



同濟大學  
TONGJI UNIVERSITY

博士学位论文

基于弹性波模式解耦的全波形反演方法

姓 名：王腾飞

学 号：1110701

所在院系：海洋与地球科学学院

学科门类：理学

学科专业：固体地球物理学

指导教师：程玖兵教授

二〇一七年五月





同濟大學  
TONGJI UNIVERSITY

A dissertation submitted to  
Tongji University in conformity with the requirements for  
the degree of Doctor of Philosophy

## Elastic full waveform inversion based on wave mode decomposition

Candidate : Tengfei Wang  
Student Number : 1110701  
School/Department : School of Ocean and Earth Science  
Discipline : Natural Science  
Major : Solid Geophysics  
Supervisor : Prof. Jiubing Cheng

May, 2017



# 学位论文版权使用授权书

本人完全了解同济大学关于收集、保存、使用学位论文的规定，同意如下各项内容：按照学校要求提交学位论文的印刷本和电子版本；学校有权保存学位论文的印刷本和电子版，并采用影印、缩印、扫描、数字化或其它手段保存论文；学校有权提供目录检索以及提供本学位论文全文或者部分的阅览服务；学校有权按有关规定向国家有关部门或者机构递交论文的复印件和电子版；在不以盈利为目的的前提下，学校可以适当复制论文的部分或全部内容用于学术活动。

学位论文作者签名：

年   月   日



# 同济大学学位论文原创性声明

本人郑重声明:所呈交的学位论文,是本人在导师指导下,进行研究工作所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外,本学位论文的研究成果不包含任何他人创作的、已公开发表或者没有公开发表的作品的内容。对本论文所涉及的研究工作做出贡献的其他个人和集体,均已在文中以明确方式标明。本学位论文原创性声明的法律责任由本人承担。

学位论文作者签名:

年   月   日



## 摘要

通过地震数据定量地估计地下介质弹性参数甚至岩石物理参数是探测地球内部结构和勘探油气资源的核心任务。随着计算能力的快速提升以及长偏移距、宽方位、宽频带地震数据采集技术的应用，旨在估计全波数谱速度模型的全波形反演(FWI)方法正成为地震勘探中强有力的工具。然而在实际应用中，FWI往往无法获得理论上预期的能力。近二十年来，为了解决 FWI 受到周波跳跃(cycle-skipping)、子波估计不准以及噪音等问题的困扰，许多学者发展了分频率、分偏移距、分时窗、分散射角等多尺度策略来降低非线性程度。此外，在弹性介质中，不同波模式相互转换及多分量数据的其他复杂性进一步增加了反问题的非线性程度，而且不同参数扰动的偏导数波场在特定散射角范围内的重叠还会导致参数耦合效应。为此，本文围绕模式解耦这一数据分离工具，从弹性波全波形反演(EFWI)、弹性波波动方程反射走时反演(EWERTI)以及弹性波最小二乘逆时偏移(ELSRTM)出发，尝试恢复高、中、低各种波数成分的弹性参数模型，进而形成比较实用的弹性波反演方法与流程。

EFWI 通过最小化观测到的多分量数据与正演模拟数据之间的残差来获得高分辨率的地下弹性参数模型。由于 Hessian 矩阵的显式计算与求逆代价十分巨大，实际应用中的大规模反演问题通常采用梯度类而非 Hessian 类的最优化方法来求解。然而，多参数反演中的参数耦合效应会引起不同参数间梯度的串扰，进而会严重影响反演的收敛速度与精度。第二章提出了一种基于模式解耦的 EFWI 方法，通过时间域的正传波场与解耦的反传波场互相关来预条件梯度。文中基于解耦的 Frechét 导数来分析 Hessian 矩阵和分辨率矩阵的性态，并对比常规共轭梯度法、Gauss-Newton 法和模式解耦法三者之间梯度的异同来解释模式解耦预条件处理压制参数耦合的物理机制。简单流体饱和模型与 Marmousi-II 模型数值实例证明了模式解耦的预条件共轭梯度法(MDPCG)可以降低 P-波和 S-波速度( $V_p$  和  $V_s$ )之间的参数耦合，在不涉及 Hessian 计算的情况下获得较高的收敛效率。

弹性反射波波形反演(ERWI)有助于更新中深层模型的中低波数成分，从而为 EFWI 提供较好的初始模型。然而，波形匹配的 ERWI 同样面临周波跳跃的问题。相比波形匹配的目标函数，反射走时目标函数关于背景速度模型的非线性程度更低。因此第三章采用弹性波波动方程反射走时反演(EWERTI)，通过 DIW (Dynamic image warping) 算法来提取走时残差并以此建立目标函数，可以一定程度上克服周波跳跃问题。地面多分量数据 P/S 分离可帮助获得不同模式的数据残差，空间域弹性波模式解耦则可以对梯度有效地预条件，从而实现  $V_p$  和  $V_s$  的分

步反演。这有效降低了反问题的非线性程度。反射波波路径核函数分析解释了解耦不同波模式的反射路径对压制串扰的重要作用。此外,为了降低反演的多解性,采用了成像剖面进行局部倾角导引正则化来确保反演获得具有地质意义的速度模型。也就是说,本文背景速度反演采用了两步策略,首先采用 PP 波数据反演  $V_p$ ,然后固定反演好的  $V_p$  通过 PS 波反演  $V_s$ 。然后,通过 Sigsbee2A 模型的数值实验结果验证 EWERTI 方法以及反演策略的有效性,并用 EFWI 检验 EWERTI 反演结果的准确性。

ELSRTM 旨在通过拟合反射波振幅信息来反演弹性参数模型的高波数成分,可视为线性的 EFWI 问题。常规 ELSRTM 通过多次迭代可以压制由于数据缺失、粗网格采样等产生的成像噪音,提高成像分辨率,同时部分地降低参数间的耦合效应。模式解耦则可以在计算梯度时通过分离出 S 波梯度,使得 ELSRTM 中 S 波速度扰动的估计接近于单参数反演,从而降低了反演中的参数耦合及非线性程度。于是,针对不同的参数耦合情况设计了相应的反演策略。在  $V_p$  较少受  $V_s$  耦合影响时,采用梯度解耦后的双参数同时反演;而在  $V_p$  与  $V_s$  强烈相互影响时,借助解耦后的 S 波反演  $V_s$  扰动,然后再反演  $V_p$  扰动,这样可以进一步压制  $V_p$  所受到的来自  $V_s$  的耦合影响。

本文针对弹性波反演问题,分别从 EFWI、EWERTI 以及 ELSRTM 三个方面入手来恢复不同波数成分的弹性参数模型。在常规多尺度策略的基础上,通过空间域模式解耦和地面 P/S 分离获取 P 或 S 数据子集来适应反演中的不同需求。根据解耦波场数据在 Frechét 导数、Hessian 和分辨率矩阵以及 Born 反射波路径计算中的贡献和影响,设计出适用于不同阶段的梯度预条件方法和多尺度策略,从而降低了弹性波反演的非线性和参数耦合程度,并形成了比较完整的弹性波反演方法系列,为从浅部到深部更准确地估计弹性参数提供了新的理论方法与技术支撑。

**关键词:**弹性波,模式解耦,全波形反演,Hessian 和分辨率矩阵,参数耦合,反射走时反演,反射核函数,最小平方逆时偏移

## ABSTRACT

The primary task of the detecting and imaging the Earth's interior is to estimate the elastic parameters or rock properties quantitatively through the recording data on the surface. With the development of high-performance computation and the maturation of wide-azimuth, long-offset and broadband data acquisition technology, full waveform inversion (FWI) becomes a powerful tool to recover the full wavenumber spectrum of the subsurface. However, FWI can not rebuild the estimated model as good as expected. In order to overcome the obstacles such as cycle-skipping problems caused by bad initial models or insufficiency of low frequency components in the data, inaccurately estimated source wavelet, low signal/noise ratio and so on, many researchers developed hierarchical strategies by selecting data subsets of different frequency, offset or scattering-angle during the inversion. In elastic media, complicated mode conversions and other multicomponent problems further increase the nonlinearity of inversion. Besides, in certain angles, the overlapped partial derivative wavefields of different parameter will lead to trade-offs. To rebuild the elastic model of different wavenumber, elastic full waveform inversion (EFWI), elastic wave equation reflection traveltime inversion (EWERTI) and elastic least-squares reverse time migration (EL-SRTM) are implemented with the help of wave mode decomposition. Utilizing these methods, we try to recover the elastic model from low and intermediate wavenumber to high wavenumber, or even full wavenumber.

Elastic full waveform inversion (EFWI) aims to reduce the misfit between recorded and modelled multi-component seismic data for deducing a detailed model of elastic parameters in the subsurface. Because the explicit computation and inversion of the Hessian matrix is extremely resource intensive, a gradient-based (rather than Hessian-based) minimization is generally applied for large-scale applications. However, the multi-parameter trade-off effects cause cross-talks in the computed gradients and thus severely affect the convergence and the quality of the inverted model. In the second chapter, we propose a mode decomposition (MD)-based EFWI approach, in which the preconditioned gradients are obtained through the cross-correlation of the forward and decomposed adjoint wavefields in the time domain. Based on the decomposed Frechét derivatives, we explain the mechanism of this approach through analyses of Hessian and resolution matrices and comparisons with the Gauss-Newton gradients. Numerical

examples of a simple fluid-saturated model and the Marmousi-II model demonstrate that the MD-based preconditioned conjugate-gradient approach can mitigate the trade-off between the P- and S-wave velocities and achieve fast convergence without any Hessian-involved calculations.

Elastic reflection waveform inversion (ERWI) utilize the reflections to update the low and intermediate wavenumber of the deep part model, which can provide good initial models for EFWI. However, ERWI suffers from the cycle-skipping problem due to the objective function of waveform fitting. Since traveltime information relates to the background model more linearly, the cycle-skipping of travelttime objective function will be less severe compared with the previous one. Thus, in the third chapter we implement the WERTI by using the  $L_2$  norm of the travelttime residual extracted by the Dynamic image warping (DIW) as objective function. The reflection kernel analysis shows that mode decomposition can suppress the artifacts in gradient calculation. Besides, the model regularization through local dip-dependent smooth filter ensures the inversion converging to a geological model. P/S separation of multicomponent seismograms provides P or S recordings while spatial wave mode decomposition provides P or S wavefields, which help to reduce the nonlinearity of inversion effectively. Based on the above, a two-step inversion strategy is adopted, in which PP reflections are first used to invert  $V_p$ , followed by  $V_s$  inversion with PS reflections based on the well recovered  $V_p$ . Numerical example of Sigsbee2A model validates the effectiveness of the algorithms and strategies for elastic WERTI (E-WERTI).

ELSRTM is a linearized EFWI aiming to fit the waveform of reflections generated by the inverted high-wavenumber perturbations. LSRTM can reduce migration artifacts arising from limited aperture, coarse sampling, and acquisition gaps. Conventional ELSRTM can slightly but not entirely mitigate the parameter trade-offs. Nonetheless, mode decomposition isolates the S-wave part gradient, which makes the inversion of S-wave velocity perturbation a mono-parameter inversion to help mitigate the trade-offs. In the fourth chapter, we design different inversion strategies to cope with the different situations. When  $V_p$  is little affected by  $V_s$ , we invert the two parameter simultaneously with mode decomposition; when  $V_p$  and  $V_s$  couple with each other severely, we recommend inverting  $V_s$  firstly followed by  $V_p$  inversion to further mitigate the trade-offs from  $V_s$  during the  $V_p$  inversion.

In this thesis, we focus on the mode-decomposition-based inversion methods to recover the elastic model containing different wavenumber. P/S separation of multi-component data and wave mode decomposition provide flexible P or S wave data in

different stage of inversion. The investigation of decomposed Frechét derivatives, Hessian and resolution matrices and Born reflection kernels show the different contribution of P or S wave to gradients. Accordingly, hierarchical strategies are designed to reduce the nonlinearity, trade-off effects and other problems during inversion and finally rebuild the elastic model from shallow to deep effectively.

**Key words:** Elasticity, mode decomposition, full waveform inversion, Hessian and resolution matrix, parameter trade-off, reflection kernel, wave equation reflection traveltime inversion, least-squares RTM,



# 目录

第1章 引言 .....	1
1.1 研究背景和意义 .....	1
1.2 研究现状 .....	4
1.2.1 弹性波全波形反演研究现状 .....	4
1.2.2 弹性反射波波形反演研究现状 .....	7
1.2.3 弹性波最小平方逆时偏移研究现状 .....	8
1.3 研究内容 .....	10
第2章 弹性波模式解耦全波形反演 .....	13
2.1 引言 .....	13
2.2 弹性波正问题 .....	14
2.2.1 P/S 波数据耦合与辐射模型 .....	16
2.2.2 弹性波模式解耦 .....	16
2.3 弹性波模式解耦全波形反演 .....	18
2.3.1 模式解耦梯度预条件 .....	20
2.3.2 伴随状态法计算梯度 .....	21
2.4 模式解耦降低参数耦合的理论机制 .....	22
2.4.1 Hessian 矩阵及其不同模式的分量 .....	22
2.4.2 模型分辨率矩阵及其分量 .....	24
2.4.3 与 Gauss-Newton 梯度的比较 .....	25
2.5 数值实验 .....	28
2.5.1 流体饱和模型 .....	28
2.5.2 Marmousi-II 模型 .....	28
2.6 讨论 .....	32
2.6.1 更进一步分解梯度的必要性 .....	32
2.6.2 密度模型的反演 .....	33

---

2.7 本章小结 .....	36
<b>第3章 弹性波波动方程反射走时反演 .....</b>	<b>39</b>
3.1 引言 .....	39
3.2 弹性波波动方程反射走时反演 .....	40
3.3 弹性波反射波路径核函数 .....	41
3.4 反射走时反演流程 .....	44
3.4.1 $V_p$ 反演 .....	45
3.4.2 $V_s$ 反演 .....	45
3.5 局部倾角导引正则化 .....	47
3.6 数值实验 .....	48
3.6.1 目标函数性态分析 .....	48
3.6.2 Sigsbee2A 模型 .....	50
3.7 本章小结 .....	55
<b>第4章 弹性波模式解耦最小平方逆时偏移 .....</b>	<b>57</b>
4.1 引言 .....	57
4.2 矩阵形式的弹性波方程 .....	58
4.3 弹性波最小平方逆时偏移 .....	59
4.4 模式解耦梯度预条件 .....	61
4.5 数值实验 .....	62
4.5.1 反射数据与 Born 模拟数据的差异 .....	62
4.5.2 参数耦合分析 .....	64
4.5.3 Marmousi-II 模型 .....	66
4.6 本章小结 .....	72
<b>第5章 结论与展望 .....</b>	<b>73</b>
5.1 结论 .....	73
5.2 成果与创新点 .....	74
5.3 论文不足之处与下一步计划 .....	74

参考文献 .....	77
附录 A Gauss-Newton 梯度的调查 .....	85
附录 B 共轭状态法推导弹性波 WERTI 的梯度 .....	87
致 谢 .....	89
个人简历、在学期间发表的学术论文与研究成果 .....	91



# 第1章 引言

## 1.1 研究背景和意义

地震勘探的主要目标是通过观测的地震数据来推断地下结构以及定量地估计介质参数。弹性参数,包括纵波(P波)速度、横波(S波)速度以及密度等参数,可以通过岩石物理这一桥梁转换为岩石物性参数,从而获得储层及其围岩的岩石性质。这对油气田的勘探、开发以及二氧化碳( $\text{CO}_2$ )填埋动态监测等具有重要意义。传统地震数据处理中,通常用声波方程来描述地震波在地下介质中的传播。而地下介质的真实情况往往要复杂得多,需要通过考虑弹性、各向异性甚至衰减的波动方程来更准确地描述波的传播。但是介质模型越复杂,所引入的计算量就越大,所对应的多参数反问题也越困难。目前来看,从声介质过渡到弹性介质能够以较小的代价来获取较准确的模型表征。尽管从声波近似过渡到弹性近似会成倍地增加计算量,但是这对多分量地震数据的成像或反演显然十分必要。考虑弹性效应的数据处理流程能区分并利用数据中的P波与S波模式,因此可以充分利用弹性全波场信息改善气云区成像、岩性估计、流体识别以及裂缝与应力场的刻画等。近年来,岩性油气藏(如致密砂岩、页岩)勘探技术极大地依赖于弹性参数估计,这使得考虑地震波的弹性乃至各向异性效应都具有重要意义。

地震勘探中的诸多过程都非常依赖于速度模型的精度,例如叠前深度偏移、振幅随偏移距变化(AVO)分析等都需要准确的背景速度模型。因此,如何准确地获取高分辨率的速度模型是地震勘探中最为迫切的任务。为了降低地震数据与模型参数之间的非线性程度,Claerbout (1985)<sup>[1]</sup>将速度模型分解为两个部分:1)描述速度(阻抗)界面的高频部分;2)控制波传播走时的中低频部分。这样的分解对应于地震勘探中最核心的两个任务,即偏移成像与速度建模。传统方法中,偏移成像和AVO反演通常用来获取模型的高频部分,而偏移速度分析(MVA)和走时层析被用来恢复模型的低频部分。但是地面地震反射数据的有限观测孔径以及子波的带限效应使得这类方法所能恢复的波数谱上存在明显的缺口。如图1.1,MVA与走时层析只能恢复波数非常低的成分,而偏移成像只能获得有限带宽的高波数信息。为此,人们也在研究各种方法来尽可能填补速度反演中的波数谱缺口。基于射线理论,有学者尝试采用高分辨率走时层析来拓宽低波数部分的反演能力,采用真振幅和最小平方偏移方法拓展对高波数成分的反演能力。但是以上基于射线理论的方法,在模型复杂区域很难处理多路径及焦散等问题。近年来,随着高性能计算能力的不断提升,基于波动理论的速度反演方法由于可以避免上

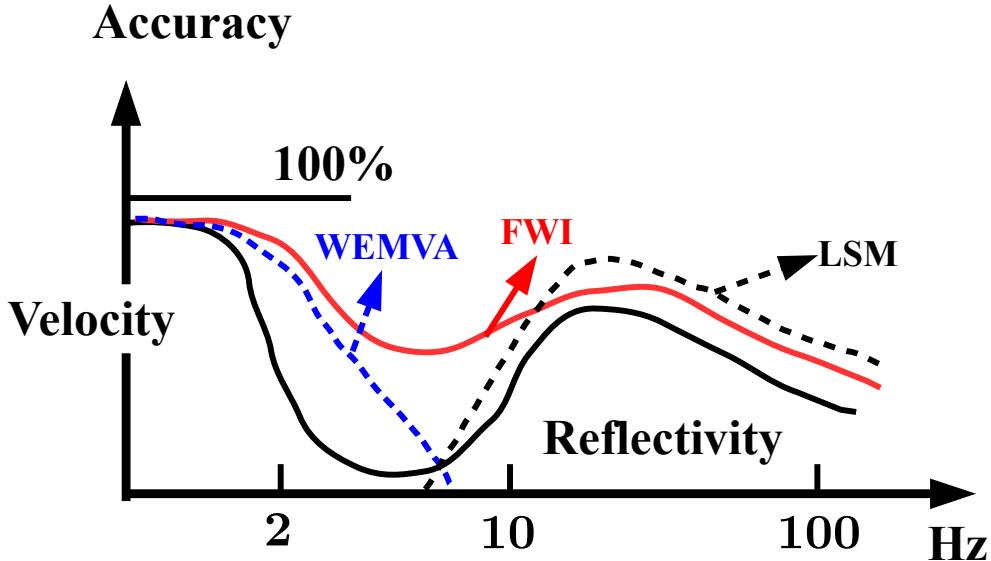


图 1.1 地震数据所能恢复的频带示意图。传统走时层析 + 偏移成像的方式所恢复的速度模型有明显的中低频缺口, WEMVA 和 LSM 方法有助于拓展低波数与高波数部分的带宽, 而 FWI 则尝试恢复更连续的波数谱(引自 Claerbout, 1985<sup>[1]</sup>)。

述问题并具有更高的分辨能力而受到越来越多的关注。目前基于波动理论的反演方法主要有以下三类:

1、全波形反演(FWI): 该方法通过匹配数据中携带的所有信息, 包括走时、振幅、模式转换甚至多次波等, 来获得对地下模型全波数谱的恢复。相比走时层析和 MVA, 它可以获取更高分辨率的地下模型。自从 Lailly (1983)<sup>[2]</sup> 和 Taratola (1984)<sup>[3]</sup> 建立了 FWI 理论框架之后, 随着长偏移距、宽方位数据采集的推广, FWI 被认为是填补速度模型中尺度波数缺口最有潜力的工具。但是 FWI 也受到众多因素的制约, 如初始模型不够好或者数据缺少低频分量时产生的周波跳跃问题(cycle-skipping)、地面观测数据导致的有限观测孔径问题、地下实际介质的粘弹性和各向异性问题以及高昂的计算代价等等。因此近二十年来, 人们一方面尝试采用宽频震源、鬼波压制等手段获得更加宽频的地震数据, 另一方面尝试从目标函数选取、多尺度反演策略等方面降低上述问题的困扰。即便如此, FWI 技术的推广应用仍存在许多挑战。

2、波动方程偏移速度分析(WEMVA): 该类方法旨在更新背景速度模型, 即模型的中低波数成分。目前主流的做法通常利用地震数据中的反射波信息, 通过构建反射波波路径并沿该路径来合理地更新模型中深部。根据目标函数的残差类型, WEMVA 可以分为数据域反演(如 Xu et al., 2012<sup>[4]</sup>; Wu and Alkhalifah, 2015<sup>[5]</sup>; Zhou et al, 2015<sup>[6]</sup>; Chi et al, 2015<sup>[7]</sup>) 和扩展成像域反演(如 Sava and Fomel, 2006<sup>[8]</sup>; Almomin and Biondi, 2012<sup>[9]</sup>)。前者采用观测数据与模拟数据间的走时、振幅等信息作为目标函数, 后者则通过最大化扩展域成像道集零偏移距的能量来定义收敛准则。它们与基于射线理论的成像域层析与数据域(非线性)层

析方法有许多类似之处,但避免了传统层析流程中繁琐的人工拾取工作。不过,它们还是会在一定程度上受到 cycle-skipping 等问题的困扰。

**3、最小平方逆时偏移 (LSRTM):** 该方法可以看作是线性化的 FWI。在初始模型足够好的时候通过匹配模拟数据与观测数据的振幅来获得地下反射系数模型。常规偏移成像采用伴随算子来近似正传算子的逆,从而近似地获得反射率的成像结果。但是伴随算子通常近似程度太大,所以有学者提出利用最小平方偏移 (LSM) 迭代获取越来越合理的正传算子的伪逆 ((Nemeth et al., 1999<sup>[10]</sup>; Kühl and Sacchi, 2003<sup>[11]</sup>; Dai et al., 2012<sup>[12]</sup>)。其本质上是通过最小化数据残差施加目标函数对模型二阶导数 (Hessian) 的信息来获得二阶的收敛效果,从而获得更好的参数扰动反演结果。

重建地下介质的弹性参数模型对地球内部探测与油气藏的勘探至关重要。相比声波 FWI, 弹性波全波形反演 (EFWI) 能够自动考虑多分量数据中的各种弹性效应并反演得到地下介质的弹性参数,如 P 波速度 ( $V_p$ ) 和 S 波速度 ( $V_s$ ) 和密度 ( $\rho$ )。然而在地震反演中考虑弹性效应会大大增加反问题的非线性程度,而且多参数反演也会受到参数耦合 (trade-off) 效应的影响,因此从声波近似过渡到弹性近似使得计算量和反演的困难程度成倍增加。近年来,由于计算机能力提升、多分量观测数据的增多,为了解决声波 FWI 无法回避的问题,考虑弹性甚至各向异性的全波形反演逐渐成为研究热点。

多分量地震数据中同时含有 P 波和 S 波,这两种不同波模式对地下介质有着不同的刻画能力。FWI 中广泛采用的多尺度策略(分频率、分偏移距、分时窗和分散射角)本质上是选取不同的数据子集来逐步加入到反演中。董良国等 (2015)<sup>[13]</sup> 指出在 FWI 过程中,不同的反演阶段采用不同的数据子集可以降低反演的非线性程度。而在弹性波反演中,更加需要根据不同参数采用不同的数据子集或者不同的反演阶段采用不同的数据子集,来降低多参数反演的非线性程度,同时也压制参数间的 trade-off 效应。近年来不断发展的弹性波波模式分离技术能够提供准确的 P 或 S 波数据子集 (Zhang and McMechan, 2010<sup>[14]</sup>; Cheng and Fomel, 2014<sup>[15]</sup>; Li et al., 2016<sup>[16]</sup>; Cheng et al., 2016<sup>[17]</sup>), 并已在弹性波逆时偏移 (ERTM) 中发挥重要作用 (Wang et al., 2016<sup>[18]</sup>)。这些研究为弹性波反演中采取更多的多尺度策略带来新的机会 (Wang et al., 2015<sup>[19]</sup>; Ren and Liu, 2016<sup>[20]</sup>)。在弹性框架下, EFWI 目的在于构建高分辨率的弹性参数模型, EWERTI 则利用弹性波走时信息构建背景速度模型,而 ELSRTM 是在可靠的背景模型基础上得到高分辨率的地下反射界面图像。本文借助模式解耦形成的波场分量或数据子集,实现新的更灵活的多尺度 EFWI、EWERTI 和 ELSRTM 方法,以期更准确地估计弹性参数模型的高、中、低波数成分,为地球内部成像与油气资源勘探提供更好的支撑。

## 1.2 研究现状

### 1.2.1 弹性波全波形反演研究现状

Claerbout (1971<sup>[21]</sup>) 采用爆炸反射面的概念解释了地震偏移如何对地下构造进行刻画。Lailly (1983)<sup>[2]</sup> 和 Tarantola (1984)<sup>[3]</sup> 最早用观测数据与模拟数据间波形残差的  $L_2$  范数作为目标函数, 将偏移成像转化为最优化问题, 即 FWI 问题。该反问题的梯度(方向)可以采用伴随状态法通过入射波场与伴随波场之间的互相关来快速获得。FWI 试图将宏观速度模型的建立与偏移成像两个任务统一在一个流程中, 以期在地下每个网格点获得具有连续波数谱的高分辨率图像。但是, 早期只利用反射数据的 FWI 很少有令人满意的结果。由于短偏移距观测的地震数据对中尺度波长的速度信息非常不敏感 (Virieux and Operto, 2009<sup>[22]</sup>), 只有在初始模型非常准确的时候 FWI 才会收敛。从上世纪 80 年代末期开始, 随着 FWI 技术在长偏移距以及井间透射地震资料的应用中取得成功, 人们才认识到 FWI 的潜力 (Mora, 1987<sup>[23]</sup>; Mora, 1988<sup>[24]</sup>; Pratt and Worthington, 1990<sup>[25]</sup>, Pratt et al., 1996<sup>[26]</sup>)。近年来, 随着长偏移距、宽方位和宽频带地震数据逐渐增多, 基于声波近似的 FWI 在越来越多的实际数据中获得成功应用, 例如 Ravaut et al., 2004<sup>[27]</sup>, Operto et al., 2006<sup>[28]</sup>, Shin et al., 2009<sup>[29]</sup>。然而即使对于含有长偏移距的数据而言, 由于波传播路径的增加, 非线性程度变得更加剧烈, 因而从 FWI 中获得稳健的反演结果仍然受到很大挑战 (Sirgue, 2006<sup>[30]</sup>, Virieux and Operto, 2009<sup>[22]</sup>)。

从前文背景分析可知, 最早始于 Tarantola (1986)<sup>[31]</sup> 和 Mora (1987)<sup>[23]</sup> 的弹性波全波形反演能够获得更多地下介质的弹性参数 ( $V_p$ ,  $V_s$  和  $\rho$ )。尽管需要很大计算代价, EFWI 已在很多实际数据中获得了应用 (Crase et al., 1992<sup>[32]</sup>; Djikpesse and Tarantola, 1999<sup>[33]</sup>; Sears et al., 2008<sup>[34]</sup>; Sear et al., 2010<sup>[35]</sup>; Prieux et al., 2013a<sup>[36]</sup>, 2013b<sup>[37]</sup>; Vigh et al., 2014<sup>[38]</sup>)。EFWI 的实现方式可以在时间域 (Shipp et al., 2002<sup>[39]</sup>), 也可以在频率域 (Brossier et al., 2009<sup>[40]</sup>), 也可以采用混合的方式在时间域进行正演模拟而在频率域求解反问题 (Nihei and Li, 2007<sup>[41]</sup>; Sirgue et al., 2008<sup>[42]</sup>)。然而, EFWI 也会受到声波 FWI 中类似的非线性问题困扰, 在海洋环境中(尤其是软海底情况下)由于 PS 转换模式非常弱, 基于拖缆或者海底多分量数据的 EFWI 的非线性程度会变得更严重<sup>[34]</sup>。同时, 不同参数在特定散射角范围内会产生相似的数据扰动, 从而导致不同物理参数之间 trade-off 效应 (Forgues and Lambaré, 1997<sup>[43]</sup>)。

从声介质到弹性介质, 波形反演方法将受到更多挑战。解决 EFWI 中的这些难题, 不仅要应对原有声波 FWI 框架下的困难, 同时也要解决多参数反演带来新问题。下面分别讨论 EFWI 面临的两个主要挑战:

1、反演的非线性, 也即周波跳跃(Cycle-skipping)问题。FWI 是基于 Born 近

似理论导出的。Miller et al. (1987)<sup>[44]</sup> 基于 ray+Born 理论, 将模型中散射点局部的波数矢量表达为:

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_s + \mathbf{k}_r = \frac{\omega}{v} \cos \frac{\theta}{2} \mathbf{n}, \quad (1.1)$$

其中  $\mathbf{k}$  为照明矢量,  $\mathbf{k}_s$  和  $\mathbf{k}_r$  分别是震源端和检波点端的波数矢量,  $v$  为局部速度,  $\theta$  为散射角,  $\omega$  为角频率,  $\mathbf{n}$  为  $\mathbf{k}$  方向的单位向量。由上式可以看出, 低频和大张角 ( $\theta$ ) 数据对于中低波数成分的恢复至关重要。因此, FWI 的成功与否非

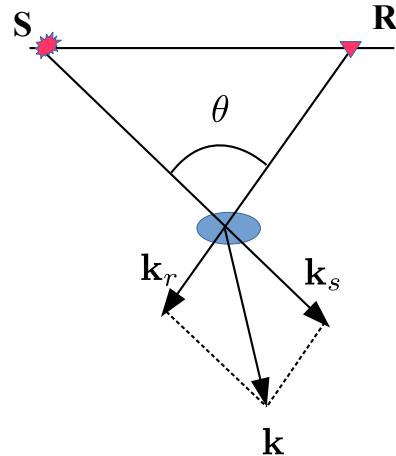


图 1.2 地下散射点处入射波矢量, 散射波矢量以及散射角之间关系示意图。

常依赖于长偏移距记录和数据中有效的低频分量。如图1.3 所示, 如果初始模型不够好导致波形匹配时相差  $\frac{1}{2}$  周期以上, 那么就会使得反演陷入局部极值, 这也就是所谓的“周波跳跃”问题。在声波 FWI 中, 人们发展了许多策略来应对

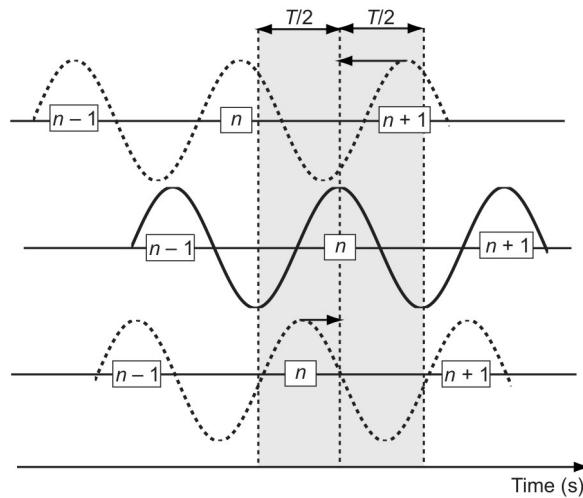


图 1.3 FWI 波形匹配中的 cycle-skipping 现象 (Virieux and Operto, 2009<sup>[22]</sup>)。当波形相差  $T/2$  周期以上的时候, 数据将会在另一个周期中进行匹配, 此时获得的数据残差会导致反演陷入局部极值。

非线性问题,如从低频到高频的多尺度策略 (Sirgue and Pratt, 2004<sup>[45]</sup>; 刘国峰等, 2012<sup>[46]</sup>; 刘璐等, 2013<sup>[47]</sup>; 曹书红和陈景波, 2014<sup>[48]</sup>; 张文生等, 2015<sup>[49]</sup>), 根据时窗与偏移距分选数据子集逐步加入反演中 (Shipp and Singh, 2002<sup>[39]</sup>; Wang and Rao, 2009<sup>[50]</sup>; Sears et al., 2008<sup>[34]</sup>), 修正目标函数使其凸性更好 (Luo and Schuster, 1991<sup>[51]</sup>; Tromp et al., 2005<sup>[52]</sup>; Chi et al., 2014<sup>[53]</sup>; Wu et al., 2014<sup>[54]</sup>; Shin and Cha, 2008<sup>[55]</sup>; Luo et al., 2016<sup>[56]</sup>) 等等。上述策略可以用在 EFWI 中,但是由于更多参数的引入以及更复杂的弹性波波场,这些策略需要根据情况择优或者组合使用。

EFWI 中不但会出现同样的强烈非线性,而且将面临更复杂的情况。在构建初始模型的时候要同时获得足够好的  $V_p$  与  $V_s$  模型,才能对各种模式的转换波形进行匹配。与建立  $V_p$  模型不同,目前尚未有成熟流程来获得合理的 S 波速度模型。许多 EFWI 方法在研究中都假设  $V_s$  与  $V_p$  之间有着固定的泊松比,因此可以通过简单的比例系数来构建初始模型。但是当地下介质泊松比变化较大时很难获得较好的初始  $V_s$  模型。此外,由于相同偏移距下,转换 PS 波的有效散射角范围相对 PP 波更小,并且 S 波速度相对较低等因素会导致 EFWI 对  $V_s$  高波数成分的过度更新,这就又增加了 EFWI 的困难。为了降低 EFWI 的非线性程度,许多学者通过包络目标函数 (Wu et al., 2014<sup>[54]</sup>; 黄超等, 2015<sup>[57]</sup>; 王官超和杜启振, 2016<sup>[58]</sup>), 或者通过研究目标函数性态来指导多尺度策略的设计 (Brossier et al., 2010<sup>[59]</sup>; 王毓玮等, 2016<sup>[60]</sup>)。Tarantola (1986)<sup>[31]</sup> 指出 EFWI 应分主次顺序依次构建具有不同影响的参数。也有学者多级地选取不同数据分量来进行多尺度反演 (Sears et al., 2008<sup>[34]</sup>; Oporto et al., 2013<sup>[61]</sup>)。然而实践中,诸多因素会制约这些策略的应用,例如低频缺失、初始模型不够好、子波估计困难、噪音干扰等。因此降低 EFWI 的非线性程度使反演更加稳健可靠依然需要诸多努力。

2、多参数 trade-off 效应。如果物理模型中含有多个不同的物理参数,不同的参数扰动可能会引起相似的数据扰动。虽然产生的数据扰动可能不完全一致,但是不同参数扰动产生的散射波场会在特定角度范围内重叠,这就导致常规的地而观测数据通常无法区分数据扰动来自哪一种参数扰动,从而引起参数间的 trade-off 效应。这样的话,即使在初始模型足够好的时候也很难从数据扰动中恰当地恢复相应的参数扰动。

为了解决 EFWI 中的 trade-off 问题,许多学者通过调查散射模式或者 Hessian 算子来选取不同的参数化方式 (Wu and Aki, 1985<sup>[62]</sup>; Tarantola, 1986<sup>[31]</sup>; Plessix and Cao, 2011<sup>[63]</sup>; Gholami et al, 2013<sup>[64]</sup>)。当然,最有效的就是考虑多参数 Hessian 算子,用 Hessian 的信息来压制 trade-off 的影响 (Fichtner et al., 2001<sup>[65]</sup>; Oporto et al., 2013<sup>[61]</sup>; Pan et al., 2015<sup>[66]</sup>; Yang et al., 2016<sup>[67]</sup>)。然而 Hessian 有关的计算所需代价太过昂贵,即使在声波 FWI 中也很难在大规模问题中获得应用。在 EFWI 中想要压制参数 trade-off,就需要在反演中利用 Hessian 非对角区块的信

息。近期,在 Hessian 非对角区块的近似与利用方面,许多学者做出了一些有益的尝试,例如 Wang et al. (2016)<sup>[68]</sup> 采用块对角 Hessian 压制参数耦合。Pan et al (2017)<sup>[69]</sup> 借助 l-BFGS 优化策略进行多参数反演。Wang et al. (2015)<sup>[19]</sup> 和 Ren and Liu (2016)<sup>[20]</sup> 初步讨论了基于弹性波模式解耦的梯度预条件方法及其在压制参数 trade-off 效应中的潜力。Wang and Cheng (2017)<sup>[70]</sup> 进一步对比了模式解耦与 Gauss-Newton 预条件梯度的差异,指出模式解耦可以部分地利用 Hessian 非对角块来压制 P 波对  $V_s$  反演的干扰。由于常规地震观测很难敏感地捕捉密度信息,至今密度的反演依然非常困难 (Jeong et al., 2012<sup>[71]</sup>; Prieux et al., 2013<sup>[36]</sup>; Yang et al., 2016<sup>[67]</sup>)。

## 1.2.2 弹性反射波波形反演研究现状

常规 FWI 在长偏移距、宽方位数据中有着不错的效果,但主要是利用了透射波以及临界反射波所携带的信息来更新速度模型的中低波数分量。由于 FWI 的成功非常依赖这些波场信息,使得地震数据往往缺乏足够的大偏移距信息来更新中深部结构的中低波数成分。换句话说,在中深部区域,FWI 往往过多地更新来自反射数据的高波数成分(相当于最小平方偏移)。从式(1.1)可以看出,在相同频率和速度情况下,深部的反演需要更大的角度孔径才能确保足够的低波数照明,这也意味着要更大的偏移距。然而,即使采用现有宽方位、长偏移距观测也很难保证这样的覆盖,而且更长的偏移距也意味着更强的非线性<sup>[22,30]</sup>。

利用反射波信息可以更好地照明深部结构。通常,可以在成像域或者数据域实现基于深部反射波的速度更新。在成像域,该类方法通常被称为偏移速度分析(MVA),主要利用拉平共成像点道集作为收敛准则。在实际生产中,通过反射走时层析来反演反中深部的背景速度已经是非常成熟的技术 (Woodward, 1992<sup>[72]</sup>; Meng et al., 2004<sup>[73]</sup>; Woodward et al., 2008<sup>[74]</sup>; Jones, 2010<sup>[75]</sup>)。它通过将共成像点道集上的剩余时差(或深度差)反投影到射线或 Born 波路径上来更新速度。不过基于射线理论的走时层析经常需要进行一些人工拾取,比如在每轮迭代中进行成像剖面与成像道集剩余曲率的拾取。在构造复杂区域,高频渐近假设失效,使得射线走时层析的有效性明显下降。基于波动理论的 WEMVA 可以很好地应对上述问题,但是通常需要借助昂贵的扩展域成像,通过最小化非零偏移距的能量来实现模型更新,如 Sava and Fomel (2006)<sup>[76]</sup>; Yang and Sava(2011)<sup>[77]</sup>; Almomin and Biondi(2012)<sup>[9]</sup>; Sun and Symes(2012)<sup>[78]</sup>。尽管 WEMVA 在二维应用中取得了不错的效果,但三维应用中过高的计算成本是一个明显的制约因素。针对反射走时,Luo et al. (2016)<sup>[56]</sup> 用时间轴方向的扩展成像与 Rytov 近似结合,提出了全走时反演(FTI)方法并在理论合成数据上获得了不错的反演效果。该方法实质上也是一种成像域的速度反演方法。

在数据域同样可以利用反射波对模型深部进行更新。有些学者 (Chavent et al., 1994<sup>[79]</sup>; Plessix et al., 1998<sup>[80]</sup>; Clment et al., 2001<sup>[81]</sup>) 将速度模型分成高波数(反射率)与低波数(背景模型)成分, 提出了偏移成像走时层析(MBTT)方法。从 Alder (2008)<sup>[82]</sup> 提出的基于射线理论的非线性层析方法出发, Wang et al. (2014)<sup>[83]</sup> 和 Yang et al. (2016)<sup>[84]</sup> 采用一次偏移后拾取 + 图偏移的方式建立叠前数据的不变量(如走时, 出射慢度等), 通过对叠前数据不变量的多次拟合来更新层析速度模型, 既减少了人工拾取, 又达到加快收敛的效果。

