

國立雲林科技大學研究生論文上傳同意書

電機工程學 研究所 通訊 組研究生 王耀庭

論文已完成口試委員修改建議，請同意論文上傳學校圖書館。

謹陳

論文指導教授：張軒序 (請簽章)

是否提前畢業：☐ 是，於____月畢業。(非學期公告離校時間，請以實際畢業離校月份書寫)

☒ 否。

學生簽章：王耀庭

學生學號：M10612071

申請日期：108, 07, 25

備註：

1. 指導教授簽章後請連同論文一併上傳圖書館審查，據以確認論文已修改完成。
2. 同意書請放置於論文電子檔第一頁(封面前一頁)，以示論文內容與書面此同意書。
3. 延後公開請另填延後公開申請書。

國立雲林科技大學電機工程系

碩士論文

Department of Electrical Engineering

National Yunlin University of Science & Technology

Master Thesis

單相位傾斜平面角度多工光學影像加密技術之研究

Study on single phase tilt plane angle multiplexing for

optical image encryption



王耀庭

Yao-Ting Wang

指導教授：張軒庭 博士

Advisor: Hsuan-Ting Chang, Ph.D.

中華民國 108 年 6 月

June 2019

國立雲林科技大學
研究所碩士班學位論文考試委員會審定書

本論文係王耀庭君在本校 電機工程系提論文「單相位傾斜平面
角度多工光學影像加密技術之研究」合於碩士資格水準，業經本委
員會評審認可，特此證明。

口試委員：

張軒庭

張軒庭

郭鐘榮

郭鐘榮

陳祖龍

陳祖龍

張原豪

張原豪

黃宏彥

黃宏彥

指導教授：

張軒庭

張軒庭

所 長：

蕭宇宏

中 華 民 國 108 年 6 月 27 日

摘要

本論文提出了一種傾斜菲涅爾轉換 (Tilt Fresnel Transform, TFrT) 並使用單相位電腦生成全像圖 (Phase-Only computer-generated hologram, POCGH) 進行光學影像重建的角度多工方法。我們使用基於全像圖和重建平面中的三種旋轉操作模式的修改型 Gerchberg-Saxton 算法及其對應的 TFrT 參數來擷取目標影像的單相位函數 (phase-only functions, POF)。然後對所有提取的 POF 進行相位調變並總和以獲得最終的 POCGH，使其具有影像多工並避免重建影像的重疊。電腦模擬結果顯示，對應於全像圖和影像重建平面上各種旋轉操作模式的影像可以高相關係數成功恢復。由於多工影像的加密特性，可以實現更高的系統安全級別，因為只有當 TFrT 中的所有必需參數都可用時才能正確顯示影像，此外，我們也探討了在 POCGH 與重建平面上的影像品質的角度靈敏度。

關鍵字：MGSA、菲涅爾轉換、相位擷取、多重影像加密、光學加密系統、角度多工、單相位函數。



ABSTRACT

This thesis proposes an angle multiplexing method for optical image reconstruction using the phase-only computer-generated hologram (POCGH) in the tilt Fresnel transform (TFrT) domain. The modified Gerchberg-Saxton algorithms based on the three types of rotation manipulation in both the hologram and reconstruction planes are used, with their corresponding TFrT parameters, to extract the phase-only functions (POFs) of the target images. All the extracted POFs are then phase-modulated and summed to obtain the final POCGH, which is capable of multiplexing and avoiding overlap of reconstructed images. The computer simulation results show that the images corresponding to the various rotation manipulations at the hologram and image reconstruction planes can be successfully restored with high correlation coefficients. Due to the encrypted nature of multiplexed images, higher system security level can be achieved as images can only be correctly displayed when all the required parameters in the TFrT are available. Finally, the angle sensitivity on the image quality for each manipulation is investigated as well.

Keywords : MGSA, Fresnel transform, phase retrieval, multiple-image encryption, optical encryption system, angle multiplexing, phase only function

誌謝

兩年的時間過得很快，在研究所的期間學到了很多專業知識和自主的能力，感謝我的指導老師張軒庭教授，當我問問題時老師都會非常耐心的講解給我聽，也會教導我們做人處事的道理，接下來感謝這兩年在實驗室認識的同學、學長、學弟以及學妹們，因為有同學間的互相討論，才能讓我可以將受到多方面的思考模式，更因為同學間的互動實驗室的氣氛總是充滿歡樂。

再來就是感謝口試委員郭鐘榮博士、張原豪博士、黃宏彥博士、陳祖龍博士在論文上的指導與建議，最後要感謝家人的用心陪伴與鼓勵，讓我能夠全心全力在課業上，順利完成學業。



目錄

摘要	i
ABSTRACT	ii
誌謝	iii
目錄	iv
表目錄	vi
圖目錄	vii
符號說明	viii
第一章、緒論	1
1.1 研究動機	1
1.2 研究目的	1
1.3 研究方法	2
1.4 章節提要	3
第二章、研究背景與相關知識	4
2.1 簡介	4
2.2 修改型 GS 演算法	4
2.3 電腦模擬	6
2.4 單相位多重影像波長與位置雙重多工	7
第三章、成像平面角度多工參數分析	9
3.1 演算法與系統架構	9
3.2 參數轉換	16
3.3 電腦模擬	16
3.4 參數靈敏度分析	20
第四章、相位平面角度多工參數分析	22
4.1 演算法與系統架構	22
4.2 參數轉換	25
4.3 電腦模擬	26

4.4 參數靈敏度分析	30
第五章、相位平面和成像平面角度多工參數分析	32
5.1 演算法與系統架構.....	32
5.2 參數轉換.....	35
5.3 電腦模擬.....	37
5.4 參數靈敏度分析	40
第六章、結論與未來發展	43
參考文獻	44



表目錄

表 3.1: 成像平面繞 x 和 y 軸八種不同加密旋轉角度	17
表 3.2: 重建影像的相關係數	19
表 4.1: 相位平面繞 x 和 y 軸八種不同加密旋轉角度	27
表 4.2: 重建影像的相關係數	29
表 5.1: 相位和成像平面繞 x 和 y 軸八種不同加密旋轉角度	37
表 5.2: 重建影像的相關係數	39



圖目錄

圖 2.1: MGSA 流程圖	5
圖 2.2: FrT 的幾何空間座標	5
圖 2.3: 八張目標影像	6
圖 2.4: 八張影像 MGSA 疊代 200 次 p 的收斂過程	7
圖 2.5: Image 7 的解密影像 (a) 疊代 40 次 (b) 疊代 100 次 (c) 疊代 200 次	7
圖 2.6: 多重影像波長與位置雙重多工加密的方塊圖	8
圖 3.1: 在 POF 和重建平面上使用旋轉控制單張影像重建的廣義光學繞射架構	9
圖 3.2: 成像平面繞 x 和 y 軸光學影像多工方塊圖	11
圖 3.3: 單相位繞 x 和 y 軸旋轉成像平面多重影像光學架構圖	14
圖 3.4: (a) 為 y 軸俯視圖 (b) 為 x 軸側視圖，其重建影像的原點和原始影像的原點不同	15
圖 3.5: (a)和(d)和(g)為八張目標影像中的 $g_1(x', y')$ 和 $g_7(x', y')$ 和 $g_8(x', y')$; (b)和(e)和(h)分別為解密的影像 $\hat{g}_1(x', y')$ 和 $\hat{g}_7(x', y')$ 和 $\hat{g}_8(x', y')$; (c)和(f)和(i)分別從解密影像 g_1 和 g_7 和 g_8 中選取出之影像。	18
圖 3.6: (a) Image 1 成像平面靈敏度 (b) Image 7 成像平面靈敏度 (c) Image 8 成像平面靈敏度。	21
圖 4.1: 相位平面繞 x 和 y 軸光學影像多工方塊圖	22
圖 4.2: 單相位繞 x 和 y 軸旋轉 POCGH 平面多重影像光學架構圖	25
圖 4.3: (a)和(d)和(g)為八張目標影像中的 $g_1(x', y')$ 和 $g_7(x', y')$ 和 $g_8(x', y')$; (b)和(e)和(h)分別為解密的影像 $\hat{g}_1(x', y')$ 和 $\hat{g}_7(x', y')$ 和 $\hat{g}_8(x', y')$; (c)和(f)和(i)分別從解密影像 g_1 和 g_7 和 g_8 中選取出之影像。	28
圖 4.4: (a) Image 1 相位平面的靈敏度 (b) Image 7 相位平面的靈敏度 (c) Image 8 相位平面的靈敏度	31
圖 5.1: 相位平面和成像平面繞 x 和 y 軸光學影像多工方塊圖	32
圖 5.2: 單相位繞 x 和 y 軸旋轉相位平面和成像平面多重影像光學架構圖	34
圖 5.3: (a)和(d)和(g)為八張目標影像中的 $g_1(x', y')$ 和 $g_7(x', y')$ 和 $g_8(x', y')$; (b)和(e)和(h)分別為解密的影像 $\hat{g}_1(x', y')$ 和 $\hat{g}_7(x', y')$ 和 $\hat{g}_8(x', y')$; (c)和(f)和(i)分別從解密影像 g_1 和 g_7 和 g_8 中選取出之影像。	38
圖 5.4: (a) Image 1 相位平面的靈敏度 (b) Image 1 成像平面的靈敏度	40
圖 5.5: (a) Image 7 相位平面的靈敏度 (b) Image 7 成像平面的靈敏度	41
圖 5.6: (a) Image 8 相位平面的靈敏度 (b) Image 8 成像平面的靈敏度	42

符號說明

波長: λ , λ_n

繞射距離: z

參數轉換: γ , μ

目標影像: g , g_n , g_i , g_2 , g_7

繞射場影像: G , G_x , G_y , G_{xy} , G_n

傅立葉轉換運算子: FT

菲涅爾轉換運算子: FrT

傾斜式菲涅爾轉換運算子: TFrT

相關係數: ρ

期望值運算子: $E[\cdot]$

目標影像的編號: n , i

目標影像的總數量: N

繞射場 x 與 y 方向的偏移量: μ_n , ν_n

偏移量的倍率係數: α , β

雜訊或者是干擾: n_{θ_n} , n_{ϕ_n} , n_{θ_n, ϕ_n}

目標影像的寬度和高度: D_w , D_h

角度變數: p

旋轉角度: θ_x , θ_{x_n} , θ_y , θ_{y_n} , ϕ_x , ϕ_{x_n} , ϕ_y , ϕ_{y_n} , ϕ_n , θ_n

相位信號: $\varphi_{\hat{g}_n}$, $\varphi_{\hat{g}_{\theta_n}}$, $\varphi_{\hat{g}_{\theta_n, \phi_n}}$, $\varphi_{\hat{g}_{\phi_n}}$, Ψ_n , $\Psi_{\hat{g}_n}$, Ψ_{θ_n} , Ψ_{θ_n, ϕ_n} , Ψ_{θ_n, ϕ_n} ,

Ψ_{θ_n, ϕ_n} , Ψ_T , Ψ'_{θ_n} , Ψ'_{ϕ_n} , Ψ'_{θ_n, ϕ_n}

近似目標影像: \hat{g} , \hat{g}_{λ_n} , \hat{g}_{λ_2} , \hat{g}_{λ_7} , \hat{g}_{z_n} , \hat{g}_{θ_n} , \hat{g}_{ϕ_n} , $\hat{g}_{\theta_n, \phi_n}$

第一章、緒論

1.1 研究動機

隨著現代科技的進步，網際網路已經在社會的各個層面為全人類提供了便利。電子郵件、即時訊息、影片會議，網路紀錄檔、網路購物等已經成為越來越多人的一種生活方式，檔案的上傳和下載已經是動動手指頭就能做到的事。但是在這個公開又透明的網際網路，讓不少有心人士經由竊取或是偽造等不合法手段，讓原本資訊的擁有者的權益受到侵犯，不論是在商業行為上或是國家軍事上的安全保護，各種資訊上的防範需求也就越來越明顯表現出來，數據加密、防偽及安全認證等資訊安全的研究變得越來越重要。

在計算機與電子資訊加密技術得到廣泛應用的同時，光學加密技術作為一種新的加密手段，近年來得到了快速發展，成為現代加密技術的重要研究內容之一。光學加密技術的產生和發展過程。就影響較大的幾種光學加密技術，GS 演算法 (Gerchberg-Saxton algorithm, GSA) [1]、光學聯合轉換相關器 (Joint transform correlator, JTC) [3]、雙隨機相位編碼 (Double random-phase encoding, DRPE) [12]、限制集投影演算法 (Projection onto constraint set algorithm, POCSA) [13] 等。

其中GS演算法是在1972年由Gerchberg和Saxton所提出，主要的流程是在反傅立葉上目標影像的振幅，在傅立葉和反傅立葉域之間反覆疊代並擷取相位，最後達到收斂的相位再經由傅立葉轉換來獲得近似的目標影像，其加解密運算主要分成三種光學架構：傅立葉轉換 (Fourier transform, FT) [14]、分數傅立葉轉換 (Fractional Fourier transform, FrFT) [17]以及菲涅爾轉換 (Fresnel transform, FrT) [25]。

基於傅立葉、分數傅立葉或菲涅爾轉換的光學加密方法已被積極開發用於影像加密和驗證用途 [37][38]。執行FrT的光學架構最簡單，因為不需要使用透鏡元件。可以將影像加密為單相位函數 (Phase-only function, POF)，然後通過利用FrT確定重建平面處的繞射場來重建影像。POF可以通過使用Gerchberg-Saxton演算法(GSA)來實現，並且可以視為是一種單相位電腦產生全像圖 (Phase-only computer-generated hologram, POCGH)，但目前現有的光學加密系統還存在一些缺點：可實施性、靈活性與穩定性都有待提高。

1.2 研究目的

影像的重建先前已經提出了各種方法，例如：選擇不同波長的多工技術和在不同繞射距離下重建影像 [39]-[40]。除了POF的FrT中的波長和位置參數之外，還可以在傾斜平面上重建影像，該平面具有圍繞 x 軸和 y 軸還有 x 和 y 軸的旋轉角度 [35]，在許多實際應用中，相位和影像重建平面可能需要更高的靈活性。也就是說，在設計光學影像重建系統時，傾斜相位平面是有可能的。Chang 等人，提出了菲涅爾轉換使用角度多工光學影像加密的方法 [41]，為了提高安全性和

靈活度，我們提出了在相位平面和影像重建平面的旋轉參數方法。

1.3 研究方法

在本論文中，我們主要有兩種傾斜平面模式分別是 POCGH 平面和成像平面，然後將兩種傾斜模式分為三種架構來模擬，所以我們提出了一種基於 TFrT 的多工影像加密的角度多工方法，POCGH 可由多個 POF 合成。通過相位調變的方法 [9]，可以在 POCGH 和重建平面處以給定旋轉角度在特定位置處以高相關係數重建每個影像，考慮所提出的傾斜平面上的影像重建我們使用三種不同角度的多工：(1) 只在影像重建平面上進行角度多工；(2) 只在 POCGH 平面上進行角度多工；(3) 影像重建平面和 POCGH 平面上都進行角度多工。本文假設在模擬過程中 POCGH 和重建影像的大小是固定的和相等的。不考慮由於旋轉引起的縮小的投影尺寸導致的尺度效應。



1.4 章節提要

本論文共分為五個章，每個章的簡述如下：

第一章、緒論：

主要是回顧在光學領域中介紹，傅立葉轉換、分數傅立葉轉換以及菲涅爾轉換技術用於影像加密和驗證，來達到高度安全性之效果，並簡述研究的動機與目的地以及研究的方法。

第二章、MGSA與相關研究：

介紹本論文的核心MGSA的疊代的流程與光學架構和相關的影像多工加密技術。

第三章、成像平面角度多工之參數分析：

使用提出第一種只在成像平面旋轉的TFrT架構，修改MGSA的光學運算式，使相位平面上的旋轉角度為 0° 在成像平面上設定不同角度，並透過電腦分析模擬。

第四章、相位平面角度多工之參數分析：

在這一章我們提出了第二種旋轉類型的TFrT架構，修改MGSA的光學運算式，讓相位平面也進行角度多工，設定成像平面的角度為 0° ，並透過電腦模擬驗證了提出方法的有效性。

第五章、相位平面和成像平面角度多工之參數分析：

將三、四章的方法結合在相位平面和重建平面上都進行角度多工來增加安全性，並透過電腦模擬驗證了提出方法的有效性。

第六章、結論與未來發展：

依照前五章的內容做出結論與未來研究方向。

第二章、研究背景與相關知識

2.1 簡介

在 1972 年時，Gerchberg 和 Saxton 在 *Optik* 期刊上提出 GS 演算法，主要在反傅立葉端輸入振幅目標影像，經由傅立葉和反傅立葉域間反覆疊代擷取相位，最後達到收斂條件的相位透過傅立葉轉換得到一張近似的目標影像。在 2009 年，Hwang 與 Chang 等人提出了 MGSA，藉由修改 GSA 來提升影像加解密品質與速度。相較於傳統的 GSA，MGSA 是基於菲涅耳轉換(Fresnel transform, FrT)來代替傅立葉轉換省略許多運算複雜度，除了有較高的安全性之外，在光學架構為無透鏡成像系統，因此光學重建時，光學架構可以較為簡單且完整成像。

2.2 修改型 GS 演算法

如圖 2.1 本論文所使用修改型 GSA 是基於 GSA 方法修改成使用菲涅爾轉換(Fresnel transform, FrT)，一個獨立的初始隨機相位信號，使用 FrT 作為運算方式，將兩個相位信號分別放置在輸入和反菲涅爾轉換(Inverse Fresnel transform, IFrT)平面上，而不是在輸入端以目標影像反傅立葉轉換(Inverse Fourier transform, IFT)擷取出的相位信號。這樣的相位信號更加安全，不會透露目標影像的資訊。在 MGSA 中使用的菲涅爾繞射積分轉換公式如下：

$$g(x, y) = \frac{\exp\left(\frac{j2\pi z_0}{\lambda}\right)}{j\lambda z_0} \iint h(x_0, y_0) \exp\left\{\frac{j\pi}{\lambda z_0} [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]\right\} dx_0 dy_0. \quad (2.1)$$

將公式(2.1)轉化成傅立葉轉換形式，如公式(2.2)所示：

$$g(x, y) = \frac{\exp\left(\frac{j2\pi z_0}{\lambda}\right)}{j\lambda z_0} \exp\left[\frac{j\pi}{\lambda z_0} (x^2 + y^2)\right] \times FT\left\{h(x_0, y_0) \exp\left[\frac{j\pi}{\lambda z_0} (x_0^2 + y_0^2)\right]\right\} dx_0 dy_0. \quad (2.2)$$

