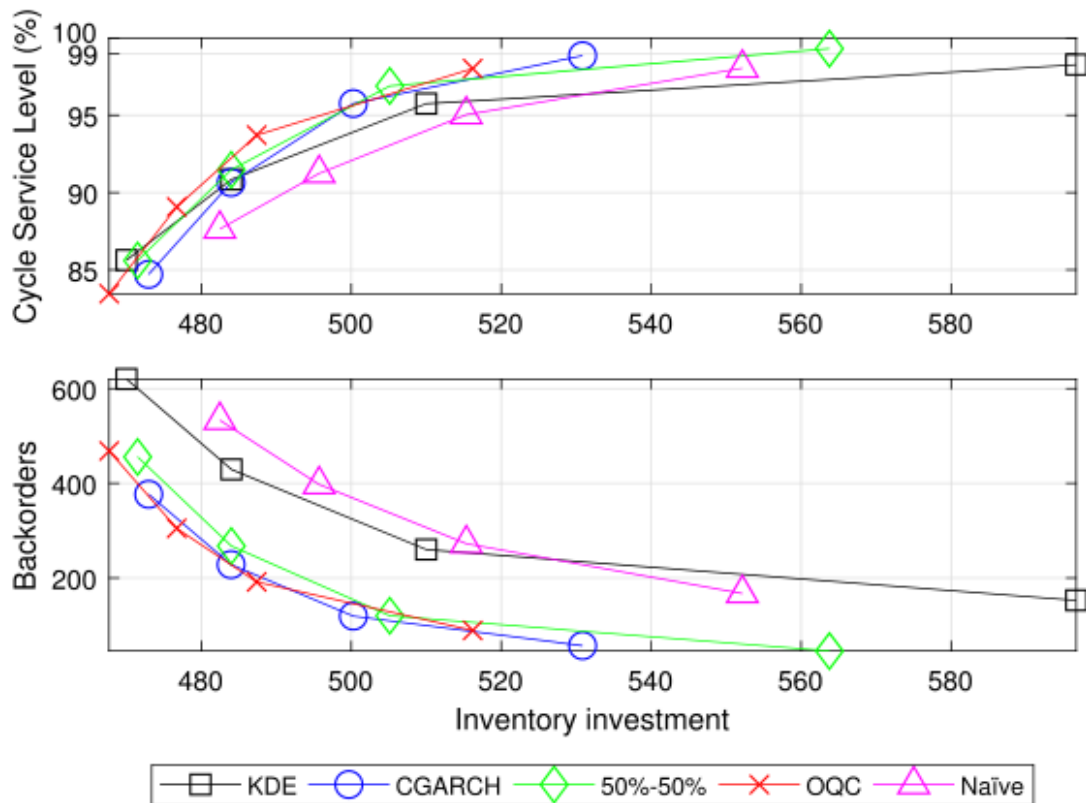
$$TL_{\alpha}(y_t, F_t) = \begin{cases} \alpha |y_t - F_t| & \text{if } F_t \leq y_t \\ (1 - \alpha) |y_t - F_t| & \text{if } F_t \geq y_t \end{cases}$$

在统计性质上，此方法与Christoffersen test提到的正确条件覆盖检验是等价的，理论上说明了最优组合可以保证calibration。（之前汇报中对这个检验用错的一点是，对于计数需求序列的检验应该做单侧区间而不是双侧区间，这篇文章对此检验的描述也是说的单侧区间，进一步说是左侧区间，即涵盖0的区间）。

$$LR_{Ind} = -2 \log \left\{ \frac{(1 - \pi_2)^{n_{00}+n_{10}} \pi_2^{n_{01}+n_{11}}}{(1 - \pi_{01})^{n_{00}} \pi_{01}^{n_{01}} (1 - \pi_{11})^{n_{10}} \pi_{11}^{n_{11}}} \right\}$$

在预测中，使用简单指数平滑获得点预测，每个提前期预测的结果为一期预测*提前期长度，进而求提前期误差。

结果评估：模拟与真实数据（英国一快消制造商，fast moving, 229 Skus, 173周度观测）；除评估 tick loss，还将CSL是否达到、库存投资水平与缺货结合考察。模拟使用AR（1）过程，随机误差尝试正态与对数正态两种。在正态误差时GARCH损失较小，对数正态时KDE损失较小，而最优组合方法可以在两个数据集都达到最优；服务水平与缺货如下所示（AR系数0.7，对数正态误差），相对而言最优组合能达到较低的备货水平和缺货数量，但是对目标服务水平的覆盖并不好。



在真实数据上，提前期为1时，无论是损失函数函数库存水平、缺货数量OQC都占优，而提前期为4时除了在99%的CSL上GARCH略好于组合方法外，其它都是组合方法占优。

小结：

- 一个参数方法与一个非参数方法的组合，在分位数预测上得以实现组合；
- pool的线性加权方式，但未限制权重取值（这一点与pool密度组合有别——概率密度需要正则）；
- 对需求预测的评价——除了预测损失，还考虑了成本相关因素，及覆盖情况。

Evaluation and Combination of Conditional Quantile Forecasts

(Giacomini & Komunjer, 2005) (Journal of Business & Economic Statistics)

上文方法的来源（分位数的组合比概率密度组合要早）

提出一个encompassing test，用来在样本外框架内比较条件分位数预测。（即做检验，如果能检验出一个模型包含另一个模型的结果，则选择模型，否则模型组合）

组合方式：与上文类似，优化组合分位数预测的tick loss（组合不加限制）。

“包含”的含义（Conditional quantile forecast encompassing）：一个模型与其竞争模型的组合的损失期望不显著小于该模型的损失期望，数学定义是：

$$E_t[\mathcal{T}_\alpha(Y_{t+1} - \hat{q}_{1m,t})] = E_t[\mathcal{T}_\alpha(Y_{t+1} - (\theta_{1t}^* \hat{q}_{1m,t} + \theta_{2t}^* \hat{q}_{2m,t}))],$$

$$\text{a.s.-}P,$$

若满足上述条件，则模型1包含模型2。

模型估计：根据下式一阶矩为0，做GMM估计权重（前一部分是损失函数对权重一阶导，后半部分是一个t时刻观测向量）。

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}; y_{t+1}, \mathbf{w}_t^*) \equiv [\alpha - \mathbb{1}(y_{t+1} - \boldsymbol{\theta}' \hat{\mathbf{q}}_{m,t} < 0)] \mathbf{w}_t^*$$

相关的假设检验是：做两套检验，其原假设是其它一个模型的权重为1。如果都被拒绝，只能使用组合模型。

个人想法

- 分位数组合可能是一个更容易进行操作的组合方法，可以更方便的兼容参数与非参数模型（参数模型得到分位数容易，只有分位数的预测结果变成密度稍难而且会增加不确定性）；
- 应该还会有与密度组合相似的，在分位数上的贝叶斯组合方法？
- 分位数衡量不确定性一般也是够用，（但如果真想要密度，如何兼容参数与非参？）
- Global