基于波动理论的数据域速度反演近年来受到了广泛的关注。受 MBTT 方法的启发, Xu et al. (2012)<sup>[4]</sup> 提出了反射波波形反演(RWI)方法。它先采用 RTM 或 LSRTM 获取反射率模型, 然后用 Born 模拟(反偏移)来预测反射率所产生的反射波。反射波与背景波场的互相关可以得到反射波波路径(敏感核函数)信息。RWI 的关键就是将数据残差反投影到反射波波路径上, 从而更新模型分量的中低波数成分。RWI 方法出现后, 许多学者做了大量研究, 采用了波形拟合的  $L_2$  范数, 如 Xu et al. (2012)<sup>[4]</sup>, Wang et al. (2013)<sup>[85]</sup>, Wu and Alkhalifah (2015)<sup>[5]</sup>, Zhou et al. (2015)<sup>[6]</sup>。近期, Irabor and Warner (2016)<sup>[86]</sup> 和 Wang et al. (2016)<sup>[87]</sup> 通过上、下行波分离来帮助常规 FWI 获取背景分量的更新, 其实质也利用了反射波波路径的信息。然而, 尽管 RWI 的目的在于更新背景速度, 当背景速度与真实值相差较远的时候, 反偏移所预测的与观测数据中的反射波波形也可能相差半个周期以上, 从而导致波形拟合的  $L_2$  范数产生周波跳跃。Wang et al (2013)<sup>[85]</sup> 指出采用低频数据可以一定程度上缓解跳周现象。为了避免振幅相关的目标函数带来的非线性, 更趋于线性关系的走时类目标函数获得了关注。Ma and Hale (2013)<sup>[88]</sup> 采用动态图像识别(DIW)来获得模拟与观测反射数据之间的时移量, 从而提出了波动方程反射走时反演(WERTI)方法。类似的, Chi et al. (2015)<sup>[7]</sup> 和 Wang et al. (2015)<sup>[89]</sup> 采用互相关类的方法来获取模拟与观测反射数据同相轴的时移(或空移)量。以上有关 RWI 的研究都是基于声波方程的。

在弹性反射波反演研究中, 目前只有 Guo and Alkhalifah (2016)<sup>[90]</sup> 将 Wu and Alkhalifah (2015)<sup>[5]</sup> 的声波 RWI 思路进行了扩展。对于弹性反射波形反演(ERWI), 除了声波 RWI 中面临的问题, 还需要处理更多的复杂情况, 如多参数 trade-off、模式转换、更复杂的反射记录以及  $V_s$  反演的困难等。为了应对这些问题, 本文第四章将论述怎样借助弹性波模式解耦与多分量记录 P/S 分离来建立比较有效的 ERWI 方法与流程。

### 1.2.3 弹性波最小平方逆时偏移研究现状

目前有许多成像方法, 如 Kirchhoff 偏移、高斯束偏移和逆时偏移(RTM)等可以用来恢复地下界面结构形态。但是随着需求的变化与技术的进步, 构造信

息已经不能满足勘探的需要。人们想要获得更高分辨率的弹性参数以便直接或间接用于岩性/流体区分等更高级的任务。常规 FWI 算法可以用于参数模型的高分辨率成像(反演),但是会受到许多因素困扰,如初始模型不好或者数据低频缺失导致的 cycle-skipping 问题、地震子波未知、正演算子不准确等等。而且,常规 FWI 一般需要从低频到高频逐步恢复连续的波数谱。如果单纯想获得模型高波数成分,用 FWI 方法就太过复杂或困难。除 FWI 之外,通常也会通过最小平方偏移(LSM)来实现高波数成分的重构。早期,Beylkin et al. (1985)<sup>[91]</sup> 和 Bleistein (1987)<sup>[92]</sup> 等学者通过广义 Radon 变换来导出 Kirchhoff 成像中的振幅校正因子,实现所谓的真振幅成像。该方法通过射线理论计算 Green 函数,正问题采用 Born 近似,可快速地迭代求解反问题。针对 Kirchhoff 偏移,Schuster(1993)<sup>[93]</sup> 提出了应用于井间数据的 LSM 算法,而后 Nemeth et al. (1999)<sup>[10]</sup> 将该方法应用到了地面数据中。

以波动方程为引擎的最小平方逆时偏移(LSRTM)近年来一直是研究的热点,尽管其计算代价昂贵,但可以处理复杂非均匀介质中所产生的多路径问题。LSRTM 通常可认为是线性的全波形反演。线性近似下若能获得 Hessian 矩阵的逆算子就可以通过施加逆算子快速获得反问题的解。但是 Hessian 的计算与求逆在实际问题中非常困难,故在空间域采用 Hessian 的近似来校正成像结果是一种快速实现 LSRTM 的方法(Chavent and Plessix, 1999<sup>[94]</sup>; Shin et al., 2001<sup>[95]</sup>; Symes, 2008<sup>[96]</sup>)。然而,这种方法在复杂介质中并不总是有效。另外一种方式是通过在数据域求解目标函数的最小化问题。假设在已经获得足够好的低波数模型成分之后恢复模型的高频扰动,即获得“像”或反射率,使得在最小平方意义下,用该反射率所预测的反射数据能与观测数据达到最佳匹配。这一过程与在单次迭代中通过计算二阶伴随状态方程实现基于 Gauss-Newton 法(Bae et al., 2012<sup>[97]</sup>; Metiver et al., 2014<sup>[98]</sup>)的 FWI 是一致的。因此,最小平方逆时偏移与全波形反演的理论框架基本是一致的,只是输入数据(反射波/全波场)和输出结果(高频扰动/模型参数)不一样。因此目前 LSRTM 研究中主要通过最小化 Born 模拟的反射数据与观测数据之间的残差来改善成像质量,获得更高分辨率的反射率、波阻抗界面或弹性参数扰动的反演结果(Dai and Schuster, 2013<sup>[99]</sup>; Dong et al., 2012<sup>[100]</sup>; Luo and Hale, 2014<sup>[101]</sup>)。

许多学者针对 LSRTM 中的其他问题也做了大量的研究工作。Wong et al. (2015)<sup>[102]</sup> 将自由表面多次波加入到成像条件中,进而增加地下照明。Zhang et al. (2015)<sup>[103]</sup> 选取零延迟互相关目标函数来减弱子波估计不准以及振幅描述不准带来的非线性。刘玉金和李振春 (2015)<sup>[104]</sup> 基于成像域的速度反演方法(Symes, 2008<sup>[105]</sup>)在扩展域进行 LSRTM,在速度不准确的情况下仍然可以得到合理的成像结果。近期,为了更准确地描述波传播过程,同时获得更多的参数

成像,原本基于常密度声波方程的 LSRTM 被推广到了变密度声波介质 (Yang et al, 2016)<sup>[67]</sup>、衰减介质 (Dutta and Schuster, 2014<sup>[106]</sup>; 李振春等, 2014<sup>[107]</sup>; Dai et al., 2015<sup>[108]</sup>) 以及弹性介质中 (Duan et al., 2016<sup>[109]</sup>; Feng and Schuster, 2016<sup>[110]</sup>; Xu et al., 2016<sup>[111]</sup>; Ren et al., 2016<sup>[112]</sup>)。

相比声波成像,弹性波成像可以提供更多的地下信息,例如转换横波成像可改善气云区成像,有助于区分岩性和识别流体。但是,许多问题会很大程度上影响弹性波成像质量。首先,传统声波成像方法中观测孔径限制、粗网格采样、低频噪音以及数据缺失引起的偏移假象同样会出现在弹性波成像中;其次,记录中的 P 与 S 波数据很难完全区分开,泄漏的波模式会引起假象,即“cross-talk”;再次,一般的成像条件会导致转换波图像的极性反转问题,因此需要选取合适的校正方法 (Du et al, 2014<sup>[113]</sup>; Gong et al, 2016<sup>[114]</sup>; Rocha et al, 2016<sup>[115]</sup>)。近期 Wang et al(2016)<sup>[116]</sup> 面向各向同性与横向各向同性(TI)介质提出了更具有物理含义的无极性反转的矢量成像条件。最近,从 EFWI 理论框架出发,有学者(如 Duan et al., 2016<sup>[109]</sup>; Feng et al., 2016<sup>[110]</sup> 等)推导出了与 EFWI 梯度非常类似的成像条件,可以回避极性反转问题。基于第二章对 EFWI 算法的分析,模式解耦带来的好处同样能在 ELSRTM 中发挥作用,尤其是压制传统弹性波成像中模式串扰引起的假象。

### 1.3 研究内容

基于多分量地震数据重构弹性参数模型是本文的重点。除了层析成像与 WEMVA 方法之外,目前主流的模型参数估计方法包括 FWI、RWI 和 LSRTM。我们将以上三种方法扩展到弹性介质,采用 EFWI 构建高分辨率弹性参数模型,采用 EWERTI 通过弹性波走时信息构建中深部的背景弹性波速度,而在可靠的初始弹性速度模型基础上采用 ELSRTM 构建模型的高波数成分(反射界面的高分辨率图像)。整个论文中,弹性波模式解耦将是其中最核心的方法,为不同分辨率的弹性参数反演提供解耦的 P 与 S 波数据子集,从而降低反问题的非线性程度、压制参数间 trade-off 效应。本文下面几章将分为以下四个部分来详细展开:

第二章将通过模式解耦对 EFWI 梯度进行预条件,降低反演过程中的参数 trade-off 程度,并达到加速收敛的效果。首先,通过弹性波 Born 近似,分析  $V_p$  与  $V_s$  扰动的辐射模式,并给出解耦的 Frechét 导数 (Jacobian 矩阵)。然后,调查解耦后的 P 波与 S 波数据对梯度的贡献并提出在梯度计算中的交叉项近似。在此基础上,通过伴随状态法快速计算得到预条件的梯度,即正传波场与解耦后反传波场的零延迟互相关。然后,为了获得更多物理机制上的认识,将计算并分析基于解耦的 Hessian 和分辨率矩阵,同时也对比模式解耦预条件的梯度与 Gauss-Newton

(GN) 梯度的异同。接着, 利用流体饱和砂岩模型以及 Marmousi-II 模型的数值算例验证基于模式解耦的 EFWI 的有效性。最后, 将讨论引入密度给反演带来的复杂性以及模式解耦 EFWI 的表现。

第三章将通过弹性波波动方程反射走时反演 (EWERTI) 来重建速度模型中深部的中低波数分量。文中采用反射波走时拟合差作为目标函数进行反演, 其中的走时残差将通过 DIW 方法来获取。沿用 RWI 的思路, 通过 Born 模拟来构建反射波关于背景速度的核函数, 即反射波波路径。参照 Ma and Hale (2013)<sup>[88]</sup> 的方式, 推导出弹性波反射走时反演的伴随震源与梯度。通过目标函数的性态分析调查 EWERTI 的稳健性与收敛性。然后基于反射核函数观察不同反射波波模式对反射波路径的影响。为了克服反演中的非线性以及 P 波与 S 波速度之间的 trade-off, 将分两个阶段来分别恢复  $V_p$  与  $V_s$ : 首先, 采用 PP 波反射走时来重建  $V_p$  背景模型; 然后, 在获得足够好的背景  $V_p$  后, 再采用分离出的 PS 波反射走时重构  $V_s$  背景模型。在此过程中, 本文提出用地面多分量数据 P/S 分离来帮助获取 PP 或 PS 的走时残差, 用空间波场模式解耦来预条件目标函数关于  $V_p$  或  $V_s$  的梯度。最后将在 Sigsbee2A 模型上进行算法验证。

第四章将采用 ELSRTM 来获取弹性参数模型的高波数分量。首先, 从反演框架出发, 建立 Born 模拟与观测反射数据之间的最小二乘拟合目标函数, 利用矩阵形式的弹性波方程通过拉格朗日乘子法获得伴随状态方程, 并导出 ELSRTM 的梯度公式。之后根据第二章的推导, 利用波模式解耦对梯度进行预条件处理。由于不同模型的参数耦合程度不同, 将根据具体情况设计不同的反演策略。简单模型和 Marmousi-II 模型的数值实验将用来验证策略的有效性。此外, 由于 ELSRTM 基于 Born 近似, Born 正演数据与反射数据之间存在差异。文中也对比了采用 Born 模拟数据与反射数据反演结果的差异。

第五章将对本文的工作进行总结, 指出论文的创新与不足之处, 并给出下一步的研究计划。



## 第2章 弹性波模式解耦全波形反演

### 2.1 引言

针对地下介质的定量成像方法对于定位与刻画油气储层、监测 CO<sub>2</sub> 注入以及估计近地表土壤和岩石的物理性质非常重要。相比于从地震偏移获得的定性的成像剖面，人们更希望得到量化的地下弹性参数。地震反演旨在采用迭代优化类方法通过拟合正演数据与实际观测数据来恢复地下弹性参数模型。相比走时层析类方法，FWI 提供了更加完善的理论，同时利用走时与振幅信息来反演介质参数<sup>[31]</sup>。随着长偏移距、宽方位和宽频带采集技术的应用，全波形反演已经成为构建高质量速度模型和进行定量地震成像的有效工具<sup>[22]</sup>。

然而，FWI 有许多制约因素。首先，它所需的计算量十分巨大，尤其是在三维模型反演中。尽管梯度类的局部优化方法并不能保证反演收敛到全局最优解，但为了降低计算代价仍然被广泛应用于 FWI 中。收敛性更好的基于 Hessian 的反演方法<sup>[23,117]</sup> 因其更昂贵的计算代价则在大多数 FWI 应用中被舍弃不用。此外，为了减少计算量，人们通常采用声学近似来反演获得 P 波速度<sup>[118,119]</sup>。但实际上，即使是以 P 波为主的单分量地震数据，声学近似也只能保证运动学信息的准确，振幅的可靠性只有在小角度入射时才有保证。这也是声波 FWI 通常需要非常仔细的数据预处理和预条件的主要原因。总之，地震数据中总是包含弹性波场，即使在海洋勘探中，声波反演也不能考虑到由于模式转换带来的能量损失，会对声波数据过度拟合而低估模型中界面周围的速度反差。

弹性波全波形反演 (EFWI) 能够从多分量数据中估计地下介质的弹性参数，如  $V_p$ ,  $V_s$  和  $\rho$ 。然而，EFWI 中多个参数参与反演会增加反问题的非线性程度，也会受到由于不同物理参数之间串扰 (trade-off) 的影响<sup>[43]</sup>。当  $V_p$ ,  $V_s$  和  $\rho$  在结构上有差异时，trade-off 效应会更加明显。将声波 FWI 扩展到弹性介质中需要付出更多的努力。很多学者指出参数化方式对缓解 trade-off 效应非常重要，可以通过调查散射模式或者 Hessian 算子来选取恰当的参数化方式<sup>[31,62–64]</sup>。Tarantola(1986)<sup>[31]</sup> 指出可先重构出对数据具有主要影响的参数，再重构出对数据有次级影响的参数。Sears(2008)<sup>[34]</sup> 提出了一个有效的多尺度策略，通过时间窗来选取海底电缆 (OBC) 数据中的不同子集进行多尺度反演。Operto(2013)<sup>[61]</sup> 讨论了如何多级地选取不同的数据分量以及不同的参数类型进行反演，从而压制 trade-off 效应并降低反演的非线性程度。Xu and McMechan<sup>[120]</sup> 提出了一个多步

长的策略来提高密度模型的反演精度。

Hessian 逆的对角块能够消除几何扩散以及带限效应带来的模糊性, 而非对角块能够压制 trade-off 效应<sup>[61,65,66,121,122]</sup>。对于大规模问题, 为了避免不可承受的 Hessian 计算及求逆, 很多研究工作都旨在寻找对 Hessian 逆的有效近似, 例如采用拟 Hessian<sup>[95,123]</sup> 或者通过拟牛顿方式迭代构建 Hessian 的向量乘, 如 L-BFGS 方法<sup>[40,124]</sup>。Sheen et al(2006)<sup>[125]</sup> 通过互易原理和褶积定理来计算近似 Hessian 从而实现了时间域基于 GN 的 EFWI 方法。Bae et al(2012)<sup>[126]</sup> 提出了频率域基于 GN 共轭梯度法的声弹耦合 FWI。Pratt et al(1998)<sup>[121]</sup> 采用“虚震源”引起的偏导数波场的概念解释了梯度与 Hessian 算子的物理含义。参数耦合效应是由于不同参数的偏导数波场在特定角度范围内的重叠导致的。因此, Wang et al (2015)<sup>[19]</sup> 发现通过解耦弹性波场并在不同阶段分别选取 P 波与 S 波数据来反演不同参数有助于压制 trade-off 效应。此外, 模式解耦也是弹性波逆时偏移中获得具有物理含义成像的关键步骤<sup>[18,127]</sup>。

本文 EFWI 方法中不是经验性地解耦正、反传波场以及地震记录<sup>[20]</sup> 来计算梯度, 而是采用了更有物理意义同时节省计算量的预条件方式, 即在计算梯度时只解耦反传波场。通过调查解耦后的 Frechét 导数、Hessian 矩阵以及分辨率矩阵等反演中的关键要素, 来解释模式解耦预条件的梯度相比常规预条件梯度能够更好压制参数 trade-off 的理论机制。为了简单起见, 我们先抛开密度, 只在讨论部分涉及包含密度的三参数反演问题。此后, 通过在流体饱和砂岩模型以及 Marmousi-II 模型的数值算例验证模式解耦 EFWI 的有效性。最后, 将讨论密度参数对反演带来的复杂性以及模式解耦预条件共轭梯度 (MDPCG) 算法对三参数 EFWI 的贡献, 并给出本章结论。

## 2.2 弹性波正问题

如果视地球内部介质为弹性介质, 则地震波场在地下传播的控制方程可写为:

$$\rho \frac{\partial u_i^2}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ c_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right] = f_i, \quad (2.1)$$

其中  $u_i$  和  $f_i$  分别为质点位移矢量以及体力震源项的第  $i$  分量,  $\rho$  为密度,  $c_{ijkl}$  为刚度矩阵张量的分量。公式中所有的下标取值为从 1 到 3。重复下标涉及默认的 Einstein 求和方式。对于各向同性介质, 刚度矩阵张量满足:

$$c_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (2.2)$$

其中  $\lambda$  和  $\mu$  为 Lamé 系数,  $\delta_{ij}$  为 Kronecker 函数。

根据 Born 近似, 在  $\mathbf{x}$  位置上对刚度系数做一个微小扰动,  $\delta c_{ijkl}(\mathbf{x})$ , 将会产生一个扰动波场  $\delta \mathbf{u}$ , 满足:

$$\rho \frac{\partial \delta u_i^2}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ c_{ijkl}^0 \frac{\partial \delta u_k}{\partial x_l} \right] = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \delta c_{ijkl} \frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} \right], \quad (2.3)$$

其中,  $\mathbf{u}^0$  为在背景介质  $c_{ijkl}^0$  中满足方程(2.1)的背景场。上式说明扰动场  $\delta \mathbf{u}$  可看作是入射波场  $\mathbf{u}^0$  与参数扰动  $\delta c_{ijkl}(\mathbf{x})$  相互作用产生的次级源所引发。为了简单起见, 本章的公式推导主要在频率域进行, 但是大部分的计算操作(尤其是波场延拓)则在时间域实现。利用表示定理与散度定理 (Kamath and Tsvankin, 2016)<sup>[128]</sup>, 扰动波场满足:

$$\delta u_n(\mathbf{r}, \omega) = - \int_{\Omega(\mathbf{x})} \frac{\partial u_k^0(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_l} \frac{\partial G_{ni}(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \omega)}{\partial x_j} \delta c_{ijkl}(\mathbf{x}) d\Omega(\mathbf{x}), \quad (n = 1, 2, 3), \quad (2.4)$$

其中,  $\omega$  表示频率,  $G_{ni}(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \omega)$  为弹性波背景格林函数, 表示在  $\mathbf{x}$  处沿  $i$  方向的单位体力源所产生的在  $\mathbf{r}$  处沿  $n$  方向的质点位移,  $\Omega(\mathbf{x})$  为体积积分范围。注意方程(2.4)只考虑了一阶散射的情况。刚度系数扰动与速度扰动之间的关系为:

$$\delta c_{ijkl} = \frac{\partial c_{ijkl}}{\partial V_p} \delta V_p + \frac{\partial c_{ijkl}}{\partial V_s} \delta V_s, \quad (2.5)$$

以及

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_{ijkl}}{\partial V_p} &= 2\rho V_p \delta_{ij} \delta_{kl}, \\ \frac{\partial c_{ijkl}}{\partial V_s} &= 2\rho V_s (-2\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \end{aligned} \quad (2.6)$$

将方程(2.4)重写为速度参数化方式:

$$\delta u_n(\mathbf{r}, \omega) = \int_{\Omega(\mathbf{x})} \left[ J_{n,V_p}(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \omega) \delta V_p(\mathbf{x}) + J_{n,V_s}(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \omega) \delta V_s(\mathbf{x}) \right] d\Omega(\mathbf{x}), \quad (2.7)$$

其中

$$J_{n,M}(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \omega) = T_{ij,M}(\mathbf{x}, \omega) G_{ni,j}(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \omega), \quad M \in \{V_p, V_s\}, \quad (2.8)$$

并且

$$\begin{aligned} T_{ij,M}(\mathbf{x}, \omega) &= \frac{\partial c_{ijkl}}{\partial M} \frac{\partial u_k^0(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_l}, \\ G_{ni,j}(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \omega) &= \frac{\partial G_{ni}(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \omega)}{\partial x_j}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

式(2.8)中  $J_{n,M}$  表示速度扰动对应的偏导数波场<sup>[121]</sup>,  $T_{ij,M}$  表示背景波场  $\mathbf{u}^0$  与速度扰动  $\delta V_p$  (或  $\delta V_s$ ) 作用产生的次级震源,  $G_{ni,j}$  表示格林函数的空间导数。假设

模型网格数与接收点个数为  $L$  和  $K$ , 则方程(2.8)可以重写为离散的形式:

$$\mathbf{J}_{n,M}(\mathbf{x}_l, \mathbf{r}_k) = (\mathbf{T}_M(\mathbf{x}_l) : \mathbf{G}'(\mathbf{x}_l, \mathbf{r}_k))_n, \quad k = 1, 2, \dots, K; \quad l = 1, 2, \dots, L, \quad (2.10)$$

其中的双点符号: 代表了以下操作:

$$(\mathbf{T}_M : \mathbf{G}')_n = \sum_{i,j=1}^3 T_{ij,M} G_{ni,j}. \quad (2.11)$$

为了简化表达多分量数据, 我们隐藏下标  $n$ 。因此, 方程(2.7)可写成矩阵形式:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{J}_{V_p} & \mathbf{J}_{V_s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \mathbf{V}_p \\ \delta \mathbf{V}_s \end{pmatrix} = \delta \mathbf{u}, \quad (2.12)$$

其中  $\mathbf{J}_{V_p}$  和  $\mathbf{J}_{V_s}$  为  $K \times L$  大小的 Frechét 导数 (Jacobian) 矩阵,  $\delta \mathbf{V}_p$  和  $\delta \mathbf{V}_s$  为长度是  $L$  的模型参数向量,  $\delta \mathbf{u}$  为在接收点位置上的弹性散射波场。方程(2.12)可以进一步简写为:

$$\mathbf{J} \delta \mathbf{m} = \delta \mathbf{u}, \quad (2.13)$$

其中  $\mathbf{J} = (\mathbf{J}_{V_p} \quad \mathbf{J}_{V_s})$ , 且  $\delta \mathbf{m} = (\delta \mathbf{V}_p \quad \delta \mathbf{V}_s)^T$ .

## 2.2.1 P/S 波数据耦合与辐射模型

方程(2.12)或(2.13)表明 Jacobian 矩阵与参数扰动向量的乘积即为相应的散射数据响应, 所有响应的叠加就组成了整个散射波场。从图2.1中展示的散射模式可看出,  $\delta V_p$  只通过 PP 模式散射 P 波数据, 而  $\delta V_s$  则散射所有模式的 P 波和 S 波数据。这就很难分辨出散射数据中的 P 波是来自于哪一类速度扰动( $\delta V_p$  或  $\delta V_s$ )。幸运的是, 散射 S 波仅仅由  $\delta V_s$  产生, 因而对于单次散射的弹性波数据来讲, 耦合效应只会出现在 P 波模式中。既然反演中的参数耦合效应是由于不同模型参数的偏导数波场在特定角度范围内的重叠导致的<sup>[31,61]</sup>, 所以很自然地, 本文提出采用模式解耦来作为降低 EFWI 参数耦合效应的方法。

## 2.2.2 弹性波模式解耦

弹性波场  $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$  可以分解成 P 波波场与 S 波波场:  $\mathbf{u} = \mathbf{u}^P + \mathbf{u}^S$ , 其中,  $\mathbf{u}^P = (u_x^P, u_y^P, u_z^P)$  和  $\mathbf{u}^S = (u_x^S, u_y^S, u_z^S)$ . 对于各向同性介质而言, 模式解耦不依赖于模型参数, 可在波数域表示为 (Zhang and McMechan, 2010)<sup>[14]</sup>:

$$\tilde{\mathbf{U}}^P = \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{U}}), \quad \tilde{\mathbf{U}}^S = -\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{U}}) \quad (2.14)$$

其中  $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$  为归一化之后的波矢量, 符号~表示波数域波场。

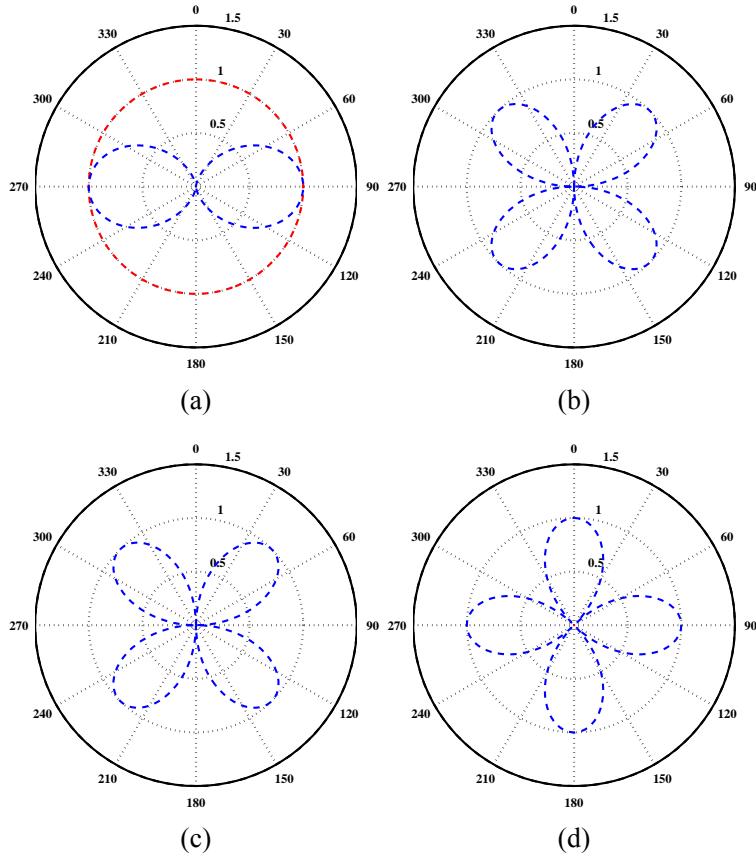


图 2.1  $V_p$ (red) 和  $V_s$  (blue) 扰动的辐射模式。背景波场入射角为  $0^\circ, 360^\circ$  接收不同模式的散射波场。(a) PP, (b) PS, (c) SP 和 (d) SS 模式。

根据前文推导, 将 Fréchet 导数分解为不同波模式:

$$\mathbf{J}_M = \mathbf{J}_M^P + \mathbf{J}_M^S, \quad (2.15)$$

其中

$$\mathbf{J}_M^P = \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{J}}_M)), \quad \mathbf{J}_M^S = \mathcal{F}^{-1}(-\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{J}}_M)), \quad (2.16)$$

这里  $\mathcal{F}^{-1}$  表示从波数域到空间域的反 Fourier 变换,  $\tilde{\mathbf{J}}_M$  表示波数域的 Fréchet 导数。这样, 方程(2.13)可以按以下方式分裂成两部分:

$$\mathbf{J}^P \delta \mathbf{m} = \delta \mathbf{u}^P, \quad \mathbf{J}^S \delta \mathbf{m} = \delta \mathbf{u}^S, \quad (2.17)$$

其中

$$\delta \mathbf{u} = \delta \mathbf{u}^P + \delta \mathbf{u}^S, \quad (2.18)$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}^P + \mathbf{J}^S, \quad (2.19)$$

这里  $\mathbf{J}^P = (\mathbf{J}_{V_p}^P \quad \mathbf{J}_{V_s}^P)$  和  $\mathbf{J}^S = (\mathbf{J}_{V_p}^S \quad \mathbf{J}_{V_s}^S)$  为大小是  $K \times 2L$  的矩阵, 分别代表 P 波或 S 波分量对应的 Frechét 导数(Jacobian 矩阵)。方程(2.17)表示了在模式解耦下的 Born 近似所描述的散射波场。

我们知道, 次级震源只有在背景波场入射到参数扰动的位置时才会被激发。尽管次级震源(或者说背景场)中既有 P 波又有 S 波, 对于反演来说并不需要严格区分出它们的贡献(原因将在本章讨论部分进行详细阐述)。于是, 模式解耦下 Jacobian 矩阵满足:

$$\mathbf{J}_M^W(\mathbf{x}_l, \mathbf{r}_k) = \mathbf{T}_M(\mathbf{x}_l) : \mathbf{G}'^W(\mathbf{x}_l, \mathbf{r}_k), \quad W \in \{P, S\}. \quad (2.20)$$

该式说明模式解耦算子只作用在  $\mathbf{G}'$  上, 即只作用在散射 Green 函数的空间导数上。虽然有些学者尝试用“解耦”的方式来传播 P 和 S 波波场(马德堂和朱光明, 2003<sup>[129]</sup>; Cheng et al., 2016<sup>[17]</sup>), 但是只能在介质参数足够光滑的时候才能获得令人满意的结果(Brytik et al., 2011<sup>[130]</sup>; Wang and McMechan, 2015<sup>[131]</sup>)。因此, 本文并未采用传播解耦波场的方法, 而是用方程(2.16)来对正演后的弹性总波场进行模式解耦。

### 2.3 弹性波模式解耦全波形反演

方程(2.13)对应的反问题是找到一个能够解释地震数据的最优模型, 它可以通过求解以下目标函数的最小值问题来实现:

$$E = \frac{1}{2} \delta \mathbf{d}^\dagger \delta \mathbf{d}, \quad (2.21)$$

其中  $\delta \mathbf{d}$  表示观测数据与模拟数据之间的残差向量, 满足  $\delta \mathbf{d} = \mathfrak{F}(\mathbf{u}_{obs} - \mathbf{u}_{cal})$ , 这里  $\mathfrak{F}$  为位于接收点处的采样函数, 上标  $\dagger$  表示共轭转置算子。求解该目标函数最小值的标准策略是采用梯度类或者基于 Hessian 矩阵的最优化算法。可以通过 Jacobian 矩阵来求取梯度:

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} \mathbf{g}_{V_p} \\ \mathbf{g}_{V_s} \end{pmatrix} = \Re \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{V_p}^\dagger \delta \mathbf{d} \\ \mathbf{J}_{V_s}^\dagger \delta \mathbf{d} \end{pmatrix}, \quad (2.22)$$

其中  $\Re$  表示取实部。为获得模型更新, 梯度导引类方法利用下降方向  $\mathbf{g}$ , 而 Hessian 类方法则利用了梯度和 Hessian 矩阵的信息。Hessian 类算法能保证二阶的收敛性, 但即使是声波 FWI 也要付出庞大的计算与存储代价。为了在效率与精度之间寻求平衡, 通常会采用梯度类的方法迭代地求解方程(2.21), 即:

$$\mathbf{m}_{k+1} = \mathbf{m}_k - \alpha_k \mathbf{g}_k, \quad (2.23)$$

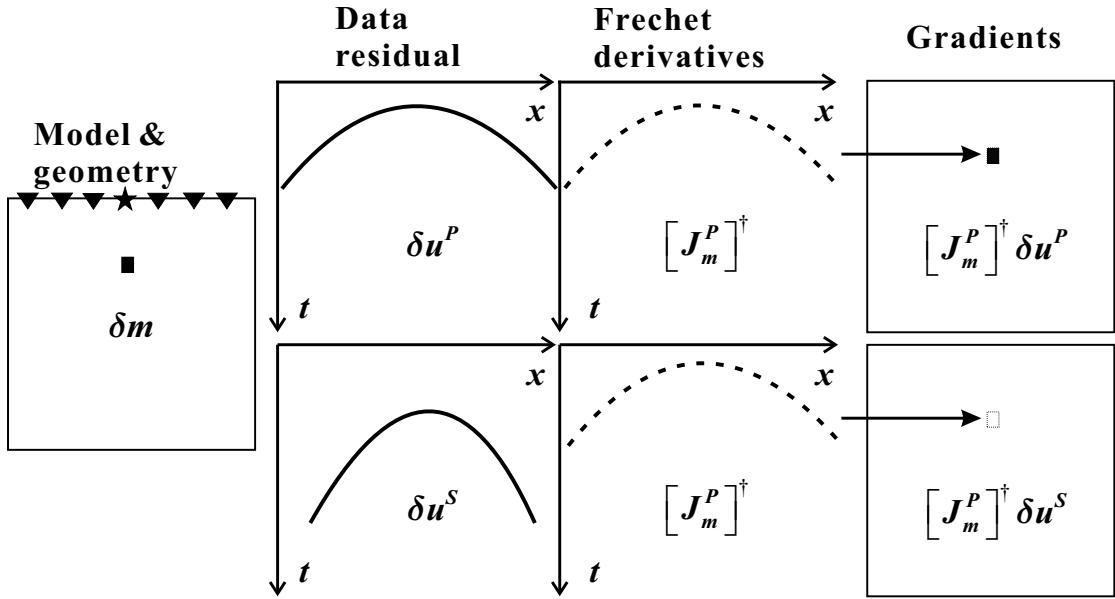


图 2.2 通过偏导数波场与数据残差之间的零延迟互相关计算梯度的示意图。为了简单说明,只在背景介质中放置一个散射点。

其中  $\mathbf{m}$  是模型参数向量,  $k$  是迭代次数,  $\alpha_k$  和  $\mathbf{g}_k$  则分别是第  $k$  次迭代的步长与梯度。常规的 EFWI 需要非常多的迭代次数,因此良好的梯度预条件能加速收敛。

方程(2.22)中的梯度并没有内在的机制来判断数据残差中的成分是来自  $\delta V_p$  还是来自  $\delta V_s$ 。将方程(2.22)分裂为 P 波与 S 波分量对应的两个部分:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{g}_{V_p}^P \\ \mathbf{g}_{V_s}^P \end{pmatrix} = \Re \begin{pmatrix} [\mathbf{J}_{V_p}^P + \mathbf{J}_{V_p}^S]^\dagger \delta \mathbf{d}^P \\ [\mathbf{J}_{V_s}^P + \mathbf{J}_{V_s}^S]^\dagger \delta \mathbf{d}^P \end{pmatrix}, \quad (2.24)$$

和

$$\begin{pmatrix} \mathbf{g}_{V_p}^S \\ \mathbf{g}_{V_s}^S \end{pmatrix} = \Re \begin{pmatrix} [\mathbf{J}_{V_p}^P + \mathbf{J}_{V_p}^S]^\dagger \delta \mathbf{d}^S \\ [\mathbf{J}_{V_s}^P + \mathbf{J}_{V_s}^S]^\dagger \delta \mathbf{d}^S \end{pmatrix}, \quad (2.25)$$

其中,  $\mathbf{g}_M^W$  为特定波模式 ( $W$ ) 的数据残差对应的某一物理参数 ( $M$ ) 的梯度。地面多分量地震记录的 P/S 分离非常具有挑战,因此数据残差的分解也会变得非常困难,尤其是在近地表介质不均匀且(或者)边界条件不完整的情况下。因此尽量采取策略来回避多分量地震记录的地面 P/S 分离。

目标函数的梯度可看作是偏导数波场与数据残差在时间域的零延迟互相关<sup>[121]</sup>。如图2.2所示,假设背景介质中有一个点扰动,数据残差为观测数据与模拟数据之间的差值。偏导数波场代表了由次级源产生的特征性点绕射响应。一般而言,P 波与 S 波背景速度不同,因而在偏导数波场和地震记录残差中它们的运动学特征(比如走时和曲率)也不同。所以,相同波模式之间的零延迟互相关将在梯度计算中占主导地位,而不同波模式之间的互相关则会由于非同相的干涉叠加

被基本消除掉。因此,会有以下的交叉项近似:

$$\begin{aligned} [\mathbf{J}_{V_p}^S]^\dagger \delta \mathbf{d}^P &\approx \mathbf{0}, \\ [\mathbf{J}_{V_s}^S]^\dagger \delta \mathbf{d}^P &\approx \mathbf{0}, \\ [\mathbf{J}_{V_p}^P]^\dagger \delta \mathbf{d}^S &\approx \mathbf{0}, \\ [\mathbf{J}_{V_s}^P]^\dagger \delta \mathbf{d}^S &\approx \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (2.26)$$

其中  $\mathbf{0}$  为空矩阵。此外,散射模式说明 P 波速度的扰动不会产生 S 波散射,所以还有:

$$\mathbf{J}_{V_p}^S = \mathbf{0}. \quad (2.27)$$

从而得到:

$$\begin{aligned} [\mathbf{J}_{V_p}^S]^\dagger \delta \mathbf{d}^P &= \mathbf{0}, \\ [\mathbf{J}_{V_p}^S]^\dagger \delta \mathbf{d}^S &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

### 2.3.1 模式解耦梯度预条件

利用方程(2.26)和(2.28),可以获得以下近似:

$$\mathbf{J}_{V_p}^\dagger \delta \mathbf{d}^P \approx [\mathbf{J}_{V_p}^P]^\dagger \delta \mathbf{d}, \quad \mathbf{J}_{V_s}^\dagger \delta \mathbf{d}^S \approx [\mathbf{J}_{V_s}^S]^\dagger \delta \mathbf{d}. \quad (2.29)$$

因此,基于模式解耦的梯度可以表示为:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{g}_{V_p}^P \\ \mathbf{g}_{V_s}^P \end{pmatrix} \approx \Re \begin{pmatrix} [\mathbf{J}_{V_p}^P]^\dagger \delta \mathbf{d} \\ [\mathbf{J}_{V_s}^P]^\dagger \delta \mathbf{d} \end{pmatrix}, \quad (2.30)$$

和

$$\begin{pmatrix} \mathbf{g}_{V_p}^S \\ \mathbf{g}_{V_s}^S \end{pmatrix} \approx \Re \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ [\mathbf{J}_{V_s}^S]^\dagger \delta \mathbf{d} \end{pmatrix}. \quad (2.31)$$

上述方程表明在梯度计算中可以通过 Fréchet 导数的解耦来代替数据残差的解耦。

进一步而言,由于串扰效应主要体现在 P 波数据中,因此本文提出舍弃梯度中的  $\mathbf{g}_{V_s}^P$  项来降低参数耦合效应。于是,分别选取解耦后的 P 波与 S 波 Fréchet 导数来构建预条件之后  $V_p$  和  $V_s$  的梯度:

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{g}}_{V_p} \\ \hat{\mathbf{g}}_{V_s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{g}_{V_p}^P \\ \mathbf{g}_{V_s}^S \end{pmatrix} \approx \Re \begin{pmatrix} [\mathbf{J}_{V_p}^P]^\dagger \delta \mathbf{d} \\ [\mathbf{J}_{V_s}^S]^\dagger \delta \mathbf{d} \end{pmatrix}. \quad (2.32)$$

这里符号<sup>^</sup>指示基于模式解耦的预条件梯度。最终, EFWI 问题转化为通过模式解耦预条件共轭梯度(MDPCG)的方式来迭代求解:

$$\mathbf{m}_{k+1} = \mathbf{m}_k - \alpha_k \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 \hat{\mathbf{g}}_{V_p} \\ \mathbf{Q}_2 \hat{\mathbf{g}}_{V_s} \end{bmatrix}_k, \quad (2.33)$$