如圖 2.2 所示， (x_0, y_0) 和 (x, y) 分別為相位平面的位置座標和繞射平面的位置座標， z_0 為繞射距離， λ 為波長， $FT[\cdot]$ 為傅立葉轉換運算子， $h(x_0, y_0)$ 為在輸入平面上的相位函數， $g(x, y)$ 為在繞射場座標上的繞射影像。 $h(x_0, y_0)$ 經公式(2.1)或(2.2)進行菲涅爾轉換，在繞射距離 z_0 的位置上產生繞射影像 $g(x, y)$ 。

MGSA 的運算過程如圖 2.1 所示

1. 一開始先產生隨機相位 $\varphi_h(x_0, y_0)$ 。
2. 一開始時的輸入振幅 $a(x_0, y_0)=1$ ，並和隨機相位 $\varphi_h(x_0, y_0)$ 相乘後做菲涅爾轉換，得到振幅資訊 $\hat{g}(x, y)$ 和相位資訊 $\varphi_{\hat{g}}(x, y)$ 。
3. 擷取相位資訊 $\varphi_{\hat{g}}(x, y)$ 與目標影像相乘做 IFrT，再從中取出相位資訊相位 $\varphi_h(x_0, y_0)$ 。
4. 然後重複上述的步驟 2，所得到的振幅資訊 $\hat{g}(x, y)$ 會越來越接近目標影像。
5. 重複 2 和 3 步驟，直到近似於目標影像 $\hat{g}(x, y)$ 的相關係數(Correlation coefficient, CC) ρ 達到目標影像 $g(x, y)$ 的收斂值。

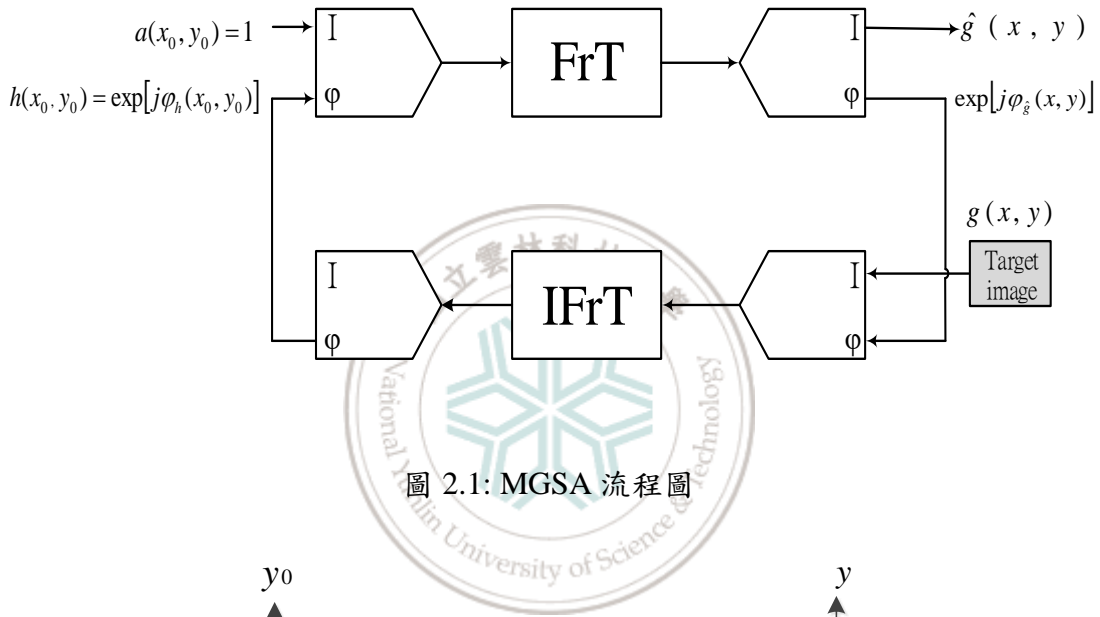


圖 2.1: MGSA 流程圖

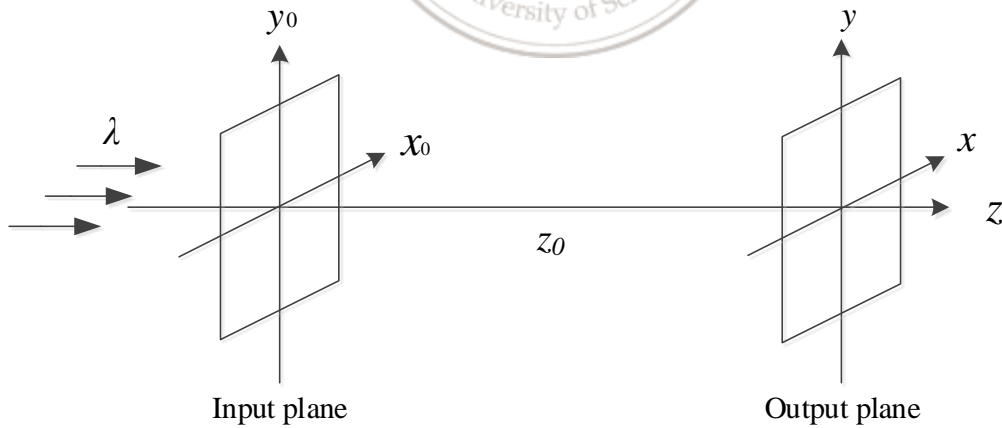


圖 2.2: FrT 的幾何空間座標

相關係數(Correlation coefficient, CC) ρ 是用來評估近似目標影像 $\hat{g}(x, y)$ 的品質，方程式如(2.3)所示：

$$\rho = \frac{E\{[g-E[g]][\hat{g}-E[\hat{g}]]\}}{\sqrt{E\{[g-E[g]]^2\}E\{[\hat{g}-E[\hat{g}]]^2\}}}, \quad (2.3)$$

其中 $E[\cdot]$ 表示期望值運算子，當 $\hat{g}(x,y)$ 和目標影像 $g(x,y)$ 的 ρ 越接近 1 時，表示 $\hat{g}(x,y)$ 與目標影像越相似。

2.3 電腦模擬

在此章節中，將對 MGSA 加密系統做電腦模擬，並觀察疊代次數與相關係數的變化。使用的電腦配備為 Intel(R) Core(TM) i5-7500 CPU @ 3.40GHz 和 8 G RAM，使用 Matlab R2017a 進行模擬。電腦模擬的八張灰階影像如圖 2.3 所示，大小為 64×64 像素，而產生 POF 像素大小為 512×512 。其中，參數設定波長 $\lambda = 632.8 \text{ nm}$ ，繞射位置距離 $z_0 = 1.3 \text{ m}$ ，SLM 的像素間距為 6.8 um 。



圖 2.3: 八張目標影像

圖 2.4 為八張影像經過 MGSA 進行疊代 200 次的加密處理，相關係數 ρ 收斂的過程。圖 2.5 為對 Image 7 進行加密疊代解密的還原影像，疊代次數分別為 40 次、100 次、200 次，疊代 40 次時， $\rho = 0.922$ ， $\text{time} = 13.89 \text{ s}$ ；疊代 100 次時， $\rho = 0.936$ ， $\text{time} = 32.929 \text{ s}$ ；疊代 200 次時， $\rho = 0.936$ ， $\text{time} = 68.069 \text{ s}$ 。如圖 2.5 所示，Image 7 的解密影像疊代 100 次以後相關係數已經收斂沒有明顯的變化，人眼也無法分辨疊代 100 次跟 200 次之間影像的差別，為了減少疊代的時間，在後續的模擬實驗中我們固定疊代次數為 100 次。

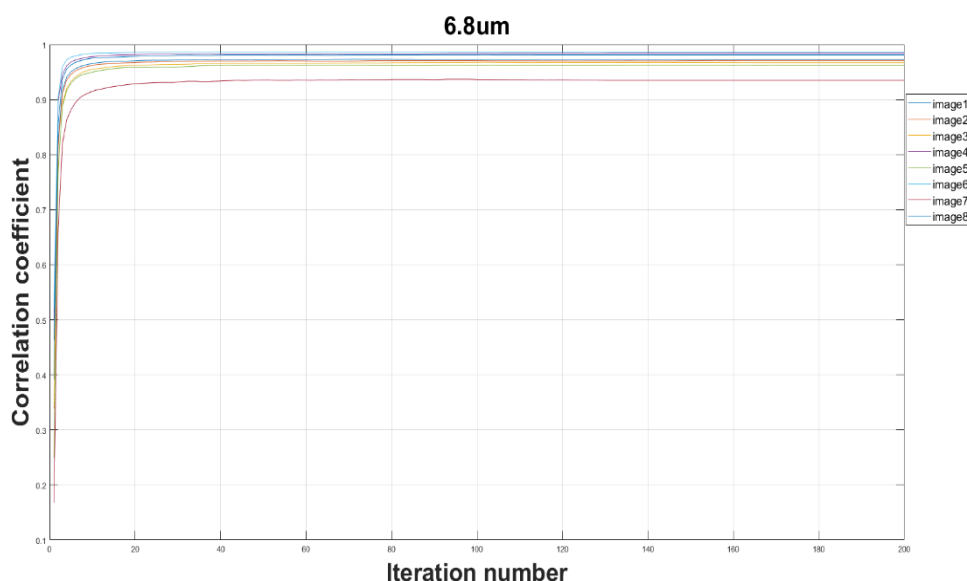


圖 2.4: 八張影像 MGSA 疊代 200 次 ρ 的收斂過程

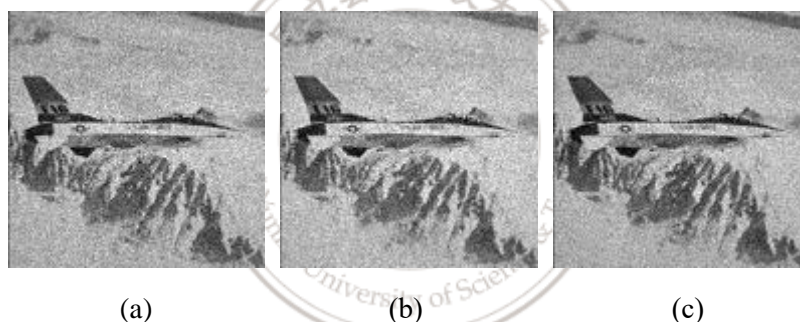


圖 2.5: Image 7 的解密影像 (a) 疊代 40 次 (b) 疊代 100 次 (c) 疊代 200 次

2.4 單相位多重影像波長與位置雙重多工

如圖 2.6 所示使用 MGSA 方法對多張影像加密，透過 FrT 的波長與位置參數特性，每張影像同時對應到不同的波長 λ_n 與位置距離 z_n [41]，經由 MGSA 個別得到一個相位信號 $\Psi_n(x_0, y_0)$ ，如圖 2.3 所示，使用相位調變方法，避免在解密時會產生影像間干擾問題，降低影像品質，其中 μ_n 和 ν_n 個別為 $\hat{g}_n(x, y)$ 在繞射場的 x 與 y 方向預設的偏移量，之後將個別相位整合在單一張相位遮罩(Phase-only mask, POM)，達到多重影像波長與位置多工，在進行解密獲得近似的目標影像 $\hat{g}(x, y)$ ，最後使用相關係數 ρ 來評估近似目標影像 $\hat{g}(x, y)$ 的品質。

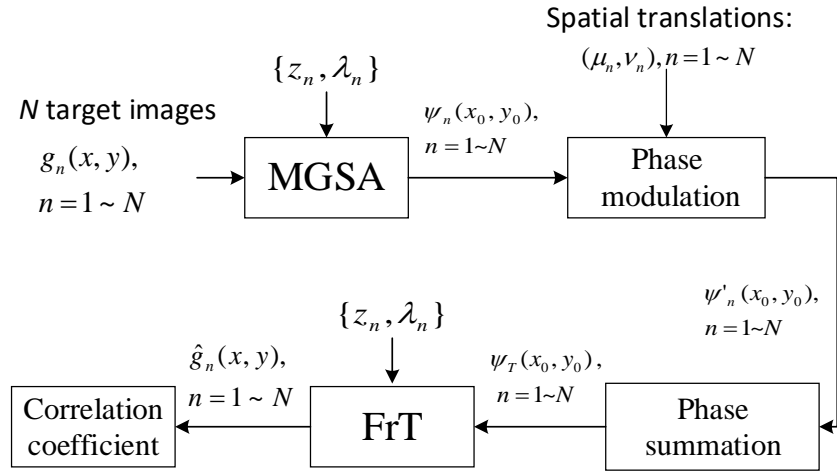


圖 2.6: 多重影像波長與位置雙重多工加密的方塊圖



第三章、成像平面角度多工參數分析

3.1 演算法與系統架構

傳統的 GSA 分別考慮具有坐標 (x_0, y_0) 和 (x, y) 的 POF 和影像重建平面，兩平面垂直於光軸。因此，兩個平面之間任意兩點的距離 z_0 是固定，波長 λ 照射 POF 為 $h(x_0, y_0)$ ，並且繞射場的振幅近似於目標影像。在確定繞射場 $g(x, y)$ 時，使用 FrT 並且可以表示公式(3.1)如下：

$$g(x, y) = \frac{e^{jkz}}{j\lambda z_0} e^{j\frac{k}{2z_0}(x^2+y^2)} \times \iint_{-\infty}^{\infty} h(x_0, y_0) e^{j\frac{k}{2z_0}(x_0^2+y_0^2)} e^{-j\frac{k}{z}(x_0x+y_0y)} dx_0 dy_0. \quad (3.1)$$

如圖 3.1 所示， (x_0, y_0) 和 (x, y) 分別表示為輸入 POF 和輸出影像重建平面的原始座標， z_0 為兩個平面上原點的繞射距離， (x'_0, y'_0) 和 (x', y') 分別表示旋轉 POF 和影像重建平面的座標， (ϕ_x, ϕ_y) 和 (θ_x, θ_y) 分別表示為傾斜 POF 和影像重建平面的旋轉角度。

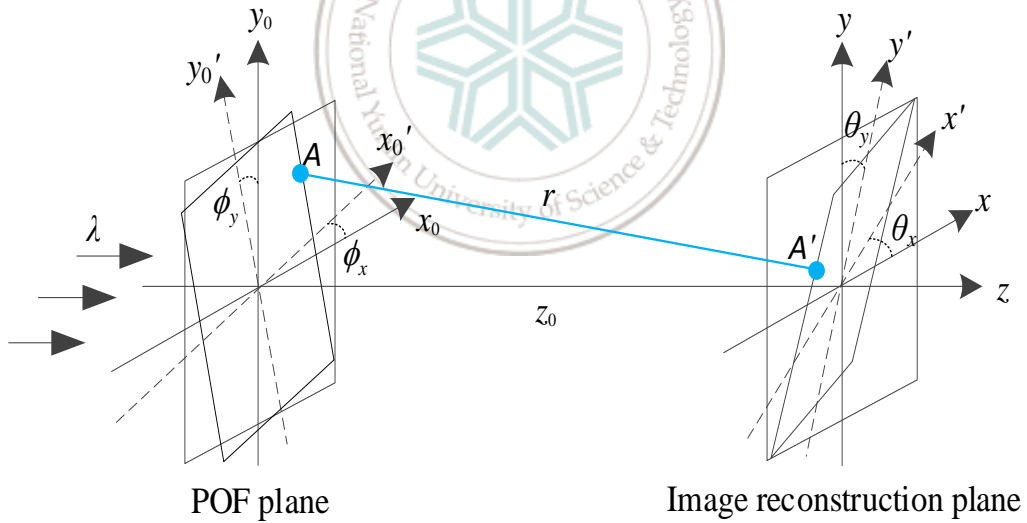


圖 3.1: 在 POF 和重建平面上使用旋轉控制單張影像重建的廣義光學繞射架構

如果我們將角度旋轉視為座標轉換，則兩個軸旋轉的順序是非常重要的。當在歐拉角上使用不同旋轉的順序組合旋轉矩陣是不一樣的，在本論文中，我們考慮了原始 x 方向和 y 方向的旋轉。也就是說，第二次旋轉不是基於第一次旋轉之後的軸上，由此可知兩軸的旋轉是獨立的，如圖 3.1 中所示的旋轉控制架構中，原始 x' 和 y' 方向可以分別表示為下列的傾斜矩陣：

$$\mathbf{R}_x = \begin{bmatrix} \cos \theta_x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta_x & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_y & 0 \\ 0 & \sin \theta_y & 1 \end{bmatrix}$$

令 r 分別表示在旋轉的 POF 和重建平面處的兩個任意點 A 和 A' 之間的距離。任意兩點的距離可以表示公式(3.2)如下：

$$r = \left[(x' \cos \theta_x - x'_0 \cos \phi_x)^2 + (y' \cos \theta_y - y'_0 \cos \phi_y)^2 + (z_0 - x' \sin \theta_x - y' \sin \theta_y + x'_0 \sin \phi_x + y'_0 \sin \phi_y)^2 \right]^{1/2}. \quad (3.2)$$

其中 $r_x = x' \cos \theta_x - x'_0 \cos \phi_x$ ， $r_y = y' \cos \theta_y - y'_0 \cos \phi_y$ ， $r_z = z_0 - x' \sin \theta_x - y' \sin \theta_y + x'_0 \sin \phi_x + y'_0 \sin \phi_y$ 。

通過使用 FrT 的一般光學的架構來設定二項式近似和參數的設定，如公式(3.3)所定義之傾斜式菲涅爾(Tilt Fresnel transform, TFrT)，描述了 POF $h(x'_0, y'_0)$ 和繞射光場 $g(x', y')$ 之間的關係：

$$\begin{aligned} g(x', y') &= \frac{1}{j\lambda} \iint_{-\infty}^{\infty} h(x'_0, y'_0) \exp(jkr) \frac{r_z}{r^2} dx'_0 dy'_0 \\ &\approx \frac{1}{j\lambda} \iint_{-\infty}^{\infty} h(x'_0, y'_0) \frac{\exp(jkr_z)}{r} \exp \left[j \frac{k}{2r_z} (r_x^2 + r_y^2) \right] dx'_0 dy'_0 \\ &= \frac{\exp[jk(z_0 - x' \sin \theta_x - y' \sin \theta_y)]}{j\lambda} \iint_{-\infty}^{\infty} h(x'_0, y'_0) \\ &\quad \times \frac{\exp[jk(x'_0 \sin \phi_x + y'_0 \sin \phi_y)]}{r} \exp \left[j \frac{k}{2r_z} (r_x^2 + r_y^2) \right] dx'_0 dy'_0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

其中我們假設 $r_z \gg r_x, r_z \gg r_y$ 和 $z_0 \gg x' \sin \theta_x - y' \sin \theta_y + x'_0 \sin \phi_x + y'_0 \sin \phi_y$ 因此 $r_z \approx z_0$ ，公式(3.3)可以近似為公式(3.4)，如下所示：

$$\begin{aligned}
 g(x', y') &\approx \frac{1}{j\lambda} \exp[jk(z_0 - x' \sin \theta_x - y' \sin \theta_y)] \\
 &\times \exp\left[j \frac{k}{2z_0} (x'^2 \cos^2 \theta_x + y'^2 \cos^2 \theta_y)\right] \iint_{-\infty}^{\infty} h(x'_0, y'_0) \\
 &\times \frac{\exp[jk(x'_0 \sin \phi_x + y'_0 \sin \phi_y)]}{r} \exp\left[j \frac{k}{2z_0} (x_0'^2 \cos^2 \phi_x + y_0'^2 \cos^2 \phi_y)\right] \\
 &\times \exp\left[-j \frac{k}{z_0} (x' x'_0 \cos \theta_x \cos \phi_x + y' y'_0 \cos \theta_y \cos \phi_y)\right] dx'_0 dy'_0. \quad (3.4)
 \end{aligned}$$

如圖 3.2 所示，為光學影像重建平面角度多工方塊圖首先給定 N 張目標影像 $g_n(x', y')$ ， $n=1 \sim N$ ，和對應的角度 $\theta_n = \{\theta_{x_n}, \theta_{y_n}\}$ ，其中 $\theta_{x_n}, \theta_{y_n}$ 於重建平面上的第 n 個影像分別繞 (x', y') 軸的旋轉角度，每張影像的 POE 通過使用 MGSA 來重建，給出的參數包括距離 z_0 波長 λ 和在 TFrT 中 $\{\theta_{x_n}, \theta_{y_n}\}$ 的旋轉角度，為了避免在解密時會產生影像間干擾問題，降低影像品質，我們使用相位調變的方法，將目標影像 $g_n(x', y')$ ， $n=1 \sim N$ ，轉換到不同的空間位置，接下來合成所有的 POE 並表示為 $\psi_T(x_0, y_0)$ ，為了正確重建特定目標影像 g_n ，在 TFrT 上提供對應角度的參數 $\{\theta_{x_n}, \theta_{y_n}\}$ 可以在 TFrT 上藉由各種參數的組合來達成多工和解密的目的，最後再利用高斯濾波來降低影像的雜訊來提高影像的品質。

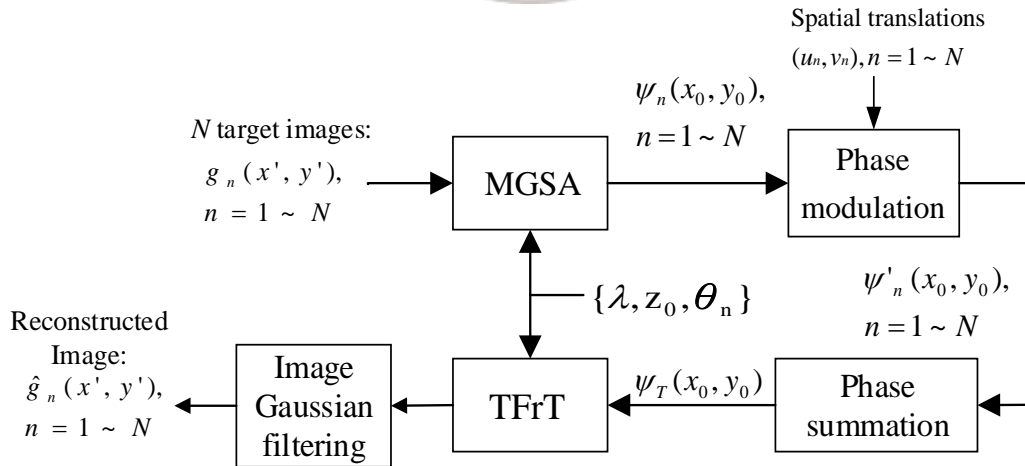


圖 3.2: 成像平面繞 x 和 y 軸光學影像多工方塊圖

圖 3.3 所示為第一種類型的角度多工光學架構:只在影像重建平面上進行角度多工，這裡 POCGH 平面處的旋轉角 $\{\phi_{x_n}, \phi_{y_n}\}$ 為 0° ，並且 $x'_0 = x_0$ ， $y'_0 = y_0$ ，為了避免在解密時會產生影像間干擾問題，降低影像品質，我們利用相位調變的方法，如圖 2.3 所示，將八張目標影像轉換安排到八個不同的位置，在重建平面上每張目標影像都有其對應的旋轉角度 θ_n ，特定的目標影像 g_n 只能在其預定的位置 (u_n, v_n) 上解密，否則不能重建影像，並且只能在重建平面上顯示類似雜訊的圖案。但是，每個影像的旋轉角度的原點是不同的。也就是說，重建平面上的原點和原本光軸的原點是不一樣的。

如圖 3.4 (a) 和圖 3.4 (b) 所示分別為特定影像的重建平面的俯視圖和側視圖，在這種情況下，根據每個目標影像的位移 (u_n, v_n) 來修正距離 r ，如公式(3.4)所示在該光學架構中影像 g_n 的新距離為 $\hat{r}_{1,n}$ ，如公式(3.5)所示:

$$\hat{r}_{1,n} = \left[(x_0 - x' \cos \theta_{x_n})^2 + (y_0 - y' \cos \theta_{y_n})^2 + (z_0 - x' \sin \theta_{x_n} - y' \sin \theta_{y_n})^2 \right]^{1/2} + u_n \tan \theta_x + v_n \tan \theta_y. \quad (3.5)$$

其中， θ_{x_n} 和 θ_{y_n} 分別代表繞 x 軸旋轉的角度和繞 y 軸旋轉的角度。根據 TFrT 公式(3.4)可以計算成像平面上的光場分佈，如公式(3.6)所示:

$$\begin{aligned} \hat{g}_n(x', y') &\approx \frac{1}{j\lambda} \exp[jk(z_0 - x' \sin \theta_{x_n} - y' \sin \theta_{y_n})] \\ &\times \exp \left[j \frac{k}{2z_0} (x'^2 \cos^2 \theta_{x_n} + y'^2 \cos^2 \theta_{y_n}) \right] \\ &\times \iint_{-\infty}^{\infty} \exp[j\Psi_{\theta_n}(x_0, y_0)] \frac{1}{\hat{r}_{1,n}} \exp \left[j \frac{k}{2z_0} (x_0^2 + y_0^2) \right] \\ &\times \exp \left[-j \frac{k}{z_0} (x' x_0 \cos \theta_{x_n} + y' y_0 \cos \theta_{y_n}) \right] dx_0 dy_0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

其中， λ 為波長， z_0 是 POCGH 和重建平面的兩個原點之間的距離。 N 張目標影像 $g_n(x', y')$ ， $n=1 \sim N$ ，每張影像對應到不同的傾斜角度 θ_{x_n} 與 θ_{y_n} ，如圖 3.3 所示，經由 MGSA 個別得到一個相位信號 $\Psi_{\theta_n}(x_0, y_0)$ ，公式(3.6)可簡化成公式(3.7):

$$\begin{aligned} \hat{g}_n(x', y') &= \text{TFrT} \{ \exp[j\Psi_{\theta_n}(x_0, y_0)]; \lambda; \hat{r}_{1,n}; \theta_{x_n}; \theta_{y_n} \} \\ &\approx |\hat{g}_{\theta_n}(x', y')| \exp \left[j\varphi_{\hat{g}_{\theta_n}}(x', y') \right]. \end{aligned} \quad (3.7)$$

其中 $\varphi_{\hat{g}_{\theta_n}}(x', y')$ ， $n=1 \sim N$ 做 TFrT 後的個別相位信號，如圖 3.3 所示：

如公式(3.8)所示，為了減少重建影像之間的干擾，降低影像品質，使用相位調變的方法，可有效地解決此問題。其中 (μ_n, ν_n) 為 $\hat{g}_{\theta_n}(x', y')$ 在繞射場的 x' 與 y' 方向預設的偏移量：

$$\Psi'_{\theta_n}(x_0, y_0) = \Psi_{\theta_n}(x_0, y_0) + \frac{2\pi(u_n x_0 + v_n y_0)}{\lambda z_0}. \quad (3.8)$$

因此，公式(3.8)可改成公式(3.9)：

$$\begin{aligned} & \text{TFrT}\{\exp[j\Psi'_{\theta_n}(x_0, y_0)]; \lambda; \hat{r}_{1,n}; \theta_{x_n}; \theta_{y_n}\} \\ & \approx |\hat{g}_{\theta_n}(x' - u_n, y' - v_n)| \exp[j\varphi_{\hat{g}_n}(x', y')]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

將所有相位調變後的 POFs 整合，最後可以獲得 POCGH， $\Psi_T(x'_0, y'_0)$ ，如公式(3.10)所示：

$$\exp[j\Psi_T(x_0, y_0)] = \sum_{n=1}^N \exp[j\Psi'_{\theta_n}(x_0, y_0)]. \quad (3.10)$$

在解密部分，如公式(3.11)所示：

$$\begin{aligned} & |\text{TFrT}\{\exp[j\Psi_T(x_0, y_0)]; \lambda; \hat{r}_{1,n}; \theta_{x_n}; \theta_{y_n}\}| \\ & \approx |\hat{g}_{\theta_n}(x' - u_n, y' - v_n) \exp[j\varphi_{\hat{g}_n}(x' - u_n, y' - v_n)] + n_{\theta_n}(x', y')| \\ & \approx |\hat{g}_{\theta_n}(x' - u_n, y' - v_n)| + |n_{\theta_n}(x', y')|. \end{aligned} \quad (3.11)$$

其中 $n_{\theta_n}(x', y')$ 為雜訊或者是干擾，可能是由不正確的金鑰解密影像所產生的結果，最後利用相關係數 ρ 來評估近似目標影像 $\hat{g}_{\theta_n}(x', y')$ 的品質。

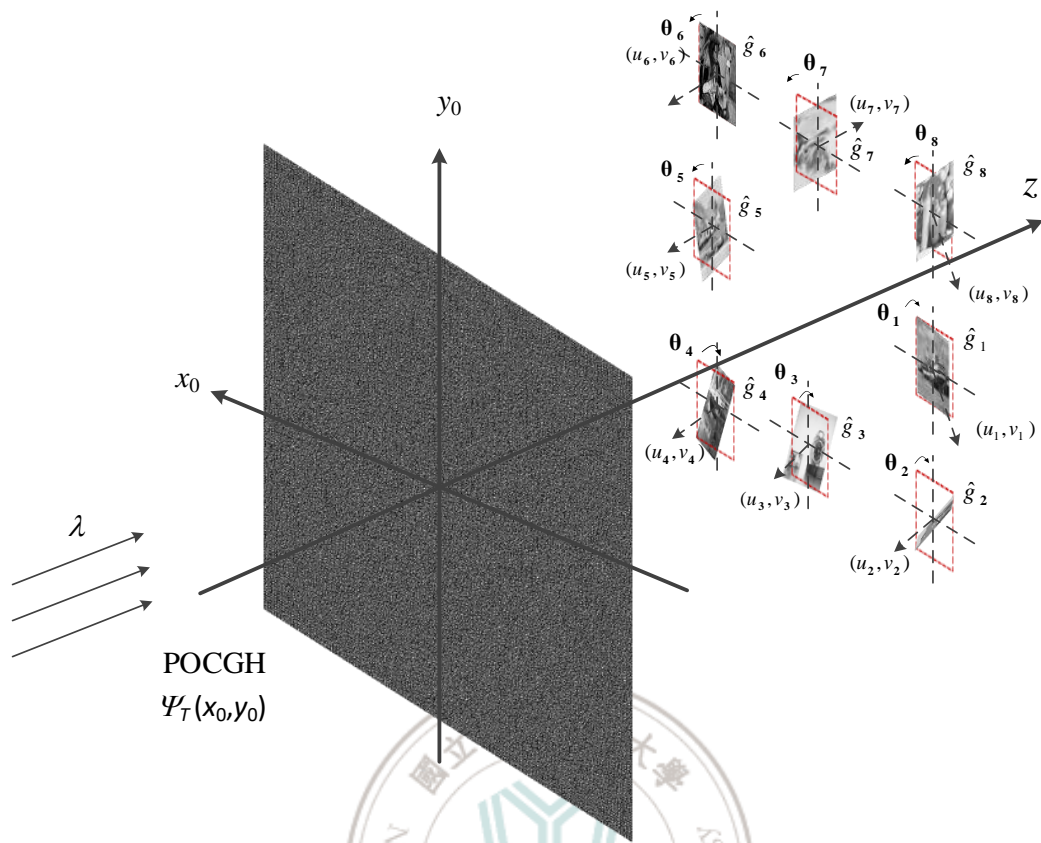
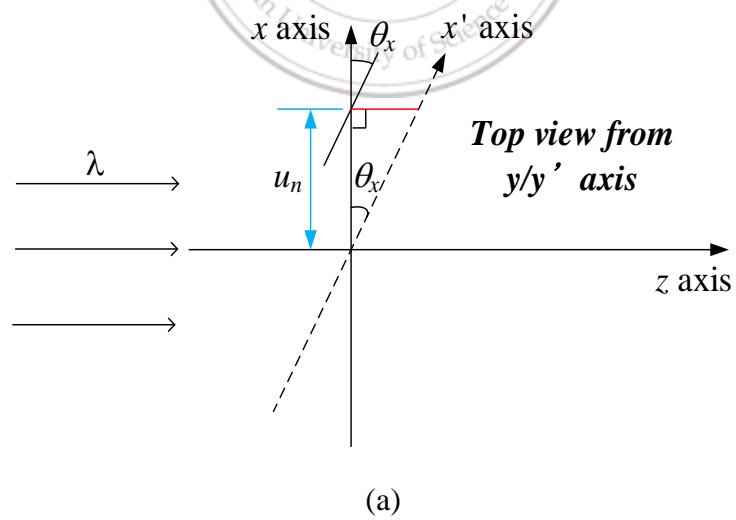


圖 3.3: 單相位繞 x 和 y 軸旋轉成像平面多重影像光學架構圖



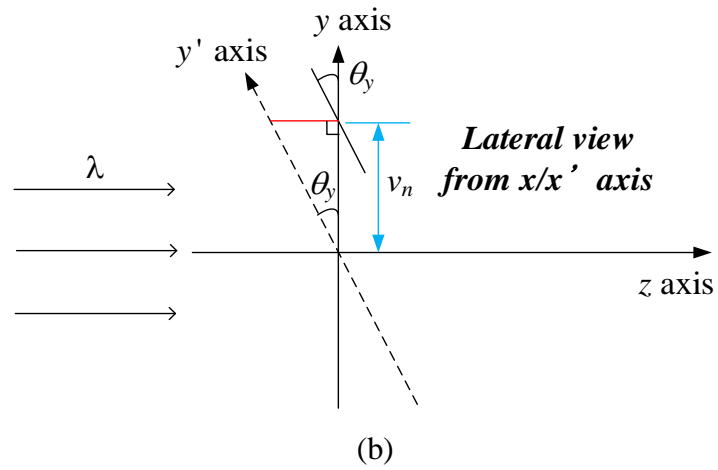


圖 3.4: (a) 為 y 軸俯視圖 (b) 為 x 軸側視圖，其重建影像的原點和原始影像的原點不同



3.2 參數轉換

在本章節為了透過電腦模擬驗證了提出方法的有效性，我們將公式(3.6)進行參數轉換，將 $\hat{g}_n(x', y')$ 平面轉換到 $\hat{g}_n(\gamma, \mu)$ 平面上，使公式(3.6)形成傅立葉轉換，如公式(3.12)所示 (γ, μ) 分別定義為：

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{1}{\lambda r_0} (x' \cos \theta_x), \quad x' = \frac{\gamma \lambda z_0}{\cos \theta_x} \\ \mu &= \frac{1}{\lambda r_0} (y' \cos \theta_y), \quad y' = \frac{\mu \lambda z_0}{\cos \theta_y}\end{aligned}\quad (3.12)$$

可以得到 (x_0, y_0) 到 (γ, μ) 兩個平面之間的距離為 r_0 ，如公式(3.13)所示：

$$r_0 = \sqrt{z_0^2 + \frac{(\gamma \lambda z_0)^2}{\cos^2 \theta_x} + \frac{(\mu \lambda z_0)^2}{\cos^2 \theta_y}}. \quad (3.13)$$

可以得到在 (γ, μ) 平面上的光場分佈 \hat{g}_n ，如公式(3.14)所示：

$$\begin{aligned}\hat{g}_n(\gamma, \mu) &= \frac{1}{j\lambda r_0} \exp[jkr_0] \times \iint_{-\infty}^{\infty} \exp[j\Psi_{\theta_n}(x'_0, y'_0)] \times \exp\left[j\frac{k}{2z_0}(x_0'^2 + y_0'^2)\right] \\ &\quad \times \exp\left[j\frac{k}{2r_0}(x'y'\sin\theta_x\theta_y - z_0(x'\sin\theta_x + y'\sin\theta_y))\right] \\ &\quad \times \exp[-j2\pi(\gamma x'_0 + \mu y'_0)] dx'_0 dy'_0.\end{aligned}\quad (3.14)$$

因此，公式(3.14)可以改成公式(3.15)：

$$\begin{aligned}\hat{g}_n(\gamma, \mu) &= \frac{1}{j\lambda r_0} \exp[jkr_0] \times \text{FT}\left\{\exp[j\Psi_{\theta_n}(x'_0, y'_0)] \times \exp\left[j\frac{k}{2z_0}(x_0'^2 + y_0'^2)\right] \times \right. \\ &\quad \left. \exp\left[j\frac{k}{2r_0}(x'y'\sin\theta_x\theta_y - z_0(x'\sin\theta_x + y'\sin\theta_y))\right]\right\}.\end{aligned}\quad (3.15)$$

3.3 電腦模擬

在電腦模擬中，我們使用一張像素尺寸為 128×128 的目標影像，如圖 2.3 所示，分別進行相位調變到成像平面中 8 個位置，假設 POCGH 的尺寸為 1080×1920，模擬實際的 SLM 像素間距 6.8 μm，距離 z_0 為 1.3 m，MGSA 演算法疊代次數為 100 次，偏移量設計為 $(\mu_n, \nu_n) = (\alpha D_w, \beta D_h)$ ，其中 α 和 β 範圍在 $[-3, 3]$ 之間， D_w 和 D_h 分別為目標影像的寬度和高度，為了滿足本論文 TFrT 推導公式的近似值，如表 3.1 所示，我們將所有旋轉角度限制在 $\pm 15^\circ$ ，透過這些參數來模擬。電腦設備規格和使用的程式語言如同第二章。圖 3.5(b)和圖 3.5(e)和圖 3.5(h)分別為解密影像旋轉 $\{\theta_{x_1} = 13^\circ, \theta_{y_1} = 15^\circ\}, \{\theta_{x_7} = -8^\circ, \theta_{y_7} = -7^\circ\}, \{\theta_{x_8} = -15^\circ, \theta_{y_8} =$