其中,  $\mathbf{Q}_1$  和  $\mathbf{Q}_2$  表示进一步的预条件算子, 比如采用能量照明对梯度进行补偿。步长  $\alpha_k$  采用抛物线拟合的方式来搜寻 (Vigh and Starr, 2008<sup>[132]</sup>)。

### 2.3.2 伴随状态法计算梯度

显式地计算 Fréchet 导数需要进行多达模型网格数量的正演模拟次数, 这在目前实际应用中无法实现<sup>[22]</sup>。为了避免显式构建 Jacobian 矩阵, 文中采用伴随状态法来计算梯度<sup>[52,133]</sup>。利用 Green 函数的空间互易性, 方程(2.22)中的原始梯度可以通过正传波场与反传的残差波场的时间域零延迟互相关计算得到:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{V_p} &= -2\rho V_p \int_0^T \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial \psi_k}{\partial x_l} \delta_{ij} \delta_{kl} dt, \\ \mathbf{g}_{V_s} &= -2\rho V_s \int_0^T \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial \psi_k}{\partial x_l} (-2\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) dt, \end{aligned} \quad (2.34)$$

其中  $u_i$  是从震源出发的正传波场,  $\psi_k$  为由数据残差从接收点处反传重建的伴随波场。注意方程(2.34)中第一行的算式中自动隐含了正传和伴随波场的散度算子。

从方程(2.20)可看出, Fréchet 导数的模式解耦等价于施加在散射 Green 函数上。这就意味着当使用伴随状态法时, 只需要解耦伴随波场就可以获得预条件后的梯度, 即:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{g}}_{V_p} &= -2\rho V_p \int_0^T \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial \psi_k^P}{\partial x_l} \delta_{ij} \delta_{kl} dt, \\ &= -2\rho V_p \int_0^T \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial \psi_k}{\partial x_l} \delta_{ij} \delta_{kl} dt, \\ \hat{\mathbf{g}}_{V_s} &= -2\rho V_s \int_0^T \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial \psi_k^S}{\partial x_l} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) dt, \end{aligned} \quad (2.35)$$

其中  $\psi^P$  和  $\psi^S$  分别为 P 波和 S 波的伴随波场。由于  $\mathbf{g}_{V_p}$  的计算中隐含了散度算子, 总是满足  $\hat{\mathbf{g}}_{V_p} = \mathbf{g}_{V_p}$ 。与方程(2.34)对比, 由于 S 波的散度总是为 0, 所以在计算预条件后的  $V_s$  梯度时舍弃了  $-2\delta_{ij} \delta_{kl}$  项。因此, 对于 P 波速度而言, 模式解耦已经自动隐含在梯度计算中, 但是对  $V_s$  梯度的模式解耦预条件需要显式地施加。

解耦伴随波场需要额外的计算量, 主要体现在每个时间片中需要两次 Fourier 变换。为了减少计算量并节省内存消耗, 可以对正传波场与反传波场在时间轴上进行重采样, 并且在互相关之前只对反传的伴随波场进行模式解耦。当考

虑其它多尺度策略考虑时,也可以对正传波场进行解耦,例如在某一阶段反演中单独使用 SS 或者 PS 波模式的数据。但本文并不推荐这样的策略,这将在讨论部分进行阐述。

## 2.4 模式解耦降低参数耦合的理论机制

前一节提出了通过模式解耦来预条件处理 EFWI 的梯度,以便压制参数耦合效应。然而解决参数解耦问题最直接有效(但也最昂贵)的方法是考虑 Hessian 矩阵的优化方法。下面将采用解耦后的 Fréchet 导数来调查 Hessian 和分辨率矩阵的性质,并且对比常规(PCG)、模式解耦(MDPCG)和高斯-牛顿(GN)的梯度来阐明模式解耦 EFWI 压制参数耦合的内在机制。

### 2.4.1 Hessian 矩阵及其不同模式的分量

多参数情况下的 Hessian 矩阵是一个具有块状结构的对称方阵,其中非对角块测量了不同物理参数的偏导数波场之间的互相关效应,其作用是消除多参数反演中的参数耦合效应。当反问题为近似线性或者数据残差非常小的时候,全 Hessian 将约等于近似 Hessian<sup>[121]</sup>:

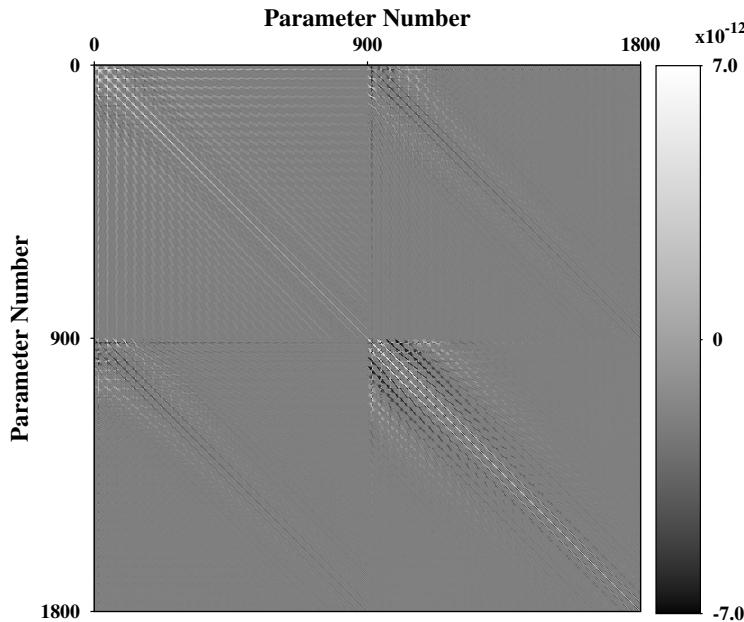
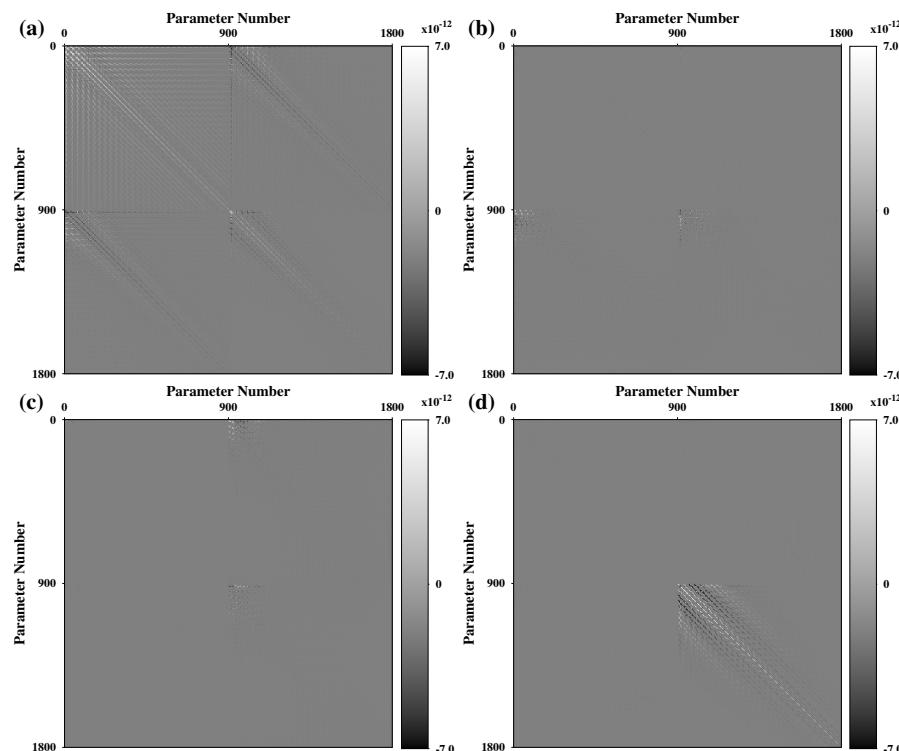
$$\mathbf{H}_a = \Re[\mathbf{J}^\dagger \mathbf{J}]. \quad (2.36)$$

考虑到 Fréchet 导数的解耦(见方程2.19),可以将  $\mathbf{H}_a$  分解为四个分量:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_a^{PP} &= \Re[\mathbf{J}^P]^\dagger [\mathbf{J}^P], \\ \mathbf{H}_a^{PS} &= \Re[\mathbf{J}^P]^\dagger [\mathbf{J}^S], \\ \mathbf{H}_a^{SP} &= \Re[\mathbf{J}^S]^\dagger [\mathbf{J}^P], \\ \mathbf{H}_a^{SS} &= \Re[\mathbf{J}^S]^\dagger [\mathbf{J}^S]. \end{aligned} \quad (2.37)$$

从大规模应用问题来讲,Hessian 矩阵通常是无法计算的。为了调查每个分量各自的贡献,这里在一个网格大小为  $30 \times 30$ ,空间采样为 5m 的模型上数值地计算出 Hessian 矩阵的各个分量。在模型的顶部中央放置一个纯 P 波震源,接收点分布于四个边界上。近似 Hessian 矩阵(图2.3)及其分量(图2.4)通过时间域的 Fréchet 导数显式计算, $H_a$  中非对角块中明显的非零元素代表了很强的参数耦合效应。可以观察到以下现象:首先,交叉项分量( $\mathbf{H}_a^{PS}$  和  $\mathbf{H}_a^{SP}$ )对  $\mathbf{H}_a$  的贡献可以忽略不计。这是由于背景 P 波和 S 波速度不同导致相应的 P 波与 S 波 Fréchet 导数不具有相干性。注意到,在这些交叉项分量中会有一些非常小值的非零元素。这是由于 Fréchet 导数中震源附近的异常值所导致的。故有:

$$\mathbf{H}_a \approx \mathbf{H}_a^{PP} + \mathbf{H}_a^{SS}. \quad (2.38)$$

图 2.3 近似 Hessian 矩阵  $\mathbf{H}_a$ .图 2.4 近似 Hessian 矩阵的四个分量: (a)  $\mathbf{H}_a^{PP}$ , (b)  $\mathbf{H}_a^{PS}$ , (c)  $\mathbf{H}_a^{SP}$  和 (d)  $\mathbf{H}_a^{SS}$ .

其次,  $\mathbf{H}_a$  的非对角区块几乎与  $\mathbf{H}_a^{PP}$  一样, 并且  $\mathbf{H}_a^{SS}$  只在右下对角快是非零的, 这是因为  $\mathbf{J}^S = (\mathbf{0} \quad \mathbf{J}_{V_s}^S)$ 。这些现象进一步确认了参数耦合主要是来自 P 波波场而非 S 波波场。

$$\delta \tilde{\mathbf{m}} = \mathbf{R} \delta \mathbf{m}$$

图 2.5 分辨率矩阵示意图。对于双参数的反问题,分辨率矩阵可以分成四个区块。

## 2.4.2 模型分辨率矩阵及其分量

通过模式解耦的 Frechét 导数对 Hessian 矩阵的定性分析并不足以理解模式解耦对反演产生作用的机制。为了评估 P 波与 S 波数据对反演的贡献, 我们进一步分析模式解耦如何在模型空间影响分辨率矩阵。模型的分辨率矩阵通常采用 Hessian 矩阵及其逆矩阵来计算得到 (Menke, 1989<sup>[134]</sup>; Snieder and Trampert, 1999<sup>[135]</sup>)。就方程(2.13)对应的反问题, 采用以下公式来更新模型:

$$\delta \tilde{\mathbf{m}} = -\mathbf{H}_a^{-1} \mathbf{J}^\dagger \delta \mathbf{d}, \quad (2.39)$$

其中  $\delta \tilde{\mathbf{m}}$  为用全部数据残差估计得到的模型扰动。根据 Born 近似  $\delta \mathbf{d} = \mathfrak{F} \delta \mathbf{u}$ , 将方程(2.13)带入到式(2.39)中, 并省略采样函数  $\mathfrak{F}$ , 可得:

$$\delta \tilde{\mathbf{m}} = \mathbf{R} \delta \mathbf{m}, \quad (2.40)$$

其中  $\delta \mathbf{m}$  表示真实模型扰动, 且模型分辨率矩阵  $\mathbf{R}$  满足:

$$\mathbf{R} = -\mathbf{H}_a^{-g} \mathbf{H}_a. \quad (2.41)$$

注意, 由于有限的观测导致近似 Hessian 总是病态的, 因此这里采用 Hessian 的伪逆(广义逆)  $\mathbf{H}_a^{-g}$ , 而不是真实的逆  $\mathbf{H}_a^{-1}$ 。

如图2.5所示, 模型分辨率矩阵可看作是作用在真实模型上的滤波器。如果观测手段足够好, 则分辨率矩阵会是严格的单位矩阵, 即  $\mathbf{R} = \mathbf{I}$ , 那么模型参数也会是唯一确定的。然而, 通常情况下  $\mathbf{R} \neq \mathbf{I}$ , 因此对模型的估计将是真实模型参数的加权平均值。 $\mathbf{R}$  的对角区块隐含了单参数内部间的相互影响及其相应的分辨能力, 而非对角区块则反映了不同参数之间的相互影响。如果对角区块上有明显的非零元素分布, 则预示着不可忽视的参数耦合效应。若采用分解后的 P 波数据,

则方程(2.39)变为:

$$\delta\tilde{\mathbf{m}}^P = -\mathbf{H}_a^{-1}\mathbf{J}^\dagger\delta\mathbf{d}^P, \quad (2.42)$$

其中  $\delta\tilde{\mathbf{m}}^P$  表示 P 波数据给出的模型估计。同样采用式(2.39)至式(2.41)的推导, 可得 P 波数据的模型分辨率矩阵:

$$\mathbf{R}^P = -\mathbf{H}_a^{-g}\mathbf{H}_a^P, \quad (2.43)$$

其中  $\mathbf{H}_a^P = \mathbf{J}^\dagger\mathbf{J}^P$ 。类似的, S 波的分辨率矩阵为:

$$\mathbf{R}^S = -\mathbf{H}_a^{-g}\mathbf{H}_a^S, \quad (2.44)$$

且  $\mathbf{H}_a^S = \mathbf{J}^\dagger\mathbf{J}^S$ 。容易证明  $\mathbf{R} = \mathbf{R}^P + \mathbf{R}^S$ 。

同样采用前文小模型, 可以显式计算出模型分辨率矩阵  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{R}^P$  和  $\mathbf{R}^S$ 。原始分辨率矩阵(图2.6a)为带状对角阵, 对角元素为小于 1 的正值。这说明了近似 Hessian 的逆可以为  $V_p$  和  $V_s$  的反演提供很好的预条件。P 波与 S 波数据对应的分辨率矩阵(图2.6b 和 c)展示了一些有趣的现象。例如,  $\mathbf{R}^P$  和  $\mathbf{R}^S$  的对角块构成了  $\mathbf{R}$ 。除了一些由于震源附近的干扰而导致的假象,  $\mathbf{R}^P$  的底部两个区块都为空矩阵。在  $\mathbf{R}^P$  和  $\mathbf{R}^S$  的右上区块, 它们的元素值大小相等符号相反, 两者相加为零从而能够使得  $\mathbf{R}$  右上区块为空。这些特征说明, 对于线性的反问题(无 cycle-skipping), P 波与 S 波都对反演  $V_p$  有贡献, 而 P 波对  $V_s$  的贡献非常弱。常规的梯度法由于只用 P 波数据来计算  $V_p$  梯度(见式2.34), 而这部分 P 波数据有可能来自  $V_s$  扰动, 从而导致反演受到参数耦合的影响。此外, 单独用 S 波数据可以很好的分辨  $V_s$ 。模式解耦的预条件方式正好利用了上述特征, 因而其能够压制反演中参数间的耦合。

### 2.4.3 与 Gauss-Newton 梯度的比较

GN 方法利用近似 Hessian 的逆对梯度进行预条件来处理参数之间的耦合效应:

$$\delta\tilde{\mathbf{m}} = -\mathbf{H}_a^{-1}\mathbf{g}. \quad (2.45)$$

假设  $\mathbf{H}_a$  的伪逆为:

$$\mathbf{H}_a^{-g} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{E} \\ \mathbf{F} & \mathbf{G} \end{bmatrix}, \quad (2.46)$$

则 GN 方法实际上利用以下公式来更新模型:

$$\mathbf{m}_{k+1} = \mathbf{m}_k - \alpha_k \begin{bmatrix} \mathbf{D}\mathbf{g}_{V_p}^P + \mathbf{E}\mathbf{g}_{V_s}^P + \mathbf{E}\mathbf{g}_{V_s}^S \\ \mathbf{G}\mathbf{g}_{V_s}^S \end{bmatrix}_k, \quad (2.47)$$

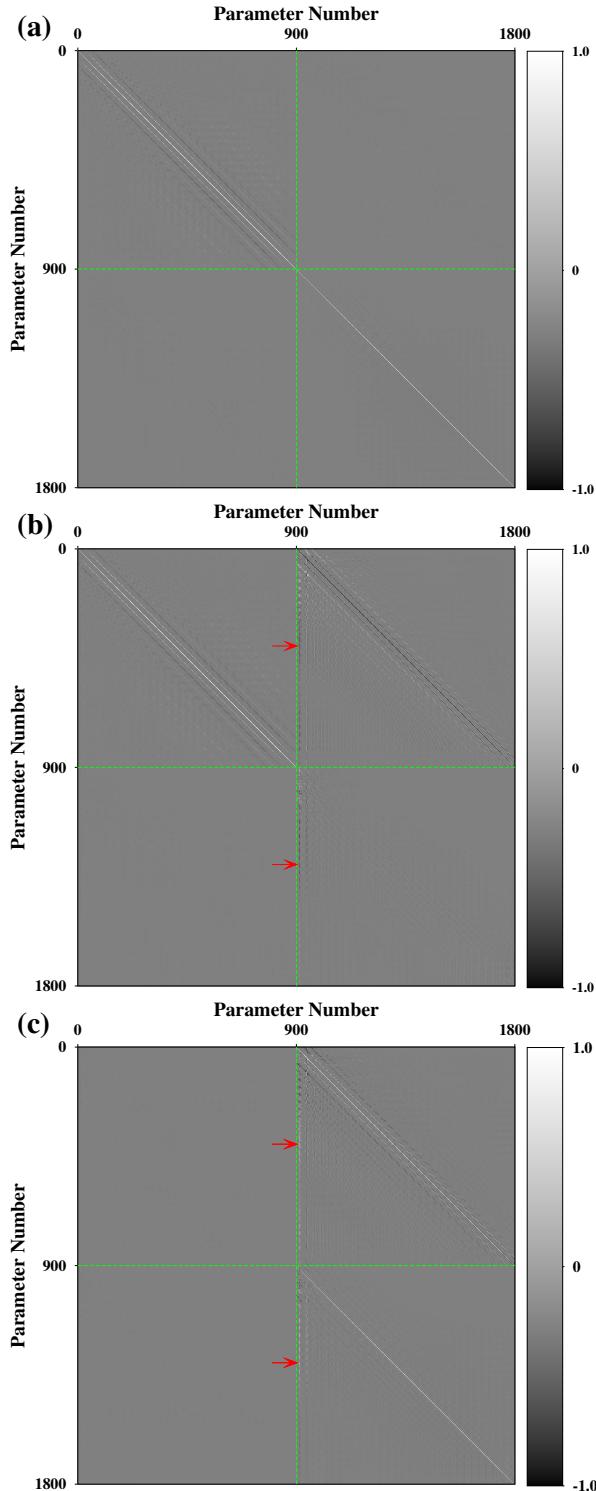


图 2.6 分辨率矩阵及其不同波模式的分量 (a)  $\mathbf{R}$ , (b)  $\mathbf{R}^P$  和 (c)  $\mathbf{R}^S$ .

因为

$$\delta \mathbf{V}_s^P \approx 0, \quad \delta \mathbf{V}_s \approx \delta \mathbf{V}_s^S = -\mathbf{G} \mathbf{g}_{V_s}^S, \quad (2.48)$$

(见附录 A)。

在图2.7中,同样采用前文小模型实验来比较常规(PCG)、模式解耦(MDPCG)

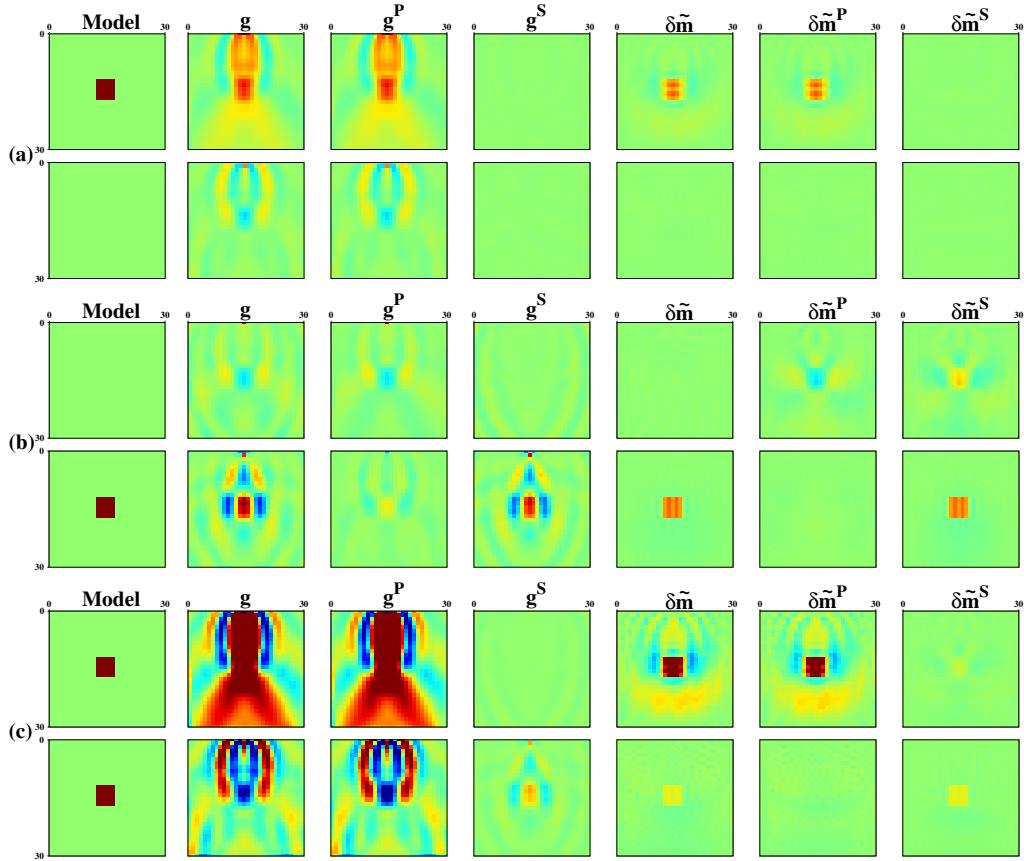


图 2.7 常规(PCG)、模式解耦(MDPCG)和高斯-牛顿(GN)梯度对比:(a)  $\delta V_p \neq 0, \delta V_s = 0$ ; (b)  $\delta V_p = 0, \delta V_s \neq 0$ ; and (c)  $\delta V_p = 10\delta V_s$ 。从上到下为三个面板, 每个面板中包含 2 行 7 列。第一行对应  $V_p$ , 第二行对应  $V_s$ 。7 列从左到右依次为真实模型  $\mathbf{m} = (\mathbf{V}_p, \mathbf{V}_s)$ ; PCG 梯度  $\mathbf{g} = (\mathbf{g}_{V_p}, \mathbf{g}_{V_s})$ ,  $\mathbf{g}^P = (\mathbf{g}_{V_p}^P, \mathbf{g}_{V_s}^P)$ ,  $\mathbf{g}^S = (\mathbf{g}_{V_p}^S, \mathbf{g}_{V_s}^S)$ ; GN 梯度  $\tilde{\mathbf{m}} = (\tilde{\mathbf{v}}_p, \tilde{\mathbf{v}}_s)$ ; MDPCG 梯度  $\tilde{\mathbf{m}}^P = (\tilde{\mathbf{v}}_p^P, \tilde{\mathbf{v}}_s^P)$   $\tilde{\mathbf{m}}^S = (\tilde{\mathbf{v}}_p^S, \tilde{\mathbf{v}}_s^S)$ 。

和高斯-牛顿(GN)第一次迭代的梯度。在模型中央放置三种不同类型、尺度为  $10 \times 10\text{m}$  的参数扰动组合, 分别为:(a)  $\delta V_p \neq 0, \delta V_s = 0$ ; (b)  $\delta V_p = 0, \delta V_s \neq 0$  和 (c)  $\delta V_p = 10\delta V_s$ 。初始模型为均匀的背景速度。在第一组实验中只有 P 波数据, 可以看到原始的梯度( $\mathbf{g}_{V_p}$  和  $\mathbf{g}_{V_s}$ )中, 有非常明显的参数耦合效应。从图2.7a 和 b 中可以看到, 对于物理参数 A 而言, 另一个参数 B 扰动会产生一个与 B 扰动方向相反的 A 的梯度。从图2.7b 和 c 中  $\mathbf{g}_{V_s}^P$  看到, 尽管 P 波数据残差可能携带了  $\delta V_s$  的信息, 常规梯度类方法用 P 波数据来反演  $V_s$  将会受到参数耦合的影响。在第三组实验中, 由于参数耦合的影响,  $\mathbf{g}_{V_s}^P$  甚至提供了错误的更新方向。由于 S 波残差只与  $\delta V_s$  有关, 因此正如我们所期望,  $\mathbf{g}_{V_s}^S$  总是能提供一个正确的更新方向。所以,  $\mathbf{g}_{V_s}^P$  是梯度中参数耦合部分的主导者。一般来说, 在以 P 波能量占主导的地震数据中, 梯度中的这种耦合成分总是带来负面的影响, 除非采用行之有效的预条件算子, 例如图2.7中的 GN 梯度。

更重要的是, 图2.7中最后三列在数值上验证了方程(2.48), 同时也展示了

MDPCG 方法与 GN 方法之间的异同。与常规模梯度法不同, GN 方法利用 Hessian 的逆以不同权重叠加三个解耦之后的梯度( $\mathbf{g}_{V_p}^P$ 、 $\mathbf{g}_{V_s}^P$  和  $\mathbf{g}_{V_s}^S$ ), 来实现 P 波速度梯度的最佳预条件。对于 S 波速度, GN 方法实际上用  $\mathbf{G}$  做为算子来对 S 波速度梯度( $\mathbf{g}_{V_s}^S$ ) 做预条件处理。算子  $\mathbf{G}$  近似等价于  $[\mathbf{J}_{V_s}^S]^\dagger \mathbf{J}_{V_s}^S$  的伪逆(见方程A.6)。正如方程(2.33)所示, MDPCG 方法也需要进一步的预条件来加速收敛。例如, 预条件算子  $\mathbf{Q}_2$  只需要考虑 S 波的照明补偿以及子波带宽效应即可, 即近似  $\mathbf{G}$  的效果。因此, 对  $V_s$  反演, MDPCG 方法几乎可看作是采用解耦的 S 波数据进行的单参数反演。相应地, 预条件算子  $\mathbf{Q}_2$  要更廉价一些, 比如利用单参数拟 Hessian 或者 l-BFGS 方法。这种预条件方法为  $V_s$  反演近似提供了 GN 方法的梯度从而降低了迭代中的参数耦合, 能够在不引入 Hessian 的情况下加速收敛。

## 2.5 数值实验

本节用两个理论合成数据的例子来验证模式解耦 EFWI 的有效性。实验中采用纯 P 波震源来合成多分量地震记录。从较好的初始模型开始,  $V_p$  和  $V_s$  将同时被反演。在时间域对数据进行低通滤波, 然后采用从低频到高频的多尺度策略来避免陷入局部极值。反演分为四个不同的阶段: 0-2Hz, 0-4Hz, 0-6Hz 和 0-10Hz。整个数值实验中, 采用原始梯度的 PCG 与采用模式解耦梯度的 MDPCG 法都使用了随深度变化的照明补偿算子来进行预条件<sup>[136]</sup>。

### 2.5.1 流体饱和模型

图2.8定义了一个在砂岩背景模型中的流体饱和储层, 背景模型参数为  $V_p = 3.14 \text{ km/s}$ ,  $V_s = 1.56 \text{ km/s}$  以及  $\rho = 2000 \text{ kg/m}^3$ 。储层的上部含气饱和, 参数为  $V_p = 2.6 \text{ km/s}$  和  $V_s = 1.66 \text{ km/s}$ , 下部含水,  $V_p = 3.0 \text{ km/s}$  和  $V_s = 1.66 \text{ km/s}$ 。储层的速度值根据砂岩岩石物理模型给出<sup>[137]</sup>。在模型顶部放置炮点和检波器, 合成 32 炮数据, 炮间距为 100m, 每炮数据为 400 道记录, 道间距为 10m。反演以背景模型作为初始模型。每阶段最大迭代次数限制为 10 次。从反演结果上看, 常规 EFWI 方法能得到可接受的  $V_p$  模型, 而  $V_s$  反演结果受参数耦合影响则非常糟糕。这是因为在初始阶段, 梯度会受到参数耦合的强烈影响, 导致模型中长波长成分的重建受到严重干扰, 因此在有限的迭代次数下反演最终收敛到了局部极值。采用了 MDPCG 之后, EFWI 最后很好地重建了  $V_p$  和  $V_s$  模型。

### 2.5.2 Marmousi-II 模型

过去十年间, 很多 EFWI 策略被用在了 OBC 地震数据中。在地震数据低频成分比较丰富的情况下, 重建低 Poisson 比的模型(如硬海底)相对比较容易<sup>[126]</sup>。

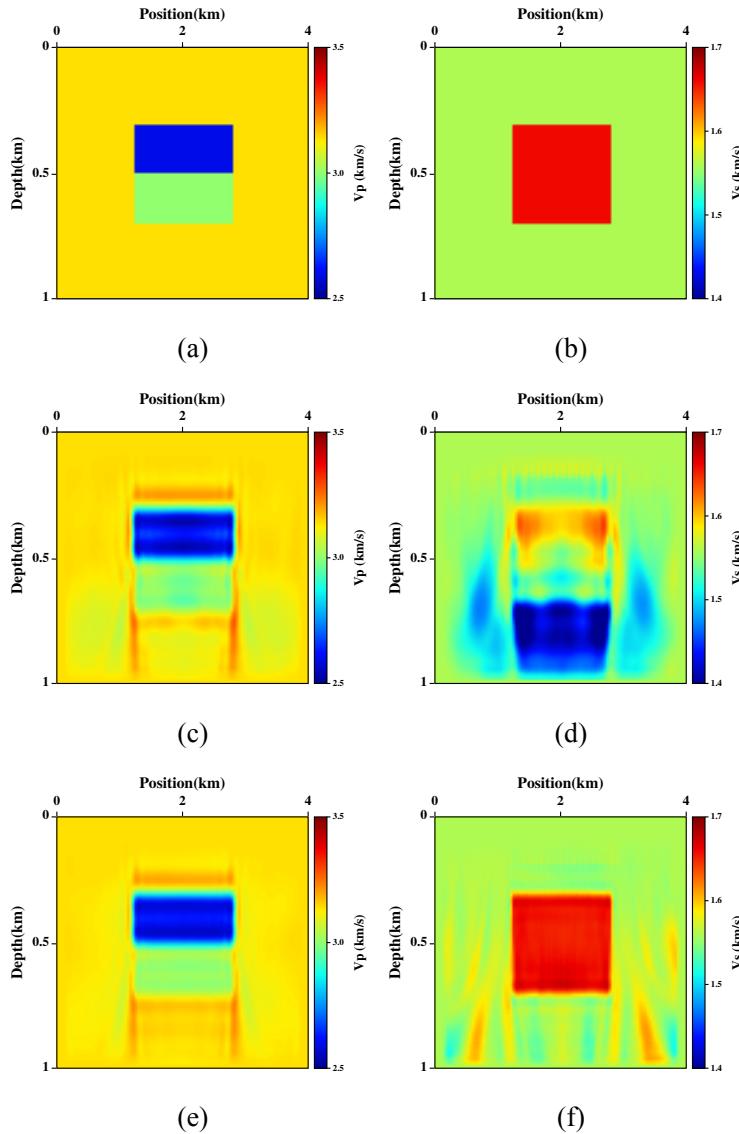


图 2.8 流体饱和砂岩模型的 EFWI 结果:左侧为  $V_p$ , 右侧为  $V_s$ ; (a),(b) 为真实模型; (c),(d) 为常规 PCG 方法反演结果; (e),(f) 为 MDPCG 方法反演结果。

然而, 软海底环境在现实中更为普遍。此时, PS 转换能量非常有限, 反演中的非线性程度以及参数间的耦合也会变得更加严重。为了应对这种更真实的软海底情况, 如图 2.9(a) 和 (b) 所示, 采用泊松比变化剧烈的原始 Marmousi-II 模型测试算法。不同参数间非一致的结构能更明显地调查参数间的耦合程度。为了更好的展示本文方法的优势, 在 S 波速度模型 1.5km 深处添加了一个高速的薄层。在反演中, 采用交错网格有限差分法来计算正传与伴随波场, 空间采样间隔为 5m, 记录总时间为 8s, 时间采样间隔为 0.5ms。共有 40 炮合成数据, 炮点深度在 20m 的水深处, 2800 个检波点放置于海底来模拟 OBC 观测。初始模型通过 SU 软件中的 smooth2 函数平滑真实模型产生, 平滑半径为 300m。采用与前一实验同样的多尺度策略, 但是每阶段最大迭代次数扩大为 40 次。

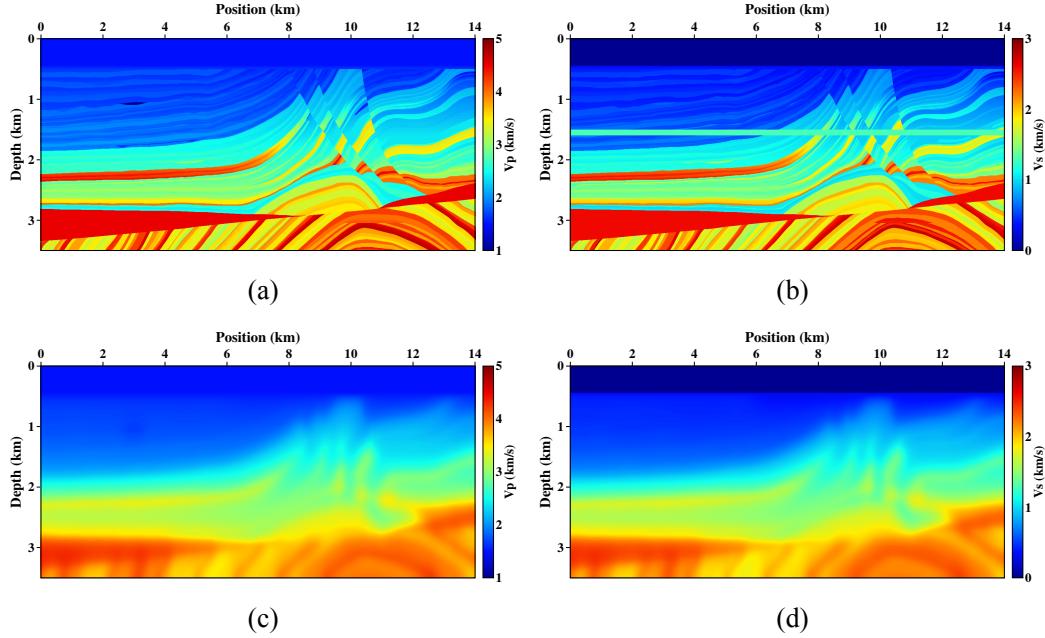


图 2.9 SEG Marmousi-II 模型:(a), (b) 分别为真实的  $V_p$  和  $V_s$  模型;(c), (d) 分别为初始的  $V_p$  和  $V_s$  模型。注意, P 波速度含有含气沙岩储层产生的速度异常以及 S 波速度中加入了高速薄层异常结构。

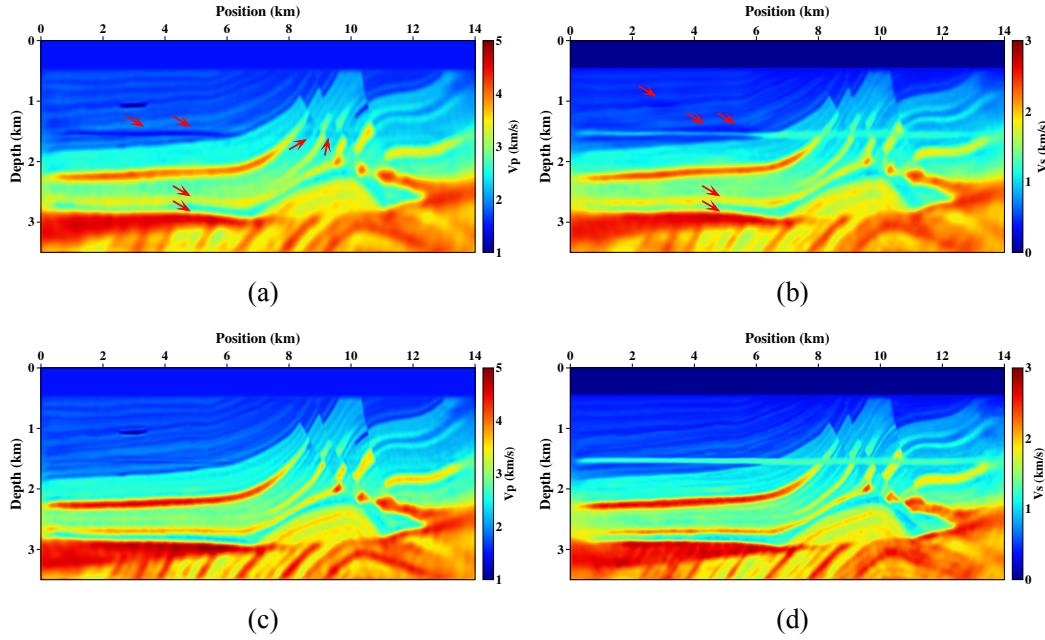


图 2.10 反演的 Marmousi-II 模型:其中左侧为  $V_p$ , 右侧为  $V_s$ . (a), (b) 为常规 PCG 方法反演结果;(c), (d) 为 MDPCG 方法反演结果。

图2.10的结果表明了MDPCG方法比常规PCG方法能提供更好的反演结果。在模型浅部(约 1.5km),两种方法都能很好的恢复  $V_p$  模型,而常规方法恢复的  $V_s$  模型分辨率较低。S 波速度模型中的高速异常薄层给反演造成了很大的挑战,如图2.10(a) 和 (b) 中所示,反演结果存在很强的参数耦合的干扰,尤其是在左侧的

高速异常薄层附近。这就导致了该异常薄层下方构造的错位与不聚焦(如图中箭头所示)。然而,MDPCG方法很好地压制了这些参数耦合效应,获得了模型的许多细节,包括中部的断层与背斜构造。模型的纵向“测井”曲线(图2.11)进一步证明了模式解耦反演方法获得了比常规方法更准确的结果与更高的分辨率。

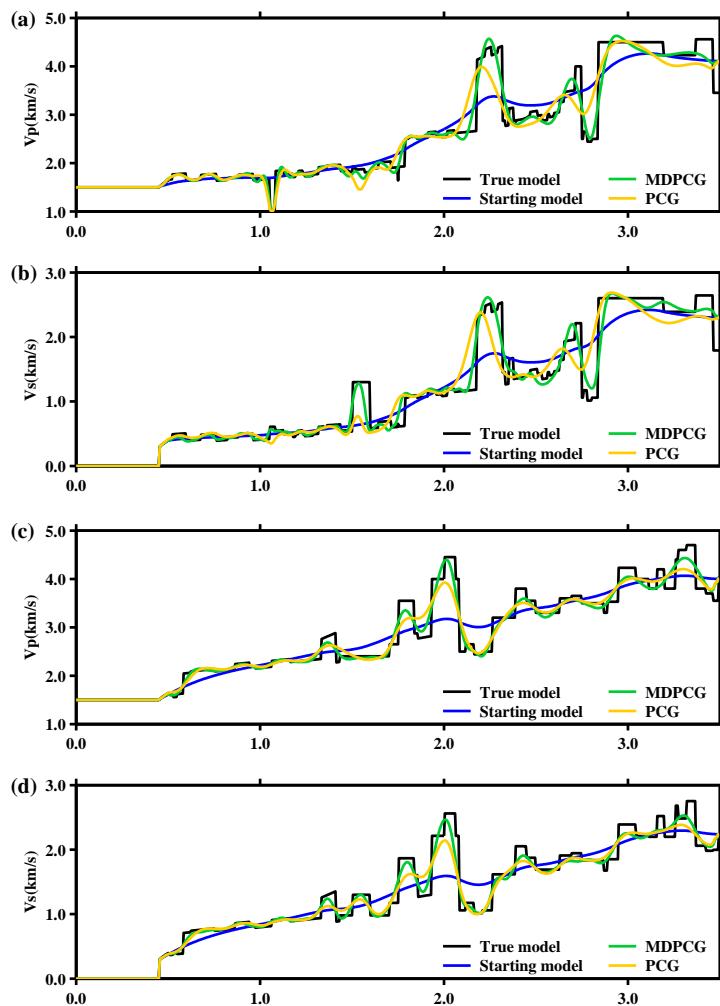


图 2.11 模型在 3.0km(a,b) 和 9.0km(c,d) 处的纵向剖面。黑线和蓝线分别代表真实和初始模型;黄线与绿线分别代表常规 PCG 和 MDPCG 方法反演结果。