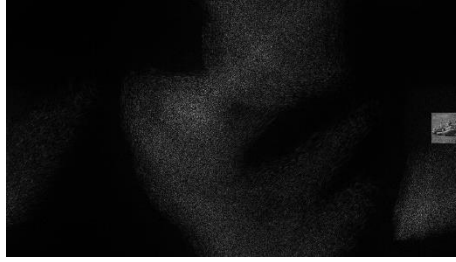
-13° }, 圖 3.5 (c)和圖 3.5(f)和圖 3.5(i)是從解密影像中選取之後再經由高斯濾波所獲取的影像, 相關係數分別為 $\rho=0.96$ 和 $\rho=0.946$ 和 $\rho=0.96$, 八張影像總共加解密時間為 507.62 秒, 其中 TFrT 時間為 493.98 秒, 相位調變和合成 POM 的時間為 3.84 秒, 解密時間為 1.84 秒, 可以看出在 TFrT 花費時間最久, 主要是受到 MGSA 高的計算複雜度的影響, 當疊代次數增加時, 所花費時間也相對提高, 表 3.2 是使用針對某張解密影像的角度來解密其他的影像, 如表 3.2 所示, 如果使用錯誤解密角度, 此目標影像就無法被還原。

表 3.1: 成像平面繞 x 和 y 軸八種不同加密旋轉角度

Image index	θ_n	
	θ_{x_n}	θ_{y_n}
1	13°	15°
2	10°	12°
3	7°	8°
4	2°	5°
5	-5°	-1°
6	-12°	-10°
7	-8°	-7°
8	-15°	-13°



(a)



(b)



(c)



(d)



(e)



(f)



(g)



































































(h)



(i)

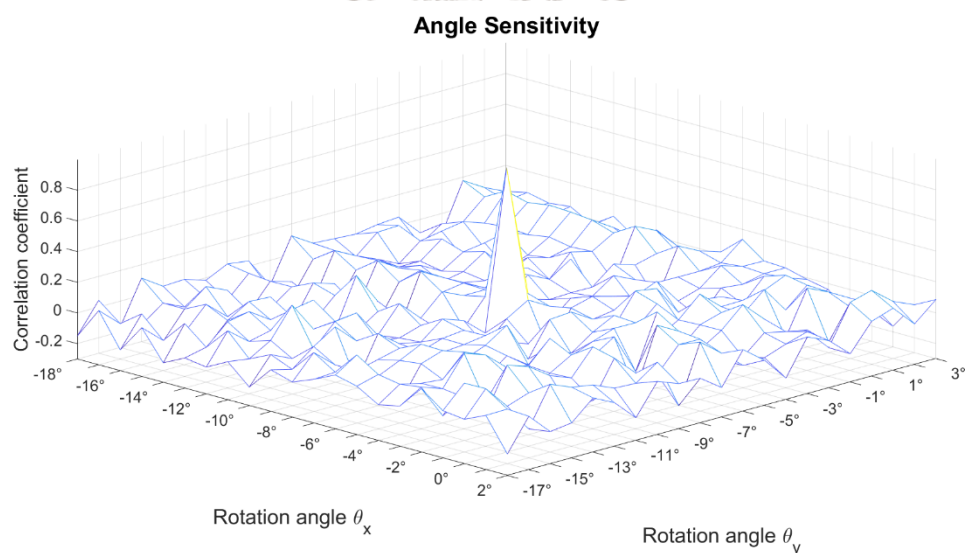
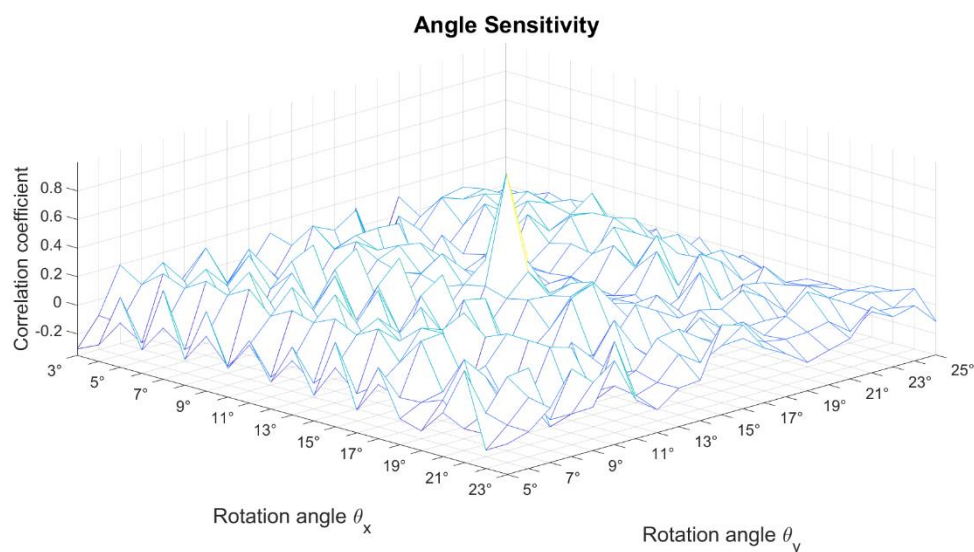
圖 3.5: (a)和(d)和(g)為八張目標影像中的 $g_1(x', y')$ 和 $g_7(x', y')$ 和 $g_8(x', y')$; (b)和(e)和(h)分別為解密的影像 $\hat{g}_1(x', y')$ 和 $\hat{g}_7(x', y')$ 和 $\hat{g}_8(x', y')$; (c)和(f)和(i)分別從解密影像 g_1 和 g_7 和 g_8 中選取出之影像。

表 3.2: 重建影像的相關係數

	Reconstruction results at 8 locations							
	Image 1	Image 2	Image 3	Image 4	Image 5	Image 6	Image 7	Image 8
θ_1	 0.96	 0.428	 0.004	 0.279	 -0.068	 -0.067	 -0.031	 0.056
θ_2	 0.066	 0.875	 -0.245	 0.013	 0.097	 -0.122	 0.072	 -0.076
θ_3	 0.06	 -0.223	 0.867	 -0.032	 0.13	 -0.027	 0.023	 -0.028
θ_4	 0.177	 -0.3	 0.211	 0.91	 -0.019	 -0.165	 -0.072	 -0.023
θ_5	 -0.136	 -0.001	 -0.146	 0.038	 0.921	 -0.127	 0.097	 0.003
θ_6	 0.163	 0.229	 -0.028	 -0.212	 0.094	 0.932	 -0.118	 0.04
θ_7	 0.1	 -0.401	 0.362	 0.037	 0.219	 -0.071	 0.946	 -0.001
θ_8	 -0.129	 0.23	 0.07	 0.002	 0.072	 -0.164	 0.041	 0.96

3.4 參數靈敏度分析

圖 3.6 (a) 與圖 3.6 (b) 與圖 3.6 (c) 分別為 Image 1 和 Image 7 和 Image 8 成像平面的靈敏度，解密角度分別為 $\{\theta_{x_1} = 13^\circ, \theta_{y_1} = 15^\circ\}$ 和 $\{\theta_{x_7} = -8^\circ, \theta_{y_7} = -7^\circ\}$ 和 $\{\theta_{x_8} = -15^\circ, \theta_{y_8} = -13^\circ\}$ ，POCGH 的尺寸為 1080×1920 ，SLM 像素間距 $6.8 \mu\text{m}$ ，距離 z_0 為 1.3 m ，MGSA 演算法疊代次數為 100 次，其中令角度偏移範圍為影像解密角度的 $\pm 10^\circ$ ，而角度差距為 1° ，由圖 3.6 (a) 和圖 3.6 (b) 和圖 3.6 (c) 所示，我們可以知道角度一偏移 1° 時 CC 值就立刻降到小於 0.2，結果顯示了該架構的高靈敏度。



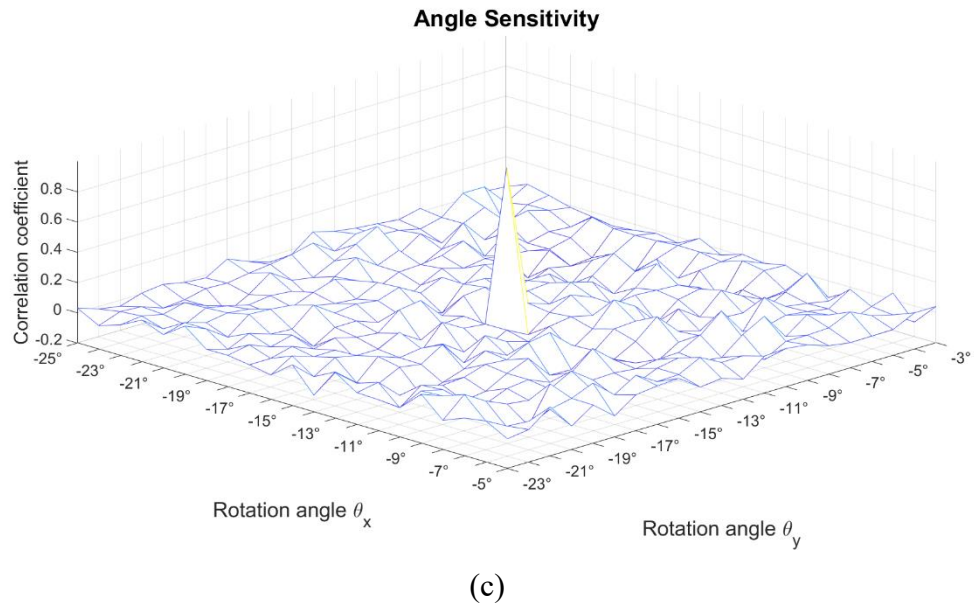


圖 3.6: (a) Image 1 成像平面靈敏度 (b) Image 7 成像平面靈敏度 (c) Image 8 成像平面靈敏度。



第四章、相位平面角度多工參數分析

4.1 演算法與系統架構

圖 4.1 為光學影像相位平面角度多工方塊圖，首先給定 N 張目標影像 $g_n(x', y')$ ， $n=1 \sim N$ ，和對應的角度 $\phi_n = \{\phi_{x_n}, \phi_{y_n}\}$ ，其中 $\{\phi_{x_n}, \phi_{y_n}\}$ 於重建平面上的第 n 個影像分別繞 $\{x_0, y_0\}$ 軸的旋轉角度，每張影像的 POF 通過使用 MGSA 來重建，給出的參數包括距離 z_0 波長 λ 和在 TFrT 中 $\{\phi_{x_n}, \phi_{y_n}\}$ 的旋轉角度，為了避免在解密時會產生影像間干擾問題，降低影像品質，使用相位調變的方法，將目標影像 $g_n(x', y')$ ， $n=1 \sim N$ ，轉換到不同的空間位置，接下來相加所有的 POF 並表示為 $\Psi_T(x_0, y_0)$ ，為了正確重建特定目標影像 g_n ，在 TFrT 上提供對應角度的參數 $\{\phi_{x_n}, \phi_{y_n}\}$ 可以在 TFrT 上藉由各種參數的組合來達成多工和解密的目的，最後再利用高斯濾波來降低影像的雜訊來提高影像的品質。

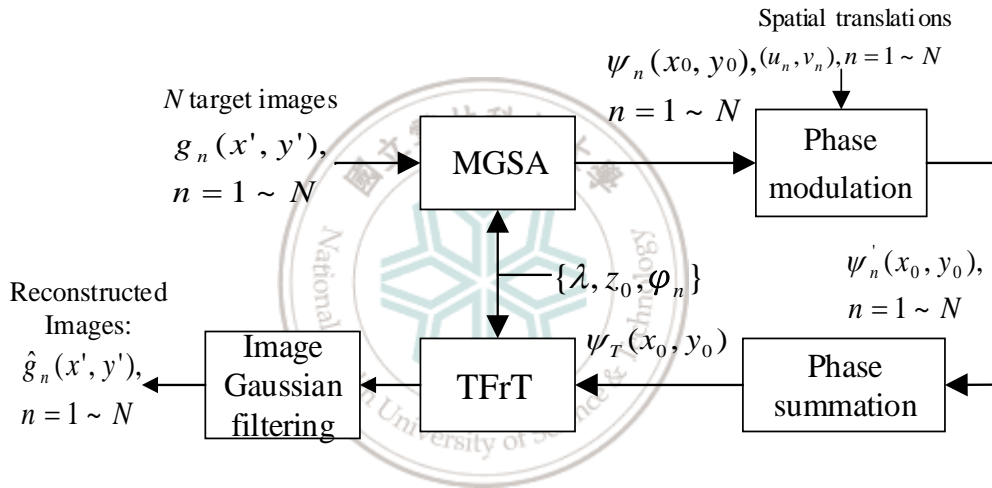


圖 4.1: 相位平面繞 x 和 y 軸光學影像多工方塊圖

圖 4.2 所示為第二種旋轉角度多工的光學架構:只在 POCGH 平面上進行角度旋轉，這裡，成像平面上的所有旋轉角度 $\{\theta_{x_n}, \theta_{y_n}\}$ 都為 0° ，如圖 2.3 所示，八張目標影像經由相位調變安排到不同位置，當 POCGH 平面的旋轉角度對應到 ϕ_n 時，才能解密在特定位置的目標影像 g_n ，否則只會在成像平面上出現像是雜訊的圖案，從旋轉的 POCGH 到重建平面的距離 $\hat{r}_{2,n}$ 如公式(4.1)所示:

$$\hat{r}_{2,n} = \left[(x - x'_0 \cos \phi_{x_n})^2 + (y - y'_0 \cos \phi_{y_n})^2 + (z_0 + x'_0 \sin \phi_{x_n} + y'_0 \sin \phi_{y_n})^2 \right]^{1/2}. \quad (4.1)$$

因為只在 POCGH 平面上進行角度旋轉，所以所有的重建影像都位在同一平面上，因此空間中的位移不會影響到 POCGH 平面的距離 $\hat{r}_{2,n}$ 。

基於 TFrT 公式(3.4)可以計算成像平面上的光場分佈，如公式(4.2)所式:

$$\begin{aligned} \hat{g}_n(x, y) &\approx \frac{1}{j\lambda} \exp(jkz_0) \exp \left[j \frac{k}{2z_0} (x^2 + y^2) \right] \\ &\times \iint_{-\infty}^{\infty} \exp[j\Psi_{\phi_n}(x'_0, y'_0)] \frac{1}{\hat{r}_{2,n}} \exp[jk((x'_0 \sin \phi_{x_n} + y'_0 \sin \phi_{y_n}))] \\ &\times \exp \left[j \frac{k}{2z_0} (x'^2_0 \cos^2 \phi_{x_n} + y'^2_0 \cos^2 \phi_{y_n}) \right] \\ &\times \exp \left[-j \frac{k}{z_0} (xx'_0 \cos \phi_{x_n} + yy'_0 \cos \phi_{y_n}) \right] dx'_0 dy'_0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

其中， λ 為波長， z_0 是 POCGH 和重建平面的兩個原點之間的距離。 N 張目標影像 $g_n(x, y)$ ， $n=1 \sim N$ ，每張影像對應到不同的傾斜角度 ϕ_{x_n} 與 ϕ_{y_n} ，如圖 4.2 所示，經由 MGSA 個別得到一個相位信號 $\Psi_{\phi_n}(x'_0, y'_0)$ ，將(4.2)簡化成(4.3):

$$\begin{aligned} \hat{g}_n(x, y) &= \text{TFrT} \{ \exp[j\Psi_{\phi_n}(x'_0, y'_0)]; \lambda; \hat{r}_{2,n}; \phi_{x_n}; \phi_{y_n} \} \\ &\approx |\hat{g}_{\phi_n}(x, y)| \exp[j\varphi_{\hat{g}_{\phi_n}}(x, y)]. \end{aligned} \quad (4.3)$$

其中 $\varphi_{\hat{g}_{\phi_n}}(x, y)$ ， $n=1 \sim N$ 做 TFrT 後的個別相位信號，如圖 4.2 所示:

如公式(4.4)所示，為了減少重建影像之間的干擾，降低影像品質，使用相位調變的方法，可有效地解決此問題。其中 (μ_n, ν_n) 為 $\hat{g}_{\phi_n}(x', y')$ 在繞射場的 x' 與 y' 方向預設的偏移量：

$$\Psi'_{\phi_n}(x'_0, y'_0) = \Psi_{\phi_n}(x'_0, y'_0) + \frac{2\pi(u_n x'_0 + v_n y'_0)}{\lambda z_0}. \quad (4.4)$$

因此，公式(4.4)可改成公式(4.5)：

$$\begin{aligned} & \text{TFrT}\{\exp[j\Psi'_{\phi_n}(x'_0, y'_0)]; \lambda; \hat{r}_{2,n}; \phi_{x_n}; \phi_{y_n}\} \\ & \approx |\hat{g}_{\phi_n}(x - u_n, y - v_n)| \exp[j\varphi_{\hat{g}_n}(x, y)]. \end{aligned} \quad (4.5)$$

將所有相位調變後的 POFs 整合，最後可以獲得 POCGH， $\Psi_T(x'_0, y'_0)$ ，如公式(4.6)所示：

$$\exp[j\Psi_T(x'_0, y'_0)] = \sum_{n=1}^N \exp[j\Psi'_{\phi_n}(x'_0, y'_0)]. \quad (4.6)$$

在解密部分，如公式(4.7)所示：

$$\begin{aligned} & |\text{TFrT}\{\exp[j\Psi_T(x'_0, y'_0)]; \lambda; \hat{r}_{2,n}; \phi_{x_n}; \phi_{y_n}\}| \\ & \approx |\hat{g}_{\phi_n}(x - u_n, y - v_n) \exp[j\varphi_{\hat{g}_n}(x - u_n, y - v_n)] + n_{\phi_n}(x, y)| \\ & \approx |\hat{g}_{\phi_n}(x - u_n, y - v_n)| + |n_{\phi_n}(x, y)|. \end{aligned} \quad (4.7)$$

其中 $n_{\phi_n}(x, y)$ 為雜訊或者是干擾，可是由不正確的金鑰解密影像所產生的結果，最後利用相關係數 ρ 來評估近似目標影像 $\hat{g}_{\phi_n}(x, y)$ 的品質。