图2.12展示了在前两个阶段的反演中,归一化的目标函数值随迭代次数的下降曲线。可以看到,MDPCG方法要比常规PCG方法收敛更快。在第一个阶段,模式解耦反演方法的数据拟合程度更高,反演结果恢复了更准确的中低波数成分。在第二个阶段,常规PCG方法最终在 25 次迭代之后停止更新且数据残差仍相当大,而 MDPCG 方法在 22 次迭代后数据残差快速下降达到终止条件。这些分析表明利用模式解耦对梯度做预条件可以很有效地在反演中降低参数耦合从而加速收敛。

表2.1 中列出了在 8 节点(每节点 15 核)的工作站上每个阶段的迭代次数和

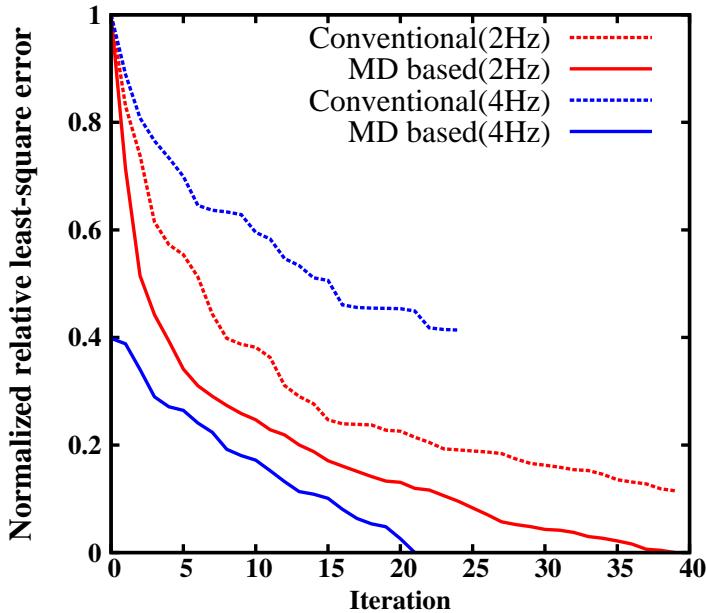


图 2.12 归一化后的 L2 残差随迭代次数的变化。红色与蓝色代表第一和第二阶段的反演，虚线代表常规 PCG 方法实线代表 MDPCG 方法。

总的计算时间。每个阶段我们设定最大迭代次数为 40 次。因为当搜索不到合适步长的时候迭代会自动终止，所以不同阶段的实际迭代次数并不相同。在常规方法中，严重的参数耦合效应会影响从低频数据中重建出合适的宏观模型，这就导致在高频阶段无法获得合理的梯度方向，使得迭代过早终止。而 MDPCG 方法可以一定程度压制参数耦合，在低频阶段能够重建出合适的宏观模型，从而使得高频阶段的梯度更合理。这也是为什么模式解耦方法能获得更准确、分辨率更高的反演结果。总的来说，模式解耦方法需要更多的迭代次数，也因此耗费更多计算时间。就本例而言每次迭代的平均用时只增加了 18% 左右。

表 2.1 计算时间对比

Method	Iteration number				Time spent (hour)	
	stage1		stage2		Total	Average
	0-2Hz	0-4Hz	0-6Hz	0-10Hz		
Conventional	40	25	5	7	41.4	0.538
MD-based	40	22	33	13	68.3	0.632

## 2.6 讨论

### 2.6.1 更进一步分解梯度的必要性

理论上讲，可以对正传与反传波场分别解耦从而获得不同模式转换（也即 PP、PS、SP 和 SS）对应的解耦梯度。但是，很难设计出一个单独使用某一模式转

换数据的 EFWI 方法, 因为地面 P/S 分离算法无法区分入射波场的类型, 即无法区分 PP 与 SP(或 PS 与 SS)。或者只能使用分解后的单模式地震数据来进行单参数反演。例如 Ren 和 Liu<sup>[20]</sup>, 在其四步反演策略的第二步中, 当有很强的 S 波能量时, 只采用分解的 P 波场来反演 P 波速度, 或者在弱 S 波能量时仅仅拟合 S 波数据来反演 S 波速度。

需要注意的是, 在梯度计算中正传波场解耦等价于次级源(或背景波场)的波模式解耦, 而次级源又是 Frechét 导数中的一部分。因此可以将该线性问题写为:

$$\mathbf{J}^{XY} \delta \mathbf{m} = \delta \mathbf{u}^{XY}, \quad (2.49)$$

其中 X 和 Y 分别表示次级源与散射 Green 函数的波模式,  $\delta \mathbf{u}^{XY}$  则表示 XY 模式的扰动波场。根据方程(2.43)的推导方式, 可以获得相应的分辨率矩阵:

$$\mathbf{R}^{XY} = \mathbf{H}_a^{-g} \mathbf{J}^\dagger \mathbf{J}^{XY}. \quad (2.50)$$

图2.13展示了 PP、PS、SP 和 SS 模式的分辨率矩阵, 其观测系统与图2.6中一致, 但是采用了 P 和 S 波的混合震源。由于更加复杂的波现象, 图中分辨率矩阵的对角带更宽。可以看到,  $\mathbf{R}^{PP}$  与  $\mathbf{R}^P$  十分类似, 而  $\mathbf{R}^{SP}$  却几乎为空矩阵。这表明用 PP 波数据来反演  $V_p$  会受到来自  $V_s$  的干扰。而 SP 波数据则对两个参数的反演贡献都很小。从 Ren and Liu (2016)<sup>[20]</sup> 的例子中(见其文中图 19 与 20)可看到, 即使震源中含有足够强的 S 波能量, SP 梯度也很弱且有很多噪音。一个可能的解释就是如图2.14所示, SP 的散射能量很弱。此外, 也难以区分出 PS 和 SS 模式各自的贡献, 因为从图2.13中看到,  $\mathbf{R}^{PS}$  和  $\mathbf{R}^{SS}$  的非零元素分布非常一致, 也就是说它们的分辨能力相似。因此, 通过正传波场解耦来进一步压制参数耦合效应的潜力非常有限, 尽管这样会带来更多的计算量。这也是为什么本文只分解反传波场来对梯度进行预条件。

## 2.6.2 密度模型的反演

密度扰动同时散射 P 和 S 波, 但是却几乎不影响两种波模式的相位或者走时。这些模式的散射能量大多与入射波场的传播方向相反<sup>[31,62]</sup>。因此, 密度作为一个次级效应参数, 由于其微弱的敏感性和多参数的耦合效应<sup>[31,43]</sup>, 很难被准确重构。这也是为何很多 EFWI 的研究只考虑常密度的情形<sup>[34,39,40]</sup>。只有很少一部分的工作能够利用多尺度策略和(或)不同参数化方式的选取中获得较为合理的密度反演结果<sup>[71]</sup>。最近, 基于子空间方法<sup>[138]</sup>, Xu and McMechan<sup>[120]</sup> 提出了一种多步长的梯度类方法来压制  $V_p$ ,  $V_s$  和  $\rho$  之间的串扰。Yang et al. (2016)<sup>[67]</sup> 采用改进的散射积分法(SI)通过 Hessian 信息来改善声波 FWI 中  $V_p$  和  $\rho$  的估计。尽管 Ren and Liu (2016)<sup>[20]</sup> 提出了基于波场解耦的四阶段多尺度策略来做 EFWI, 但是

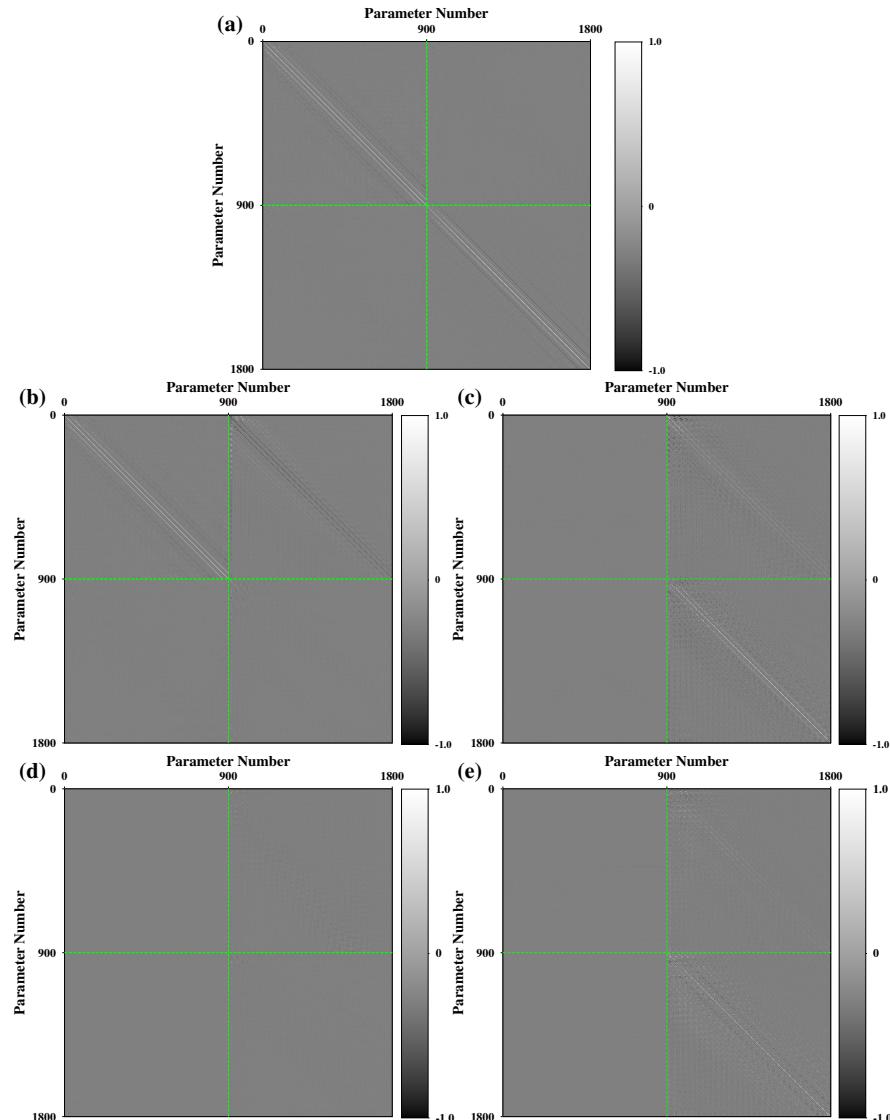


图 2.13 采用混合震源时不同模式数据转换的分辨率矩阵。(a)  $\mathbf{R}$ , (b)  $\mathbf{R}^{PP}$ , (c)  $\mathbf{R}^{PS}$ , (d)  $\mathbf{R}^{SP}$  和 (e)  $\mathbf{R}^{SS}$ .

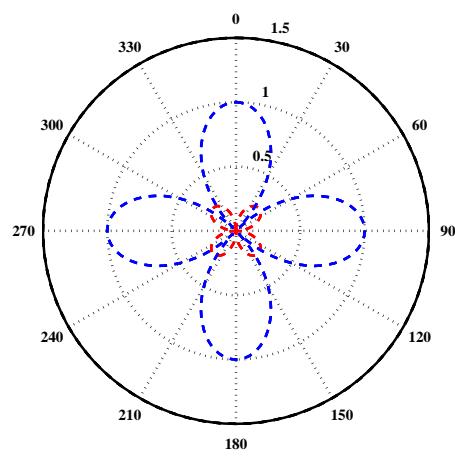


图 2.14 归一化的 SP 模式(红色)和 SS 模式(蓝色)的辐射模式。

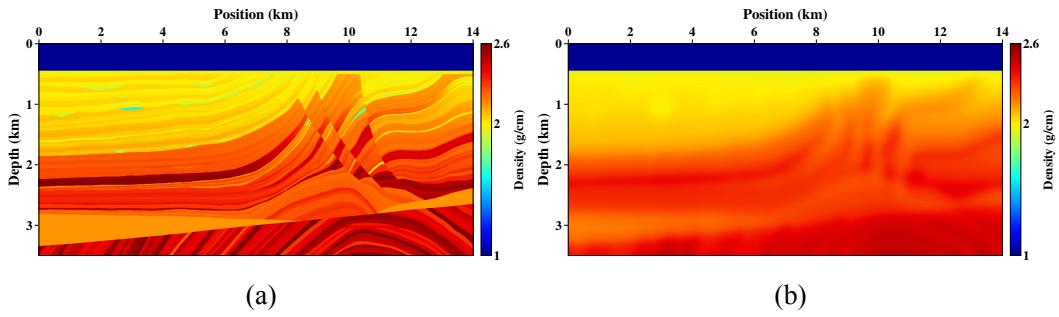


图 2.15 真实 (a) 和初始 (b) Marmousi-II 的密度模型

他们只是在第二阶段中采用了 P/S 分离来压制  $V_p$  和  $V_s$  之间的耦合, 然后通过多步长的手段来改善三参数同时反演的效果。在他们展示的 overthrust 模型中, 密度的反演结果仍然偏离真实模型较远。因此, 非常有必要进一步调查模式解耦预条件方法对改善密度反演的潜力。

采用速度-密度参数化方式, 密度的梯度公式可以表示为<sup>[23,136]</sup>:

$$\hat{\mathbf{g}}_\rho = (V_p^2 - 2V_s^2)\mathbf{g}_\lambda + V_s^2\mathbf{g}_\mu + \mathbf{g}_\rho, \quad (2.51)$$

其中  $\mathbf{g}_\lambda$ ,  $\mathbf{g}_\mu$  和  $\mathbf{g}_\rho$  为采用  $\rho$ - $\lambda$ - $\mu$  参数化时的梯度, 也即:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_\lambda &= - \int_0^T \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial \psi_k}{\partial x_l} \delta_{ij} \delta_{kl} dt, \\ \mathbf{g}_\mu &= - \int_0^T \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial \psi_k}{\partial x_l} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) dt, \\ \mathbf{g}_\rho &= - \int_0^T \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \psi_i dt. \end{aligned} \quad (2.52)$$

如前文所述, 在 Born 近似下, S 波数据对  $V_s$  的扰动更敏感, 基于以上事实前文采用了解耦梯度的方式来同时反演  $V_p$  和  $V_s$ 。然而, 考虑密度反演时, 由于密度扰动同时产生 P 与 S 波散射数据, 因此上述逻辑就不再成立。联合方程(2.35)和(2.51)来进行三参数同时反演。采用同样的观测系统和反演策略并引入原始 Marmousi 密度模型来进行数值实验。

如图2.16所示, 由于强烈的参数耦合效应, 采用 PCG 优化的常规 EFWI 方法对三个参数都未能获得合理的重建。在模型左侧软海底区域, 在引入密度变化后, 反演的病态性变得更强。 $V_p$  和  $V_s$  之间的耦合甚至导致反演结果中结构的错位。在采用 MDPCG 之后,  $V_p$  和  $V_s$  的反演都获得了很大的改善, 但是密度的反演结果仍然不准确, 包含了较多来自  $V_s$  扰动的“脚印”(见图2.17和图2.18)。不管如何, 可以看到模式解耦可以降低反问题病态程度并提高反演模型的分辨率。若想进一步改善密度反演, 就需要用到更多的多尺度策略以及 Hessian 的逆来更好的压制参数耦合效应。

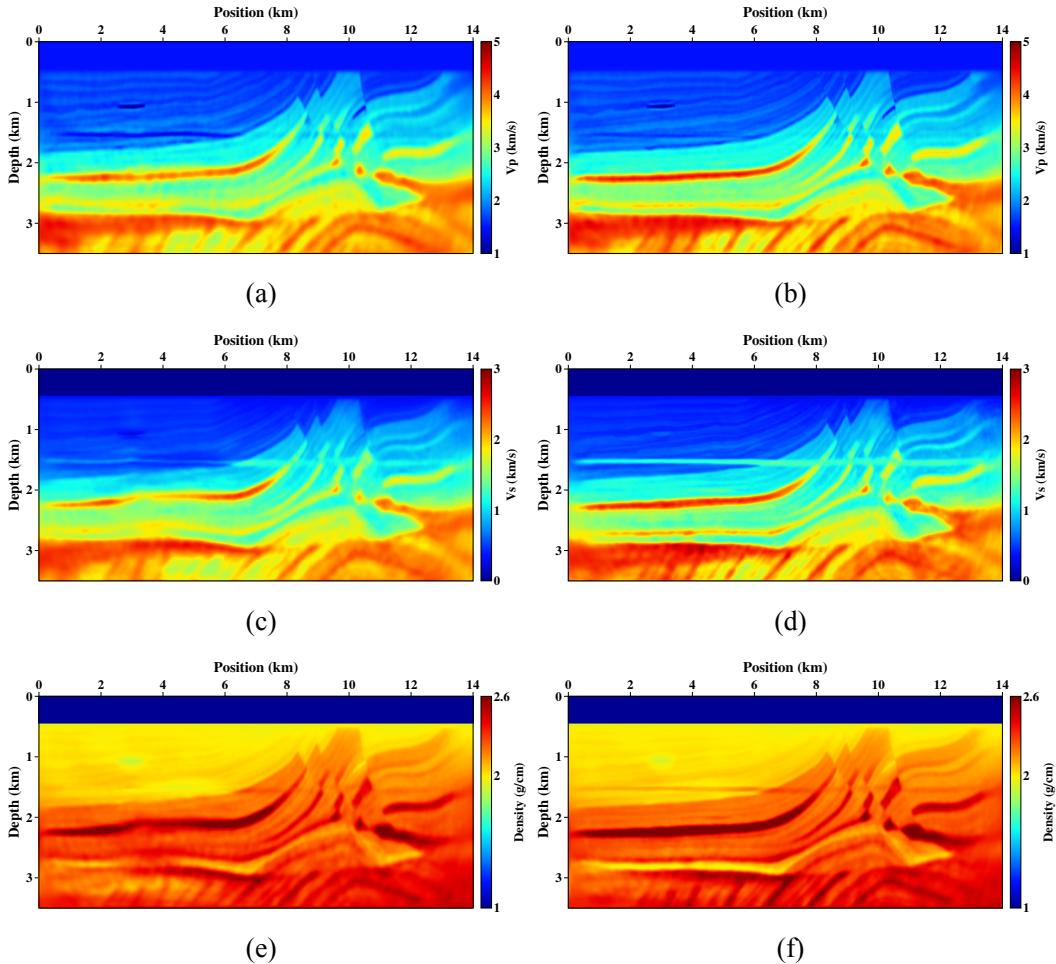


图 2.16 密度变化时常规和模式解耦的 EFWI 结果对比。左侧为常规 PCG 方法反演结果, 右侧为 MDPCG 方法反演结果。其中 (a),(b) 为  $V_p$ ; (c), (d) 为  $V_s$ ; (e), (f) 为  $\rho$ 。

## 2.7 本章小结

多参数耦合效应使得常规梯度类 EFWI 受到很大挑战, 即使在只考虑 P 和 S 波速度的反演时也是如此。辐射模式表明两种速度扰动都会产生 P 波数据扰动从而导致在特定散射角范围内的重叠效应。相反, S 波扰动波场则只与 S 波速度扰动相关。通过引入弹性波模式解耦, 本文发现在解耦之后, 不同波模式的 Frechét 和数据残差之间的互相关对梯度的贡献非常微弱。通过该交叉项近似, 导出了基于模式解耦的梯度, 该梯度可以通过伴随状态法快速计算得到。利用解耦之后的 Frechét 导数, 调查了 Hessian 以及分辨率矩阵对应于 P 波与 S 波数据的有关分量。这些调查确认了在 S 波速度的梯度计算中丢弃 P 波分量可以降低参数耦合效应。因此, 采用基于模式解耦的方法来反演  $V_s$  等价于采用 S 波数据的单参数反演。借助较好的预条件算子消除 S 波数据的照明以及有限带宽效应, 就能获得近似 GN 方法的收敛速度而不涉及任何 Hessian 相关的计算。对于双参数同时反演,  $V_s$  反演的改善可以明显提高  $V_p$  的反演精度。数值实验尤其是包含软

海底结构的 Marmousi 模型实验,表明模式解耦方法对压制参数耦合、加速收敛是有效的。

到目前为止,通过波形反演来重建可靠的密度模型仍然非常困难。正如我们所看到的那样,模式解耦并未改善密度反演结果。但是在引入密度扰动后,反演病态性明显加剧后,采用 MDPCG 方法的 EFWI 仍能保证获得比较合理的  $V_p$  和  $V_s$  结果。

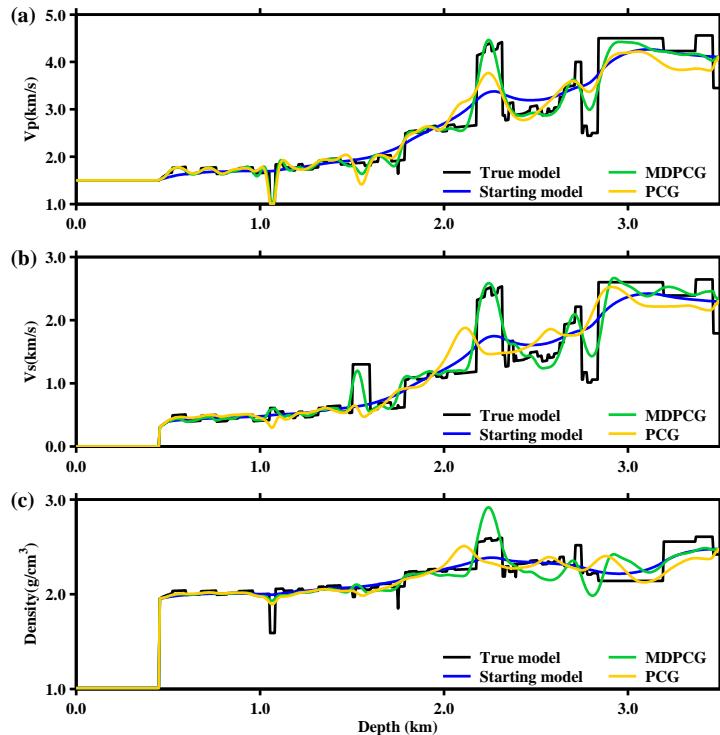


图 2.17 速度与密度模型在 3.0km 处的纵向剖面。黑线和蓝线分别代表真实和初始模型;黄线与绿线分别代表常规 PCG 和 MDPCG 方法反演结果。

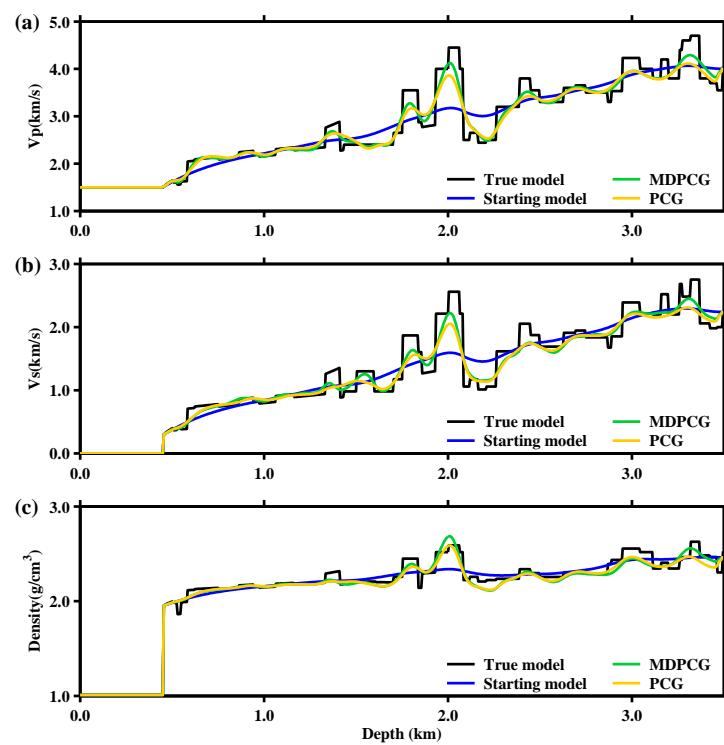


图 2.18 速度与密度模型在 9.0km 处的纵向剖面。黑线和蓝线分别代表真实和初始模型; 黄线与绿线分别代表常规 PCG 和 MDPCG 方法反演结果。

## 第3章 弹性波波动方程反射走时反演

### 3.1 引言

目前 FWI 应用成功的案例中, 主要利用了长偏移距透射波以及临界反射波等来更新速度模型的中低波数分量。中深部的模型更新则主要集中在偏移响应对应的高波数部分。在中深部区域, 即使以目前大偏移距、宽方位的观测技术也难以保证有足够的透射波穿过。如何利用现有数据准确反演中深部速度模型的中低波数成分是人们非常关心的课题。

反射波可以更好地照明深部结构。受 MBTT 方法的启发, Xu et al (2012)<sup>[4]</sup> 提出了反射波波形反演方法(RWI), 通过反射波来产生类似透射路径的信息来获得中低波数成分的更新。RWI 基于波动理论建立中深部背景模型的思路立即获得了广泛的关注 (Wang et al., 2013<sup>[85]</sup>; Wu and Alkhalifah, 2015; Zhou et al., 2015<sup>[6]</sup>; Guo and Alkhalifah, 2016<sup>[90]</sup>)。它实质是通过最小平方偏移等手段获取“真振幅”的反射率, 然后利用反偏移预测出反射波数据, 并将它与观测数据的波形残差反投影到 Born 波路径上进行背景速度更新。尽管 RWI 的目的在于更新背景速度, 当初始模型偏离真值较远时, 反射波波形匹配也会受到 cycle-skipping 影响。这时分频等多尺度策略会有助于避免 cycle-skipping 现象<sup>[85]</sup>。此外, 利用走时信息构建目标函数也可以较好地避免上述问题。

在成像域利用反射波更新背景速度的方法由来已久, 如射线层析<sup>[139]</sup>。波动方程速度偏移分析 (WEMVA) 近年来也获得了长足的发展 ( Sava and Fomel(2006)<sup>[76]</sup>; Yang and Sava(2011)<sup>[77]</sup>; Almomin and Biondi(2012)<sup>[9]</sup>; Sun and Symes(2012)<sup>[78]</sup>)。WEMVA 通常需要引入扩展成像条件, 采用各类准则衡量成像残差, 例如叠加能量最大(SI)<sup>[140]</sup>、微分相似优化(DSO)<sup>[141]</sup> 和差异剩余偏移(DRM)<sup>[142]</sup> 等来实现背景模型的更新。但 WEMVA 受困于昂贵的计算代价, 尤其在三维问题中。

为了克服振幅拟合有关的目标函数带来的非线性, 本章采用与背景速度更加线性相关的走时信息来构建目标函数。通过动态图像识别(DIW) 技术来获取模拟与观测反射数据之间的时移量<sup>[88]</sup>, 提出了弹性波波动方程反射走时反演(EWERTI)方法。相比互相关提取时移(空移)量的方式<sup>[7,89]</sup>, DIW 能更准确地获取局部的走时差异。此外, 弹性波走时反演中需要处理模式转换产生的虚假反射波路径的问题, 即需要根据对应的 PP 波与 PS 波波路径(假设 P 波震源)更新  $V_p$  与  $V_s$  模型。文中将联合地面 P/S 分离 +DIW 获取不同波模式的走时残差, 并通过

空间波场模式解耦预条件梯度来降低非线性程度、压制参数耦合等。在此基础上，设计出两步的反演流程来实现稳健的 EWERTI 方法。Sigsbee2A 模型的数值实验将验证 EWERTI 方法的有效性。

### 3.2 弹性波波动方程反射走时反演

利用拟合反射波来反演模型参数就需要预测出反射波数据，再与观测数据进行匹配。弹性反射波的模拟通常采用偏移/反偏移的方式实现。在 EWERTI 中，需要匹配反射波数据的走时信息，并将走时残差反投影到反射波路径上更新背景速度模型。下面从弹性波方程出发导出 EWERTI 的梯度公式。反演过程中，同样假设在背景弹性介质( $c_{ijkl}$ )中有参数扰动  $\delta c_{ijkl}$ ，则背景波场与扰动波场分别满足以下方程：

$$\rho \frac{\partial u_i^2}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ c_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right] = f_i, \quad (3.1)$$

和

$$\rho \frac{\partial \delta u_i^2}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ c_{ijkl} \frac{\partial \delta u_k}{\partial x_l} \right] = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \delta c_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right], \quad (3.2)$$

这里  $\delta u_i$  可以看作是用 ERTM 或其他方法获得的成像结果( $\delta c_{ijkl}$ )进行反偏移构建的反射波数据。观测数据  $\mathbf{d}^o$  与模拟数据  $\mathbf{d}^c$  之间的走时残差需要达到最小，则目标函数写成：

$$\begin{cases} \tau(\mathbf{x}_r, t; \mathbf{x}_s) = \arg \min_{\tau} \| \mathbf{d}^c(\mathbf{x}_r, t; \mathbf{x}_s) - \mathbf{d}^o(\mathbf{x}_r, t + \tau; \mathbf{x}_s) \|^2 \\ E = \frac{1}{2} \int \tau^2(\mathbf{x}_r, t; \mathbf{x}_s) dt d\mathbf{x}_r d\mathbf{x}_s, \end{cases} \quad (3.3)$$

其中走时残差  $\tau(\mathbf{x}_r, t; \mathbf{x}_s)$  可以通过 DIW 技术来获取。通过类似 Ma and Hale (2013)<sup>[88]</sup> 的推导(见附录B)，本文导出了如下梯度公式：

$$\frac{\partial E}{\partial c_{ijkl}} = - \int \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial \delta \psi_k}{\partial x_l} + \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} \frac{\partial \psi_k}{\partial x_l} \right), \quad (3.4)$$

其中， $\psi_i$  和  $\delta \psi_i$  是共轭的背景波场和散射波场，满足：

$$\rho \frac{\partial \psi_i^2}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ c_{ijkl} \frac{\partial \psi_k}{\partial x_l} \right] = \tau(\mathbf{x}_r, t; \mathbf{x}_s) \frac{\dot{d}_i^o(\mathbf{x}_r, t + \tau; \mathbf{x}_s)}{h_i(\mathbf{x}_r, t; \mathbf{x}_s)}, \quad (3.5)$$

和

$$\rho \frac{\partial \delta \psi_i^2}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ c_{ijkl} \frac{\partial \delta \psi_k}{\partial x_l} \right] = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \delta c_{ijkl} \frac{\partial \psi_k}{\partial x_l} \right], \quad (3.6)$$

式中  $h_i(\mathbf{x}_r, t; \mathbf{x}_s) = (\dot{d}_i^o(\mathbf{x}_r, t + \tau; \mathbf{x}_s))^2 - \ddot{d}_i^o(\mathbf{x}_r, t + \tau; \mathbf{x}_s)(d_i^c(\mathbf{x}_r, t; \mathbf{x}_s) - d_i^o(\mathbf{x}_r, t + \tau; \mathbf{x}_s))$ ，而  $\dot{d}$  则代表  $d$  的时间导数。需要注意的是，上式伴随源的分母中包含有

地震记录的二阶导数,会导致除法的不稳定,这里采用时间方向的积分  $h'_i(\mathbf{x}_r; \mathbf{x}_s) = \int h_i(\mathbf{x}_r, t; \mathbf{x}_s) dt$  来代替原有的分母项(付继有等, 2015<sup>[143]</sup>)。在方程(3.4)的右端,第一和第二项分别表示震源端和检波点端的反射波路径。可以通过链式法则导出 P 波与 S 波速度的梯度公式:

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial V_p} &= 2\rho V_p \frac{\partial E}{\partial c_{ijkl}} \delta_{ij} \delta_{kl}, \\ \frac{\partial E}{\partial V_s} &= 2\rho V_s \frac{\partial E}{\partial c_{ijkl}} (-2\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}).\end{aligned}\quad (3.7)$$

### 3.3 弹性波反射波路径核函数

反射波反演的关键是将预测的与观测的反射波之间的残差反投影到反射波路径上,从而实现对模型的更新。因此,反射波波路径的计算将是反演中的核心任务。由于弹性波中存在各种模式转换,所以反射波波路径的复杂程度远大于声波中的情况。首先分析弹性波反射波路径的性态,并尝试通过模式解耦克服反演中遇到的部分困难。由附录B推导可看出,不同的目标函数只影响共轭状态方程的伴随震源项,并不影响最终梯度的互相关方式。因此分析弹性反射波波路径的核函数性态将有助于理解模式耦合引起的问题,从而为压制梯度中的假象并帮助设计新的反演策略提供理论依据。

为了简化表达,将式(3.4)重新写作:

$$\nabla E(\mathbf{m}_0) = - \int (\mathbf{u} \cdot \delta \boldsymbol{\psi} + \delta \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\psi}) \quad (3.8)$$

其中  $\mathbf{u}$  和  $\boldsymbol{\psi}$  为背景介质的正传与共轭波场,  $\delta \mathbf{u}$  和  $\delta \boldsymbol{\psi}$  为正传与共轭的散射场。这里统一用  $\cdot$  表示波场分量的互相关。上式只示意性表达出反射波路径的计算方式,而不同参数化方式相应的具体计算公式需要参照链式法则获得。上式中第一项表示震源到反射界面的波路径,第二项表示从反射界面到检波点的波路径。考虑到波场解耦,上式的梯度也可以分解成 P 或 S 波数据组合的分量:

$$K_m^{MN} = - \int (\mathbf{u}^M \cdot \delta \boldsymbol{\psi}^N + \delta \mathbf{u}^M \cdot \boldsymbol{\psi}^N), \quad (3.9)$$

其中  $m \in \{V_p, V_s\}$ ,  $M, N \in \{P, S\}$ 。

为了观察弹性波反射波路径(敏感核函数),先在单界面模型中计算反射波波路径。假定只有  $V_p$  的扰动界面(如图3.1a 和 b)。由于没有  $V_s$  扰动,因此没有模式转换能量而只有 PP 波反射,非常接近于声波情况。采用该模型获得的反射波波路径如图3.1c 和 d。可以看到,  $V_p$  的反射波路径分为震源端以及检波点端左右两支,与声波波路径非常接近。同时,  $V_s$  也会有相应的波路径能量,但是主要集中在

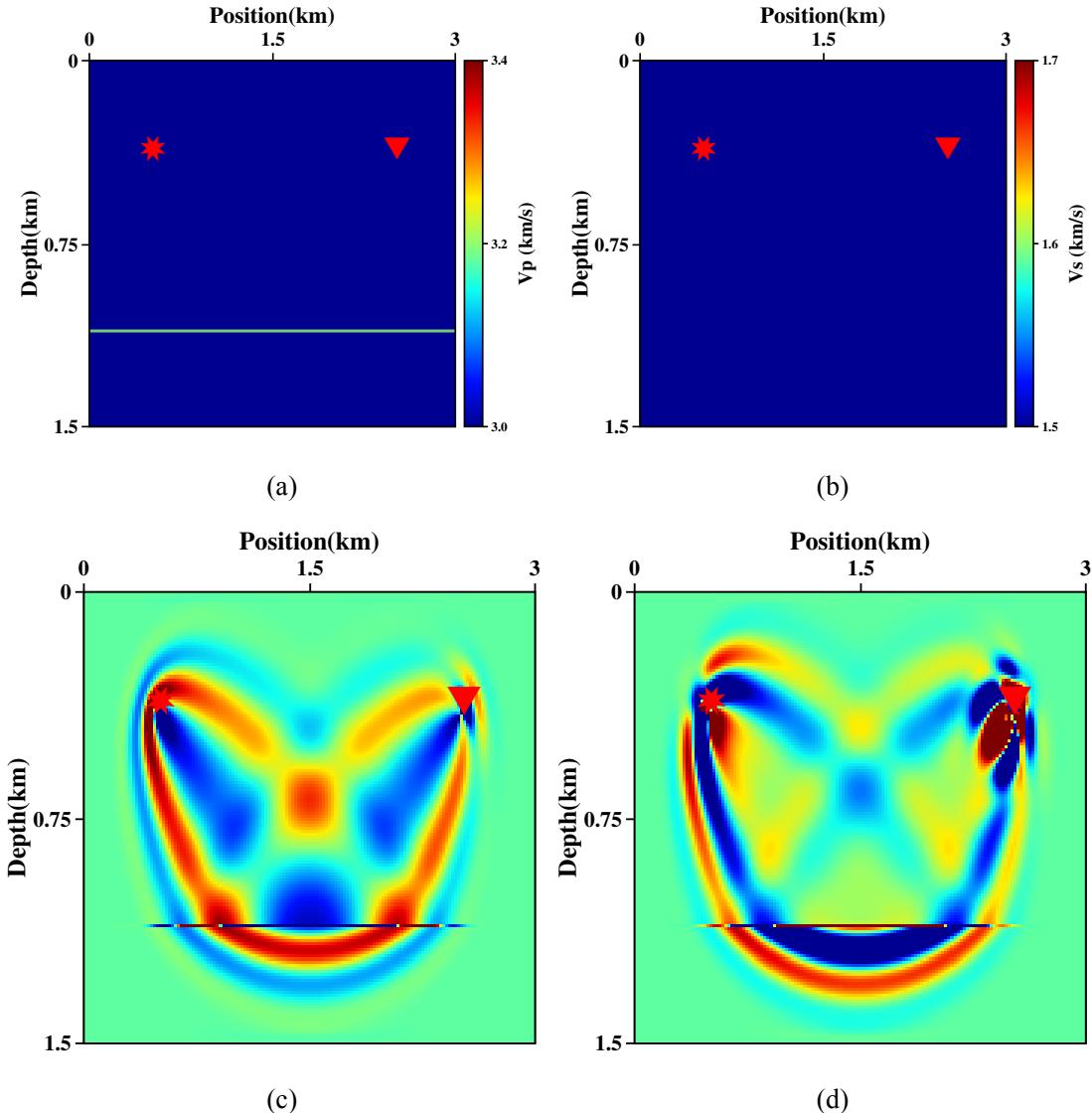


图 3.1 单  $V_p$  界面的反射波路径。(a)  $V_p$  模型,(b)  $V_s$  模型,(c)  $V_p$  敏感核函数,(d)  $V_s$  敏感核函数.

边缘部分,第一菲涅尔带中央区域能量较弱。原因可能是这部分波路径信息是与 PP 波反射能量对应的,对  $V_s$  背景信息并不敏感。

然后,考虑  $V_s$  模型存在界面的情况(图3.2a 和 b)。此时波场就会变得十分复杂,在正传及反传波场中会同时存在 P 波与 S 波,导致反射波路径变得更加复杂。图3.2中  $V_p$  敏感核函数与图3.1有所不同,这是因为当存在  $V_s$  反射界面时,反传的散射波场在界面处产生“非物理”的 SP 转换波,这部分波场与背景场中的 P 波互相关就会产生一些假象。而在  $V_s$  的敏感核函数中,可以看到多种模式转换导致的多个波路径叠加,使得核函数十分复杂。但是可以观察到其中的 P 波路径的能量总是占主导地位。如果直接采用该核函数来计算目标函数关于  $V_s$  的梯度,一定会因为这些严重的 cross-talk 对反演带来更多的麻烦。

根据公式(3.9), 将原始的  $V_s$  核函数分解为四个部分。如图3.3所示,  $K_{V_s}^{PP}$  与

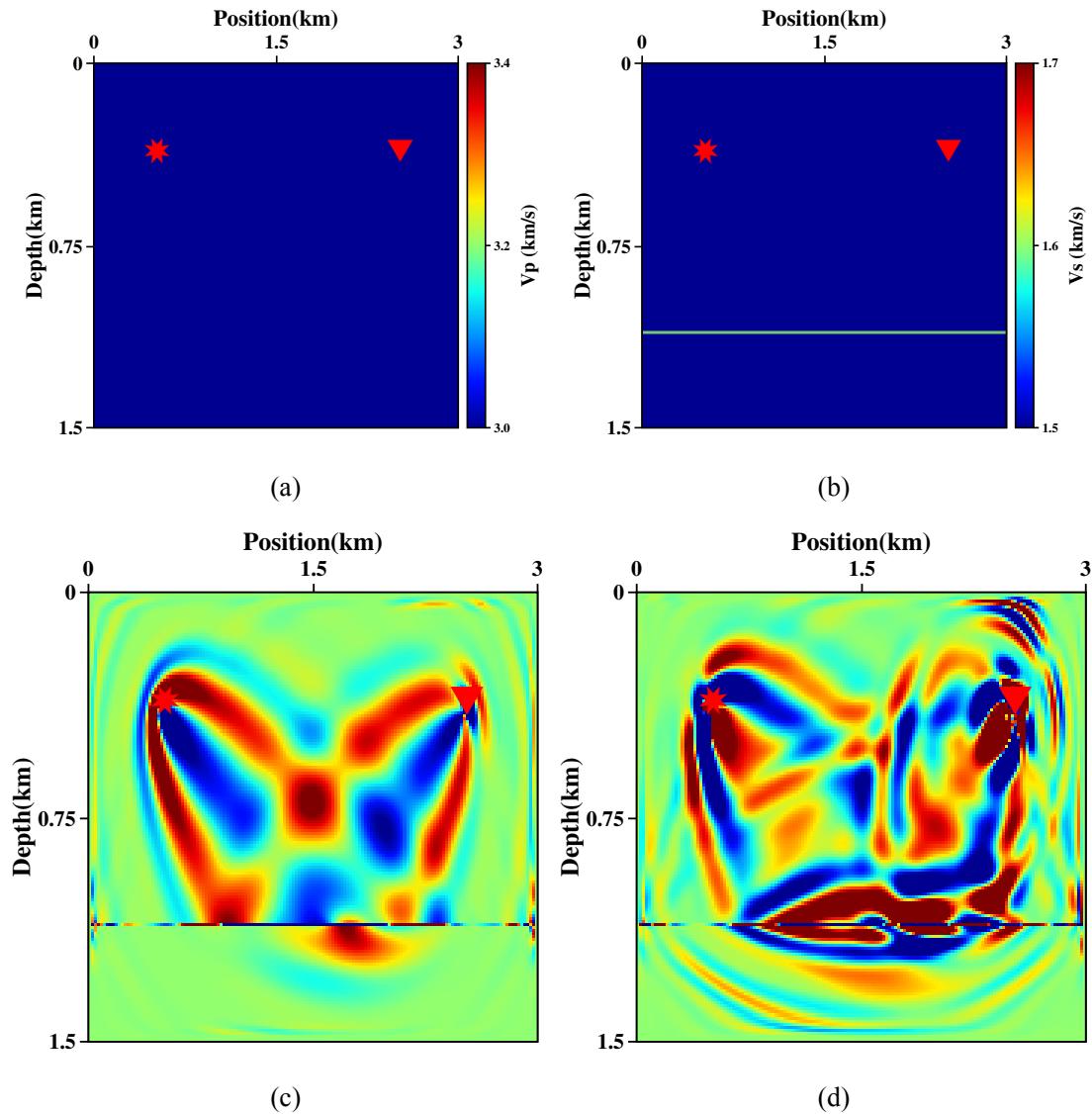
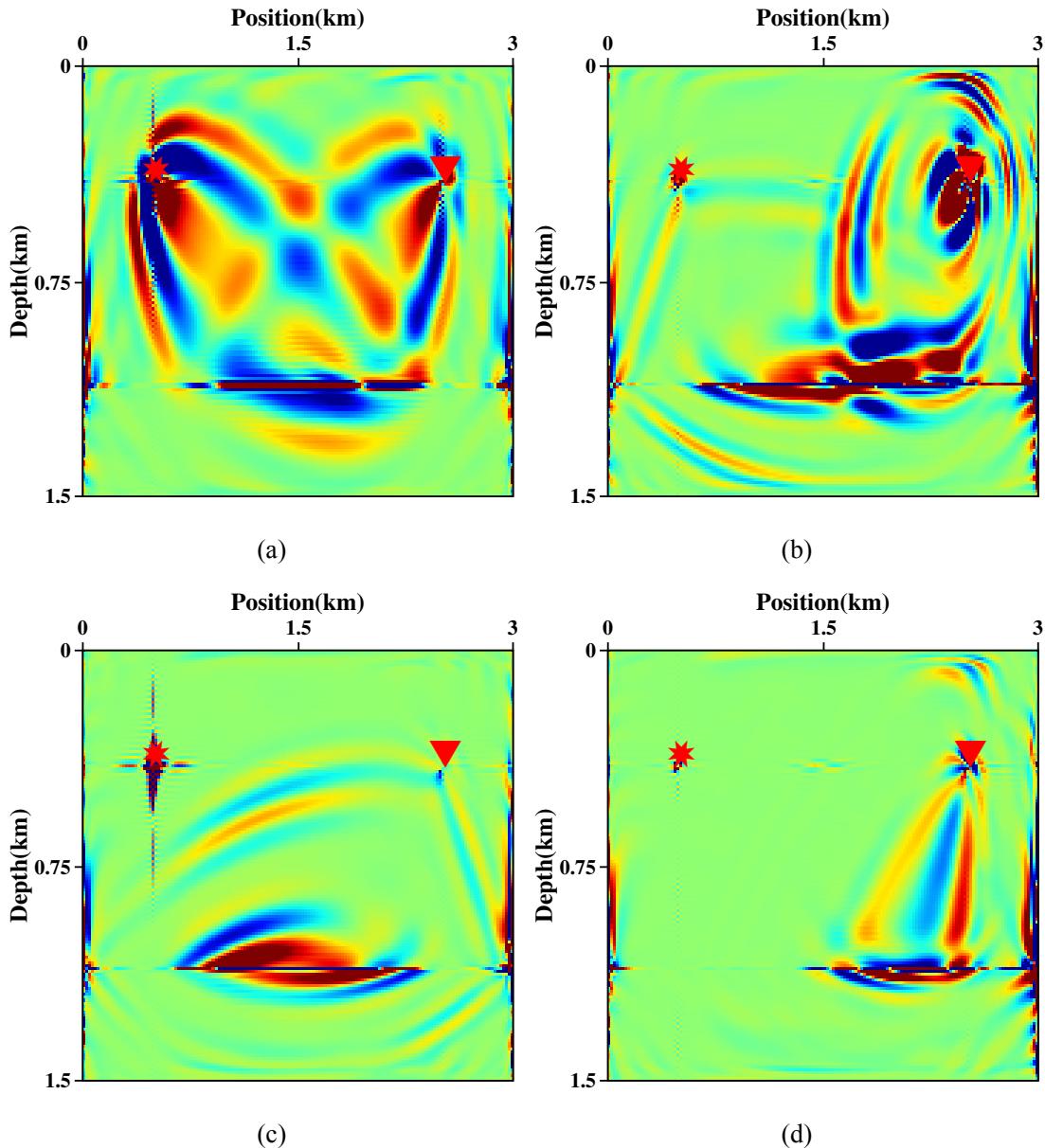


图 3.2 单  $V_s$  界面的反射波路径。(a)  $V_p$  模型, (b)  $V_s$  模型, (c)  $V_p$  敏感核函数, (d)  $V_s$  敏感核函数。

图3.2c 中的  $V_p$  核函数十分类似,但是主要能量的符号相反(在第二章图2.7中有类似现象);  $K_{V_s}^{PS}$  与  $K_{V_s}^{SP}$  则包含非常多的高频信息,它们主要是不同模式的正传与反传波场之间的偏移脉冲响应,如果不对这些高波数成分进行压制处理就会对  $V_s$  梯度的计算带来较多的高频干扰,不利于低波数背景速度的更新;  $K_{V_s}^{SS}$  则与其他三者有些不同,只包含了检波点端的单支反射路径,这是由于采用了 P 波震源,在震源端的波场中不包含 S 波数据( $K_{V_s}^{SS}$  的震源端项会是 0)。这样的话,  $K_{V_s}^{SS}$  就几乎不受到 P 波路径的影响,且较少包含高波数的偏移响应。如果利用好这些分解后核函数分量的特征,将会非常有助于背景  $V_s$  的反演。

图 3.3  $K_{V_s}$  敏感核函数的四个分量:(a)  $K_{V_s}^{PP}$ , (b)  $K_{V_s}^{PS}$ , (c)  $K_{V_s}^{SP}$ , (d)  $K_{V_s}^{SS}$ .

### 3.4 反射走时反演流程

弹性介质中 P 波震源情况下,不同模式的转换波(主要是 PP 与 PS 波)同相轴之间会互相叠加、互相交叉。在用 DIW 提取走时残差的时候,这些交叉点的位置就会变成一些奇异点带来很大麻烦。因此,如果直接用原始多分量数据的话,拾取到的  $\tau(\mathbf{x}_r, t; \mathbf{x}_s)$  就会不准确,这也是为什么式(3.6)中的梯度很难直接应用。为了解决这个问题,本文将观测与模拟地震数据分解为 P 波与 S 波两部分。该模式分解只作用于地面地震数据<sup>[16]</sup>,可以快速地获得每一炮数据分解之后的矢量 P 波或 S 波地震记录。这样,走时残差就可以被分成 P 波与 S 波两部分,使得弹性波 WERTI 变得可行。于是,设计出一个两阶段的反演流程,先 P 波阶段后 S 波阶段。由于 DIW 提取走时的方式对数据的频率成分并不敏感,因此 EWERTI 中的

多尺度策略主要体现在参数反演先后顺序上，并不需要过多考虑分频的策略。

### 3.4.1 $V_p$ 反演

在这个阶段主要采用 PP 反射波来建立 P 波速度的背景模型。首先，从 ERTM 中获得 P 波速度的扰动，即  $\delta V_p$ 。因为在速度不准的情况下大偏移距数据的偏移/反偏移结果会造成模拟的反射波零偏移距走时误差，进而增加反演的非线性程度。这里为了确保模拟数据与观测数据中零(小)偏移距反射走时相匹配，只采用小偏移距的数据获取  $\delta V_p$ 。此外，由于在 EWERTI 中只考虑走时，可以只进行 ERTM 成像而不是 ELSRTM 来估计反射率。这也降低了反演中对反射系数估计的依赖程度。因此，目标函数变为最小化 PP 反射波的走时残差：

$$E_{pp} = \frac{1}{2} \int \tau_{pp}^2(\mathbf{x}_r, t; \mathbf{x}_s) dt d\mathbf{x}_r d\mathbf{x}_s. \quad (3.10)$$

这样，采用分离的 P 波记录来计算方程(3.5)的右端项，并用  $\delta V_p$  替换方程(3.2)和(3.6)中的  $\delta c_{ijkl}$ ，就可以计算得到  $V_p$  的梯度 ( $\frac{\partial E}{\partial V_p}$ )。与 EFWI 一样，该梯度中的互相关项自动隐含了散度算子。因此，在计算时只利用了 PP 反射波，所以不需要额外施加空间域的模式解耦。这个 PP 波走时反演本质上接近于声波反射走时反演，区别在于需要将地面多分量地震记录进行数据域模式分离。注意，在分离后的数据中可能包含部分 SP 模式的转换波，它们对  $V_p$  的反演可能造成不利的影响，这需要今后更深入的研究。

### 3.4.2 $V_s$ 反演

接下来将对 PS 反射波采用类似的反演。相应地，目标函数变为：

$$E_{ps} = \frac{1}{2} \int \tau_{ps}^2(\mathbf{x}_r, t; \mathbf{x}_s) dt d\mathbf{x}_r d\mathbf{x}_s. \quad (3.11)$$

值得一提的是，PS 反射波的模拟(预测)方式与前一阶段略有不同。这里有两种方式来模拟 PS 反射波：

方式 I：采用反演好的  $V_p$  以及初始  $V_s$  模型来实现 PS 波偏移成像，然后使用该成像结果进行反偏移；

方式 II：由于  $V_p$  的背景速度在前一阶段已经被较好地恢复，此时 PP 波成像结果应该比较接近准确位置。考虑到大多数情况下，地下介质中  $V_p$  与  $V_s$  的界面是比较一致的，因此也可以采用 PP 波成像结果作为界面来模拟 PS 反射波。

经过测试，发现第一种方式产生的近偏移距走时对  $V_p$  模型的误差非常敏感，即使  $V_p$  模型在真值附近扰动也有可能获得方向错误的走时残差。对于非对称的 PS 反射波的路径，假定地下存在如图3.4所示的单界面 PS 波反射。由几何关系以

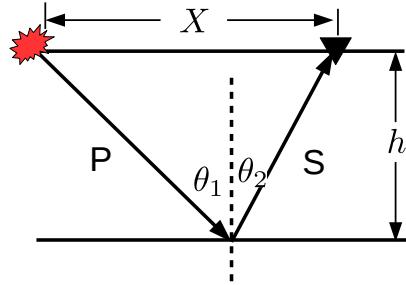


图 3.4 单界面 PS 反射波示意图。

及 Snell 定律, 存在如下关系

$$\frac{\sin\theta_1}{V_p} = \frac{\sin\theta_2}{V_s}, \quad h(\tan\theta_1 + \tan\theta_2) = X, \quad (3.12)$$

其中  $\theta_1$  和  $\theta_2$  分别为入射和反射角,  $h$  为界面深度, 则 PS 波时距曲线关系为:

$$t = \frac{h}{\cos\theta_1 V_p} + \frac{h}{\cos\theta_2 V_s}. \quad (3.13)$$

方式 I 与方式 II 的差异在于速度不准时, 确定界面深度的过程不同。这里数值分析时使用零(小)偏移距的图偏移获得界面深度, 然后带入到式(3.13)中来近似获得错误速度下反偏移预测的反射数据时距关系。

方式 I 中, 在图偏移时零偏移距走时保持不变, 则偏移后的深度位置满足:

$$\frac{h_1}{V'_p} + \frac{h_1}{V'_s} = \frac{h}{V_p} + \frac{h}{V_s}, \quad (3.14)$$

其中  $V'_p$  和  $V'_s$  为错误的偏移速度。可以求得图偏移的深度:

$$h_1 = \frac{V'_s(V_p + V_s)}{V_s(V'_p + V'_s)}h. \quad (3.15)$$

而采用方式 II 时, 在  $V_p$  存在误差时图偏移求得界面的深度为:

$$h_2 = \frac{V'_p}{V_p}h. \quad (3.16)$$

通常情况下  $V_p > V_s$ , 因此  $\frac{V_p + V_s}{V'_p + V'_s}$  中  $V'_p$  的小偏差也会带来很大的影响, 因此 PS 波零(小)偏移距成像界面的深度会同时受到  $V_p$  与  $V_s$  速度误差的影响。下文将使用式(3.12)-(3.16)测试反偏移重建的反射数据的时距关系对  $V'_p$  和  $h$  的敏感性。

这里将以下几个参数固定为  $V_p = 2500m/s$ ,  $V_s = 1500m/s$ ,  $V'_s = 1300m/s$ , 而  $V'_p$  选取  $2450, 2500, 2550m/s$  三个扰动值。从图3.5可以看到, 采用方式 I 时获取的反射数据对  $V_p$  的误差非常敏感, 在  $\pm 50m/s$  范围内就会引起反偏移数据的走时残差改变方向。相反, 如果采用方式 II, 其走时残差方向都是正确的。

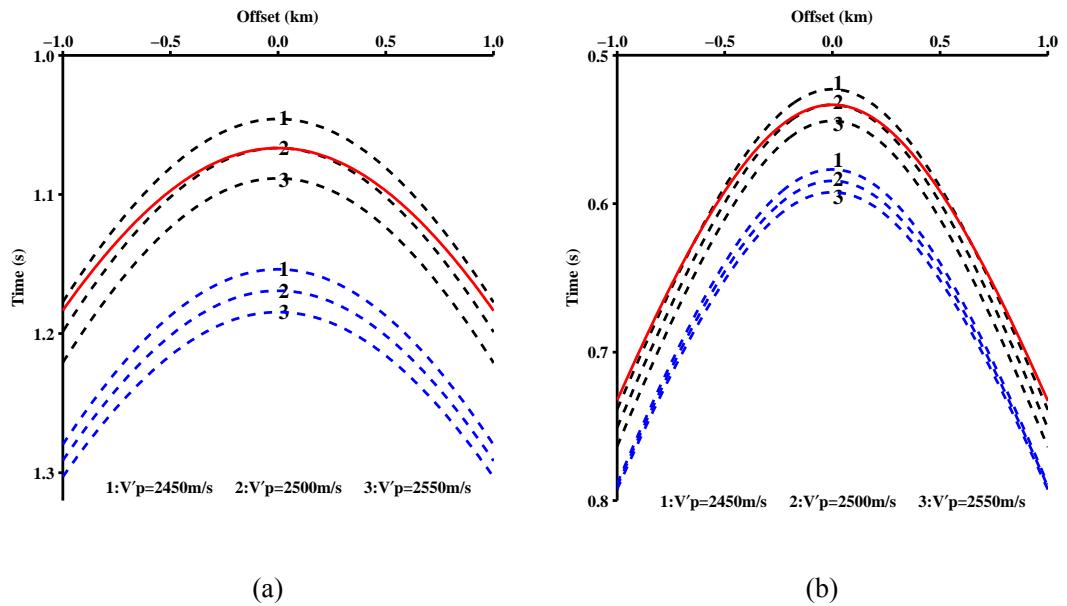


图 3.5 不同界面深度时方式 I(黑色虚线)与方式 II(蓝色虚线)反偏移获得 PS 波走时曲线与真实值(红色实线)之间的对比。数字 1,2,3 分别代表不同  $V'_p$  速度的结果。(a) 界面深度  $h = 1000$ ; (b) 界面深度  $h = 500$ .

所以,本文采用较为准确的 PP 成像( $\delta V_p$ )结果来产生 PS 反射波。但这样做也存在两个弊端:第一、产生的 PS 反射无法保证振幅的准确性,幸运的是这并不会给 DIW 拾取走时残差带来大的困扰;第二、来自深部的 PS 反射可能由于时差太大使得 DIW 拾取受到 cycle-skipping 困扰。不过这个问题可以采用“层剥离”的方式,通过照明能量补偿的控制,先使用浅部的反射走时残差来更新浅层,再使用深部的走时残差更新深部的速度。这样即使初始阶段深部的反射走时残差拾取错误也不影响浅部的速度更新。在浅部更新较好后,深部的反射走时残差也能保证拾取得较准确。

此外,正如前文核函数分析提到,PS 反射中震源端波路径只与 P 波速度相关,因此在计算  $\frac{\partial E}{\partial V_s}$  时可以丢掉方程(3.4)右端项的第一部分。同时,波模式分解也会施加在梯度的计算过程中来确保只有 S 波能量参与计算,即:

$$\frac{\partial E_{ps}}{\partial V_s} = -2\rho V_s \int \left( \frac{\partial \delta u_i^S}{\partial x_j} \frac{\partial \psi_k^S}{\partial x_l} \right) (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}). \quad (3.17)$$

该模式解耦的梯度与 Wang et al. (2015)<sup>[19]</sup> 提出的 EFWI 预条件方式类似,可以在  $V_s$  的反演中降低参数耦合的影响

### 3.5 局部倾角导引正则化

数据域的 WERTI 与成像域射线走时层析有一些相似特性。通常,射线走时层析由于射线路径覆盖不均匀、反射界面深度与速度之间存在耦合等问题会导致反演的多解性,所以射线层析通常不收敛或者很难收敛到正确的速度模型。常规

各向同性平滑算子的正则化约束可以一定程度上降低上述多解性的困扰,但是也很难保证反演收敛到具有地质含义的物理模型。在偏移后,成像结果可以提供地下界面大致的倾角信息,由此设计正则化算子来沿地层倾角对反演进行约束可以有效地应对多解性的问题,从而加快收敛速度、改善反演结果。由于采用波动方程作为波场传播引擎,WERTI 采用波路径信息来反投影走时残差,因而所面临的多解性挑战要小于射线走时层析。不过,对于一些照明不足或者反射路径覆盖不均匀的区域同样也会产生多解性问题。因此,WERTI 中采用局部倾角导引的正则化同样可以加速收敛,并获得具有地质意义的反演结果。

Hale (2009)<sup>[144]</sup> 采用结构张量来估计地层倾角。对于 2D 的图像,结构张量是  $2 \times 2$  的矩阵:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} < s_1^2 > & < s_1 s_2 > \\ < s_1 s_2 > & < s_2^2 > \end{pmatrix}, \quad (3.18)$$

其中  $s_1$  和  $s_2$  表示图像垂直和水平方向的方向导数,  $< \cdot >$  表示 2D 的 Gaussian 平滑函数。上式对应的特征值问题可以表示为:

$$\mathbf{S} = \lambda_u \mathbf{u} \mathbf{u}^T + \lambda_v \mathbf{v} \mathbf{v}^T \quad (3.19)$$

其中  $\lambda_u$  和  $\lambda_v$  分别为特征向量  $\mathbf{u}$  和  $\mathbf{v}$  对应的特征值。定义  $\lambda_u \geq \lambda_v \geq 0$ , 这样的话  $\mathbf{u}$  指示梯度最大的方向, 即与线性结构垂直的方向, 而  $\mathbf{v}$  则指示与线性结构平行的方向。Hale(2009)<sup>[144]</sup> 指出, 可以设置  $\lambda_u(\mathbf{x}) = 0$  和  $\lambda_v(\mathbf{x}) = 1$ , 保证图像中每一处平滑都会沿倾角方向。于是, 沿倾角平滑的滤波器可以通过以下方程求解:

$$(\mathbf{B}^T \mathbf{B} + \mathbf{A}^T \mathbf{S}' \mathbf{A}) \mathbf{h} = \mathbf{B}^T \mathbf{B} \mathbf{f} \quad (3.20)$$

其中  $\mathbf{S}'$  为新构造的结构张量,  $\mathbf{B}$  和  $\mathbf{A}$  分别为求和算子以及差分算子对应的矩阵,  $\mathbf{f}$  为输入图像,  $\mathbf{h}$  为输出的平滑后图像。该方程可以通过共轭梯度法快速求解, 这样就可以采用以上方式对 EWERTI 的梯度进行正则化约束, 大大缩小反演的零空间, 保证收敛到更合理的结果。

## 3.6 数值实验

### 3.6.1 目标函数性态分析

事实上,除了 DIW 提取走时之外,空间或者时间方向上的互相关也经常用来作为提取走时拟合差的方法<sup>[7,89,145]</sup>, 其目标函数为:

$$\begin{cases} \Delta t(h) = \arg \min_{\Delta t} \int d^o(t + \Delta t, h) d^c(t, h) dt, \\ E_t = \frac{1}{2} \sum \| \Delta t(h) \|^2 \end{cases} \quad (3.21)$$

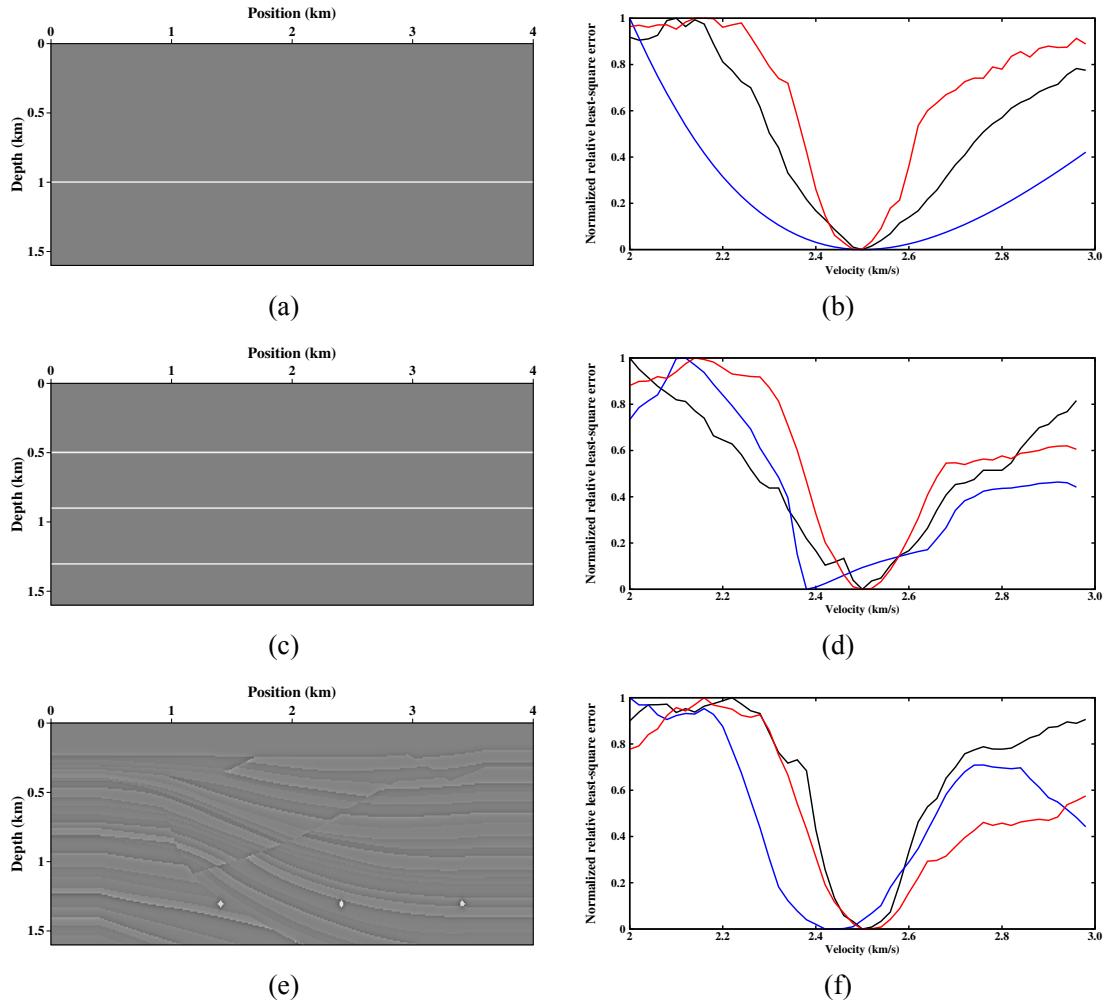


图 3.6 不同模型及对应的 PP 波走时目标函数变化曲线。红色, 蓝色和黑色分别对应 DIW, 时间互相关与空间互相关走时提取方式。

或

$$\begin{cases} \Delta h(t) = \arg \min_{\Delta h} \int d^o(t, h + \Delta h) d^c(t, h) dt, \\ E_h = \frac{1}{2} \sum \| \Delta h(t) \|^2 \end{cases} \quad (3.22)$$

互相关提取的时差反映每一道或每一时刻数据的全局平均效果。如果数据中反射同相轴比较多时, 互相关反映出来的时差并不能体现局部某一个同相轴的运动学趋势。这就导致在模型复杂的时候, 很难应对多震相的问题。对比式(3.3)可以发现, DIW 衡量的则是局部的走时差异, 具备更高的分辨能力。

下面将对比在不同模型复杂程度下以上三种目标函数的性态差异。由于 PS 波走时匹配需要采用层剥离逐步逼近, 该过程较为复杂, 因此这里只对 PP 波走时目标函数性态进行分析。采用常速背景 + 反射系数的方式通过 Born 正演获得反射波数据, 然后扰动背景速度, 通过偏移/反偏移的方式模拟反射数据并由此计算目标函数值。三种不同模型对应的目标函数性态如图3.6。可见, 在单界面

时, 反射同相轴单一, 可区分度很高。由于 DIW 为局部数据匹配, 其计算也会受到 cycle-skipping 影响。此时, 时间和空间互相关的目标函数表现要优于 DIW。在三层模型中, 由于反射同相轴变多, 空间和时间互相关的目标函数准确性下降。空间互相关方式在真值附近出现了局部极值, 而时间互相关由于更难反映出时差随深度的变化, 其极值点出现在了错误的数值附近。但是 DIW 方式的稳定性并未随之明显降低, 只是在速度偏大时对速度变化不敏感, 这也是由于受到 cycle-skipping 影响。

最后使用更为复杂的 Sigsbee2A 模型(局部)来试验(图3.6e、f)。可以看到时间互相关目标函数的极值点仍然偏离准确值较远, 空间互相关目标函数也变得对初始模型更加敏感, 而基于 DIW 的目标函数的性态在复杂构造下仍然变化不大, 尤其在速度偏高时的表现要优于相关类的目标函数, 说明它的收敛性相对更加稳健。以上分析结果表明 DIW 方式构建走时残差目标函数在复杂区域更可靠, 但是也会一定程度上受到 cycle-skipping 的影响。

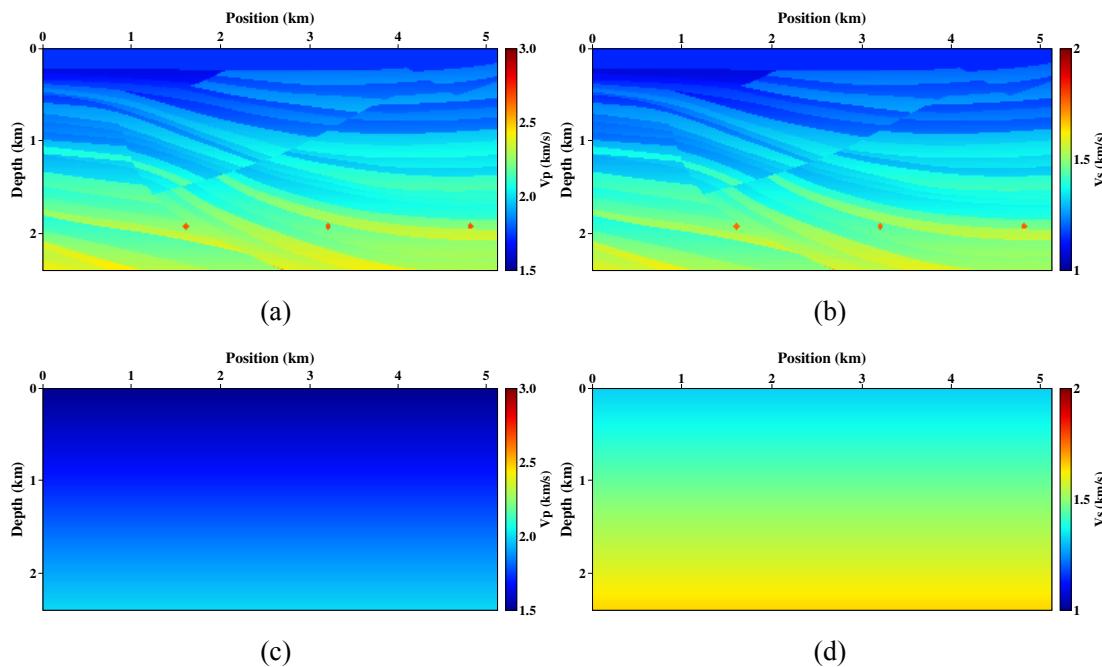


图 3.7 Sigsbee2A 真实  $V_p$ (a) 和  $V_s$ (b) 模型与初始  $V_p$ (c) 和  $V_s$ (d) 模型。

### 3.6.2 Sigsbee2A 模型

为了验证 EWERTI 算法的有效性, 本节采用 Sigsbee2A 模型的一部分来进行实验(如图3.7a 和3.7b),  $V_s$  模型通过固定的泊松比由  $V_p$  模型变换产生。图3.7c 和3.7d 展示了  $V_p$  和  $V_s$  的初始模型, 速度值随深度线性增加。可以看到, 初始模型中  $V_p$  比真实值偏低而  $V_s$  则偏高, 但这两者都偏离真实值较远。观测数据模拟采用交错网格有限差分求解方程(3.1)。水平和深度方向上空间采样均为 16m, 时

间采样为 1.2 毫秒,接收时间为 3.6s。36 个炮点均匀的分布在地表,检波点也布放在地表,最大偏移距为 4km,震源子波主频为 15Hz。实验中采用纯 P 波震源。

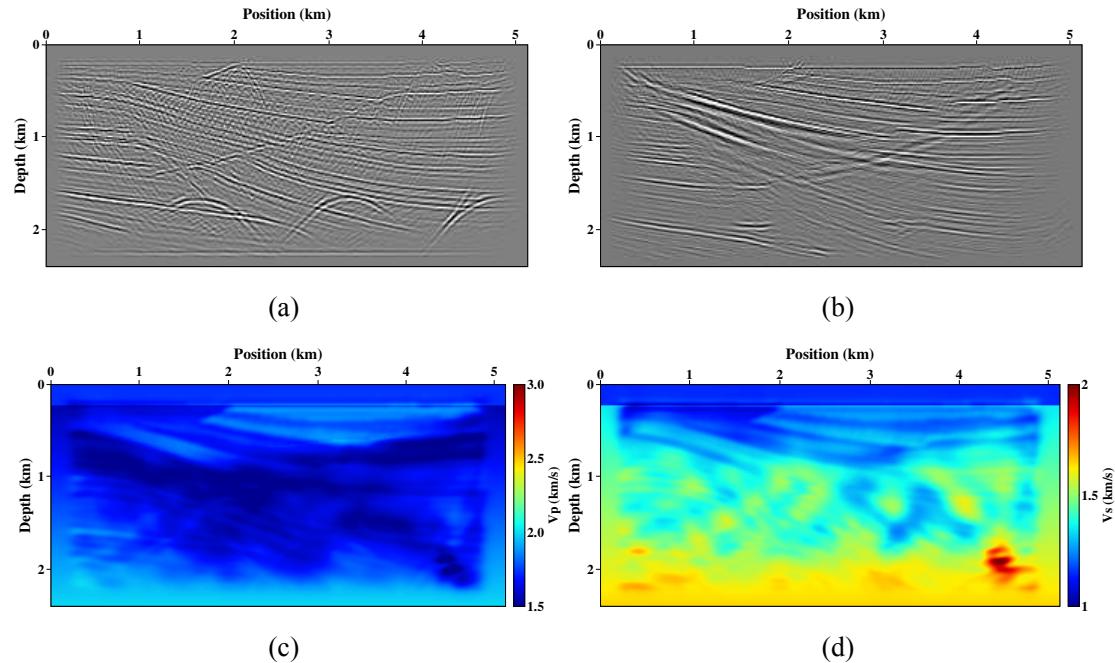


图 3.8 初始模型下的 ERTM 与 EFWI 结果:(a) 和 (b) 分别为小偏移距 PP 与 PS 波 ERTM 结果,(c) 和 (d) 分别为 EFWI 估计的  $V_p$  与  $V_s$

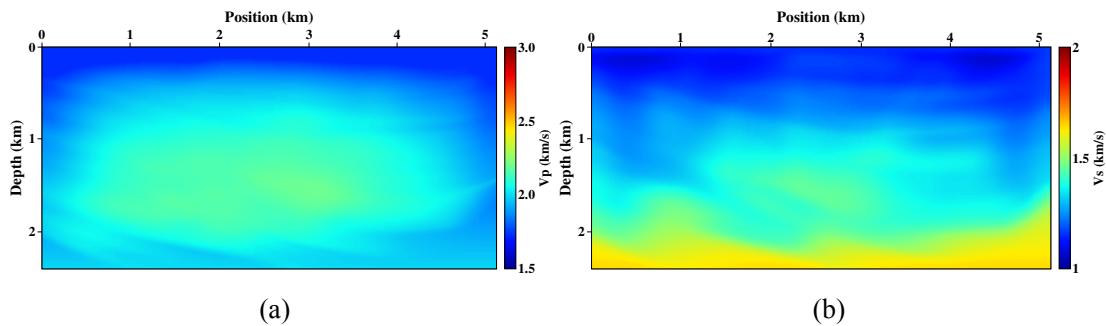


图 3.9 EWERTI 反演模型:(a)  $V_p$ , (b)  $V_s$ .