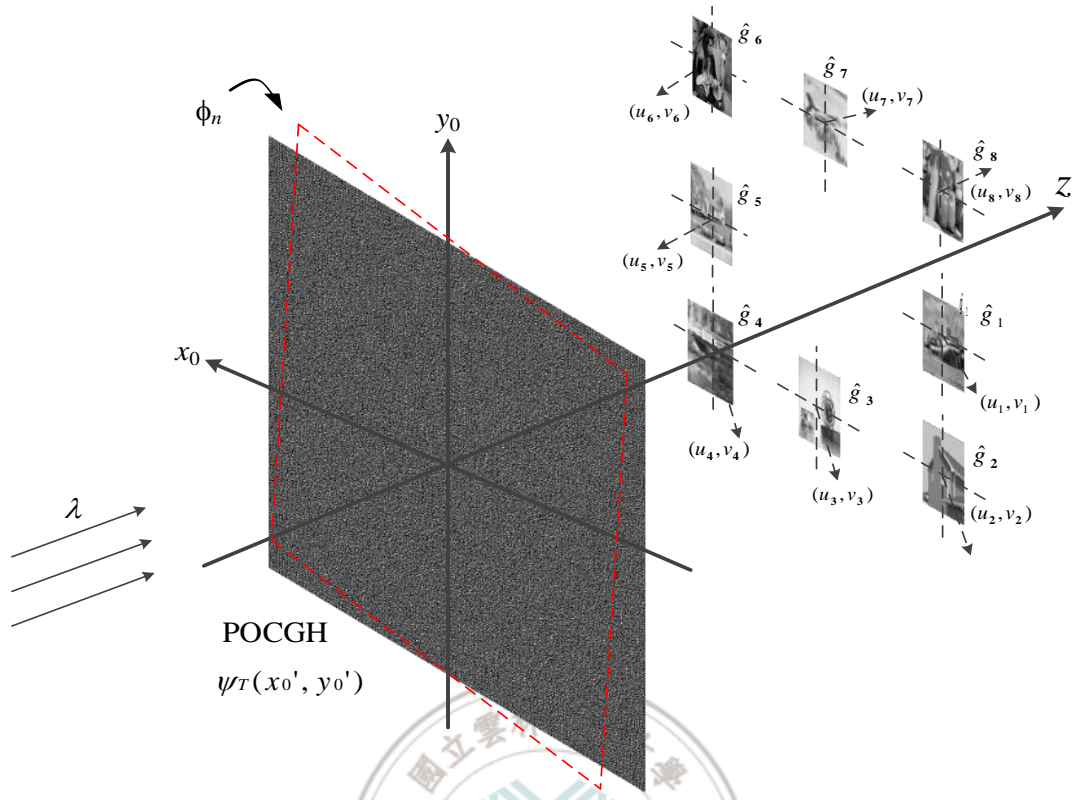


圖 4.2: 單相位繞 x 和 y 軸旋轉 POCGH 平面多重影像光學架構圖

4.2 參數轉換

在本章節為了透過電腦模擬驗證了提出方法的有效性，我們將公式(4.2)進行參數轉換，將 $\hat{g}_n(x, y)$ 平面轉換到 $\hat{g}_n(\gamma, \mu)$ 平面上，使公式(4.2)形成傅立葉轉換之型式，如公式(4.8)所示 (γ, μ) 分別定義為：

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{\lambda r_0} (x' \cos \phi_x + (z_0 - r_0) \sin \phi_x), \quad x' = \frac{\gamma \lambda z_0}{\cos \phi_x}. \\ \mu &= \frac{1}{\lambda r_0} (y' \cos \phi_y + (z_0 - r_0) \sin \phi_y), \quad y' = \frac{\mu \lambda z_0}{\cos \phi_y}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

可以得到 (x_0, y_0) 到 (γ, μ) 兩個平面之間的距離為 r_0 ，如公式(4.9)所示：

$$r_0 = \sqrt{z_0^2 + \frac{(\gamma \lambda z_0)^2}{\cos^2 \phi_x} + \frac{(\mu \lambda z_0)^2}{\cos^2 \phi_y}}. \quad (4.9)$$

可以得到在 (γ, μ) 平面上的光場分佈 \hat{g}_n ，如公式(4.10)所示：

$$\begin{aligned}\hat{g}_n(\gamma, \mu) &= \frac{1}{j\lambda r_0} \exp[jkr_0] \times \iint_{-\infty}^{\infty} \exp[j\Psi_{\phi_n}(x'_0, y'_0)] \\ &\times \exp\left[j\frac{k}{2z_0}(x_0'^2 + y_0'^2 - 2x'_0y'_0\sin\phi_x\sin\phi_y)\right] \\ &\times \exp[-j2\pi(\gamma x'_0 + \mu y'_0)] dx'_0 dy'_0.\end{aligned}\quad (4.10)$$

因此，公式(4.10)可以改成公式(4.11)：

$$\begin{aligned}\hat{g}_n(\gamma, \mu) &= \frac{1}{j\lambda r_0} \exp[jkr_0] \times \text{FT}\{\exp[j\Psi_{\phi_n}(x'_0, y'_0)] \\ &\times \exp\left[j\frac{k}{2z_0}(x_0'^2 + y_0'^2 - 2x'_0y'_0\sin\phi_x\sin\phi_y)\right]\}.\end{aligned}\quad (4.11)$$

4.3 電腦模擬

在電腦模擬中，我們使用一張像素尺寸為 128×128 的目標影像，如圖 2.3 所示，分別進行相位調變到成像平面中 8 個位置，MGSA 演算法疊代次數為 100 次，偏移量設計為 $(\mu_n, \nu_n) = (\alpha D_w, \beta D_h)$ ，其中 α 和 β 範圍在 $[-3, 3]$ 之間， D_w 和 D_h 分別為目標影像的寬度和高度，為了滿足本論文 TFrT 推導公式的近似值，如表 4.1 所示，我們將所有旋轉角度限制在 $\pm 15^\circ$ ，透過這些參數來模擬。電腦設備規格和使用的程式語言如第二章所示。圖 4.3(b)和圖 4.3(e)和圖 4.3(h)分別為相位平面旋轉 $\{\phi_{x_1} = 10^\circ, \phi_{y_1} = 12^\circ\}, \{\phi_{x_7} = -12^\circ, \phi_{y_7} = -10^\circ\}, \{\phi_{x_8} = -8^\circ, \phi_{y_8} = -7^\circ\}$ ，圖 4.3(c)和圖 4.3(f)和圖 4.3(i)是從解密影像中選取之後再經由高斯濾波所獲取的影像，相關係數分別為 $\rho=0.855$ 和 $\rho=0.953$ 和 $\rho=0.959$ ，八張影像總共加解密時間為 536.29 秒，其中 TFrT 時間為 517.55 秒，相位調變和合成 POM 的時間為 4.23 秒，解密時間為 2.09 秒，可以看出在 TFrT 花費時間最久，主要是受到 MGSA 高的計算複雜度的影響，當疊代次數增加時，所花費時間也相對提高，表 4.2 是使用針對某張解密影像的角度來解密其他的影像，如表 4.2 所示，如果使用錯誤解密角度，此目標影像就無法被還原。

表 4.1: 相位平面繞 x 和 y 軸八種不同加密旋轉角度

Image index	Φ_n	
	ϕ_{x_n}	ϕ_{y_n}
1	10°	12°
2	7°	8°
3	13°	15°
4	3°	5°
5	-15°	-13°
6	-5°	-3°
7	-12°	-10°
8	-8°	-7°



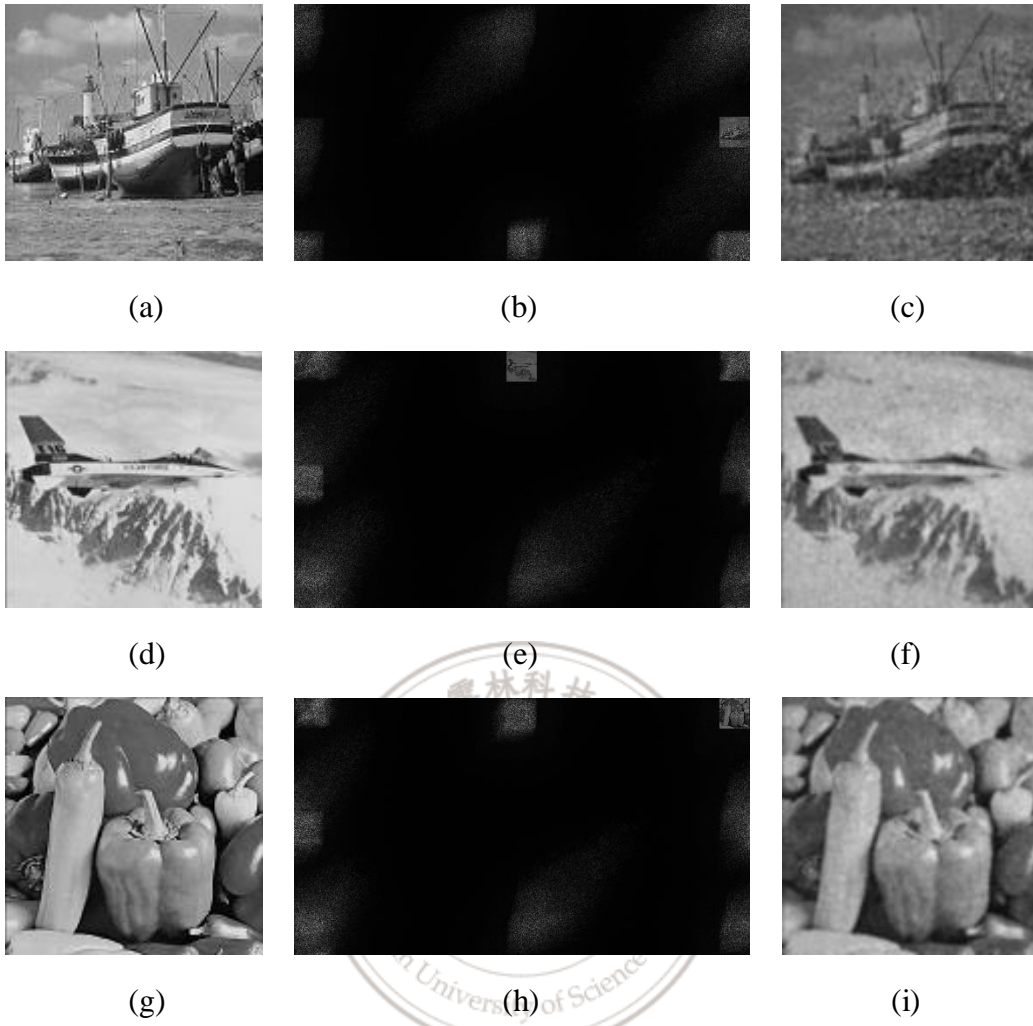


































































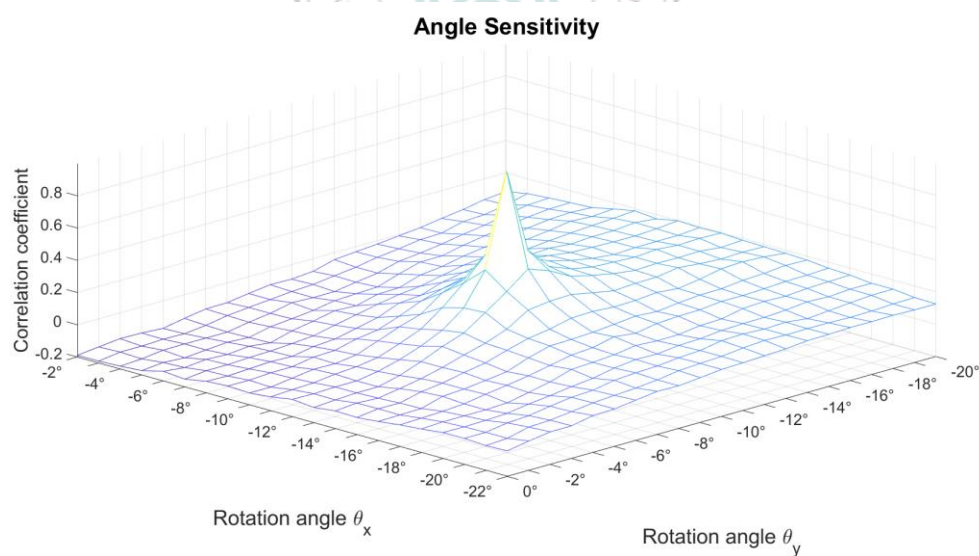
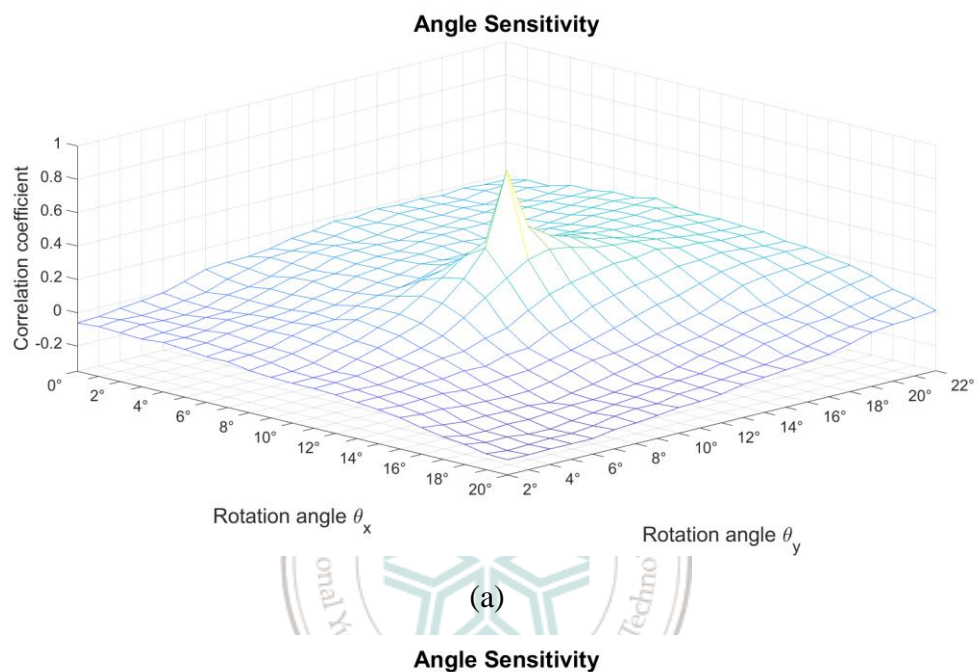
圖 4.3: (a)和(d)和(g)為八張目標影像中的 $g_1(x', y')$ 和 $g_7(x', y')$ 和 $g_8(x', y')$; (b)和(e)和(h)分別為解密的影像 $\hat{g}_1(x', y')$ 和 $\hat{g}_7(x', y')$ 和 $\hat{g}_8(x', y')$; (c)和(f)和(i)分別從解密影像 g_1 和 g_7 和 g_8 中選取出之影像。

表 4.2: 重建影像的相關係數

	Reconstruction results at 8 locations							
	Image 1	Image 2	Image 3	Image 4	Image 5	Image 6	Image 7	Image 8
ϕ_1	 0.855	 -0.162	 0.367	 0.302	 -0.089	 -0.115	 -0.164	 0.119
ϕ_2	 0.073	 0.813	 0.329	 0.397	 -0.115	 -0.068	 -0.173	 0.007
ϕ_3	 0.137	 -0.276	 0.959	 0.282	 -0.049	 -0.119	 -0.123	 0.081
ϕ_4	 -0.029	 0.275	 0.28	 0.898	 -0.112	 0.019	 -0.171	 -0.004
ϕ_5	 0.042	 -0.19	 -0.012	 0.026	 0.85	 0.216	 0.158	 0.207
ϕ_6	 -0.123	 0.23	 0.239	 0.25	 -0.107	 0.944	 -0.163	 0.163
ϕ_7	 -0.072	 -0.057	 0.231	 0.051	 0.026	 0.284	 0.953	 0.212
ϕ_8	 -0.139	 0.257	 0.243	 0.116	 -0.052	 0.353	 -0.077	 0.959

4.4 參數靈敏度分析

圖 4.4 (a)與圖 4.4 (b)與圖 4.4 (c)分別為 Image 1 和 Image 7 和 Image 8 相位平面的靈敏度，解密角度分別為 $\{\phi_{x_1} = 10^\circ, \phi_{y_1} = 12^\circ\}$ 和 $\{\phi_{x_7} = -12^\circ, \phi_{y_7} = -10^\circ\}$ 和 $\{\phi_{x_8} = -8^\circ, \phi_{y_8} = -7^\circ\}$ ，其中令相位平面處角度偏移範圍為 $\pm 10^\circ$ ，而角度差距為 1° ，由圖 4.4 (a)與圖 4.4 (b) 與圖 4.4 (c)所示，角度偏移時 CC 值下降到小於 0.4，因此，我們可以知道相位平面處的靈敏度沒有像成像平面那麼高。



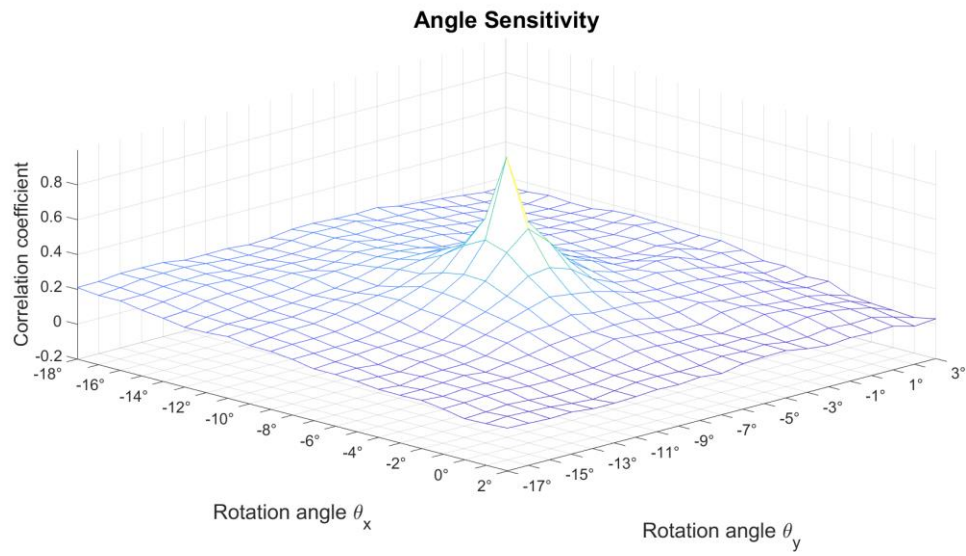


圖 4.4: (a) Image 1 相位平面的靈敏度 (b) Image 7 相位平面的靈敏度 (c) Image 8 相位平面的靈敏度



第五章、相位平面和成像平面角度多工參數分析

5.1 演算法與系統架構

圖5.1為光學影像相位平面和成像平面角度多工方塊圖，首先給定 N 張目標影像 $g_n(x', y')$ ， $n=1 \sim N$ ，和對應的角度 $\theta_n = \{\theta_{x_n}, \theta_{y_n}, \phi_{x_n}, \phi_{y_n}\}$ ，其中 $\{\theta_{x_n}, \theta_{y_n}, \phi_{x_n}, \phi_{y_n}\}$ 於重建平面上的第 n 個影像分別繞 $\{x_0, y_0, x', y'\}$ 軸的旋轉角度，每張影像的 POF 通過使用 MGSA 來重建，給出的參數包括距離 z_0 波長 λ 和在 TFrT 中 $\{\theta_{x_n}, \theta_{y_n}, \phi_{x_n}, \phi_{y_n}\}$ 的旋轉角度，為了避免在解密時會產生影像間干擾問題，降低影像品質，使用相位調變的方法，將目標影像 $g_n(x', y')$ ， $n=1 \sim N$ ，轉換到不同的空間位置，接下來相加所有的 POF 並表示為 $\Psi_T(x_0, y_0)$ ，為了正確重建特定目標影像 g_n ，在 TFrT 上提供對應角度的參數 $\{\theta_{x_n}, \theta_{y_n}, \phi_{x_n}, \phi_{y_n}\}$ 可以在 TFrT 上藉由各種參數的組合來達成多工和解密的目的，最後再利用高斯濾波來降低影像的雜訊來提高影像的品質。

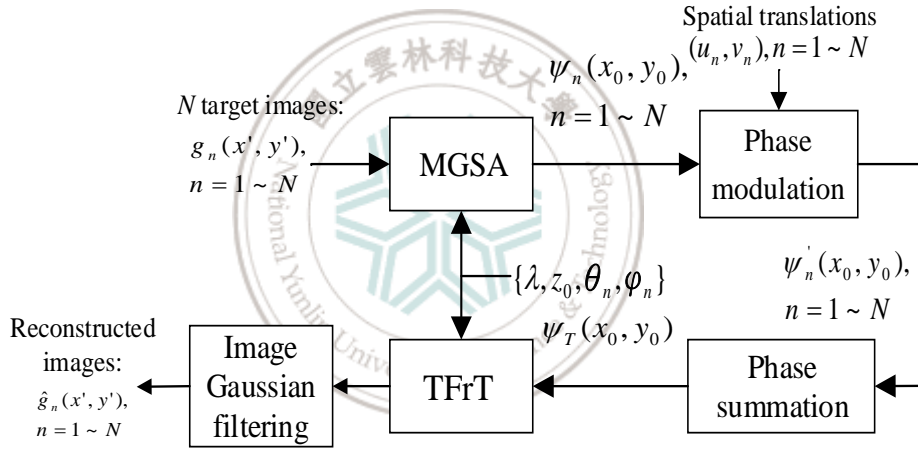


圖 5.1: 相位平面和成像平面繞 x 和 y 軸光學影像多工方塊圖

圖 5.2 所示為第三種旋轉角度多工的光學架構，在相位平面和成像平面上都進行角度旋轉，八張目標影像相位調變到不同位置，當相位平面的旋轉角度對應到 $\{\theta_n, \phi_n\}$ 時，才能解密在特定位置的目標影像 g_n ，否則只會在成像平面上出現像是雜訊的圖案，從旋轉的相位到重建平面的距離 $\hat{r}_{3,n}$ 如公式(5.1)所示：

$$\hat{r}_{3,n} = \left[(x'_0 \cos \phi_{x_n} - x' \cos \theta_{x_n})^2 + (y'_0 \cos \phi_{y_n} - y' \cos \theta_{y_n})^2 + (z_0 + x'_0 \sin \phi_{x_n} + y'_0 \sin \phi_{y_n} - x' \sin \theta_{x_n} - y' \sin \theta_{y_n})^2 \right]^{1/2} + u_n \tan \theta_{x_n} + v_n \tan \theta_{y_n}. \quad (5.1)$$

基於 TFrT 公式(3.4)可以計算成像平面上的光場分佈，如公式(5.2)所示：

$$\begin{aligned}
\hat{g}_n(x', y') &\approx \frac{1}{j\lambda} \exp[jk(z_0 - x' \sin\theta_{x_n} - y' \sin\theta_{y_n})] \\
&\times \exp\left[j \frac{k}{2z_0} (x'^2 \cos^2\theta_{x_n} + y'^2 \cos^2\theta_{y_n})\right] \iint_{-\infty}^{\infty} \exp[j\Psi_{\phi_n, \theta_n}(x'_0, y'_0)] \frac{1}{\hat{r}_{3,n}} \\
&\times \exp[jk((x'_0 \sin\phi_{x_n} + y'_0 \sin\phi_{y_n}))] \exp\left[j \frac{k}{2z_0} (x_0'^2 \cos^2\phi_{x_n} + y_0'^2 \cos^2\phi_{y_n})\right] \\
&\times \exp\left[-j \frac{k}{z_0} (x' x'_0 \cos\theta_{x_n} \cos\phi_{x_n} + y' y'_0 \cos\theta_{y_n} \cos\phi_{y_n})\right] dx'_0 dy'_0. \quad (5.2)
\end{aligned}$$

其中， λ 為波長， z_0 是相位和重建平面的兩個原點之間的距離。 N 張目標影像 $g_n(x, y)$ ， $n=1\sim N$ ，每張影像對應到不同的傾斜角度 $\{\theta_{x_n}, \theta_{y_n}, \phi_{x_n}, \phi_{y_n}\}$ ，如圖 5.2 所示，經由 MGSA 個別得到一個相位信號 $\Psi_{\phi_n, \theta_n}(x'_0, y'_0)$ ，將(5.2)簡化成(5.3)：

$$\begin{aligned}
\hat{g}_n(x', y') &= \text{TFrT}\{\exp[j\Psi_{\phi_n, \theta_n}(x'_0, y'_0)]; \lambda; \hat{r}_{3,n}; \phi_{x_n}; \phi_{y_n}; \theta_{x_n}; \theta_{y_n}\} \\
&\approx |\hat{g}_{\phi_n, \theta_n}(x', y')| \exp[j\varphi_{\hat{g}_{\phi_n, \theta_n}}(x', y')]. \quad (5.3)
\end{aligned}$$

其中 $\varphi_{\hat{g}_{\phi_n, \theta_n}}(x', y')$ ， $n=1\sim N$ 做 TFrT 後的個別相位信號，如圖 5.2 所示：

如公式(5.4)所示，為了減少重建影像之間的干擾，而降低影像品質，使用相位調變的方法，可有效地解決此問題。其中 (μ_n, ν_n) 為 $\hat{g}_{\phi_n, \theta_n}(x', y')$ 在繞射場的 x' 與 y' 方向預設的偏移量：

$$\Psi'_{\phi_n, \theta_n}(x'_0, y'_0) = \Psi_{\phi_n, \theta_n}(x'_0, y'_0) + \frac{2\pi(u_n x'_0 + v_n y'_0)}{\lambda z_0}. \quad (5.4)$$

因此，公式(5.4)可改成公式(5.5)：

$$\begin{aligned}
&\text{TFrT}\{\exp[j\Psi'_{\phi_n, \theta_n}(x'_0, y'_0)]; \lambda; \hat{r}_{3,n}; \phi_{x_n}; \phi_{y_n}; \theta_{x_n}; \theta_{y_n}\} \\
&\approx |\hat{g}_{\phi_n, \theta_n}(x' - u_n, y' - v_n)| \exp[j\varphi_{\hat{g}_{\phi_n, \theta_n}}(x', y')]. \quad (5.5)
\end{aligned}$$

將所有相位調變後的 POFs 整合，最後可以獲得 POCGH， $\Psi_T(x'_0, y'_0)$ ，如公式 (5.6) 所示：

$$\exp[j\Psi_T(x'_0, y'_0)] = \sum_{n=1}^N \exp[j\Psi'_{\phi_n, \theta_n}(x'_0, y'_0)]. \quad (5.6)$$

在解密部分，如公式 (5.7) 所示：

$$\begin{aligned} & |\text{TFRt}\{\exp[j\Psi_T(x'_0, y'_0)] ; \lambda; \hat{r}_{3,n}; \phi_{x_n}; \phi_{y_n}; \theta_{x_n}; \theta_{y_n}\}| \\ & \approx |\hat{g}_{\phi_n, \theta_n}(x' - u_n, y' - v_n) \exp[j\varphi_{\hat{g}_n}(x' - u_n, y' - v_n)] + n_{\phi_n, \theta_n}(x', y')| \\ & \approx |\hat{g}_{\phi_n, \theta_n}(x' - u_n, y' - v_n)| + |n_{\phi_n, \theta_n}(x', y')|. \end{aligned} \quad (5.7)$$

其中 $n_{\phi_n}(x, y)$ 為雜訊或者是干擾，可是由不正確的金鑰解密影像所產生的結果，最後利用相關係數 ρ 來評估近似目標影像 $\hat{g}_{\phi_n, \theta_n}(x, y)$ 的品質。

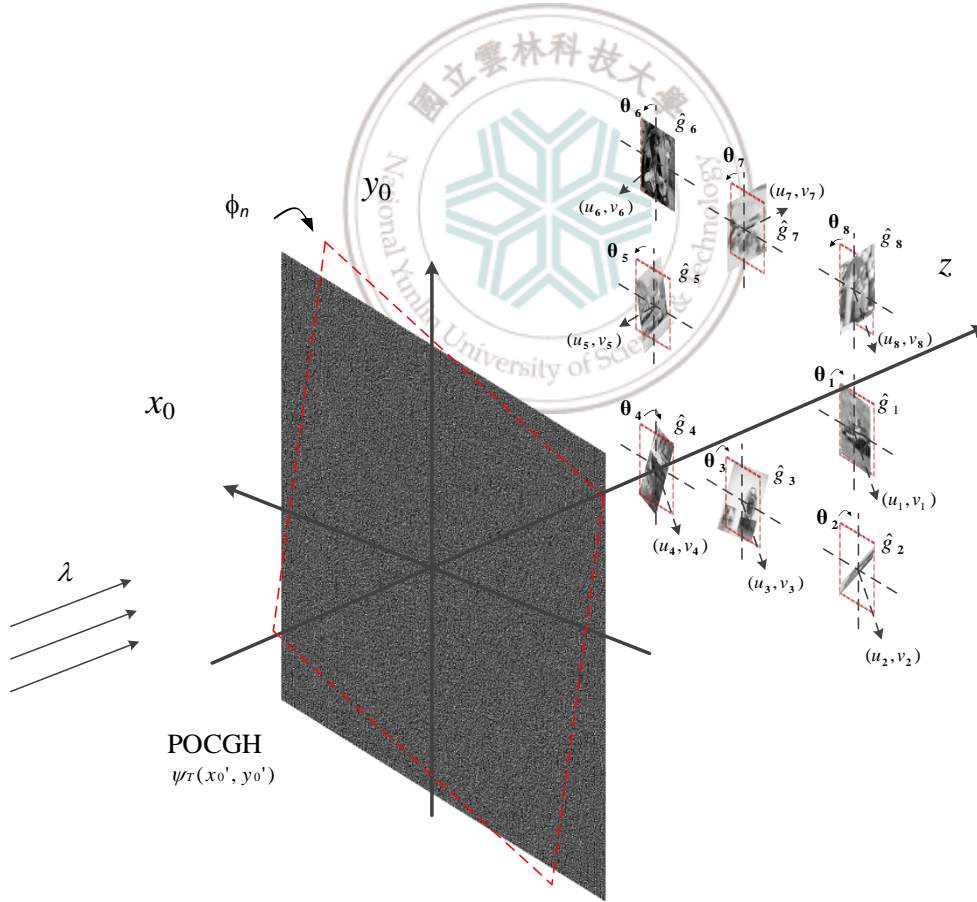


圖 5.2: 單相位繞 x 和 y 軸旋轉相位平面和成像平面多重影像光學架構圖

5.2 參數轉換

在本章節為了透過電腦模擬驗證了提出方法的有效性，我們將公式(5.2)進行參數轉換，將 $\hat{g}_n(x', y')$ 平面轉換到 $\hat{g}_n(\gamma, \mu)$ 平面上，使公式(5.2) 形成傅立葉轉換之型式，如公式(5.8)所示 (γ, μ) 分別定義為：

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{1}{\lambda r_0} [x'(\sin\theta_x \sin\phi_x + \cos\theta_x \cos\phi_x) - y' \sin\phi_x \sin\theta_y + (z_0 - r_0) \sin\phi_x]. \\ x' &= \frac{\lambda z_0 [\mu \sin\phi_x \sin\theta_y + \gamma (\sin\theta_y \sin\phi_y + \cos\theta_y \cos\phi_y)]}{\sin\theta_x \sin\phi_x \cos\theta_y \cos\phi_y + \cos\theta_x \cos\phi_x (\sin\theta_y \sin\phi_y + \cos\theta_y \cos\phi_y)}. \\ \mu &= \frac{1}{\lambda r_0} [y'(\sin\theta_y \sin\phi_y + \cos\theta_y \cos\phi_y) - x' \sin\theta_x \sin\phi_y + (z_0 - r_0) \sin\phi_y]. \\ y' &= \frac{\lambda z_0 [\gamma \sin\theta_x \sin\phi_y + \mu (\sin\theta_x \sin\phi_x + \cos\theta_x \cos\phi_x)]}{\sin\theta_x \sin\phi_x \cos\theta_y \cos\phi_y + \cos\theta_x \cos\phi_x (\sin\theta_y \sin\phi_y + \cos\theta_y \cos\phi_y)}.\end{aligned}\quad (5.8)$$

可以得到 (x_0, y_0) 到 (γ, μ) 兩個平面之間的距離為 r_0 ，如公式(5.9)所示：

$$r_0 = \sqrt{z_0^2 + x'^2 + y'^2}.\quad (5.9)$$

可以得到在 (γ, μ) 旋轉平面上的光場分佈 \hat{g}_n ，如公式(5.10)所示：

$$\begin{aligned}\hat{g}_n(\gamma, \mu) &= \frac{1}{j\lambda r_0} \exp[jkr_0] \times \iint_{-\infty}^{\infty} \exp[j\Psi_{\phi_n, \theta_n}(x'_0, y'_0)] \\ &\times \exp\left[j \frac{k}{2r_0} (x'y' \sin\theta_x \sin\theta_y - z_0(x' \sin\theta_x + \sin\theta_y))\right] \\ &\times \exp\left[j \frac{k}{2z_0} (x_0'^2 + y_0'^2 - 2x'_0 y'_0 \sin\phi_x \sin\phi_y)\right] \\ &\times \exp[-j2\pi(\gamma x'_0 + \mu y'_0)] dx'_0 dy'_0.\end{aligned}\quad (5.10)$$

因此，公式(5.10)可以改成公式(5.11):

$$\begin{aligned}
 \hat{g}_n(\gamma, \mu) &= \frac{1}{j\lambda r_0} \exp[jkr_0] \times \text{FT}\{ \exp[j\Psi_{\phi_n, \theta_n}(x'_0, y'_0)] \\
 &\times \exp\left[j\frac{k}{2r_0}(x'y'\sin\theta_x\sin\theta_y - z_0(x'\sin\theta_x + \sin\theta_y))\right] \\
 &\times \exp\left[j\frac{k}{2z_0}(x_0'^2 + y_0'^2 - 2x'_0y'_0\sin\phi_x\sin\phi_y)\right]\}. \quad (5.11)
 \end{aligned}$$



5.3 電腦模擬

在電腦模擬中，我們使用一張像素尺寸為 128×128 的目標影像，如圖 2.3 所示，分別進行相位調變到成像平面中 8 個位置，MGSA 演算法疊代次數為 100 次，偏移量設計為 $(\mu_n, \nu_n) = (\alpha D_w, \beta D_h)$ ，其中 α 和 β 範圍在 $[-3, 3]$ 之間， D_w 和 D_h 分別為目標影像的寬度和高度，為了滿足本論文 TFrT 推導公式的近似值，如表 5.1 所示，我們將所有旋轉角度限制在 $\pm 15^\circ$ ，透過這些參數來模擬。電腦設備規格和使用的程式語言如同第二章。圖 5.3(b) 和圖 5.3(e) 和圖 5.3(h) 分別為相位和成像平面旋轉 $\{\phi_{x_1} = 10^\circ, \phi_{y_1} = 12^\circ, \theta_{x_1} = 13^\circ, \theta_{y_1} = 15^\circ\}, \{\phi_{x_7} = -12^\circ, \phi_{y_7} = -10^\circ, \theta_{x_7} = -8^\circ, \theta_{y_7} = -7^\circ\}, \{\phi_{x_8} = -8^\circ, \phi_{y_8} = -7^\circ, \theta_{x_8} = -15^\circ, \theta_{y_8} = -13^\circ\}$ ，圖 5.3(c) 和圖 5.3(f) 和圖 5.3(i) 是從解密影像中選取之後再經由高斯濾波所獲取的影像，相關係數分別為 $\rho = 0.924$ 和 $\rho = 0.946$ 和 $\rho = 0.96$ ，八張影像總共加解密時間為 660.32 秒，其中 TFrT 時間為 636.45 秒，相位調變和合成 POM 的時間為 4.22 秒，解密時間為 2.6 秒，可以看出在 TFrT 花費時間最久，主要是受到 MGSA 高的計算複雜度的影響，當疊代次數增加時，所花費時間也相對提高，表 5.2 是使用針對某張解密影像的角度來解密其他的影像，步驟如表 5.2 所示，如果使用錯誤解密角度，此目標影像就無法被還原。

表 5.1: 相位和成像平面繞 x 和 y 軸八種不同加密旋轉角度

Image index	ϕ_n, θ_n			
	ϕ_{x_n}	ϕ_{y_n}	θ_{x_n}	θ_{y_n}
1	10°	12°	13°	15°
2	7°	8°	10°	12°
3	13°	15°	7°	8°
4	3°	5°	2°	5°
5	-15°	-13°	-5°	-1°
6	-5°	-3°	-12°	-10°
7	-12°	-10°	-8°	-7°
8	-8°	-7°	-15°	-13°