图3.8为基于初始模型的 ERTM 与 EFWI 结果。可以看到小偏移距 ERTM 成像结果中界面位置全部错位,绕射波没有收敛。如果采用该初始模型进行 EFWI,在浅部区域由于透射波的贡献还能够恢复出部分速度结构,但是随着深度的增加,速度中低波数成分不正确导致 cycle-skipping 问题严重,EFWI 很快陷入局部极值。

从上述不太好的初始模型出发,按照前文所设计的工作流程进行 EWERTI,其反演结果如图3.9。在经过每个阶段 40 次迭代之后,EWERTI 较好地恢复了模型中深部的中低波数成分,加之由于倾角导引正则化的贡献,反演模型在宏观上与真实模型更吻合。但是模型两侧反射数据覆盖较少的区域以及最底部无反射

波穿过的区域, EWERTI 也无法对背景速度进行更新。

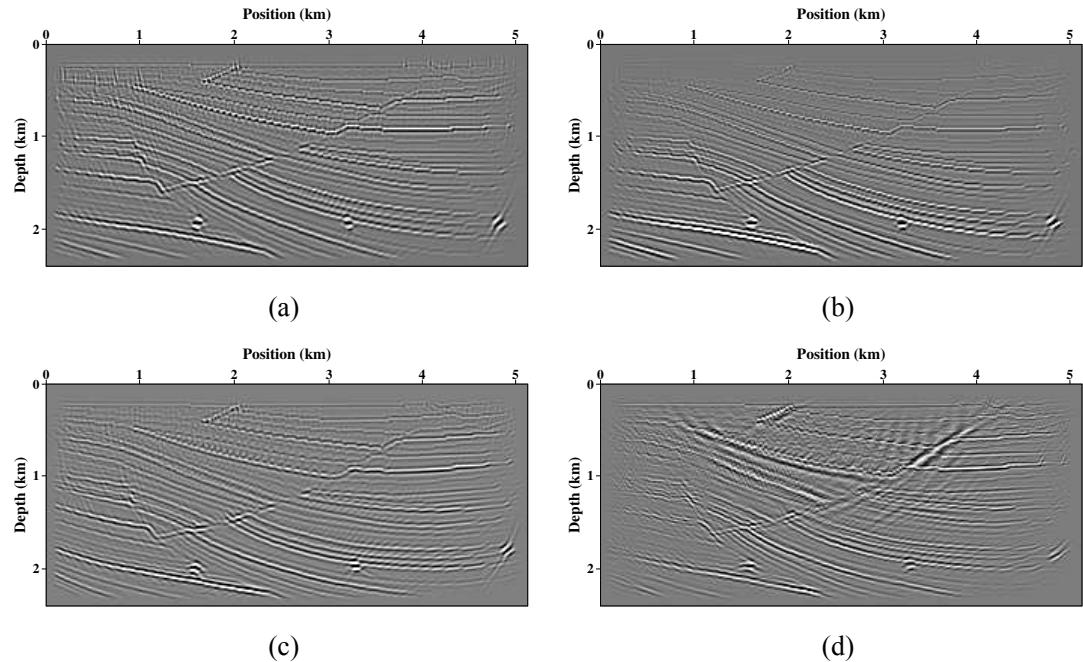


图 3.10 真实模型与 EWERTI 反演模型的 ERTM 结果对比:(a) 和 (b) 分别为真实模型 PP 与 PS 波 ERTM 结果;(c) 和 (d) 分别为 EWERTI 模型 PP 与 PS 波 ERTM 结果。

采用上述模型重新进行 ERTM 成像,发现随着模型中深部波数成分的恢复,PP 波与 PS 波的成像结果得到了很大的改善,绕射波也基本收敛。模型右侧部分由于界面倾角以及观测孔径限制,反射波信息不足,EWERTI 未能很好地恢复模型中低波数成分,成像结果不是十分聚焦。此外,也将 EWERTI 前后模拟的反射数据与真实反射数据进行了对比。如图3.11所示,可以看到经过 EWERTI 之后,主要反射同相轴位置与真实数据已经相差无几。如果采用该模型进行波形残差匹配,就不会出现 cycle-skipping 效应。因此在 EWERTI 之后考虑利用 ERWI 进一步恢复模型中低波数成分也未尝不可。

局部倾角导引正则化对降低反演的多解性有着至关重要的作用。在 EWERTI 过程中,每次迭代的梯度都采用该轮迭代中的 ERTM 图像来进行局部倾角约束滤波。从图3.12b 中可以看到,尽管 EWERTI 的梯度很光滑,但是不加倾角约束滤波的梯度中包含了反射波的照明脚印,采用该梯度进行更新最后会得到图3.12d 的反演结果,将导致很难进一步地更新  $V_s$  模型。而采用倾角约束滤波后,EWERTI 获得了更加合理的反演结果,也为后续的  $V_s$  更新提供了较好的  $V_p$  初始模型。需要注意的是,虽然在  $V_s$  反演中,采用 PP 波反射界面进行反偏移,但是仍然基于不断修正的 PS 波成像剖面进行局部倾角约束滤波对梯度进行平滑处理。

采用 WERTI 的反演结果作为初始模型,重新进行了常规 EFWI 反演。这里 EFWI 的反演仍然采用从低频到高频的多尺度策略。在恢复了模型中低波数成分的情况下,EFWI 不再受到 cycle-skipping 的困扰。反演结果如图3.13a 和3.13b 所

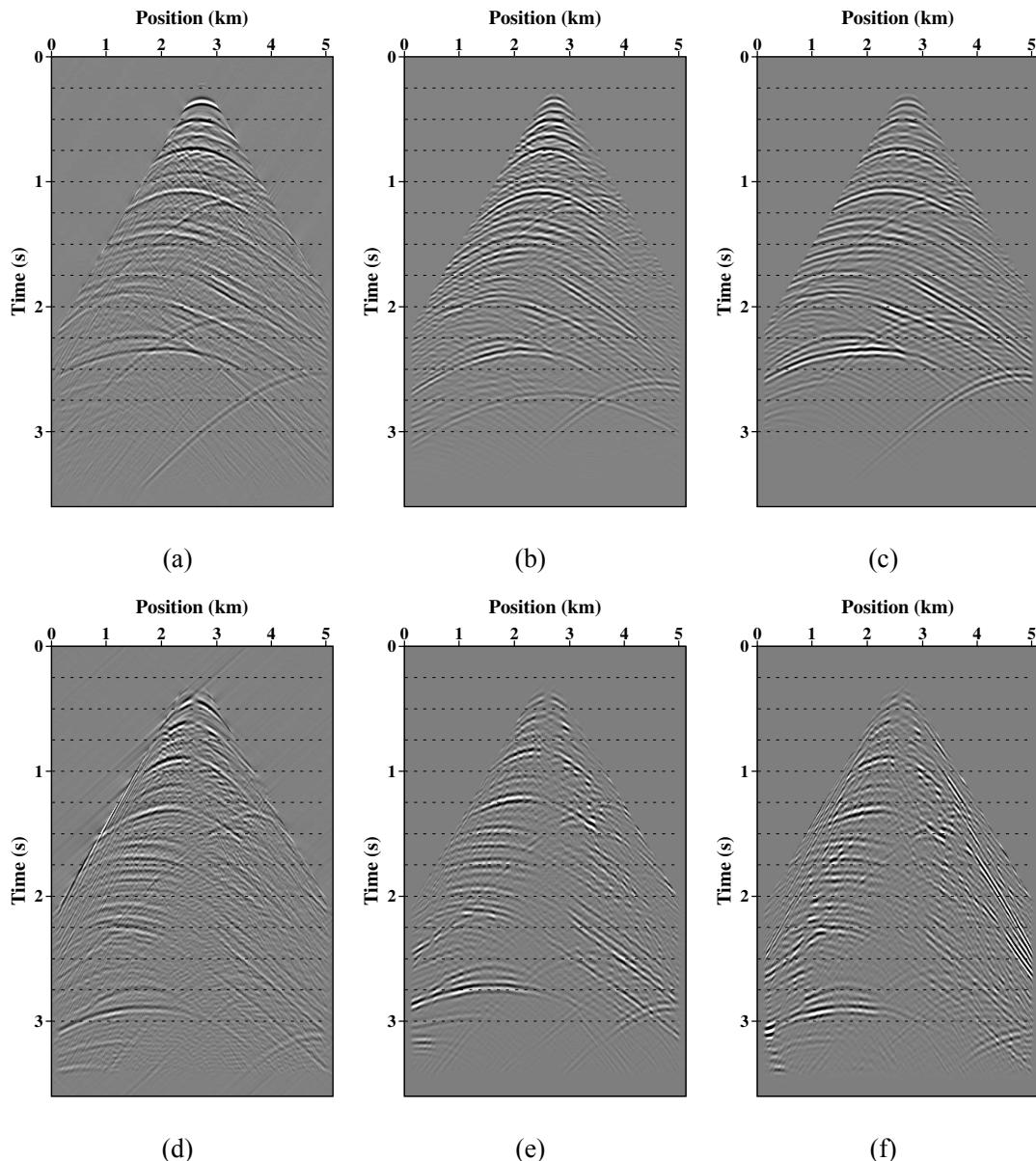


图 3.11 真实反射数据(左), 初始模型反偏移反射数据(中)与 EWERTI 之后反偏移反射数据(右)之间的比较:(a),(b) 和 (c) 为地面分离后的 PP 记录,(d),(e) 和 (f) 为地面分离后的 PS 记录。

示,  $V_p$  和  $V_s$  模型的浅部以及中深部都得到了很好的重建。但是模型右侧和底部中低波数分量未能很好的恢复, 因此 EFWI 在此区域未能达到令人满意的反演效果, 原因前文已经给出。图3.14也展示了 1.4km 和 3km 处的“测井”曲线。从图中可以看出, 弹性 WERTI 能够提供可靠的包含长波长分量的初始模型, 以此为基础的 EFWI 反演可以比较有效地恢复准确的弹性速度模型。

通常, cycle-skipping 问题与数据中的低频及初始模型中的中低波数成分密切相关。数据中有效的低频成分可以降低 FWI 对初始模型的依赖程度, 而较好地包含中低波数成分的初始模型则可以降低 FWI 对低频数据的依赖。实际数据中, 由于低频分量中常常含有许多噪音干扰, 使得 FWI 更依赖于良好的初始模型。这

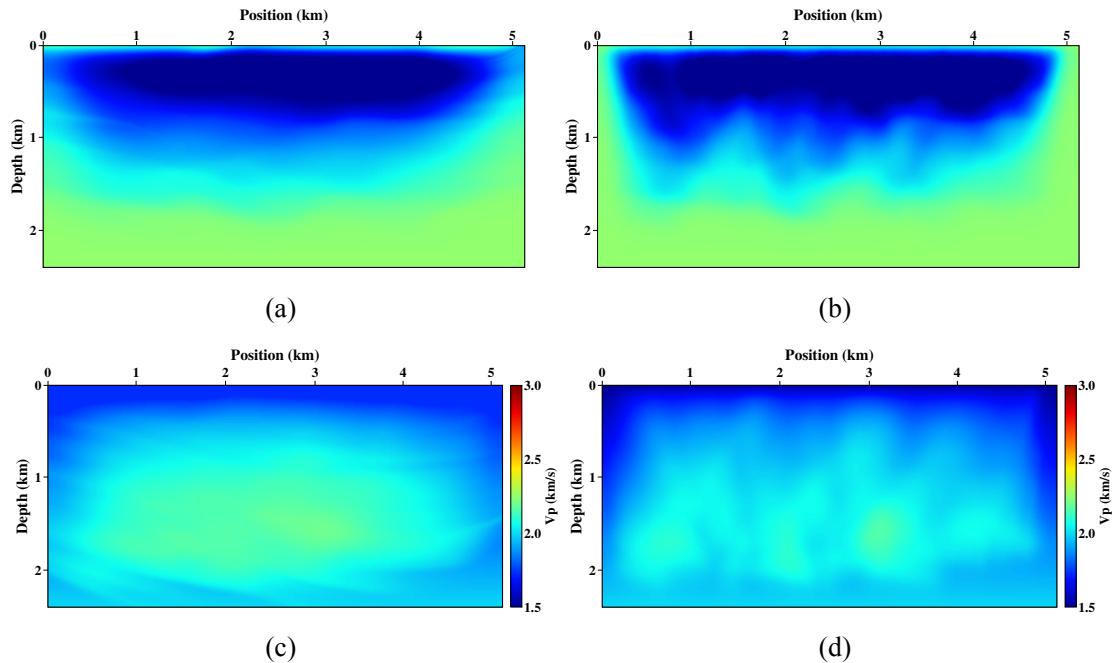


图 3.12 局部倾角滤波约束效果展示。(a) 和 (c) 分别为倾角滤波约束下的首次迭代  $V_p$  梯度与最终反演结果,(b) 和 (d) 分别为不加约束时首次迭代的  $V_p$  梯度与最终反演结果

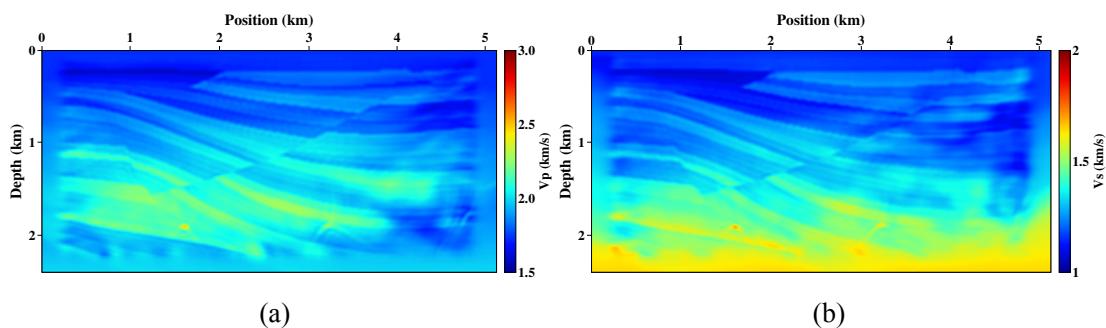


图 3.13 采用 EWERTI 结果作为初始模型 EFWI 的反演结果。(a) 为  $V_p$ , (b) 为  $V_s$ 。

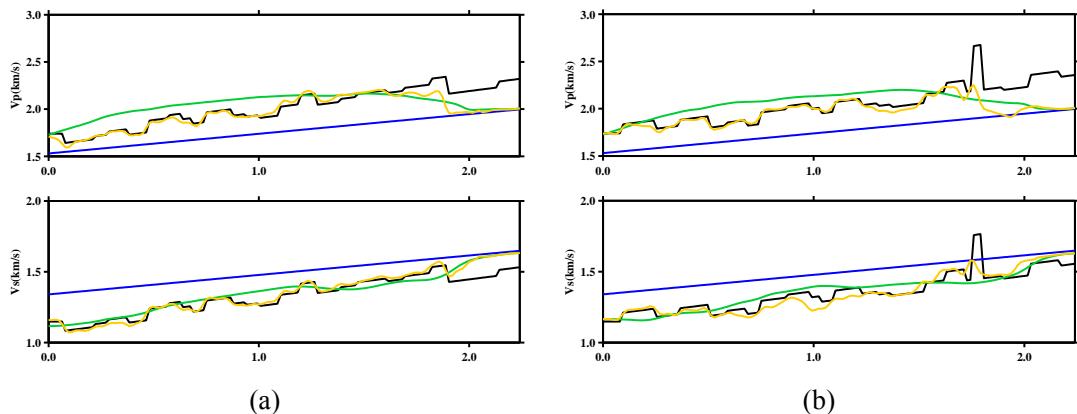


图 3.14 1.4km (a) 和 3km (b) 处 EWERTI 和 EFWI 的垂向剖面对比。黑线和蓝线分别代表真实模型与初始模型,绿线与黄线分别代表 WERTI 和 EFWI 的结果。

里将进一步测试 EWERTI+EFWI 串级反演流程对数据中低频成分的依赖性。

采用图3.9中的结果作为初始模型, 将分别从3Hz, 5Hz和7Hz开始进行常规EFWI, 低于门槛值的频率成分将通过滤波切除, 反演仍然遵循从低频到高频的多尺度策略, 以观察 EFWI 在该初始模型下对数据中低频成分的依赖性。实验结果如图3.15所示, 可见在滤掉3Hz以下的低频分量时, EFWI 仍然可以获得较为满意的反演结果。左侧区域在截频达到7Hz的时候仍能得到可以接受的反演结果。但是随着低频门槛值的增大, EFWI 受到越来越严重的困扰, 尤其是在 EWERTI 未能恢复中低波数的右侧区域。这表明, 受观测孔径影响模型右侧比左侧更依赖数据中的低频信息。

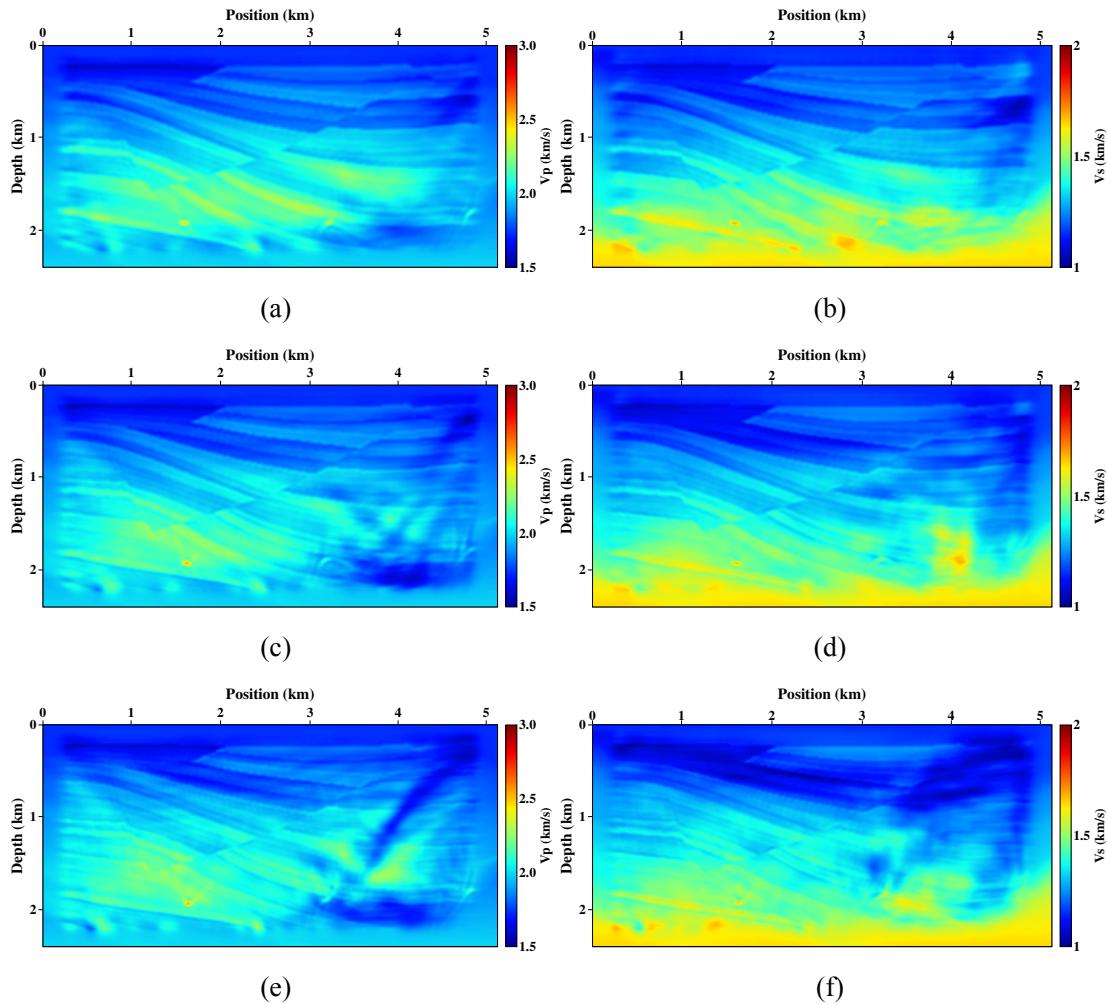


图 3.15 数据滤掉不同门槛的低频后 EFWI 的反演结果。(a), (c), (e) 为  $V_p$ , (b), (d), (f) 为  $V_s$ 。第 1, 2, 3 行的低频截频分别为 3Hz, 5Hz 和 7Hz.

### 3.7 本章小结

本章利用 DIW 拾取走时残差, 将 WERTI 方法扩展到了弹性介质。由于模型的长波长成分与走时之间更趋于线性关系, 因此相对于采用波形拟合的目标函

数,走时残差目标函数对规避 cycle-skipping 问题有着明显的优势,可以更稳健地反演模型的长波长分量。相对空间或时间互相关提取走时残差的方法而言,DIW 在模型复杂时更加稳健可靠。

针对弹性波场中复杂的模式转换问题,本文采用多分量地震数据的 P/S 分离技术分别获得 PP 与 PS 反射波数据,进而提取模拟数据与观测数据之间的走时残差,采用空间波场模式解耦的方式来获得更具有物理含义的 PS 反射波核函数来更新  $V_s$  模型。为了降低反演中的非线性程度,文中设计了两步法的策略,先反演  $V_p$  后反演  $V_s$ 。通过局部倾角导引正则化约束,采用 PP 波界面反偏移获取 PS 反射波,结合“层剥离”等手段来对反演进行控制,从而确保其收敛性。实验表明,本文 EWERTI 获得了较为可靠的包含中低波数成分的模型,为 EFWI 提供了良好的初始模型。

## 第4章 弹性波模式解耦最小平方逆时偏移

### 4.1 引言

随着勘探目标的复杂化,传统偏移成像方法所获得的地下构造图像已经不能满足需求,人们希望获得振幅保真的地下反射率模型,来进而估计介质参数、预测岩性等。早期,基于 Kirchhoff 偏移的真振幅成像技术通过考虑不同偏移距(或入射角)的积分权重来获得高保真的地下反射界面成像<sup>[91,92]</sup>。目前随着计算机技术的发展,RTM 技术广泛应用于地震偏移成像中,真振幅的 RTM 成像方法也随之出现,例如 Zhang et al. (2014)<sup>[146]</sup> 给出了 RTM 框架下的振幅校正因子,目的是为速度和阻抗反演提供好的成像结果。

除了真振幅成像技术之外,最小平方偏移通过多次迭代来拟合观测与模拟的反射波数据以实现弹性参数高波数成分的重构。受到计算能力的限制,早期的最小平方偏移也基于射线近似来实现 (Schuster, 1993<sup>[93]</sup>; Nemeth et al., 1999<sup>[10]</sup>)。由于 RTM 能够应对复杂介质中射线理论难以处理的多路径问题,基于波动理论的最小平方逆时偏移(LSRTM)也逐渐成为近年来的研究热点。它假设在已经获得足够好的速度模型中低波数成分之后恢复模型的高频扰动,可视为线性的全波形反演。

为了更准确地描述波传播过程,同时获得更多的参数扰动,许多学者发展了多参数的 LSRTM 方法,例如 Yang et al.(2016)<sup>[67]</sup> 通过散射积分法,利用 Hessian 信息约束变密度声波介质中的 LSRTM 以获得速度与密度的高频扰动。近期,恢复弹性介质中的高频参数扰动获得了高度关注。例如,Duan et al. (2016)<sup>[109]</sup>, Feng and Schuster(2016)<sup>[110]</sup> 和 Xu et al.(2016)<sup>[111]</sup> 几乎同时发展了 ELSRTM 方法, Ren et al. (2016)<sup>[112]</sup> 重点调查了不同目标函数对 ELSRTM 的影响。相比声波成像,弹性波成像可以提供更多的地下信息同时也存在更复杂的问题,例如成像中不同波模式产生的“cross-talk”假象、PS 波成像中的极性反转问题以及如何选取合适的成像条件获取更具有物理意义的成像结果等等(Du et al, 2014<sup>[113]</sup>; Wang et al., 2016<sup>[18]</sup>; Gong et al, 2016<sup>[114]</sup>; Rocha et al, 2016<sup>[115]</sup>)。

最近,从反演理论框架出发,已有学者(如 Duan et al.(2016)<sup>[109]</sup>,Feng et al.(2016)<sup>[110]</sup>)推导出了与 EFWI 梯度非常类似的成像公式。本质上获得的是高频的参数扰动对应的梯度,同时回避了常规成像条件下的极性反转问题。本章从矩阵形式的位移-应力弹性波方程出发,给出了类似的梯度公式,并引入模式解耦对

ELSRTM 进行梯度预条件。根据参数模型不同的耦合程度, 设计相应的反演策略并测试其在 ELSRTM 中压制参数耦合效应的效果。

## 4.2 矩阵形式的弹性波方程

与第二章类似, 将从弹性波方程出发推导 ELSRTM 目标函数关于弹性参数高波数扰动的梯度。为了方便, 同样在频率域利用矩阵形式的弹性波方程来完成推导。时空域二维位移-应力弹性波方程为:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} &= \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}, \\ \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} &= \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}, \\ \tau_{xx} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ \tau_{zz} &= \lambda \frac{\partial u_x}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ \tau_{xz} &= \mu \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (4.1)$$

方程(4.1)可以改写为频率域形式:

$$\mathbf{L}(\lambda, \mu, \rho) \mathbf{U} = \mathbf{f}, \quad (4.2)$$

其中位移场与应力场构成的波场矢量满足  $\mathbf{U} = [u_x, u_z, \tau_{xx}, \tau_{zz}, \tau_{xz}]^T$ ,  $\mathbf{f}$  为震源, 并且算子矩阵  $\mathbf{L}$  满足:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} -\rho\omega^2 & 0 & -\partial_x & 0 & -\partial_z \\ 0 & -\rho\omega^2 & 0 & -\partial_z & -\partial_x \\ -(\lambda + 2\mu)\partial_x & -\lambda\partial_z & 1 & 0 & 0 \\ -\lambda\partial_x & -(\lambda + 2\mu)\partial_z & 0 & 1 & 0 \\ -\mu\partial_z & -\mu\partial_x & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.3)$$

上式中  $\omega$  为角频率,  $\partial_x$  和  $\partial_z$  分别代表模型空间中沿 x 和 z 方向的一阶导数, 假设  $\rho, \lambda, \mu$  为弹性介质背景参数, 当存在模型扰动  $\delta\lambda, \delta\mu, \delta\rho$  时, 介质中总波场 ( $\mathbf{U} + \delta\mathbf{U}$ ) 和扰动场 ( $\delta\mathbf{U}$ ) 满足:

$$\mathbf{L}(\lambda + \delta\lambda, \mu + \delta\mu, \rho + \delta\rho)(\mathbf{U} + \delta\mathbf{U}) = \mathbf{f}, \quad (4.4)$$

将式(4.4)减去式(4.2)则可得 Born 近似下扰动波场  $\delta\mathbf{U}$  与背景波场  $\mathbf{U}$  之间的关系:

$$\mathbf{L}(\lambda, \mu, \rho)\delta\mathbf{U} = \mathbf{L}'\mathbf{U}, \quad (4.5)$$

其中  $\mathbf{L}' = (\delta\lambda\mathbf{L}'_\lambda + \delta\mu\mathbf{L}'_\mu + \delta\rho\mathbf{L}'_\rho)$ , 且

$$\mathbf{L}'_\lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \partial_x & \partial_z & 0 & 0 & 0 \\ \partial_x & \partial_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{L}'_\mu = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\partial_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\partial_z & 0 & 0 & 0 \\ \partial_z & \partial_x & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.6)$$

$$\mathbf{L}'_\rho = \begin{bmatrix} \omega^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.7)$$

ELSRTM 通常假设背景模型及背景波场不发生变化。与 EFWI 中所描述的正问题不同的是, 方程(4.5)所描述的正问题只考虑反射(散射)波而不包含透射波(或直达波)。方程右端项为背景波场与参数扰动之间相互作用形成的次级源。上述问题通常假定在背景弹性参数模型足够好的时候来恢复高波数扰动, 因此方程也只描述单次散射过程。实际地下介质中的多次散射效应会对成像带来影响。近期, 也有学者考虑在反演迭代过程中将更新的扰动量加入背景场。例如, Guo and Alkhalifah(2016)<sup>[90]</sup> 所展示的 RWI 过程中, 他们将界面扰动引起的散射场加入到背景场中以便一定程度上考虑多次散射效应的影响。

### 4.3 弹性波最小平方逆时偏移

本文 ELSRTM 中同样利用  $L_2$  范数来定义目标函数:

$$E = \frac{1}{2} \sum_{\omega} \sum_{s,r} \|\mathfrak{F}\delta\mathbf{U} - \mathbf{d}^{obs}\|^2, \quad (4.8)$$

其中  $\mathfrak{F}$  为采样函数,  $\delta\mathbf{U}$  为模拟的反射波数据,  $s, r$  代表炮点和检波点位置。该目标函数要对所有频率、所有炮检对的反射数据残差求和。利用拉格朗日乘子法, 建立增广函数:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\delta\mathbf{U}, \Psi, \delta\lambda, \delta\mu, \delta\rho) = & Re \left[ \frac{1}{2} \sum_{\omega} \sum_{s,r} \|\mathfrak{F}\delta\mathbf{U} - \mathbf{d}^{obs}\|^2 \right. \\ & \left. - \sum_{\omega} \sum_s \langle \Psi, \mathbf{L}\delta\mathbf{U} - \mathbf{L}'\mathbf{U}_x \rangle \right], \end{aligned} \quad (4.9)$$

这里  $\Psi = (\hat{u}_x, \hat{u}_z, \hat{\tau}_{xx}, \hat{\tau}_{zz}, \hat{\tau}_{xz})^T$  为伴随波场,  $\langle \cdot \rangle_x$  代表空间域的内积运算, 根据 Plessix(2006)<sup>[133]</sup>, 该优化问题的极值点需要满足  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\delta \mathbf{U})} = 0$ , 于是得到伴随状态方程:

$$\mathbf{L}^*(\lambda, \mu, \rho) \Psi_s = \sum_r (\mathfrak{F} \delta \mathbf{U} - \mathbf{d}^{obs}), \quad (4.10)$$

$\mathbf{L}^*$  为正传算子  $\mathbf{L}$  的共轭转置, 代表了传播算子的逆时反传。右端项则代表了每炮数据检波点处的残差波场。因此, 伴随波场  $\Psi$  是以数据残差为震源的逆时传播波场。由于每一炮每一个频率的数据都对应一个共轭方程, 因此上式中未出现对频率及炮点的求和。为了简单起见, 隐去式(4.10)中的采样函数。于是, 式(4.9)对应的梯度应为:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \delta \mathbf{m}} = Re \left( \sum_{\omega} \sum_{s,r} \langle \Psi, \frac{\partial \mathbf{L}'}{\partial \delta \mathbf{m}} \mathbf{U} \rangle_x \right), \quad (4.11)$$

其中  $\delta \mathbf{m} = (\delta \lambda, \delta \mu, \delta \rho)$ , 注意到  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \delta \mathbf{m}}$  的有关导数包括  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \delta \lambda} = \mathcal{L}'_{\lambda}$ ,  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \delta \mu} = \mathcal{L}'_{\mu}$  以及  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \delta \rho} = \mathcal{L}'_{\rho}$ 。利用式(4.6)-(4.7)对  $\delta \mathbf{m}$  求导并将其转换到时间域, 可得:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \delta \lambda} &= \sum_{s,r} \int_0^T \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) (\hat{\tau}_{xx} + \hat{\tau}_{zz}), \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \delta \mu} &= \sum_{s,r} \int_0^T 2 \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \hat{\tau}_{xx} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \hat{\tau}_{zz} \right) + \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \hat{\tau}_{xz}, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \delta \rho} &= - \sum_{s,r} \int_0^T \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \hat{u}_x + \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \hat{u}_z. \end{aligned} \quad (4.12)$$

另外需要注意的是, 将式(4.10)变换到时空域并展开, 可得:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 \hat{u}_x}{\partial t^2} &= \frac{\partial(\lambda + 2\mu)\hat{\tau}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \lambda \hat{\tau}_{zz}}{\partial x} + \frac{\partial \mu \hat{\tau}_{xz}}{\partial z} + \delta d_x, \\ \rho \frac{\partial^2 \hat{u}_z}{\partial t^2} &= \frac{\partial \lambda \hat{\tau}_{xx}}{\partial z} + \frac{\partial(\lambda + 2\mu)\hat{\tau}_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \mu \hat{\tau}_{xz}}{\partial x} + \delta d_z, \\ \hat{\tau}_{xx} &= \frac{\partial \hat{u}_x}{\partial x}, \hat{\tau}_{zz} = \frac{\partial \hat{u}_z}{\partial z}, \\ \hat{\tau}_{xz} &= \frac{\partial \hat{u}_x}{\partial z} + \frac{\partial \hat{u}_z}{\partial x}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

其中  $\delta \mathbf{d} = \mathfrak{F} \delta \mathbf{U} - \mathbf{d}^{obs}$ . 可见在反传波场的求取过程中, 由于共轭转置算子的作用导致伴随状态方程与原本的弹性波方程形式不同, 新的方程中多出了两项应力导数项。伴随波场的应力应变关系也发生了改变, 这是求解中需要注意的。

## 4.4 模式解耦梯度预条件

可以看到 ELSRTM 梯度表达式与 EFWI 中的梯度 (式2.52) 非常类似, 只是后者中  $\lambda$  和  $\mu$  的梯度计算涉及的波场都是位移的空间导数, 而前者梯度中采用到位移场空间导数与应力场, 密度的梯度表达式则完全一致。采用速度-密度的参数化方式, 可以导出目标函数关于  $V_p$  与  $V_s$  的梯度:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \delta V_p} &= 2\rho V_p \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \delta \lambda} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \delta V_s} &= 2\rho V_s (-2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \delta \lambda} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \delta \mu}) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \delta \rho_{vel}} &= (V_p^2 - 2V_s^2) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \delta \lambda} + V_s^2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \delta \lambda} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \delta \rho}.\end{aligned}\quad (4.14)$$

为了利用模式解耦来降低  $V_p$  和  $V_s$  之间的 trade-off, 同样在 ELSRTM 中暂不考虑密度扰动。于是, 考虑模式解耦的梯度为:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \delta V_p} &= 2\rho V_p \sum_{s,r} \int_0^T \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) (\hat{\tau}_{xx} + \hat{\tau}_{zz}) dt, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \delta V_s} &= 2\rho V_s \sum_{s,r} \int_0^T 2 \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \hat{\tau}_{xx}^S + \frac{\partial u_z}{\partial z} \hat{\tau}_{zz}^S \right) + \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \hat{\tau}_{xz}^S dt.\end{aligned}\quad (4.15)$$

注意, 与 EFWI 所不同的是 LSRTM 假设已经获得了可靠的背景速度模型, 只需要反演模型的高波数分量, 因此所处理的数据频带一般较宽。但是, 在高频数据中, 当介质模型复杂时, 层间多次波或者多次散射也会比较严重。尤其是在利用 S 波数据进行 LSRTM 的情况下, S 波波场本身能量较弱, 在 S 波多次散射或者转换严重的区域会对解耦之后的梯度产生很不利的干扰。这一点与第二章 EFWI 不太一样, 因为 EFWI 通常不会牵涉较高的频率成分, 多次散射效应并不突出。

此外, 前文也提到需要对梯度进行其他预条件才能更好的加速收敛, 这里采用震源波场的能量来进行照明补偿:

$$\mathbf{Q} = \left[ \int_0^T (u_x^2 + u_z^2) dt \right]^{-1}, \quad (4.16)$$

这里  $\mathbf{Q}$  相当于 Hessian 逆矩阵对角线元素的补偿作用。于是最终 ELSRTM 中高频参数扰动量的更新方式如下:

$$\delta \mathbf{m}_{k+1} = \delta \mathbf{m}_k - \alpha_k \begin{bmatrix} \mathbf{Q} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \delta V_p} \\ \mathbf{Q} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \delta V_s} \end{bmatrix}_k, \quad (4.17)$$

其中  $\delta \mathbf{m}_k$  为  $k$  次迭代的模型扰动,  $\alpha$  为  $k$  次迭代的步长。步长搜索同样采用抛物线拟合的方式来求取。

## 4.5 数值实验

本节将通过数值实验来验证模式解耦在最小平方偏移中的功效。由于 ELSRTM 第一次迭代与 ERTM 过程类似,因此除非特别说明,本节中所指 ERTM 都是 ELSRTM 首次迭代的结果。将从简单模型出发分析 ELSRTM 中可能存在的问题,并在 Marmousi-II 模型上测试解耦预条件的 ELSRTM 算法与反演策略。根据第二章中的分析结果,采用 S 波来反演  $V_s$  扰动接近于单参数的反演。ELSRTM 为线性问题,只需要更新模型高频扰动部分,因此在反演策略上也与 EFWI 略有不同。将根据不同的情况采取如下两种不同的反演策略:

策略 1:  $\delta V_p$  较少受到耦合效应影响时,采用  $\delta V_p$  与  $\delta V_s$  同时反演,并用模式解耦梯度预条件来压制参数耦合;

策略 2:  $\delta V_p$  与  $\delta V_s$  耦合效应强烈时,先采用模式解耦梯度预条件对  $\delta V_s$  进行反演,在  $\delta V_s$  反演得足够好的后再对  $\delta V_p$  进行反演。

策略 1 通过一次迭代获得双参数反演的结果,而策略 2 需要多耗费一轮迭代的计算量。策略 2 中,先反演出合理的  $\delta V_s$ ,这样数据中来自  $\delta V_s$  的 P 波能量就会首先得到匹配,之后再反演  $\delta V_p$  时这一部分 P 波残差就不会在梯度中产生太多的串扰,从而达到压制参数耦合的效果。需要注意的是,这一思路在 EFWI 中并不十分适用。因为在 EFWI 中,需要逐步地更新  $V_p$  模型的中低波数成分来确保 PS 波数据的匹配不会陷入局部极值。与此同时,又要采用 PS 波数据以解耦的方式更新  $V_s$  使得 P 波残差较好地收敛以改善  $V_p$  的反演精度。因此 EFWI 中更适合采用双参数同时反演来降低非线性程度。

### 4.5.1 反射数据与 Born 模拟数据的差异

LSRTM 的理论是基于一阶 Born 散射导出的,因此由高频参数扰动预测的反射波其实是 Born 散射数据。所以在进行数据匹配的时候观测数据需要尽可能地接近 Born 散射数据,才能保证数据残差的最佳拟合。事实上,采用 Born 模拟数据进行 ELSRTM 就是一种线性反散射求解。而实际中无法获得 Born 散射数据,通常在进行 LSRTM 时都是匹配切除直达波的反射数据。由于实际反射数据与 Born 模拟数据之间存在差异,如果反演时直接采用反射数据就会使得正演数据无法与观测数据完全匹配。

这里,用简单的两层介质来调查实际反射数据与 Born 模拟反射数据间的差异。这里只考虑  $V_p$  的扰动界面,上层  $V_p = 2.6 \text{ km/s}$ ,下层  $V_p = 2.8 \text{ km/s}$ , $V_s$  采用均匀模型 ( $V_s = 1.5 \text{ km/s}$ )。所用的有限差分算法空间采样 10m,时间采样 1ms。由于 Born 近似在小扰动下成立,因此对真实模型进行不同尺度平滑后进行 Born 正演,以调查由弹性波方程直接计算出的反射数据与 Born 模拟数据之间的差异。

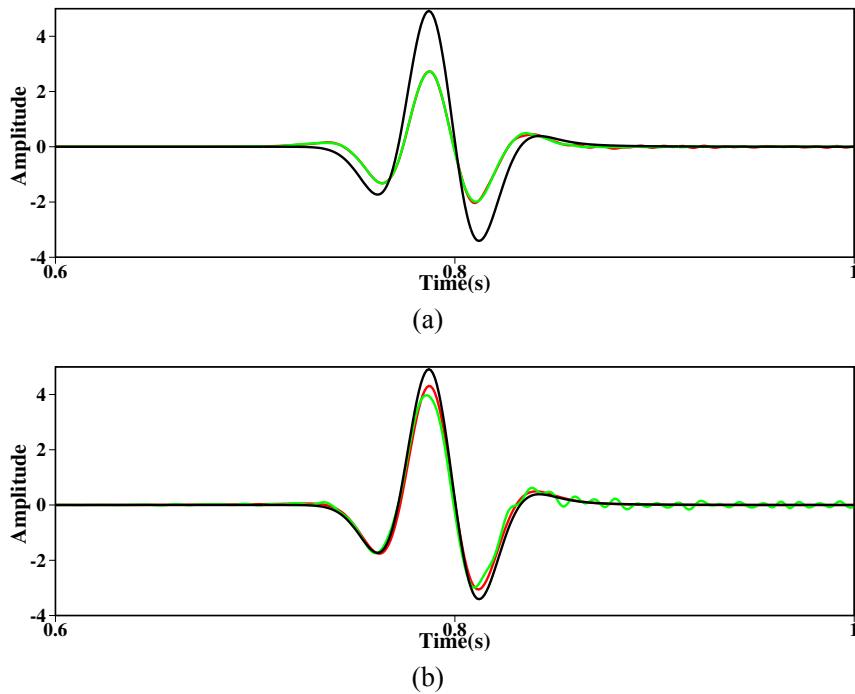


图 4.1 反射数据(黑)、剩余反射数据(红)和 Born 模拟数据(绿)之间的差异。(a) 模型平滑窗口 30m; (b) 模型平滑窗口 100m.

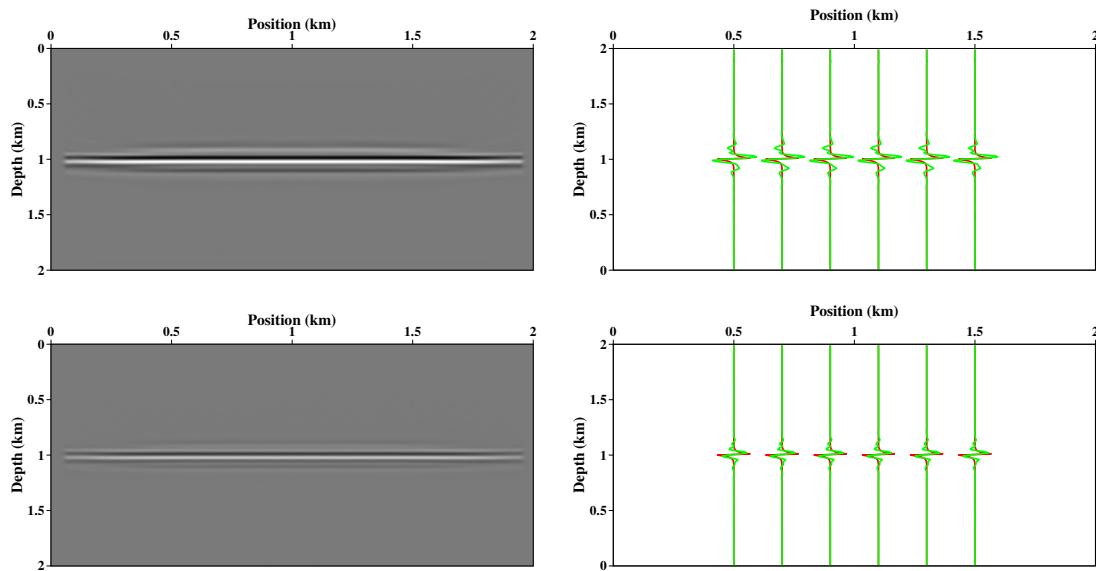


图 4.2 图中左侧为 ELSRTM 的  $\delta V_p$ , 右侧为相应位置上的抽线对比。顶部为原始反射数据反演结果, 底部为 Born 模拟数据反演结果。其中绿色代表反演结果, 红色代表模型真实扰动。

图4.1a 为将真实模型按照 30m 半径平滑后正演所获得的反射数据、剩余反射数据(即真实反射数据与背景波场记录的残差)以及真实扰动产生的 Born 模拟数据三者之间的比较。可以看到, 当平滑半径较小时, 背景模型中会包含部分高波数成分, 这就使得背景场中含有部分反射能量, 从而导致 Born 模拟数据与真实反射数据相差较远。在此模型中, 由于反射数据振幅大于 Born 模拟数据的振幅, 如果在反演中直接匹配该反射数据, 最终会导致反演中数据残差收敛时产生参数

扰动的过估计(图4.2)。而如图4.1b所示,剩余反射数据则可以与Born模拟数据很好地匹配,基于此来反演就可以避免产生过估计。

也就是说,如果模型中包含较强的反射能量时就需要匹配剩余反射数据,而不是反射数据本身。如果模型平滑尺度较大,背景波场中包含的反射能量较弱,那么Born模拟数据将与反射数据比较接近。但即便如此,Born模拟数据与反射数据之间的差异也大于它与剩余反射数据之间的差异(图4.1b)。因此在LSRTM时,匹配剩余反射数据将是一个更好的选择。

#### 4.5.2 参数耦合分析

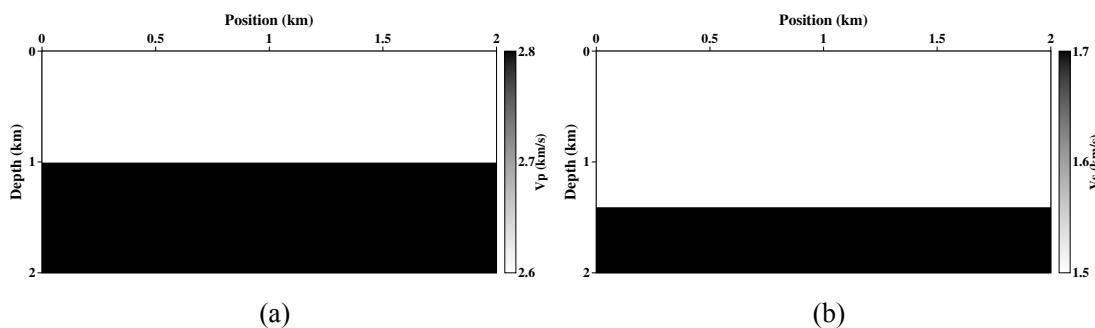


图 4.3 参数耦合测试真实模型: (a)  $V_p$ , (b)  $V_s$ .