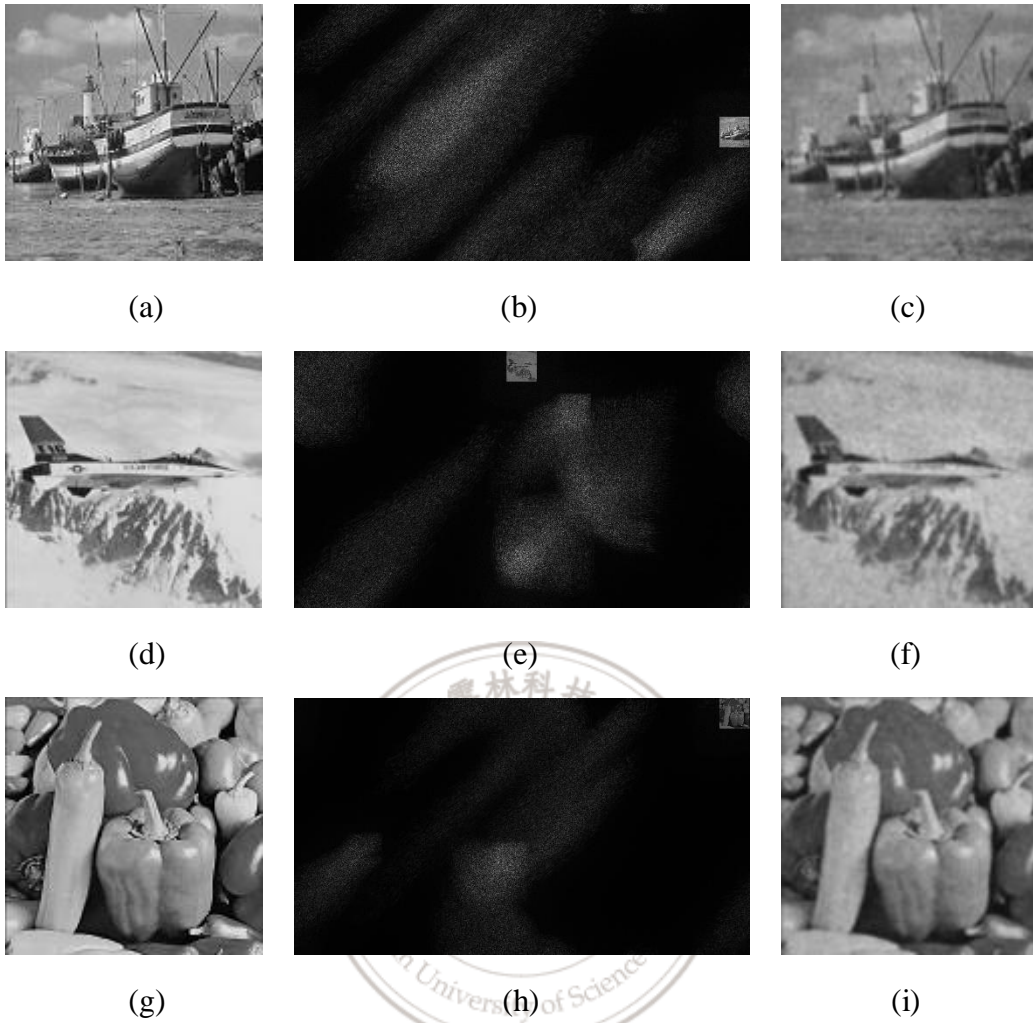


































































圖 5.3: (a)和(d)和(g)為八張目標影像中的 $g_1(x', y')$ 和 $g_7(x', y')$ 和 $g_8(x', y')$; (b)和(e)和(h)分別為解密的影像 $\hat{g}_1(x', y')$ 和 $\hat{g}_7(x', y')$ 和 $\hat{g}_8(x', y')$; (c)和(f)和(i)分別從解密影像 g_1 和 g_7 和 g_8 中選取出之影像。

表 5.2: 重建影像的相關係數

	Reconstruction results at 8 locations							
	Image 1	Image 2	Image 3	Image 4	Image 5	Image 6	Image 7	Image 8
ϕ_1, θ_1	 0.924	 0.186	 -0.344	 0.203	 -0.015	 -0.161	 0.043	 0.006
ϕ_2, θ_2	 -0.201	 0.879	 0.093	 -0.092	 -0.027	 0.026	 0.014	 0.139
ϕ_3, θ_3	 -0.003	 0.052	 0.857	 -0.007	 -0.066	 -0.084	 0.024	 0.127
ϕ_4, θ_4	 0.225	 -0.094	 0.107	 0.913	 -0.027	 0.012	 0.017	 -0.006
ϕ_5, θ_5	 -0.196	 -0.259	 0.211	 -0.313	 0.908	 0.18	 -0.042	 -0.022
ϕ_6, θ_6	 -0.248	 -0.136	 0.195	 0.104	 0.027	 0.943	 0.015	 0.089
ϕ_7, θ_7	 -0.264	 0.215	 -0.215	 0.207	 -0.091	 0.19	 0.952	 0.09
ϕ_8, θ_8	 -0.267	 0.24	 -0.129	 0.229	 0.09	 -0.14	 0.044	 0.962

5.4 參數靈敏度分析

如圖 5.4 (a)與圖 5.4 (b)和圖 5.5(a)與圖 5.5 (b)和圖 5.6(a)與圖 5.6(b)所示，分別為 Image 1 和 Image 7 和 Image 8 相位和成像平面的靈敏度，解密角度分別為 $\{ \phi_{x_1} = 10^\circ, \phi_{y_1} = 12^\circ, \theta_{x_1} = 13^\circ, \theta_{y_1} = 15^\circ \}, \{ \phi_{x_7} = -12^\circ, \phi_{y_7} = -10^\circ, \theta_{x_7} = -8^\circ, \theta_{y_7} = -7^\circ \}, \{ \phi_{x_8} = -8^\circ, \phi_{y_8} = -7^\circ, \theta_{x_8} = -15^\circ, \theta_{y_8} = -13^\circ \}$ ，POCGH 的尺寸為 1080×1920 ，SLM 像素間距 $6.8 \mu\text{m}$ ，距離 z_0 為 1.3 m ，MGSA 演算法疊代次數為 100 次，其中設定相位和成像兩個平面處角度偏移範圍為 $\pm 10^\circ$ ，而角度差距為 1° ，由圖 5.4 (a)與圖 5.4 (b)和圖 5.5(a)與圖 5.5 (b)和圖 5.6(a)與圖 5.6(b)所示，角度一偏移 1° 時 CC 值就立刻降到小於 0.2，因此，我們可以知道當在這個架構時 Image 1 和 Image 7 和 Image 8 相位和成像平面的靈敏度是很高的。

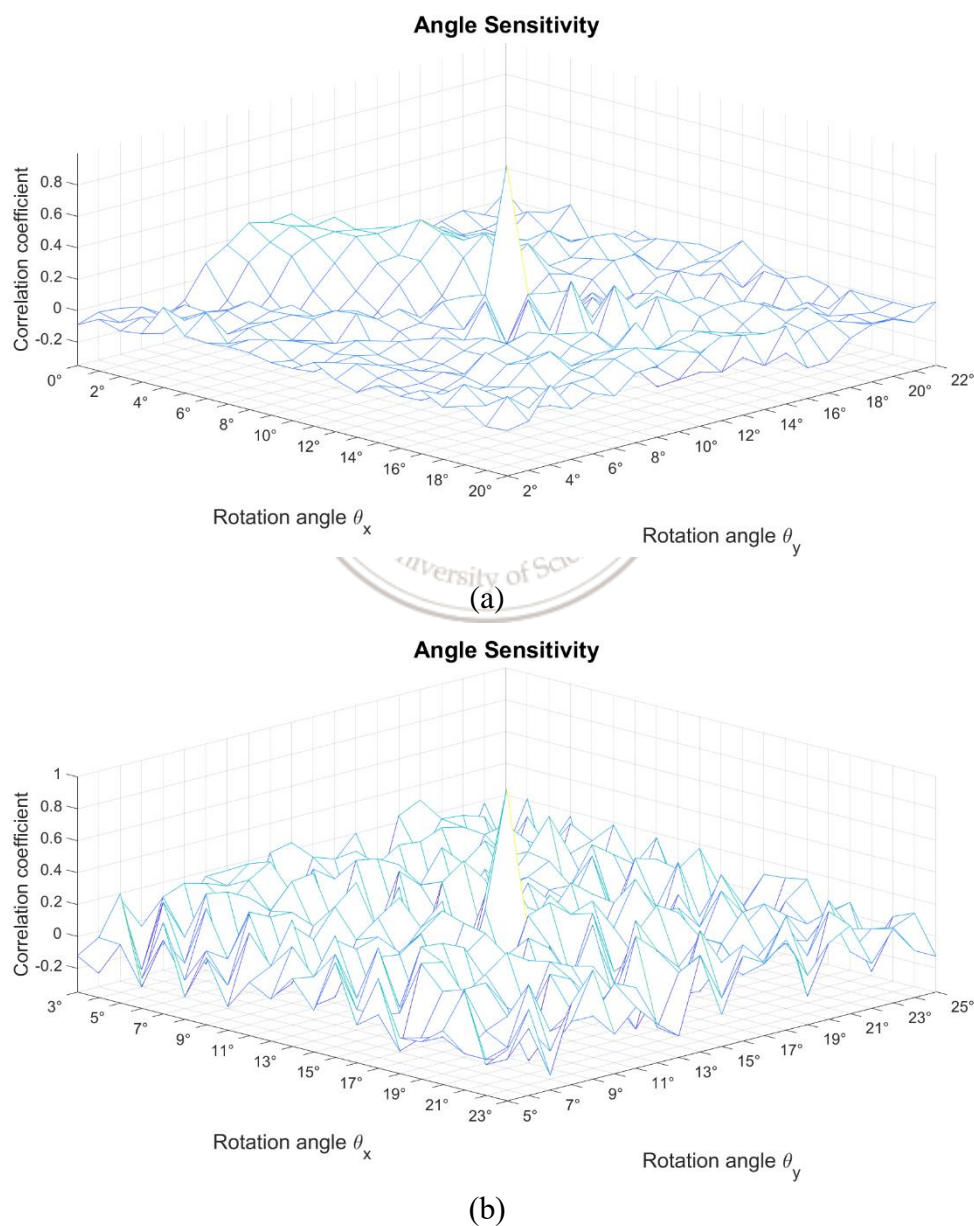


圖 5.4: (a) Image 1 相位平面的靈敏度 (b) Image 1 成像平面的靈敏度

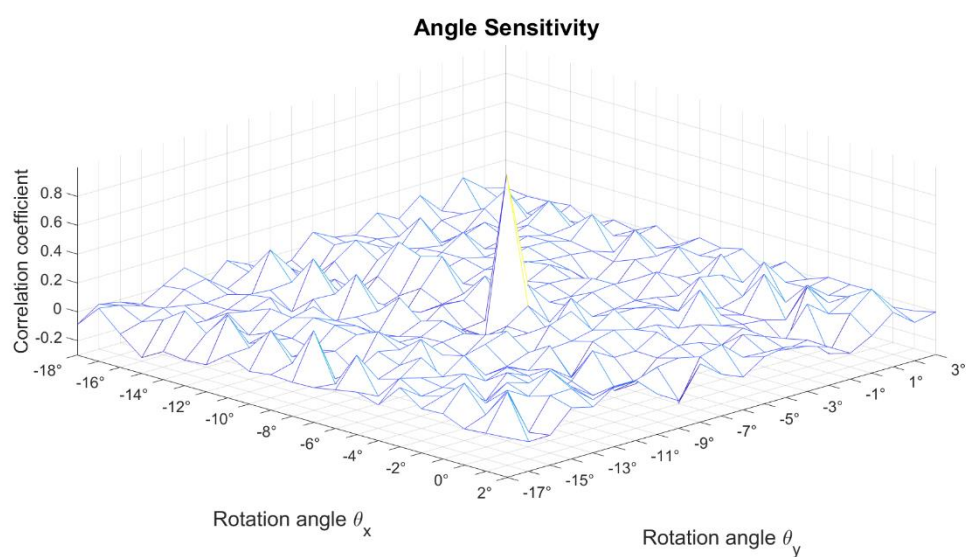
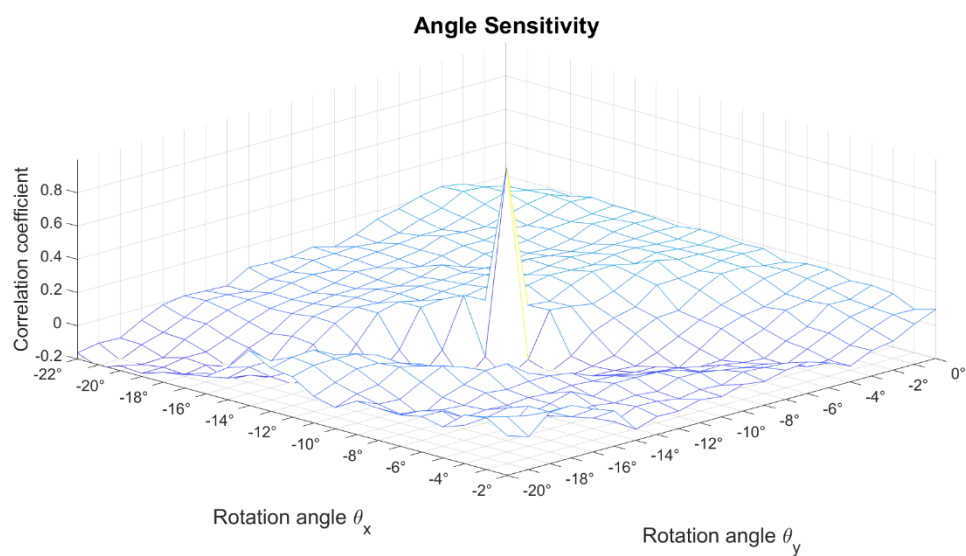


圖 5.5: (a) Image 7 相位平面的靈敏度 (b) Image 7 成像平面的靈敏度

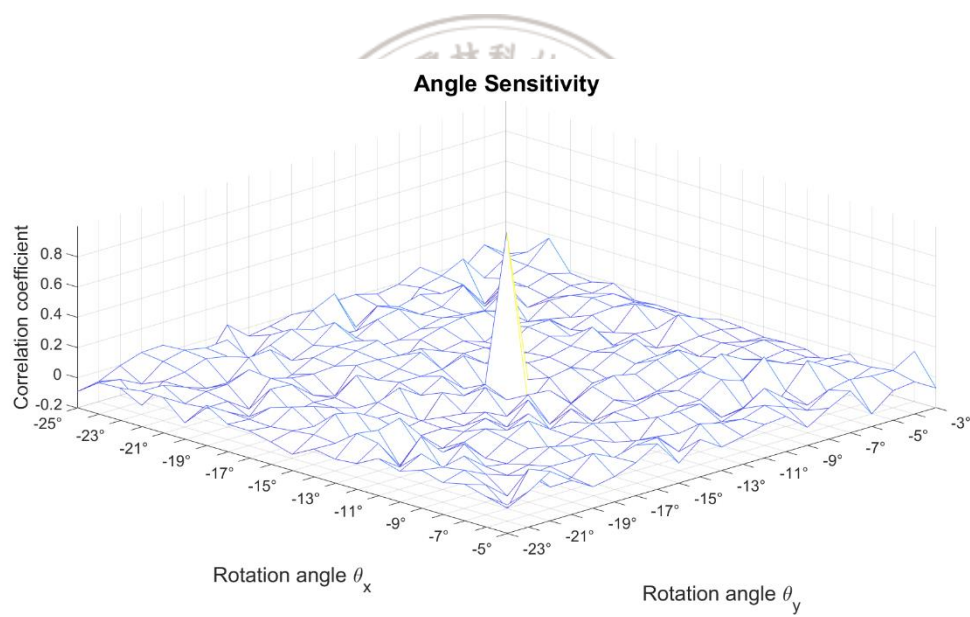
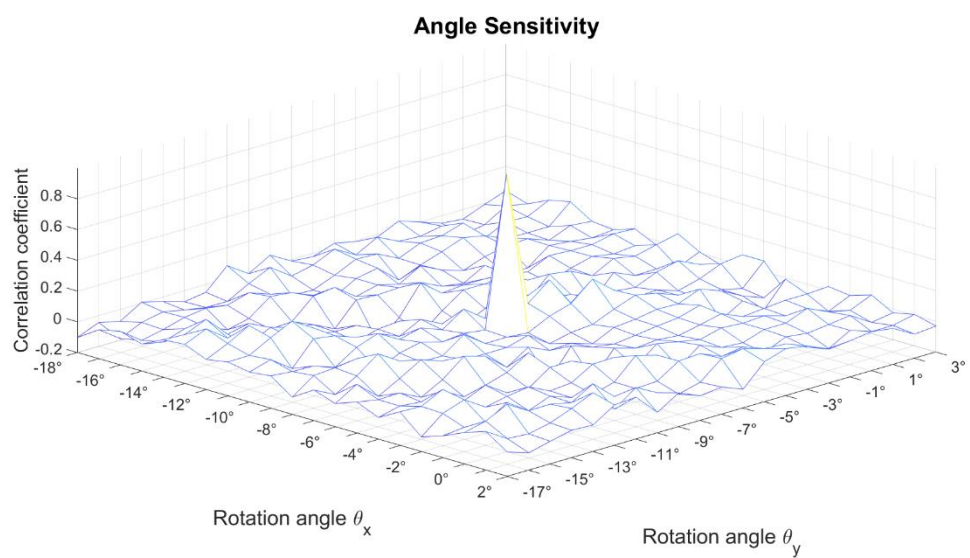


圖 5.6: (a) Image 8 相位平面的靈敏度 (b) Image 8 成像平面的靈敏度

第六章、結論與未來發展

本論文提出了一種新的角度多工的方法，通過在相位和成像平面上的三種不同類型的角度旋轉來實現，與先前的角度多工技術 [41][55]相比，這種提出的角度多工方法可以提供更大的靈活性和高相關係數。

首先介紹MGSA的演算法流程與架構，使用菲涅爾轉換取代原本的傅立葉轉換。在光學架構方面最簡單，此方法不需要使用透鏡元件，達到無透鏡的光學架構，本方法包含三種類型的角度旋轉，基於MGSA的光學運算式修改為TFRF架構，使相位平面和成像平面可以繞 x 軸或繞 y 軸以及繞 x 和 y 軸旋轉和討論了原始的 x 方向和 y 方向的旋轉，可以知道第二次旋轉不是基於第一次旋轉的軸上，兩軸的旋轉是獨立的，相較於之前的角度多工技術 [41]，因為修改了兩個 x 方向和 y 方向的原點在重建影像會以比較高的相關係數重建，當使用者對影像進行解密時除了需要獲得波長與位置參數資訊外，還必須得知相位和成像平面旋轉的軸向資訊，在電腦模擬上我們需要把三種類型的平面所推導的公式近似成傅立葉以便我們進行模擬，但我們目前尚未考慮到相位和成像平面旋轉所引起的尺度效應，這將會在未來光學實驗中需要討論的議題，根據電腦模擬結果，第一、三種架構的靈敏度都是偏高的靈敏度，只要偏移一度解密時就會是類似雜訊的影像影像，品質就會降低至無法接受的範圍，而第二種架構的靈敏度，根據模擬結果偏移一度CC值下降的非常緩慢，所以可以得知第二種架構是低靈敏度，因為是低靈敏度的關係所以除了解密圖像外其他位置的影像會有鬼影出現，但不會對安全性產生太大的影響，由電腦模擬結果驗證了角度多工技術的可行性，成像品質CC值都在0.8以上，提出的方法增加旋轉角度的參數，可以有效擴增加密碼系統的安全性。

所提出的方法可以與其他多重多工的技術結合，例如基於波長多工和位置的分法[20]，因此，只有當TFRF中所有必需的參數都正確時才能正確解密，才能實現更高的系統安全級別，另外，這裡提出的方法顯示出對三維影像投影應用的巨大潛力，因為旋轉的影像不會侷限在單一的二維平面內，未來希望能應用在立體顯示與投影上。

參考文獻

- [1] R. W. Gerchberg and W. O. Saxton, "A practical algorithm for the determination of the phase from image and diffraction plane pictures," *Optik*, vol. 35, 1972.
- [2] Z. Zalevsky, D. Mendlovic, and R. G. Dorsch, "Gerchberg-Saxton algorithm applied in the fractional Fourier or the Fresnel domain," *Optics Letters*, vol. 21, pp. 842-844, 1996.
- [3] T. Nomura and B. Javidi, "Optical encryption using a joint transform correlator architecture," *Optical Engineering*, vol. 39, pp. 2031-2035, 2000.
- [4] D. Abookasis, O. Arazi, J. Rosen, and B. Javidi, "Security optical systems based on a joint transform correlator with significant output images," *Optical Engineering*, vol. 40, pp. 1584-1589, 2001.
- [5] D. Abookasis and J. Rosen, "Digital correlation holograms implemented on a joint transform correlator," *Optics Communications*, vol. 225, pp. 31-37, 2003.
- [6] H. T. Chang and C. T. Chen, "Asymmetric-image verification for security optical systems based on joint transform correlator architecture," *Optics Communications*, vol. 239, pp. 43-54, 2004.
- [7] V. H. Diaz-Ramirez, V. Kober, and J. Alvarez-Borrego, "Pattern recognition with an adaptive joint transform correlator," *Applied Optics*, vol. 45, pp. 5929-5941, 2006.
- [8] D. Amaya, M. Tebaldi, R. Torroba, and N. Bolognini, "Multi-channelled encryption via a joint transform correlator architecture," *Applied Optics*, vol. 47, pp. 5903-5907, 2008.
- [9] D. Amaya, M. Tebaldi, R. Torroba, and N. Bolognini, "Wavelength multiplexing encryption using joint transform correlator architecture," *Applied Optics*, vol. 48, pp. 2099-2104, 2009.
- [10] E. Rueda, C. Rios, J. F. Barrera, R. Henao, and R. Torroba, "Experimental multiplexing approach via code key rotations under a joint transform correlator scheme," *Optics Communications*, vol. 284, pp. 2500-2504, 2011.
- [11] J. F. Barrera, M. Tebaldi, C. Ríos, E. Rueda, N. Bolognini, and R. Torroba, "Experimental multiplexing of encrypted movies using a JTC architecture," *Optics Express*, vol. 20, pp. 3388-3393, 2012.
- [12] P. Refregier and B. Javidi, "Optical image encryption based on input plane and Fourier plane random encoding," *Optics Letters*, vol. 20, pp. 767-769, 1995.
- [13] J. Rosen, "Learning in correlators based on projections onto constraint sets," *Optics Letters*, vol. 18, pp. 1183-1185, 1993.
- [14] J. W. Goodman, "Introduction to Fourier Optics," Second Edition, *McGraw-Hill*, Singapore, 1996.

- [15] B. Javidi and E. Ahouzi, "Optical security system with Fourier plane encoding, " *Applied Optics*, vol. 37, pp. 6247–6255, 1998.
- [16] G. Situ and J. Zhang, "A cascaded iterative Fourier transform algorithm for optical security applications, " *Optik*, vol. 114, pp. 473–477, 2003.
- [17] G. Unnikrishnan, J. Joseph, and K. Singh, "Optical encryption by double-random phase encoding in the fractional Fourier domain, " *Optics Letters*, vol. 25, pp. 887–889, 2000.
- [18] Y. Zhang, C. H. Zheng, and N. Tanno, "Optical encryption based on iterative fractional Fourier transform, " *Optics Communications*, vol. 202, pp. 277–285, 2002.
- [19] B. Hennelly and J. T. Sheridan, "Optical image encryption by random shifting in fractional Fourier domains, " *Optics Letters*, vol. 28, pp. 269–271, 2003.
- [20] N. Kumar Nishchal, J. Joseph, and K. Singh, "Securing information using fractional Fourier transform in digital holography, " *Optics Communications*, vol. 235, pp. 253–259, 2004.
- [21] Z. D.-M. Chen Lin-Fei, "Optical Image Addition and Encryption by Multi-Exposure Based on Fractional Fourier Transform Hologram, " *Chin. Phys. Optics Letters*, vol. 23, pp. 603–606, 2006-03-01 2006.
- [22] Z. Liu and S. Liu, "Double image encryption based on iterative fractional Fourier transform, " *Optics Communications*, vol. 275, pp. 324–329, 2007.
- [23] M. Joshi, C. Shakher, and K. Singh, "Fractional Fourier transform based image multiplexing and encryption technique for four-color images using input images as keys, " *Optics Communications*, vol. 283, pp. 2496–2505, 2010.
- [24] S. Liu, Q. Mi, and B. Zhu, "Optical image encryption with multistage and multichannel fractional Fourier-domain filtering, " *Optics Letters*, vol. 26, pp. 1242–1244, 2001.
- [25] G. Situ and J. Zhang, "Double random-phase encoding in the Fresnel domain, " *Optics Letters*, vol. 29, pp. 1584–1586, 2004.
- [26] H.-E. Hwang and P. Han, "Fast algorithm of phase masks for image encryption in the Fresnel domain, " *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 23, pp. 1870–1874, 2006.
- [27] R. P. Muffoletto, J. M. Tyler, and J. E. Tohline, "Shifted Fresnel diffraction for computational holography, " *Optics Express*, vol. 15, pp. 5631–5640, 2007.
- [28] H. E. Hwang and P. Han, "Signal reconstruction algorithm based on a single intensity in the Fresnel domain, " *Optics Express*, vol. 15, pp. 3766–3776, 2007.
- [29] H.-E. Hwang, H.T. Chang, and W.-N. Lai, "Fast double-phase retrieval in Fresnel domain using modified Gerchberg-Saxton algorithm for lensless optical security systems, " *Optics Express*, vol. 17, pp. 13700–13710, 2009.

- [30] H.-E. Hwang, H.T. Chang, & W.-N. Lai, "Multiple-image encryption and multiplexing using modified Gerchberg-Saxton algorithm and phase modulation in Fresnel transform domain," *Optics Letters*, vol. 34, pp. 3917-3919, 2009.
- [31] H.-E. Hwang, H.T. Chang, and W.-N. Lie, "Lensless optical data embedding system using concealogram and cascaded digital Fresnel hologram," *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 28, pp. 1453-1461, 2011.
- [32] H.T. Chang, H.-E. Hwang, and C.L. Lee, "Position multiplexing multiple-image encryption using cascaded phase-only masks in Fresnel transform domain," *Optics Communications*, vol. 284, pp. 4146-4151, 2011.
- [33] H.T. Chang, H.-E. Hwang, C.L. Lee, and Mn-Ta Lee, "Wavelength multiplexing multiple-image encryption using cascaded phase-only masks in Fresnel transform domain," *Applied Optics*, vol. 50, pp. 710-716, 2011.
- [34] H.-E. Hwang, "Optical color image encryption based on the wavelength multiplexing using cascaded phase-only masks in Fresnel transform domain," *Optics Communications*, vol. 285, pp. 567-573, 2012.
- [35] K. Yamamoto, Y. Ichihashi, T. Senoh, R. Oi, and T. Kurita, "Calculating the Fresnel diffraction of light from a shifted and tilted plane," *Optics Express*, vol. 20, pp. 12949-12958, 2012.
- [36] H. T. Chang and C. H. Lin, "Optical Image Multiplexing and Encryption Schemes based on Double-Phase Encoding in Fresnel Transform Domain," *The 6th International Conference on Three Dimensional Systems and Applications*, Seoul South Korea, May 28-30, 2014.
- [37] P. Refregier and B. Javidi, "Optical image encryption based on input plane and Fourier plane random encoding," *Optics Letters*. 20, 767-769 (1995).
- [38] H.T. Chang, W.C. Lu, and C.J. Kuo, "Multiple-phase retrieval for optical security systems using random phase encoding," *Applied Optics*. 41, 4825-4834 (2002).
- [39] G. Situ and J. Zhang, "Multiple-image encryption by wavelength multiplexing," *Optics Letters*. 30, 1306-1308 (2005).
- [40] H.T. Chang, C.-H. Lin, and C.-Y. Chen, "Image multiplexing and authentication based on double phase retrieval in Fresnel transform domain," *Optics Communications*. 389, 150-158 (2017)
- [41] H.T. Chang, Y. Wang, and C.Y. Chen, "Optical image encryption using angle multiplexing in the Fresnel transform domain," *The 24th Congress of the International Commission for Optics (ICO-24)*, P4-17, Tokyo, 21-25 Aug. 2017
- [42] G. Situ and J. Zhang, "Multiple-image encryption by wavelength multiplexing," *Optics Letters*, vol. 30, pp. 1306-1308, 2005.
- [43] G. Situ and J. Zhang, "Position multiplexing for multiple-image encryption," *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics*, vol. 8, pp. 391-397, 2006.

- [44] B. Javidi, G. Zhang, and J. Li, "Encrypted optical memory using double-random phase encoding," *Applied Optics*, vol. 36, pp. 1054-1058, 1997.
- [45] X. Tan, O. Matoba, T. Shimura, and K. Kuroda, "Improvement in Holographic Storage Capacity by Use of Double-Random Phase Encryption," *Applied Optics*, vol. 40, pp. 4721-4727, 2001.
- [46] C. Frère, "Reconstruction in inclined planes of curved computer generated holograms," *Applied Optics*, vol. 29, pp. 4761-4765, 1990.
- [47] D. Leseberg and C. Frère, "Computer-generated holograms of 3-D objects composed of tilted planar segments," *Applied Optics*, vol. 27, pp. 3020-3024, 1988.
- [48] G. H. Lin, H. T. Chang, W. N. Lai, and C. H. Chuang, "Public-key-based optical image cryptosystem with data embedding techniques," *Optical Engineering*, vol. 42, pp. 2331-2339, 2003.
- [49] H. T. Chang, "Image encryption using separate amplitude based virtual image and iteratively retrieved phase information," *Optical Engineering*, vol. 40, pp. 2165-2171, 2001.
- [50] H.T. Chang, H.-E. Hwang, and M.-D. Wu, "Analysis of system parameters in double-phase wavelength and position multiplexing for multiple image encryption," *Proceedings of 2012 National Symposium on Telecommunications*, Changhua Taiwan, Nov. 16-17, 2012.
- [51] M. Paturzo, P. Memmolo, L. Miccio, A. Finizio, P. Ferraro, A. Tulino, and B. Javidi, "Numerical multiplexing and demultiplexing of digital holographic information for remote reconstruction in amplitude and phase," *Optics Letters*, vol. 33, pp. 2629-2631, 2008.
- [52] M. Z. He, L. Z. Cai, Q. Liu, X. C. Wang, and X. F. Meng, "Multiple image encryption and watermarking by random phase matching," *Optics Communications*, vol. 247, pp. 29-37, 2005.
- [53] O. Matoba and B. Javidi, "Encrypted optical storage with wavelength-key and random phase codes," *Applied Optics*, vol. 38, pp. 6785-6790, 1999.
- [54] O. Matoba and B. Javidi, "Secure Holographic Memory by Double-Random Polarization Encryption," *Applied Optics*, vol. 43, pp. 2915-2919, 2004.
- [55] R. K. Wang, I. A. Watson, and C. Chatwin, "Random phase encoding for optical security," *Optical Engineering*, vol. 35, pp. 2464-2469, 1996.
- [56] U. Mahlab, J. Rosen, and J. Shamir, "Iterative generation of holograms on spatial light modulators," *Optics Letters*, vol. 15, pp. 556-558, 1990.
- [57] X. Yong-Liang, Z. Xin, Y. Sheng, and C. Yao-Yao, "Multiple-image parallel optical encryption," *Optics Communications*, vol. 283, pp. 2789-2793, 2010.

- [58] B. Javidi, A. Sergent, G. Zhang, and L. Guibert, "Fault tolerance properties of a double phase encoding encryption technique," *Optical Engineering*, vol. 36, pp. 992-998, 1997.
- [59] S. Kishk and B. Javidi, "Information Hiding Technique with Double Phase Encoding," *Applied Optics*, vol. 41, pp. 5462-5470, 2002.
- [60] X. Wang, D. Zhao, F. Jing, and X. Wei, "Information synthesis (complex amplitude addition and subtraction) and encryption with digital holography and virtual optics," *Optics Express*, vol. 14, pp. 1476-1486, 2006.
- [61] D. Abookasis, O. Montal, O. Abramson, and J. Rosen, "Watermarks encrypted in a concealogram and deciphered by a modified joint-transform correlator," *Applied Optics*, vol. 44, pp. 3019-3023, 2005.
- [62] J. F. Barrera, E. Rueda, C. Rios, M. Tebaldi, N. Bolognini, and R. Torroba, "Experimental opto-digital synthesis of encrypted sub-samples of an image to improve its decoded quality," *Optics Communications*, vol. 284, pp. 4350-4355, 2011.
- [63] F. Mosso, J. F. Barrera, M. Tebaldi, N. Bolognini, and R. Torroba, "All-optical encrypted movie," *Optics Express*, vol. 19, pp. 5706-5712, 2011.
- [64] J. S. Liu and M. R. Taghizadeh, "Iterative algorithm for the design of diffractive phase elements for laser beam shaping," *Optics Letters*, vol. 27, pp. 1463-1465, 2002.
- [65] B. Javidi, N. Towghi, N. Maghzi, and S. C. Verrall, "Error-Reduction Techniques and Error Analysis for Fully Phase- and Amplitude-Based Encryption," *Applied Optics*, vol. 39, pp. 4117-4130, 2000.
- [66] Desheng Fan, Xiangfeng Meng, Yurong Wang, Xiulun Yang, Xuemei Pan, Xiang Peng, Wenqi He, Guoyan Dong, and Hongyi Chen, "Multiple-image authentication with a cascaded multilevel architecture based on amplitude field random sampling and phase information multiplexing," *Applied Optics*, vol. 54, pp. 3204-3215, 2015.
- [67] Wei-Na Li, Anh-Hoang Phan, Mei-Lan Piao, and Nam Kim, "Multiple-image encryption based on triple interferences for flexibly decrypting high-quality images," *Applied Optics*, vol. 54, pp. 3273-3279, 2015.
- [68] projection onto Sui Liansheng, Zhou Bei, Ning Xiaojuan, and Tian Ailing, "Optical multiple-image encryption based on the chaotic structured phase masks under the illumination of a vortex beam in the gyrator domain," *Optics Express*, vol. 24, pp. 499-515, 2016.
- [69] H.T. Chang, W.C. Lu, and C.J. Kuo, "Multiple-phase retrieval for optical security systems using random phase encoding," *Applied Optics*, vol. 41, pp. 4825-4834, 2002.

- [70] C. H. Yeh, H. T. Chang, H. C. Chien, and C. J. Kuo, "Design of cascaded phase keys for a hierarchical security system," *Applied Optics*, vol. 41, pp. 6128–6134, 2002.
- [71] Q. L. Deng, B. S. Lin, H. T. Chang, G. S. Huang, and C. Y. Chen, "MGSA-Type Computer-Generated Holography for Vision Training With Head-Mounted Display," *Journal of Display Technology*, Vol. 10, pp. 433–437, 2014.
- [72] R. P. Muffoletto, J. M. Tyler, and J. E. Tohline, "Shifted Fresnel diffraction for computational holography," *Optics Express*, vol. 15, pp. 5631–5640, 2007.
- [73] S. Zhang and M. A. Karim, "Color image encryption using double random phase encoding," *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 21, pp. 318–323, 1999.
- [74] S. Liu, Q. Mi, and B. Zhu, "Optical image encryption with multistage and multichannel fractional Fourier-domain filtering," *Optics Letters*, vol. 26, pp. 1242–1244, 2001.
- [75] T. Nomura and B. Javidi, "Optical encryption using a joint transform correlator architecture," *Optical Engineering*, vol. 39, pp. 2031–2035, 2000.
- [76] T.-C. Poon, "Digital Holography and Three-Dimensional Display: Principles and Application," *Springer*, 2006.
- [77] U. Mahlab, J. Rosen, and J. Shamir, "Iterative generation of holograms on spatial light modulators," *Optics Letters*, vol. 15, pp. 556–558, 1990.
- [78] X. F. Meng, L. Z. Cai, Y. R. Wang, X. L. Yang, X. F. Xu, G. Y. Dong, X. X. Shen, H. Zhang, and X. C. Cheng, "Hierarchical image encryption based on cascaded iterative phase retrieval algorithm in the Fresnel domain," *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics*, vol. 9, pp. 1070–1075, 2007.
- [79] Xiang Peng, Peng Zhang, Hengzheng Wei, and Bin Yu, "Known-plaintext attack on optical encryption based on double random phase keys," *Optics Letters*, vol. 31, pp. 1044–1046, 2006.
- [80] X. Yong-Liang, Z. Xin, Y. Sheng, and C. Yao-Yao, "Multiple-image parallel optical encryption," *Optics Communications*, vol. 283, pp. 2789–2793, 2010.
- [81] Y. Li, K. Kreske, and J. Rosen, "Security and encryption optical systems based on a correlator with significant output images," *Applied Optics*, vol. 39, pp. 5295–5301, 2000.
- [82] Y. C. Chang, H. T. Chang, and C. J. Kuo, "Hybrid image cryptosystem based on dyadic phase displacement in the frequency domain," *Optics Communications*, vol. 236, pp. 245–257, 2004.
- [83] Y. Zhang, C. H. Zheng, and N. Tanno, "Optical encryption based on iterative fractional Fourier transform," *Optics Communications*, vol. 202, pp. 277–285, 2002.

- [84] Y. Takaki and N. Okada, "Hologram generation by horizontal scanning of a high-speed spatial light modulator, " *Applied Optics*, vol. 48, pp. 3255–3260, 2009.
- [85] Z. Zalevsky, D. Mendlovic, and R. G. Dorsch, "Gerchberg-Saxton algorithm applied in the fractional Fourier or the Fresnel domain, " *Optics Letters*, vol. 21, pp. 842-844, 1996.
- [86] Z. Liu and S. Liu, "Double image encryption based on iterative fractional Fourier transform, " *Optics Communications*, vol. 275, pp. 324-329, 2007