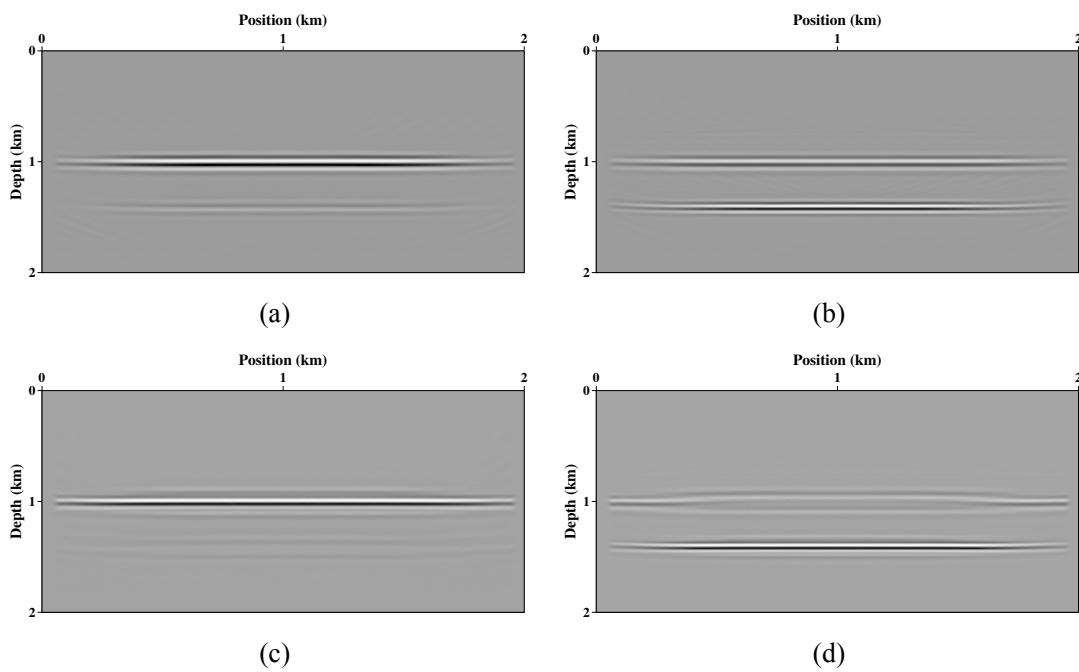


图 4.4 常规 ERTM 与 ELSRTM 结果:左侧为  $\delta V_p$ ,右侧为  $\delta V_s$ 。(a), (b) ERTM 结果; (c), (d) ELSRTM 结果。

参数耦合同样是 ELSRTM 中面临的一个挑战。虽然通过最小平方偏移迭代处理,可以一定程度上降低参数间的串扰,例如 Duan et al., 2016<sup>[109]</sup>; Feng and

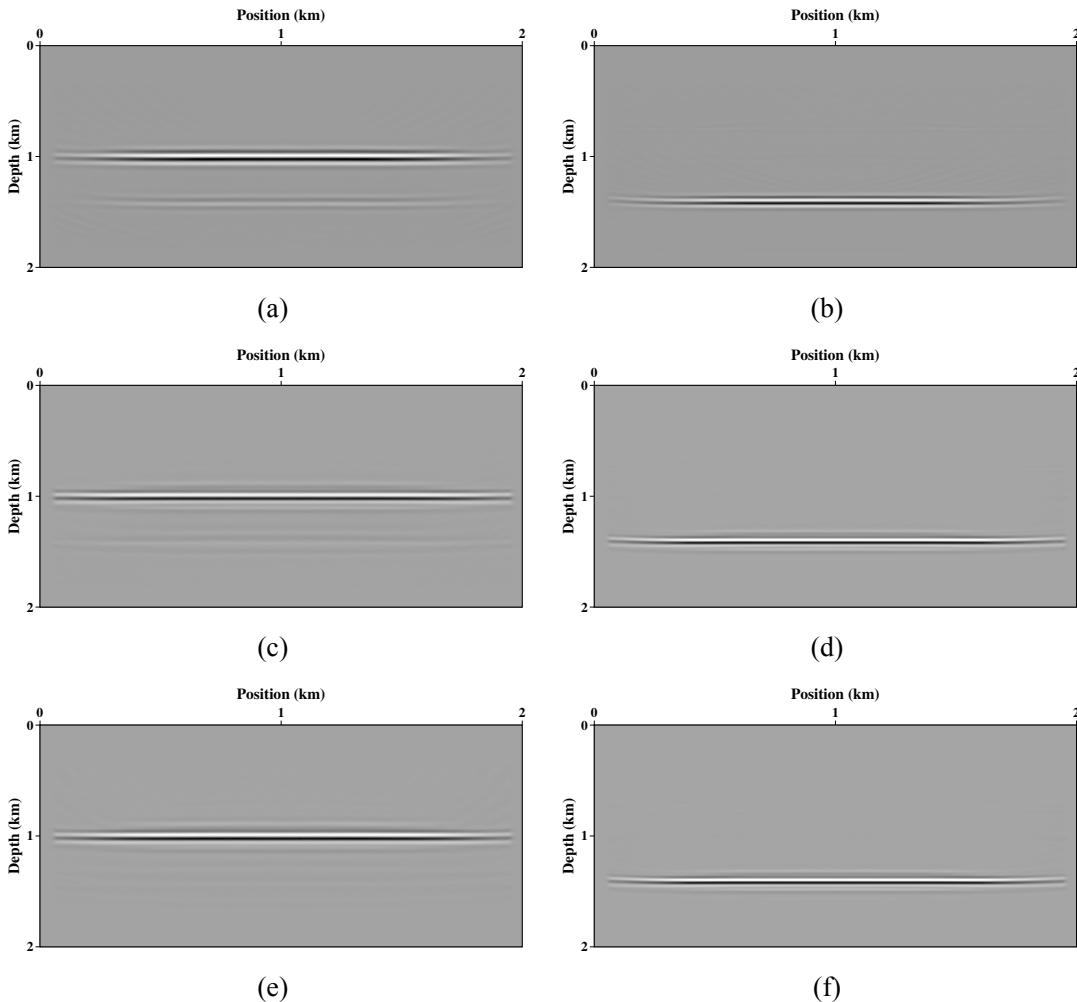


图 4.5 基于模式解耦的 ERTM 与 ELSRTM 结果:左侧为  $\delta V_p$ ,右侧为  $\delta V_s$ 。(a), (b) ERTM 结果;(c), (d) 采用策略 1 时 ELSRTM 结果;(e), (f) 采用策略 2 时 ELSRTM 结果。

Schuster, 2016<sup>[110]</sup>。但是这也只能做到压制“脚印”,难以完全消除,尤其是在  $V_p$  与  $V_s$  结构不一致的时候。为了测试参数耦合对 ELSRTM 的影响,本文选取具有不同结构的  $V_p$  与  $V_s$  双层模型(图4.3)来进行实验。

这里采用 Born 正演数据进行双参数同时反演。由于  $V_s$  界面也会产生 P 波反射,常规 RTM 结果中  $V_p$  与  $V_s$  成像结果存在明显的相互串扰(见图4.4),而 ELSRTM 可以压制部分参数耦合效应,但是难以完全消除,尤其是  $\delta V_s$  中存在非常明显的  $\delta V_p$  脚印。引入模式解耦之后,首先采用策略 1 进行反演。由于采用 S 波数据来计算  $\delta V_s$  梯度,就完全避免了 P 波对  $\delta V_s$  梯度的干扰。根据第二章中所分析的模式解耦帮助压制参数耦合的机制,采用 S 波反演  $V_s$  近似于单参数反演,这将有助于反演的收敛。但是这样并不能在反演初始阶段就对  $\delta V_p$  的反演产生明显改善,只能依靠迭代过程中  $\delta V_s$  趋近于真值时来消除其所产生的 P 波数据残差,进而一定程度上提升  $\delta V_p$  的反演效果。

从 ERTM 结果上看(图4.5a 和 b),解耦之后的成像结果压制了  $\delta V_s$  中  $V_p$  界面产生的脚印。解耦预条件的 ELSRTM 得到的  $\delta V_s$  已经没有了  $V_p$  界面的脚印,

但是  $\delta V_p$  中仍然存在一定的干扰。这是因为在策略 1 中, 初始迭代阶段中  $\delta V_s$  更新量不足使得  $\delta V_p$  的梯度仍然受到参数耦合的影响。而这个阶段总是能够搜索到较大的更新步长, 这就导致在初始阶段的参数耦合效应仍然较为严重, 而且主要体现在  $\delta V_p$  受到  $\delta V_s$  的影响。策略 2 可以进一步压制这种类型的串扰, 因为在  $\delta V_s$  反演足够好的时候,  $V_s$  界面产生的 P 波数据已经基本匹配, 这时再反演  $\delta V_p$ ,  $V_s$  界面对  $\delta V_p$  的影响就会很弱。当然, 反演得到的  $\delta V_s$  不可能与真值一样, 因此数据残差中总会存在少量来自  $\delta V_s$  散射的 P 波。从图 4.5e 和 f 可以看到, 即使采用策略 2,  $\delta V_p$  中仍然会存留非常弱的脚印。

### 4.5.3 Marmousi-II 模型

本节对 Marmousi-II 模型进行了 A 和 B 两种方式的修改, 以进一步测试前文提到的两种反演策略。模型 A: 在  $V_p$  单独加入高速层; 模型 B: 在  $V_p$  和  $V_s$  中分别加入不同结构的异常层; 为了降低计算代价, 除异常层之外,  $V_s$  模型都通过固定的泊松比由  $V_p$  模型转换而成。观测系统中 60 个炮点等间隔地分布在地表。模型空间采样间隔为 10m, 时间采样间隔为 1ms, 模拟时间总长 3s, 子波主频 20Hz。除非特别指明, 本节所有数值实验都采用相同的观测系统。为了对比 Born 模拟数据与剩余反射数据反演结果的差异, 每个模型都采用两种数据各进行一次 ELSRTM。

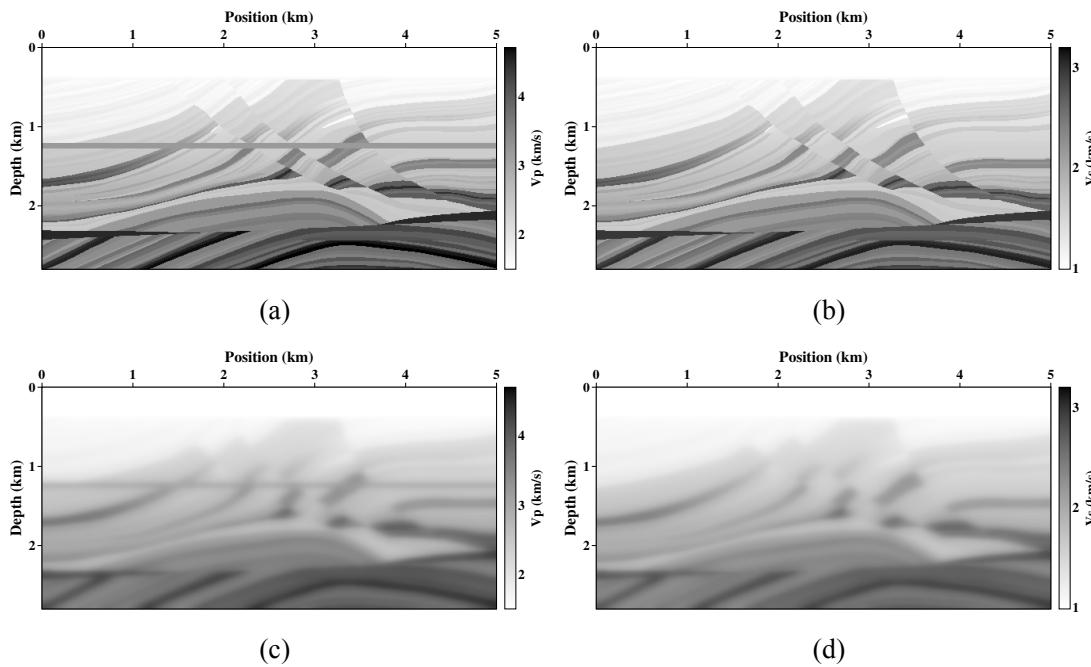


图 4.6 A 方式修改后的 Marmousi-II 真实模型与偏移模型: 左侧为  $V_p$ , 右侧为  $V_s$ 。第一行为真实模型, 第二行为偏移模型。

在实验 A 中, 为了突出参数耦合效应, 在  $V_p$  模型中加入了一个高速薄层。这样在常规 ELSRTM 中,  $\delta V_s$  的反演受到的参数耦合影响会非常明显。由于  $\delta V_p$  较

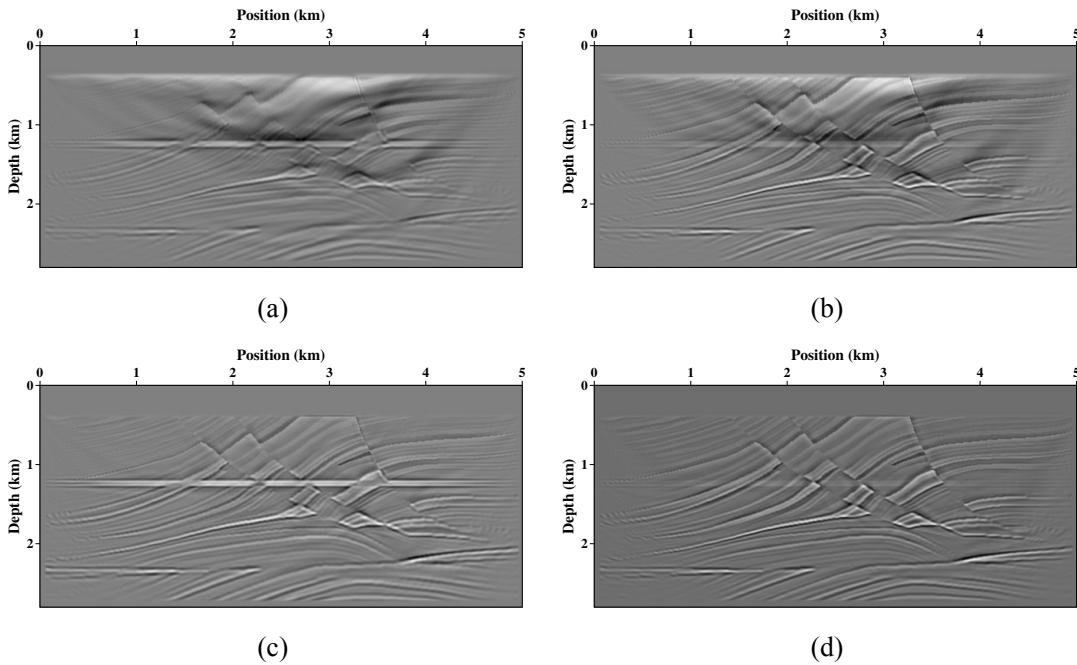


图 4.7 Born 模拟数据常规 ERTM 与 ELSRTM 结果(模型 A):左侧为  $V_p$ , 右侧为  $V_s$ 。第一行为 ERTM 结果, 第二行为 ELSRTM 结果。

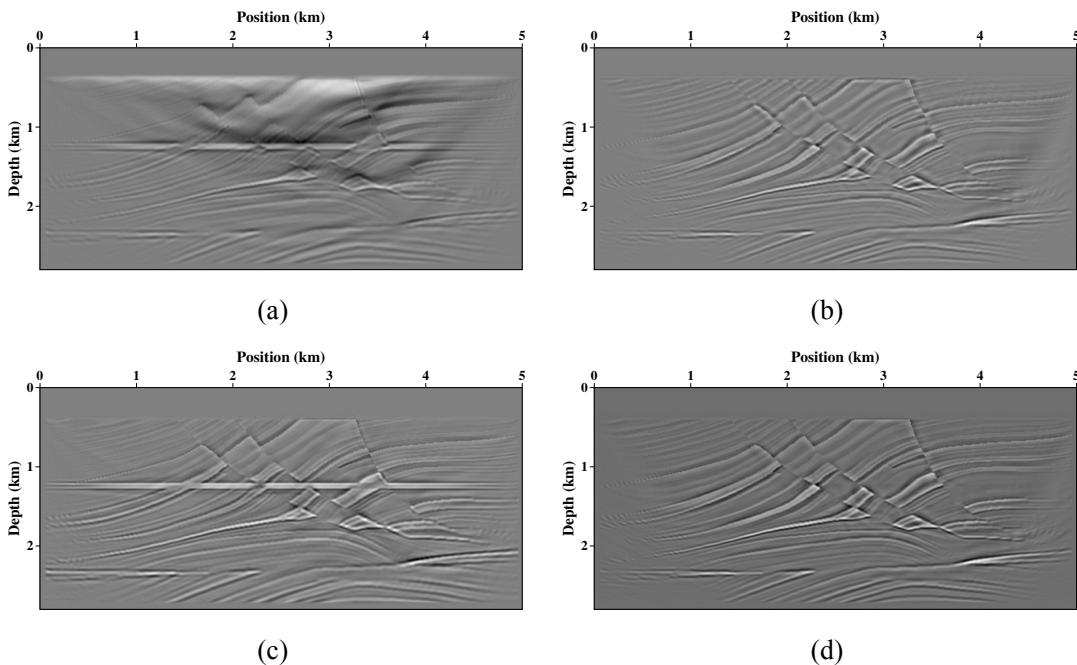


图 4.8 Born 模拟数据模式解耦 ERTM 与 ELSRTM 结果(模型 A):左侧为  $V_p$ , 右侧为  $V_s$ 。第一行为 ERTM 结果, 第二行为 ELSRTM 结果。

少受到  $V_s$  结构的影响, 因此采用反演策略 1, 即同时反演  $\delta V_p$  与  $\delta V_s$ 。首先采用 Born 模拟数据进行实验。如图 4.7 所示, 常规 ERTM 的成像剖面中可以看到低频噪音的干扰。由于参数耦合,  $\delta V_s$  中还存在  $V_p$  结构的脚印。在经过 ELSRTM 之后, 低频噪音被压制, 整个成像剖面能量更加均衡。 $\delta V_s$  中的参数耦合效应虽然被部分压制了, 但是仍然可以看到残留的脚印。

然后将模式解耦预条件处理加入到梯度计算中,成像与反演结果如图4.8所示。ERTM 中  $\delta V_p$  仍然存在低频噪音,而  $\delta V_s$  中的低频噪音已经很大程度上被压制。这说明  $\delta V_s$  中的低频噪音主要是 P 波路径所产生,所以在经过模式解耦压制了反传波场中的 P 波成分后,ERTM 就可以获得无低频噪音的  $\delta V_s$ 。与此同时,其中来自  $V_p$  结构的脚印也被完全压制。在经过 ELSRTM 之后,低频噪音被进一步地压制,而且深部与浅部的能量也更加均衡。最终获得了较高分辨率的  $\delta V_p$  与  $\delta V_s$  结果。

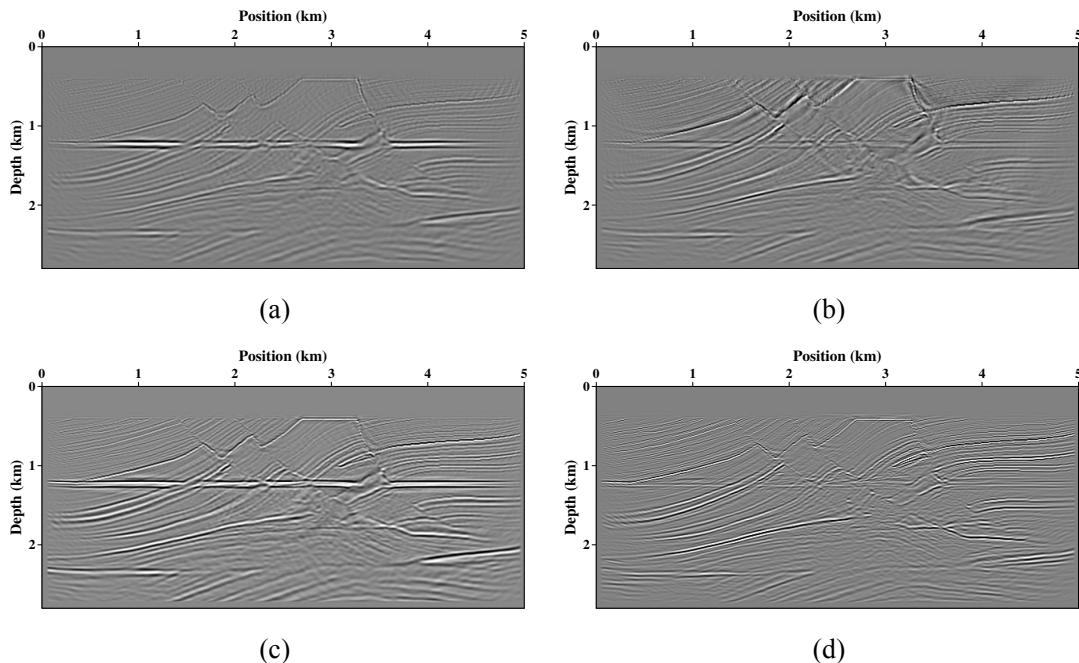


图 4.9 剩余反射数据常规 ERTM 与 ELSRTM 结果(模型 A):左侧为  $V_p$ ,右侧为  $V_s$ 。第一行为 ERTM 结果,第二行为 ELSRTM 结果。

虽然理论上 Born 模拟数据与剩余反射数据相差不多,但这只是考虑一次散射的情况。在复杂介质中,多次散射很强时利用反射数据进行 LSRTM 就会遇到挑战。接下来,将采用剩余反射数据测试算法。反射数据中的直达波会带来很大的干扰,因此在进行实验时先根据走时对直达波进行切除。常规 ERTM 成像与 ELSRTM 反演结果如图4.9所示,由于切除了直达波,ERTM 结果已基本不受低频噪音干扰,但是模型深部成像能量不均衡,且存在参数耦合问题。在中间断层区域,多次散射效应很明显,引起许多串扰的假象。经过 ELSRTM 之后,深部的能量获得了较好的补偿,分辨率也得到了提高,但是参数耦合导致  $\delta V_s$  结果中来自  $\delta V_p$  的脚印难以被彻底压制。

在引入模式解耦之后(图4.10),可以看到 ERTM 获得的  $\delta V_s$  结果中的脚印已经被压制。再经过 ELSRTM 之后,成像分辨率得到了提高,深部区域的能量也经过补偿获得了均衡。从结果上看 Born 模拟数据要比剩余反射数据的反演效果好,这是因为:第一,Born 模拟数据的正演与反演过程完全匹配;第二,剩余反射数据

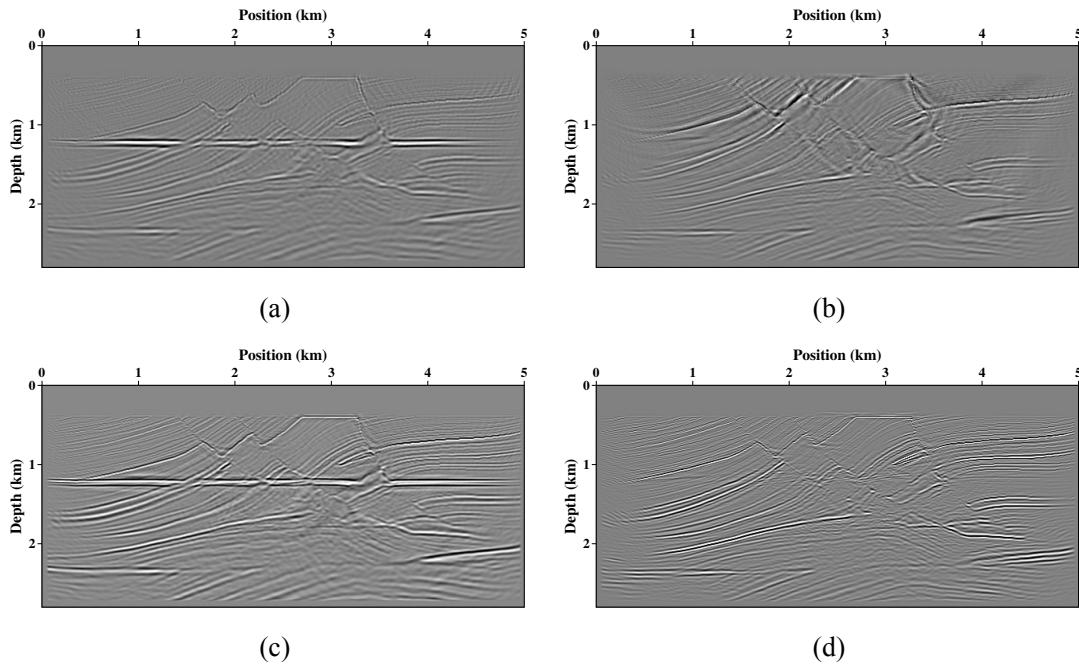


图 4.10 剩余反射数据模式解耦 ERTM 与 ELSRTM 结果 (模型 A): 左侧为  $V_p$ , 右侧为  $V_s$ 。第一行为 ERTM 结果, 第二行为 ELSRTM 结果。

中存在多次散射效应。不管怎样, 采用模式解耦的梯度预条件能够在 ELSRTM 中进一步压制参数耦合效应。

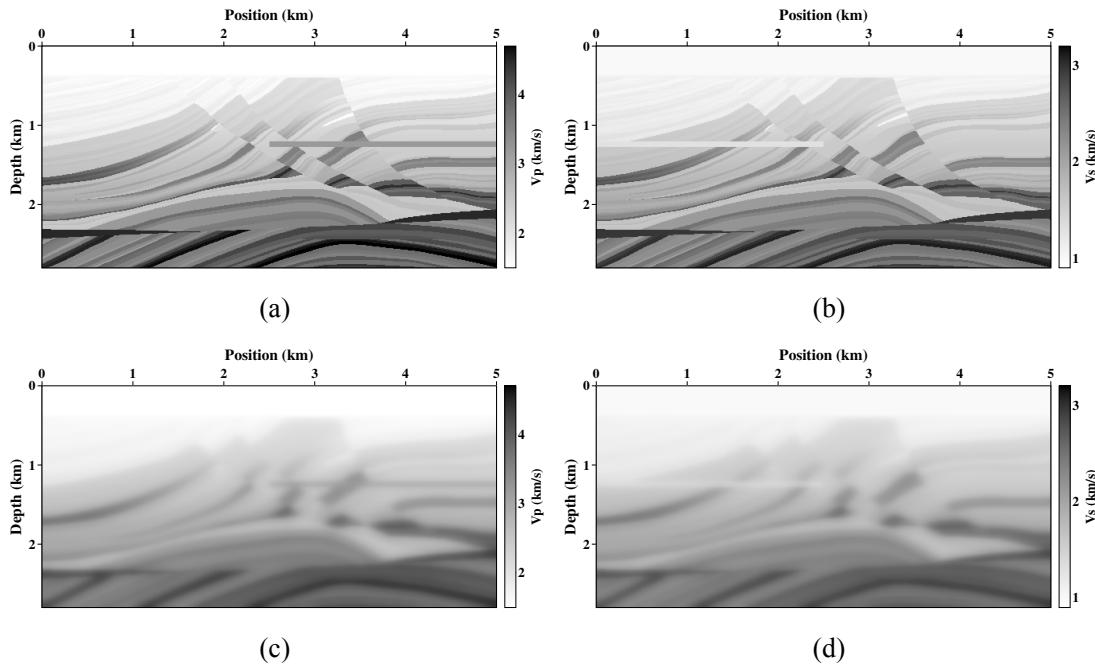


图 4.11 B 方式修改后的 Marmousi-II 真实模型与偏移模型: 左侧为  $V_p$ , 右侧为  $V_s$ 。第一行为真实模型, 第二行为偏移模型。

在实验 B 中, 为了进一步突出参数耦合效应, 在  $V_p$  和  $V_s$  模型中分别加入不同的速度异常结构 (图4.11)。这样参数耦合会在两个参数反演结果中产生比较严重的脚印。这是在实际数据很容易遇到的情况。此时如果考虑同时反演(策略 1),

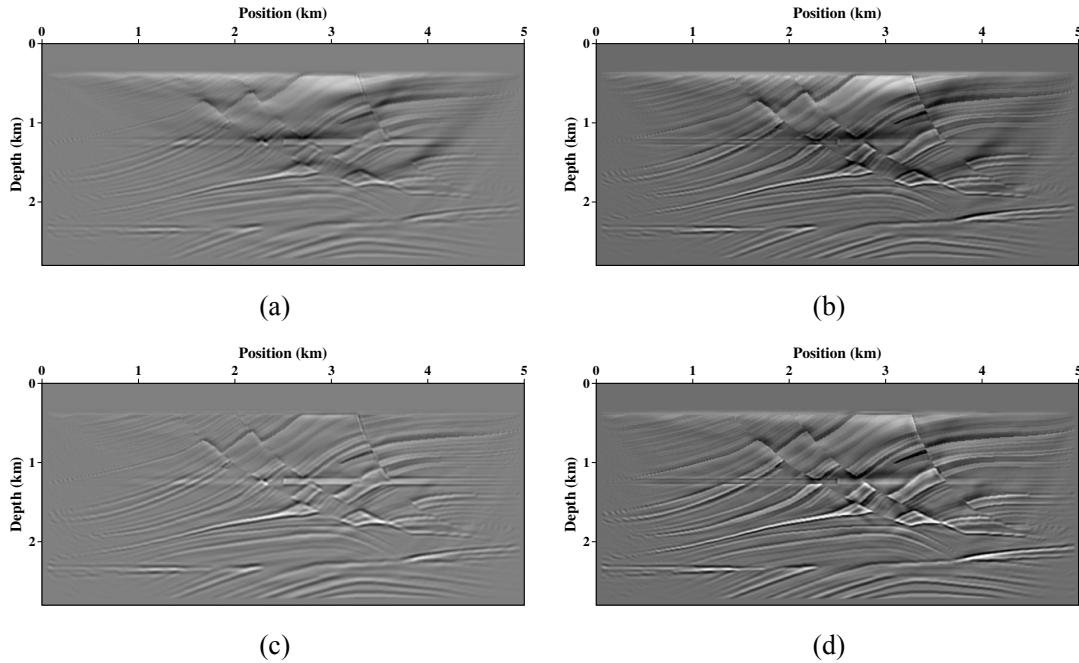


图 4.12 Born 模拟数据常规 ERTM 与 ELSRTM 结果(模型 B):左侧为  $V_p$ , 右侧为  $V_s$ 。第一行为 ERTM 结果, 第二行为 ELSRTM 结果。

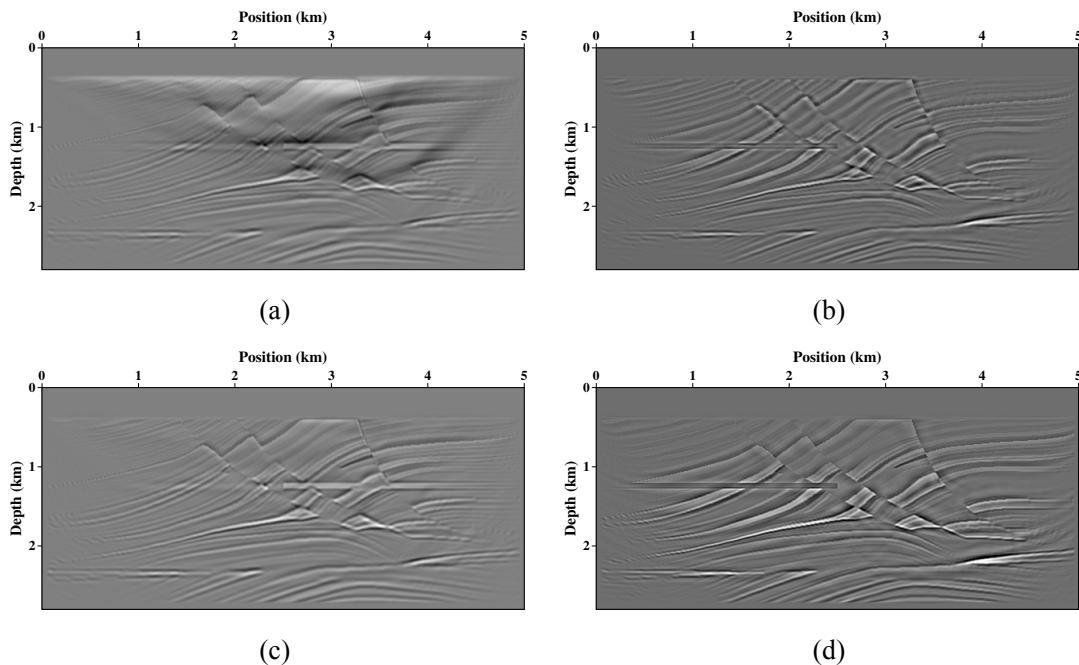


图 4.13 Born 模拟数据模式解耦 ERTM 与 ELSRTM 结果(模型 B):左侧为  $V_p$ , 右侧为  $V_s$ 。第一行为 ERTM 结果, 第二行为 ELSRTM 结果。

ELSRTM 的非线性程度会增高。Born 模拟数据的常规 ELSRTM 图像中,  $\delta V_s$  甚至还存在低频噪音。一个可能的原因就是右侧受到参数耦合的影响, 导致 P 波没有或者错误的匹配。采用模式解耦的梯度之后, 不论 ERTM 还是 ELSRTM, 都消除了  $\delta V_s$  中的参数耦合, 但是  $\delta V_p$  中仍然存在部分的耦合脚印。这是由于  $\delta V_s$  的反演没有完全收敛到真值, 导致数据中总有来自  $\delta V_s$  的残余 P 波。这部分假象很难

被完全消除掉。并且对于反射数据,正反演过程并不完全匹配,所以这种假象在同时反演中难以被消除,这就需要考虑策略2。

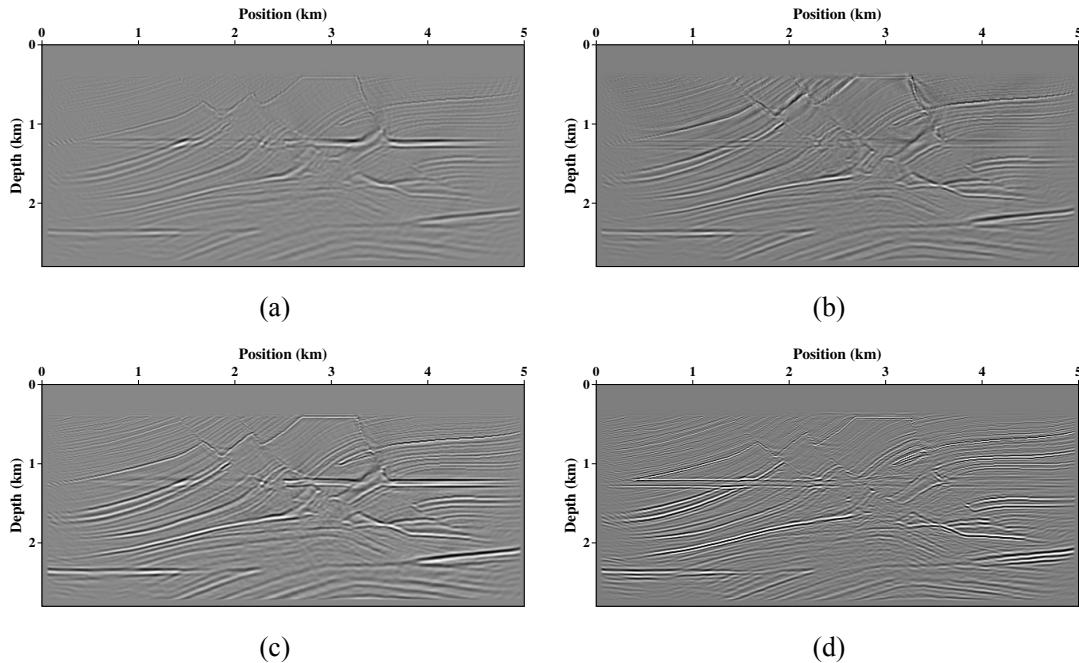


图 4.14 剩余反射数据常规 ERTM 与 ELSRTM 结果,左侧为  $V_p$ ,右侧为  $V_s$ 。第一行为 ERTM 结果,第二行为 ELSRTM 结果。

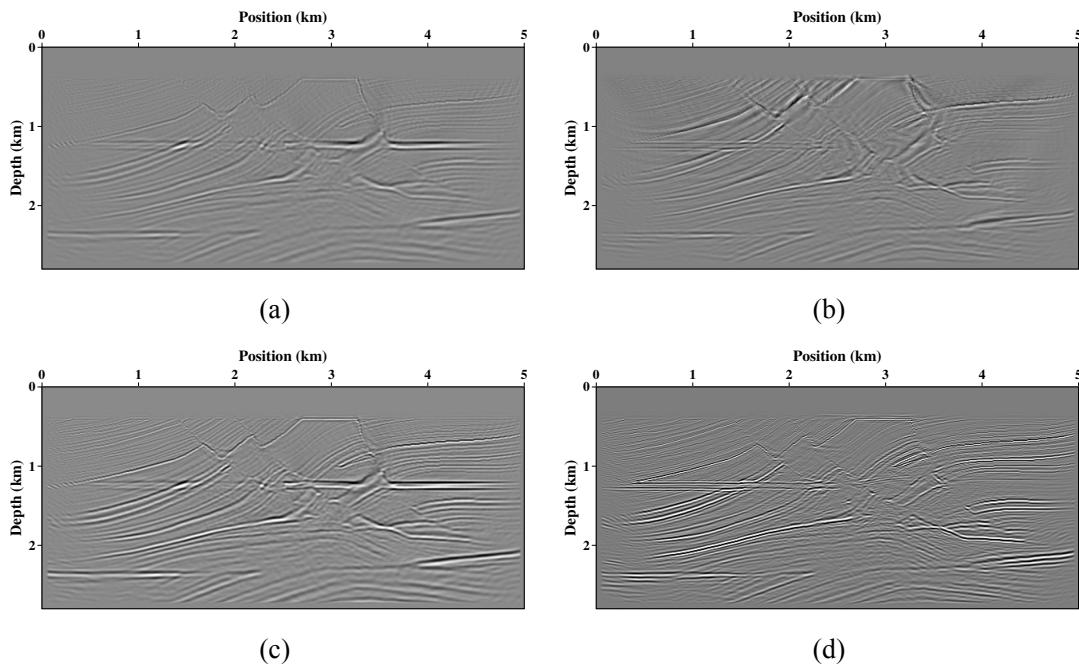


图 4.15 剩余反射数据模式解耦 ERTM 与 ELSRTM 结果,左侧为  $V_p$ ,右侧为  $V_s$ 。第一行为 ERTM 结果,第二行为 ELSRTM 结果。

下面将在剩余反射数据实验中验证策略2的有效性。同样对合成数据中的直达波进行了切除。首先进行双参数同时反演(策略1)。如图4.14所示,常规 ERTM

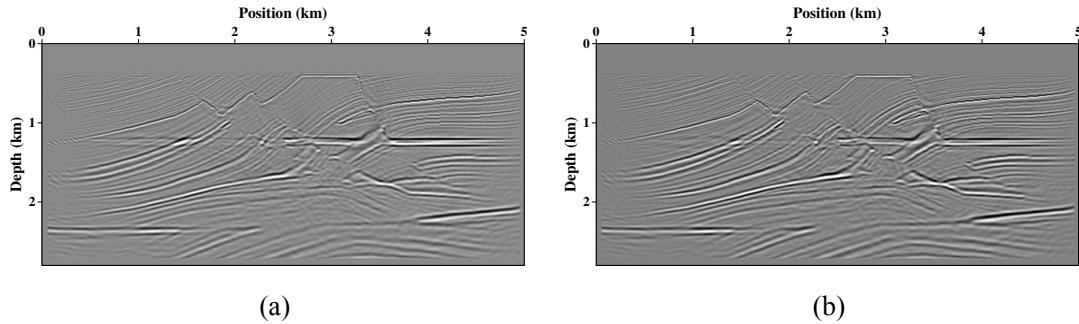


图 4.16 模式解耦下策略 1 与策略 2 所得到的  $\delta V_p$  反演结果对比。(a) 策略 1,(b) 策略 2。

与 ELSRTM 的结果与前面实验结果类似, ELSRTM 可以改善成像质量, 提高分辨率, 并部分压制参数耦合效应。在采用模式解耦之后, ERTM 以及 ELSRTM 结果中(图4.15) $\delta V_s$  的假象有所压制, 但是  $\delta V_p$  中的假象仍然存在。然后采用策略 2 来进行反演。先用解耦预条件的方式反演好  $\delta V_s$ , 再来反演  $\delta V_p$ 。由于第一阶段中相当于只利用 S 波残差进行梯度计算(交叉项近似), 因此策略 2 的  $\delta V_s$  反演结果与图4.13d 中采用策略 1 获得的  $\delta V_s$  结果基本一致, 这里由于篇幅限制就不再展示。而采用两步法反演的  $\delta V_p$  如图4.16b 所示, 相比策略 1 获得的  $\delta V_p$ (图4.16a), 可以看到左侧速度结构异常区域的干扰被进一步压制。但是由于  $\delta V_s$  反演并未完全消除其产生的 P 波残差, 最终反演结果中仍然存在少量的干扰。

## 4.6 本章小结

ELSRTM 可视为线性的 EFWI 过程, 同样会受到参数耦合的影响。虽然该过程可以提高成像分辨率, 但是无法完全压制  $\delta V_p$  与  $\delta V_s$  的串扰。模式解耦的预条件处理可以非常有效地压制  $\delta V_s$  中来自  $\delta V_p$  的串扰。在  $\delta V_p$  受参数耦合影响较弱时, 采用模式解耦预条件梯度进行双参数同时反演可以快速地获得高分辨率的  $\delta V_s$  与  $\delta V_p$ 。而在  $\delta V_p$  受参数耦合影响较强时, 通过模式解耦先反演  $\delta V_s$  后反演  $\delta V_p$ , 能够进一步压制  $\delta V_p$  中来自  $\delta V_s$  的串扰。

在 ELSRTM 过程中, 由于 Born 模拟数据与反射数据存在差异, 直接匹配反射数据会导致界面参数扰动的过估计。匹配剩余反射数据则可以更好地近似 Born 散射过程。此外, 在模型复杂区域, 反射数据中包含有多次散射波, 它们会给基于 Born 近似的 ELSRTM 带来较多的干扰。

## 第 5 章 结论与展望

### 5.1 结论

为了恢复地下介质模型中的不同波数成分,本文针对弹性波反问题,分别从 EFWI, EWERTI 以及 ELSRTM 三个方面入手来展开研究。以模式解耦作为获取数据子集以及梯度预条件的主要手段,对上述三种反问题各自存在的挑战设计了不同的反演方法与策略,从而降低反问题的非线性程度和参数间的 trade-off 效应。通过文中的研究,主要得到了以下几点认识与结论:

(1) 在 EFWI 多参数反演中,不同参数扰动产生的相同模式的数据扰动会造成参数耦合效应。采用弹性波模式解耦对 EFWI 梯度进行预条件有助于压制 EFWI 中的参数耦合效应。可以通过正传波场与解耦之后反传波场的互相关快速获得预条件后的反演梯度。**Hessian** 与分辨率矩阵的分析表明采用 S 波数据对  $V_s$  进行反演,在初始模型足够好时可视为单参数反演,同时也发现解耦正传波场的梯度预条件方式对进一步压制 EFWI 中的参数耦合贡献不大。

(2) 含密度的三参数反演会增加 EFWI 的非线性程度,尤其是在软海底环境中 PS 波非常弱的情况下。模式解耦对压制密度与速度( $V_p$  和  $V_s$ )间耦合的效果非常有限,密度的反演仍然是十分困难的课题,需要更多地加入多尺度策略甚至利用 **Hessian** 的信息。但即使引入密度参数,模式解耦对压制  $V_p$  与  $V_s$  间的耦合效应仍然有效。

(3) WERTI 采用反射走时残差作为目标函数,与模型背景速度间的关系更趋于线性化。相比互相关提取走时的方式,DIW 方式在模型复杂的情况下更加稳健可靠。

(4) 通过反射波敏感核函数的解耦与分析,发现 PP、SP 以及 PS 模式都对  $V_s$  梯度中的反射波波路径有着较强的干扰,只有 SS 模式能够代表 PS 波右半支的 S 波路径。因此地面数据 P/S 分离与空间波场模式解耦可以帮助将背景  $V_p$  与  $V_s$  的反演分解为两个独立的步骤,即先利用 PP 波反演  $V_p$ ,后利用 PS 波反演  $V_s$ 。

(5) ELSRTM 可以提高成像分辨率并部分压制参数耦合效应,但是不太彻底。模式解耦的预条件方式可以非常有效地压制  $\delta V_s$  中来自  $\delta V_p$  的串扰。在  $\delta V_p$  受参数耦合影响较弱时,采用模式解耦预条件进行双参数同时反演可以快速有效地获得  $\delta V_s$  与  $\delta V_p$ 。而在参数耦合程度较强时,可以借助模式解耦预条件先反演  $\delta V_s$  后反演  $\delta V_p$  来进一步压制  $\delta V_p$  中来自  $\delta V_s$  的串扰。在 ELSRTM 中 Born 模拟数据与反射波数据很难匹配,尤其是在偏移模型中包含较多高频散射波时,需要匹配

剩余反射数据才能与基于 Born 近似的正演数据拟合。

## 5.2 成果与创新点

本文以模式解耦为核心手段,针对三种弹性波反问题(即全波形反演,波动方程反射走时反演和最小平方偏移),提出了新的反演方法与策略。创新点主要有以下几个方面:

(1)提出了弹性波模式解耦全波形反演方法,采用解耦反传波场而非地面 P/S 分离来对目标函数的梯度进行预条件,明显降低了  $V_p$  与  $V_s$  之间的串扰并提高了收敛效率;基于模式解耦对应的 Frechet 导数、Hessian 与分辨率矩阵分析,阐明了该方法压制参数 trade-off 的内在机制。

(2)反射敏感核函数分析发现空间波模式解耦预条件可以分离出 SS 模式来计算 PS 波右半支的 S 波路径,从而压制 PP、PS 及 SP 模式对  $V_s$  反演的干扰;提出利用地面记录 P/S 分离帮助 DIW 技术获取 PP 和 PS 波的反射走时残差,采用空间波场模式解耦对  $V_s$  预条件,通过反射走时反演方法分步地恢复背景  $V_p$  与  $V_s$  模型。

(3)在弹性波最小平方偏移中,设计了不同于 EFWI 的反演策略来进一步压制参数耦合的影响。当参数耦合不强时,采用模式解耦预条件进行双参数同时反演;当参数耦合强烈时,借助模式解耦先反演  $\delta V_s$ ,后反演  $\delta V_p$ ,进一步压制了  $\delta V_p$  中来自  $V_s$  的串扰。

这些方法与策略共同形成了比较完整的弹性波反演流程,有助于多尺度地恢复弹性介质纵横波速度的不同波数成分。

## 5.3 论文不足之处与下一步计划

虽然基于模式解耦对弹性波反问题提出了一些有效的方法与策略,但仍然存在很多尚未深入研究的问题。今后需要在以下几个方面展开进一步研究:

(1)模式解耦实质上利用了 Hessian 的非对角块信息来加速收敛。但是本文 PCG 算法框架中对 Hessian 对角块信息的利用并不充分。在反演中如何与 I-BFGS 等优化方法结合进而更好地加速收敛仍待研究;

(2)走时反演有助于降低反演的非线性程度,但是其分辨率并不高,也存在多解性。下一步工作可以考虑在 EWERTI 之后加入波形匹配的 ERWI 反演,进一步提高中低波数成分的反演精度;

(3)利用 PS 波成像界面反偏移重建的反射波走时对  $V_p$  速度的误差过于敏感。如何利用 PS 波成像来较为准确地反偏移获得振幅精度较高的 PS 反射波仍需要寻找合适的解决办法,才能较稳健地用波形匹配实现 ERWI;

(4) ELSRTM 同样面临密度扰动反演的问题。在线性化的反问题中模式解耦或许能够对密度界面的反演有帮助。因此在 ELSRTM 中利用模式解耦来解决密度扰动也需要重新审视与研究；

(5) 本文算法都是在理论模型上进行分析，缺乏对模式解耦、DIW 等算法的抗噪性实验。需要利用实际地震数据测试来检验本文方法的实用性。



## 参考文献

- [1] Claerbout J F. Imaging the earth's interior. Blackwell Scientific, 1985: 217–217.
- [2] Lailly P. The seismic inverse problem as a sequence of before stack migrations. Proceedings of Conference on inverse scattering: theory and application. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 1983. 206–220.
- [3] Tarantola A. Inversion of seismic reflection data in the acoustic approximation. *Geophysics*, 1984, 49(8):1259–1266.
- [4] Xu S, Wang D, Chen F, et al. Inversion on reflected seismic wave. 82nd Annual International Meeting, SEG, Expanded Abstracts, 2012. 1–7.
- [5] Wu Z, Alkhalifah T. Simultaneous inversion of the background velocity and the perturbation in full-waveform inversion. *Geophysics*, 2015, 80(6):R317–R329.
- [6] Zhou W, Brossier R, Operto S, et al. Full waveform inversion of diving & reflected waves for velocity model building with impedance inversion based on scale separation. *Geophysical Journal International*, 2015, 202:1535–1554.
- [7] Chi B, Dong L, Liu Y. Correlation-based reflection full-waveform inversion. *Geophysics*, 2015, 80(4):R189–R202.
- [8] Sava P, Fomel S. Time-shift imaging condition in seismic migration. *Geophysics*, 2006, 71(6):S209–S217.
- [9] Almomin A, Biondi B. Tomographic Full Waveform Inversion: Practical and Computationally Feasible Approach. Proceedings of SEG Technical Program Expanded Abstracts 2012. Society of Exploration Geophysicists, 2012.
- [10] Nemeth T, Wu C, Schuster G T. Least-squares migration of incomplete reflection data. *Geophysics*, 1999, 64(1):208–221.
- [11] Kühl H, Sacchi M D. Least-squares wave-equation migration for AVP/AVA inversion. *Geophysics*, 2003, 68(1):262–273.
- [12] Dai W, Fowler P, Schuster G T. Multi-source least-squares reverse time migration. *Geophysical Prospecting*, 2012, 60(4):681–695.
- [13] 董良国, 黄超, 迟本鑫, et al. 基于地震数据子集的波形反演思路、方法与应用. *地球物理学报*, 2015, 58(10):3735–3745.
- [14] Zhang Q, McMechan G A. 2D and 3D elastic wavefield vector decomposition in the wavenumber domain for VTI media. *Geophysics*, 2010, 75(3):D13–D26.
- [15] Cheng J, Fomel S. Fast algorithms for elastic-wave-mode separation and vector decomposition using low-rank approximation for anisotropic media. *Geophysics*, 2014, 79(4):C97–C110.
- [16] Li Z, Ma X, Fu C, et al. Frequency-wavenumber implementation for P- and S-wave separation from multi-component seismic data. *Exploration Geophysics*, 2016, 47(1):32.
- [17] Cheng J, Alkhalifah T, Wu Z, et al. Simulating propagation of decoupled elastic waves using low-rank approximate mixed-domain integral operators for anisotropic media. *Geophysics*, 2016, 81(2):T63–T77.

- [18] Wang C, Cheng J, Arntsen B. Scalar and vector imaging based on wave mode decoupling for elastic reverse time migration in isotropic and transversely isotropic media. *Geophysics*, 2016, 81(5):S383–S398.
- [19] Wang T, Cheng J, Wang C. Elastic wave mode decoupling for full waveform inversion. 77th EAGE Conference and Exhibition 2015, Expanded Abstracts, 2015..
- [20] Ren Z, Liu Y. A hierarchical elastic full-waveform inversion scheme based on wavefield separation and the multistep-length approach. *Geophysics*, 2016, 81(3):R99–R123.
- [21] Claerbout J F. TOWARD A UNIFIED THEORY OF REFLECTOR MAPPING. *Geophysics*, 1971, 36(3):467–481.
- [22] Virieux J, Operto S. An overview of full-waveform inversion in exploration geophysics. *Geophysics*, 2009, 74(6):WCC1–WCC26.
- [23] Mora P. Nonlinear two-dimensional elastic inversion of multioffset seismic data. *Geophysics*, 1987, 52(9):1211–1228.
- [24] Mora P. Elastic wave-field inversion of reflection and transmission data. *Geophysics*, 1988, 53(6):750–759.
- [25] Pratt R G, Worthington M H. Inverse Theory applied to multi-source cross-hole tomography Part 1: Acoustic wave-equation method. *Geophysical Prospecting*, 1990, 38(3):287–310.
- [26] Pratt R, Song Z, Williamson P, et al. Two-dimensional velocity models from wide-angle seismic data by wavefield inversion. *Geophysical Journal International*, 1996, 124(2):323–340.
- [27] Ravaut C, Operto S, Impronta L, et al. Multiscale imaging of complex structures from multifold wide-aperture seismic data by frequency-domain full-waveform tomography: application to a thrust belt. *Geophysical Journal International*, 2004, 159(3):1032–1056.
- [28] Operto S, Virieux J, Dessa J, et al. Crustal seismic imaging from multifold ocean bottom seismometer data by frequency domain full waveform tomography: Application to the eastern Nankai trough. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth (1978–2012)*, 2006, 111(B9).
- [29] Shin C, Cha Y H. Waveform inversion in the Laplace-Fourier domain. *Geophysical Journal International*, 2009, 177(3):1067–1079.
- [30] Sirgue L. The importance of low frequency and large offset in waveform inversion. Proceedings of 68th EAGE Conference and Exhibition incorporating SPE EUROPEC 2006, 2006.
- [31] Tarantola A. A strategy for nonlinear elastic inversion of seismic reflection data. *Geophysics*, 1986, 51(10):1893–1903.
- [32] Crase E, Wideman C, Noble M, et al. Nonlinear elastic waveform inversion of land seismic reflection data. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth (1978–2012)*, 1992, 97(B4):4685–4703.
- [33] Djikpesse H, Tarantola A. Multiparameter L2 norm waveform fitting: Interpretation of Gulf Mexico reflection seismograms. *Geophysics*, 1999, 64:1023–1035.
- [34] Sears T, Singh S, Barton P. Elastic full waveform inversion of multi-component OBC seismic data. *Geophysical Prospecting*, 2008, 56:843–862.
- [35] Sears T J, Barton P J, Singh S C. Elastic full waveform inversion of multicomponent ocean-bottom cable seismic data: Application to Alba Field, U.K. North Sea. *Geophysics*, 2010, 75(6):R109–R119.

- [36] Prieux V, Brossier R, Operto S, et al. Multiparameter full waveform inversion of multicomponent ocean-bottom-cable data from the Valhall field. Part 1: imaging compressional wave speed, density and attenuation. *Geophysical Journal International*, 2013. ggt177.
- [37] Prieux V, Brossier R, Operto S, et al. Multiparameter full waveform inversion of multicomponent ocean-bottom-cable data from the Valhall field. Part 2: imaging compressive-wave and shear-wave velocities. *Geophysical Journal International*, 2013. ggt178.
- [38] Vigh D, Jiao K, Watts D, et al. Elastic full-waveform inversion application using multicomponent measurements of seismic data collection. *Geophysics*, 2014, 79(2):R63–R77.
- [39] Shipp R M, Singh S C. Two-dimensional full wavefield inversion of wide-aperture marine seismic streamer data. *Geophysical Journal International*, 2002, 151(2):325–344.
- [40] Brossier R, Operto S, Virieux J. Seismic imaging of complex onshore structures by 2D elastic frequency-domain full-waveform inversion. *Geophysics*, 2009, 74(6):WCC105–WCC118.
- [41] Nihei K T, Li X. Frequency response modelling of seismic waves using finite difference time domain with phase sensitive detection (TD-PSD). *Geophysical Journal International*, 2007, 169(3):1069–1078.
- [42] Sirgue L, Etgen J, Albertin U. 3D frequency-domain waveform inversion using time-domain finite-difference methods. 70th EAGE, Extended Abstracts, 2008. F022.
- [43] Forgues E, Lambaré G. Parameterization study for acoustic and elastic ray + Born inversion. *Journal of Seismic Exploration*, 1997, 6:253–278.
- [44] Miller D, Oristaglio M, Beylkin G. A new slant on seismic imaging: Migration and integral geometry. *Geophysics*, 1987, 52(7):943–964.
- [45] Sirgue L, Pratt R G. Efficient waveform inversion and imaging: A strategy for selecting temporal frequencies. *Geophysics*, 2004, 69:231–248.
- [46] 刘国峰, 刘洪, 孟小红, et al. 频率域波形反演中与频率相关的影响因素分析. 地球物理学报, 2012, 55(4):1345–1353.
- [47] 刘璐, 刘洪, 张衡, et al. 基于修正拟牛顿公式的全波形反演. 地球物理学报, 2013, 56(7):2447–2451.
- [48] 曹书红, 陈景波. 频率域全波形反演中关于复频率的研究. 地球物理学报, 2014, (7):2302–2313.
- [49] 张文生, 罗嘉, 滕吉文. 频率多尺度全波形速度反演. 地球物理学报, 2015, 58(1):216–228.
- [50] Wang Y, Rao Y. Reflection seismic waveform tomography. *Journal of Geophysical Research*, 2009, 114(B3).
- [51] Luo Y, Schuster G. Wave equation traveltime inversion. *Geophysics*, 1991, 56(5):645–653.
- [52] Tromp J, Tape C, Liu Q. Seismic tomography, adjoint methods, time reversal and banana-doughnut kernels. *Geophysical Journal International*, 2005, 160(1):195–216.
- [53] Chi B, Dong L, Liu Y. Full waveform inversion method using envelope objective function without low frequency data. *Journal of Applied Geophysics*, 2014, 109:36–46.
- [54] Wu R, Luo J, Wu B. Seismic envelope inversion and modulation signal model. *Geophysics*, 2014, 79(3):WA13–WA24.
- [55] Shin C, Cha Y H. Waveform inversion in the Laplace domain. *Geophysical Journal International*, 2008, 173:922–931.

- [56] Luo Y, Ma Y, Wu Y, et al. Full-traveltime inversion. *Geophysics*, 2016, 81(5):R261–R274.
- [57] 黄超, 董良国, 迟本鑫. 低频缺失情况下的弹性波包络反演. *应用地球物理*: 英文版, 2015, (3):362–377.
- [58] 王官超, 杜启振. 基于包络目标函数的弹性波波形反演. *石油物探*, 2016, 55(1):133–141.
- [59] Brossier R, Operto S, Virieux J. Which data residual norm for robust elastic frequency-domain full waveform inversion? *Geophysics*, 2010, 75(3):R37–R46.
- [60] 王毓玮, 董良国, 黄超, et al. 弹性波全波形反演目标函数性态与反演策略. *石油物探*, 2016, 55(1):123–132.
- [61] Operto S, Gholami Y, Prieux V, et al. A guided tour of multiparameter full-waveform inversion with multicomponent data: From theory to practice. *The Leading Edge*, 2013, 32(9):1040–1054.
- [62] Wu R, Aki K. Scattering characteristics of elastic waves by an elastic heterogeneity. *Geophysics*, 1985, 50(4):582–595.
- [63] Plessix R E, Cao Q. A parameterization study for surface seismic full waveform inversion in an acoustic vertical transversely isotropic medium. *Geophysical Journal International*, 2011, 185:539–556.
- [64] Gholami Y, Brossier R, Operto S, et al. Which parameterization is suitable for acoustic vertical transverse isotropic full waveform inversion? Part 1: Sensitivity and trade-off analysis. *Geophysics*, 2013, 78(2):R81–R105.
- [65] Fichtner A, Trampert J. Hessian kernels of seismic data functionals based upon adjoint techniques. *Geophysical Journal International*, 2011, 185(2):775–798.
- [66] Pan W, Innanen K A, Margrave G F, et al. Estimation of Elastic Constants in HTI Media Using Gauss-Newton and Full-Newton Multi-Parameter Full Waveform Inversion. *SEG Technical Program Expanded Abstracts 2015*, 2015. 1177–1182.
- [67] Yang J, Liu Y, Dong L. Least-squares reverse time migration in the presence of density variations. *Geophysics*, 2016, 81(6):S497–S509.
- [68] Wang Y, Dong L, Liu Y, et al. 2D frequency-domain elastic full-waveform inversion using the block-diagonal pseudo-Hessian approximation. *Geophysics*, 2016, 81(5):R247–R259.
- [69] Pan W, Innanen K A, Liao W. Accelerating Hessian-free Gauss-Newton full-waveform inversion via l-BFGS preconditioned conjugate-gradient algorithm. *Geophysics*, 2017, 82(2):R49–R64.
- [70] Wang T, Cheng J. Elastic full waveform inversion based on mode decomposition: the approach and mechanism. *Geophysical Journal International*, 2017, 209(2):606–622.
- [71] Jeong W, Lee H Y, Min D J. Full waveform inversion strategy for density in the frequency domain. *Geophysical Journal International*, 2012, 188(3):1221–1242.
- [72] Woodward M J. Wave-Equation Tomography. *Geophysics*, 1992, 57(1):15–26.
- [73] Meng Z, Valasek P A, Whitney S A, et al. 3D global tomographic velocity model building. *Proceedings of SEG Technical Program Expanded Abstracts 2004*. Society of Exploration Geophysicists, 2004.
- [74] Woodward M J, Nichols D, Zdraveva O, et al. A decade of tomography. *Geophysics*, 2008, 73(5):VE5–VE11.

- [75] Jones I. Tutorial: Velocity estimation via ray-based tomography. *First Break*, 2010, 28(1719).
- [76] Sava P, Fomel S. Time-shift imaging condition in seismic migration. *Geophysics*, 2006, 71(6):S209–S217.
- [77] Yang T, Sava P. Wave-equation migration velocity analysis with time-shift imaging. *Geophysical Prospecting*, 2011, 59(4):635–650.
- [78] Sun D, Symes W W. Waveform Inversion via Nonlinear Differential Semblance Optimization. *Proceedings of SEG Technical Program Expanded Abstracts 2012*. Society of Exploration Geophysicists, 2012.
- [79] Chavent G, Clément F, Gómez S. Automatic determination of velocities via migration-based traveltime waveform inversion: A synthetic data example. *Proceedings of SEG Technical Program Expanded Abstracts 1994*. Society of Exploration Geophysicists, 1994.
- [80] Plessix R E, Roeck Y H D, Chavent G. Waveform Inversion of Reflection Seismic Data for Kinematic Parameters by Local Optimization. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 1998, 20(3):1033–1052.
- [81] Clément F, Chavent G, Gómez S. Migration-based traveltime waveform inversion of 2-D simple structures: A synthetic example. *Geophysics*, 2001, 66(3):845–860.
- [82] Adler F, Bain R, Soudani M A, et al. Nonlinear 3D tomographic least-squares inversion of residual moveout in Kirchhoff prestack-depth-migration common-image gathers. *Geophysics*, 2008, 73(5):VE13–VE23.
- [83] Wang T, Kang W, Cheng J. Migration velocity model building using local angle domain nonlinear tomography. *Proceedings of Beijing 2014 International Geophysical Conference and Exposition*, Beijing, China, 21-24 April 2014. Society of Exploration Geophysicists, 2014.
- [84] Yang T, Wang T, Cheng J. Regularization method of tomography based on the ADCIGs with geologic dip information. *Proceedings of SPG/SEG 2016 International Geophysical Conference*, Beijing, China, 20-22 April 2016. Society of Exploration Geophysicists, 2016.
- [85] Wang S, Chen F, Zhang H, et al. Reflection-based full waveform inversion (RFWI) in the frequency domain. *Proceedings of 2013 SEG Annual Meeting*, <http://dx.doi.org/10.1190/segam2013-0671.1>: Society of Exploration Geophysicists, 2013. Society of Exploration Geophysicists.
- [86] Irabor K, Warner M. Reflection FWI. *Proceedings of SEG Technical Program Expanded Abstracts 2016*. Society of Exploration Geophysicists, 2016. 1136–1140.
- [87] Wang F, Donno D, Chauris H, et al. Waveform inversion based on wavefield decomposition. *Geophysics*, 2016, 81(6):R457–R470.
- [88] Ma Y, Hale D. Wave-equation reflection traveltime inversion with dynamic warping and full waveform inversion. *Geophysics*, 2013, 78(6):R223–R233.
- [89] Wang H, Singh S C, Audebert F, et al. Inversion of seismic refraction and reflection data for building long-wavelength velocity models. *Geophysics*, 2015, 80(2):R81–R93.
- [90] Guo Q, Alkhalifah T. A nonlinear approach of elastic reflection waveform inversion. *Society of Exploration Geophysicists*, sep, 2016: 1421–1425.
- [91] Beylkin G, Oristaglio M, Miller D. Spatial Resolution of Migration Algorithms. *Proceedings of Acoustical Imaging*. Springer Nature, 1985: 155–168.
- [92] Bleistein N. On the imaging of reflectors in the earth. *Geophysics*, 1987, 52(7):931–942.

- [93] Schuster G T. Least-squares cross-well migration. Proceedings of SEG Technical Program Expanded Abstracts 1993. Society of Exploration Geophysicists, 1993.
- [94] Chavent G, Plessix R E. An optimal true-amplitude least-squares prestack depth-migration operator. *Geophysics*, 1999, 64(2):508–515.
- [95] Shin C, Jang S, Min D J. Improved amplitude preservation for prestack depth migration by inverse scattering theory. *Geophysical prospecting*, 2001, 49(5):592–606.
- [96] Symes W W. Approximate linearized inversion by optimal scaling of prestack depth migration. *Geophysics*, 2008, 73(2):R23–R35.
- [97] Bae H S, Pyun S, Chung W, et al. Frequency-domain acoustic-elastic coupled waveform inversion using the Gauss-Newton conjugate gradient method. *Geophysical Prospecting*, 2012, 60(3):413–432.
- [98] Métivier L, Bretaudeau F, Brossier R, et al. Full waveform inversion and the truncated Newton method: quantitative imaging of complex subsurface structures. *Geophysical Prospecting*, 2014, 62(6):1353–1375.
- [99] Dai W, Schuster G T. Plane-wave least-squares reverse-time migration. *Geophysics*, 2013, 78(4):S165–S177.
- [100] Dong S, Cai J, Guo M, et al. Least-squares reverse time migration: towards true amplitude imaging and improving the resolution. Proceedings of SEG Technical Program Expanded Abstracts 2012. Society of Exploration Geophysicists, 2012.
- [101] Luo S, Hale D. Least-squares migration in the presence of velocity errors. *Geophysics*, 2014, 79(4):S153–S161.
- [102] Wong M, Biondi B L, Ronen S. Imaging with primaries and free-surface multiples by joint least-squares reverse time migration. *Geophysics*, 2015, 80(6):S223–S235.
- [103] Zhang Y, Duan L, Xie Y. A stable and practical implementation of least-squares reverse time migration. *Geophysics*, 2015, 80(1):V23–V31.
- [104] 刘玉金, 李振春. 扩展成像条件下的最小二乘逆时偏移. 地球物理学报, 2015, 58(10):3771–3782.
- [105] Symes W W. Migration velocity analysis and waveform inversion. *Geophysical Prospecting*, 2008, 56(6):765–790.
- [106] Dutta G, Schuster G T. Attenuation compensation for least-squares reverse time migration using the viscoacoustic-wave equation. *Geophysics*, 2014, 79(6):S251–S262.
- [107] 李振春, 郭振波, 田坤. 黏声介质最小平方逆时偏移. 地球物理学报, 2014, 57(1):214–228.
- [108] Dai W, Xu Z, Coates R. Least-squares reverse-time migration for visco-acoustic media. Proceedings of SEG Technical Program Expanded Abstracts 2015. Society of Exploration Geophysicists, 2015.
- [109] Duan Y, Sava P, Guittot A. Elastic least-squares reverse time migration. Proceedings of SEG Technical Program Expanded Abstracts 2016. Society of Exploration Geophysicists, 2016. 4152–4157.
- [110] Feng Z, Schuster G. Elastic least-squares reverse time migration. Society of Exploration Geophysicists, sep, 2016: 4163–4167.

- [111] Xu L, Stanton A, Sacchi M. Elastic least-squares reverse time migration. *Proceedings of SEG Technical Program Expanded Abstracts 2016*. Society of Exploration Geophysicists, 2016. 2289–2293.
- [112] Ren Z, Liu Y, Sen M K. Least-squares reverse time migration in elastic media. *Geophysical Journal International*, 2016, 208(2):1103–1125.
- [113] Du Q, Gong X, Zhang M, et al. 3D PS-wave imaging with elastic reverse-time migration. *Geophysics*, 2014, 79(5):S173–S184.
- [114] Gong T, Nguyen B D, McMechan G A. Polarized wavefield magnitudes with optical flow for elastic angle-domain common-image gathers. *Geophysics*, 2016, 81(4):S239–S251.
- [115] Rocha D, Tanushev N, Sava P. Isotropic elastic wavefield imaging using the energy norm. *Geophysics*, 2016, 81(4):S207–S219.
- [116] Wang C, Cheng J, Arntsen B. Scalar and vector imaging based on wave mode decoupling for elastic reverse time migration in isotropic and transversely isotropic media. *Geophysics*, 2016, 81(5):S383–S398.
- [117] Crase E, Pica A, Noble M, et al. Robust elastic nonlinear waveform inversion: Application to real data. *Geophysics*, 1990, 55(5):527–538.
- [118] Ravaut C, Operto S, Improtta L, et al. Multiscale imaging of complex structures from multifold wide-aperture seismic data by frequency-domain full-waveform tomography: application to a thrust belt. *Geophysical Journal International*, 2004, 159(3):1032–1056.
- [119] Operto S, Virieux J, Dessa J X, et al. Crustal seismic imaging from multifold ocean bottom seismometer data by frequency domain full waveform tomography: Application to the eastern Nankai trough. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth (1978–2012)*, 2006, 111(B9).
- [120] Xu K, McMechan G A. 2D frequency-domain elastic full-waveform inversion using time-domain modeling and a multistep-length gradient approach. *Geophysics*, 2014, 79(2):R41–R53.
- [121] Pratt R G, Shin C, Hick G. Gauss–Newton and full Newton methods in frequency–space seismic waveform inversion. *Geophysical Journal International*, 1998, 133(2):341–362.
- [122] Innanen K A. Seismic AVO and the inverse Hessian in precritical reflection full waveform inversion. *Geophysical Journal International*, 2014, 199(2):717–734.
- [123] Choi Y, Shin C. Frequency-domain elastic full waveform inversion using the new pseudo Hessian matrix: Expericence of elastic Marmousi 2 synthetic data. *Bulletin of the Seismological Society of American*, 2008, 98(5):2402–2415.
- [124] Nocedal J, Wright S. Numerical optimization. Springer Science & Business Media, 2006.
- [125] Sheen D H, Tuncay K, Baag C E, et al. Tiem domain Guass-Newton seismic waveform inversion in elastic media. *Geophysical Journal International*, 2006, 167:1373–1384.
- [126] Bae H S, Pyun S, Chung W, et al. Frequency-domain acoustic-elastic coupled waveform inversion using the Gauss-Newton conjugate gradient method. *Geophysical prospecting*, 2012, 60:413–432.
- [127] Yan J, Sava P. Isotropic angle-domain elastic reverse-time migration. *Geophysics*, 2008, 73(6):S229–S239.
- [128] Kamath N, Tsvankin I. Elastic full-waveform inversion for VTI media: Methodology and sensitivity analysis. *Geophysics*, 2016, 81(2):C53–C68.

- [129] 马德堂, 朱光明. 弹性波波场 P 波和 S 波分解的数值模拟. 石油地球物理勘探, 2003, 38(5):482–486.
- [130] Brytik V, Hoop M V, Smith H F, et al. Decoupling of modes for the elastic wave equation in media of limited smoothness. Proceeding of the Project Review, Geo-Mathematical Imaging Group, Purdue University, West Lafaytte IN, 2011, 1:193–202.
- [131] Wang W, McMechan G A, Zhang Q. Comparison of two algorithms for isotropic elastic P and S vector decomposition. Geophysics, 2015, 80(4):T147–T160.
- [132] Vigh D, Starr E W. 3D prestack plane-wave, full-waveform inversion. Geophysics, 2008, 73(5):VE135–VE144.
- [133] Plessix R E. A review of the adjoint-state method for computing the gradient of a functional with geophysical applications. Geophysical Journal International, 2006, 167(2):495–503.
- [134] Menke W. Geophysical data analysis: Discrete inverse theory. Academic Press Inc., San Diego, CA, 1989.
- [135] Snieder R, Trampert J. Inverse problems in geophysics. Springer, 1999.
- [136] Köhn D, De Nil D, Kurzmann A, et al. On the influence of model parametrization in elastic full waveform tomography. Geophysical Journal International, 2012, 191(1):325–345.
- [137] Mavko G, Mukerji T, Dvorkin J. The rock physics handbook: Tools for seismic analysis of porous media. Cambridge university press, 2009.
- [138] Kennett B L, Sambridge M S, Williamson P R. Subspace methods for large inverse problem with multiple parameter classes. Geophysical Journal, 1988, 94:237–247.
- [139] Stork C. Reflection tomography in the postmigrated domain. Geophysics, 1992, 57(5):680–692.
- [140] Chavent G, Jacewitz C A. Determination of background velocities by multiple migration fitting. Geophysics, 1995, 60(2):476–490.
- [141] Symes W W, Carazzone J J. Velocity inversion by differential semblance optimization. Geophysics, 1991, 56(5):654–663.
- [142] Sava P, Biondi B. Wave-equation migration velocity analysis. II. Subsalt imaging examples. Geophysical Prospecting, 2004, 52(6):607–623.
- [143] 付继有, 李振春, 杨国权, et al. 声介质波动方程反射旅行时反演方法. 石油地球物理勘探, 2015, 50(6):1134–1140.
- [144] Hale D. Structure-oriented smoothing and semblance. CWP report, 2009..
- [145] Leeuwen T, Mulder W A. A correlation-based misfit criterion for wave-equation traveltime tomography. Geophysical Journal International, 2010, 182:1383–1394.
- [146] Zhang Y, Ratcliffe A, Roberts G, et al. Amplitude-preserving reverse time migration: From reflectivity to velocity and impedance inversion. Geophysics, 2014, 79(6):S271–S283.

## 附录 A Gauss-Newton 梯度的调查

利用方程(2.45)和(2.46), 可以得到 GN 方法预条件后的梯度:

$$\delta\tilde{\mathbf{m}} = \begin{bmatrix} \delta\mathbf{V}_p \\ \delta\mathbf{V}_s \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{D}\mathbf{g}_{V_p}^P + \mathbf{E}(\mathbf{g}_{V_s}^P + \mathbf{g}_{V_s}^S) \\ (\mathbf{F}\mathbf{g}_{V_p}^P + \mathbf{G}\mathbf{g}_{V_s}^P) + \mathbf{G}\mathbf{g}_{V_s}^S \end{bmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

注意到上式中利用了关系  $\mathbf{g}_{V_p} = \mathbf{g}_{V_p}^P + \mathbf{g}_{V_p}^S$ ,  $\mathbf{g}_{V_s} = \mathbf{g}_{V_s}^P + \mathbf{g}_{V_s}^S$  和  $\mathbf{g}_{V_p} = \mathbf{g}_{V_p}^P$ 。很自然地, 同样也可以将预条件后的梯度  $\delta\tilde{\mathbf{m}}$ , 分成两个部分:  $\delta\tilde{\mathbf{m}} = \delta\tilde{\mathbf{m}}^P + \delta\tilde{\mathbf{m}}^S$ , 其中

$$\delta\tilde{\mathbf{m}}^P = \begin{bmatrix} \delta\mathbf{V}_p^P \\ \delta\mathbf{V}_s^P \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{D}\mathbf{g}_{V_p}^P + \mathbf{E}\mathbf{g}_{V_s}^P \\ \mathbf{F}\mathbf{g}_{V_p}^P + \mathbf{G}\mathbf{g}_{V_s}^P \end{bmatrix}, \quad (\text{A.2})$$

和

$$\delta\tilde{\mathbf{m}}^S = \begin{bmatrix} \delta\mathbf{V}_p^S \\ \delta\mathbf{V}_s^S \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{E}\mathbf{g}_{V_s}^S \\ \mathbf{G}\mathbf{g}_{V_s}^S \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

考虑到  $\delta\tilde{\mathbf{m}}^P = \mathbf{R}^P\delta\mathbf{m}$  以及  $\delta\tilde{\mathbf{m}}^S = \mathbf{R}^S\delta\mathbf{m}$ , 则

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{V}_s^P &\approx 0, \\ \delta\mathbf{V}_s &\approx \delta\mathbf{V}_s^S = -\mathbf{G}\mathbf{g}_{V_s}^S, \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

这是因为  $\mathbf{R}^P$  的底部区块几乎为空(见图2.6b)

而由于  $H_a^S = \mathbf{J}^\dagger \mathbf{J}^S \approx [\mathbf{J}^S]^\dagger \mathbf{J}^S$ , 则方程(2.44)变为:

$$\mathbf{R}^S \approx \mathbf{H}_a^{-g} [\mathbf{J}^S]^\dagger \mathbf{J}^S. \quad (\text{A.5})$$

将方程(2.46)带入到(A.5)中, 可以得到:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^S &\approx \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{E} \\ \mathbf{F} & \mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & [\mathbf{J}_{V_s}^S]^\dagger \mathbf{J}_{V_s}^S \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E}[\mathbf{J}_{V_s}^S]^\dagger \mathbf{J}_{V_s}^S \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}[\mathbf{J}_{V_s}^S]^\dagger \mathbf{J}_{V_s}^S \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

因为  $\mathbf{J}^S = (\mathbf{0} \quad \mathbf{J}_{V_s}^S)$ 。注意到  $[\mathbf{J}_{V_s}^S]^\dagger \mathbf{J}_{V_s}^S$  代表了 S 波关于  $V_s$  扰动的 Frechét 导数自相关。正如图 2.5 所示, 如果观测足够“完美”, 则该分辨率矩阵的对角区块几乎是单位矩阵。这就意味着,  $\mathbf{G}$  近似地代表了  $[\mathbf{J}_{V_s}^S]^\dagger \mathbf{J}_{V_s}^S$  的逆。因此, 预条件算子  $\mathbf{G}$  可以消除  $V_s$  反演中, 单独采用 S 波数据时几何扩散以及有限频带效应的影响。



## 附录 B 共轭状态法推导弹性波 WERTI 的梯度

本节中，采用共轭状态法 (Plessix(2006)<sup>[133]</sup>) 导出弹性波 WERTI 的梯度。EWERTI 中共有三个状态方程，其中两个为式(2.1) 和(3.2)。第三个状态方程来自 DIW 的优化约束。

我们知道 DIW 要找出局部的走时残差 ( $\tau = \tau(\mathbf{x}_r, t; \mathbf{x}_s)$ ) 使得目标函数  $D(\tau)$  最小，其中  $D(\tau)$  为：

$$D(\tau) = \frac{1}{2} \int d\mathbf{x}_s d\mathbf{x}_r (d^c(\mathbf{x}_r, t; \mathbf{x}_s) - d^o(\mathbf{x}_r, t + \tau; \mathbf{x}_s))^2 \quad (\text{B.1})$$

而目标函数最小则需要满足：

$$\frac{\partial D}{\partial \tau} = \int d\mathbf{x}_s d\mathbf{x}_r \alpha(\mathbf{x}_r, t; \mathbf{x}_s) = 0. \quad (\text{B.2})$$

其中  $\alpha(\mathbf{x}_r, t; \mathbf{x}_s) = \dot{d}^o(\mathbf{x}_r, t + \tau; \mathbf{x}_s)(d^o(\mathbf{x}_r, t + \tau; \mathbf{x}_s) - d^c(\mathbf{x}_r, t; \mathbf{x}_s))$ 。偏导数  $\frac{\partial D}{\partial \tau}$  一定为 0，如果不为 0，则总能找到一个  $\tau$  使得  $D$  变得更小，这与 DIW 找到的最小值相矛盾。因此，式(B.2)为第三个状态方程。定义增广函数：

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\tau, \mathbf{u}, \psi, \mu, \bar{\mathbf{u}}, \bar{\psi}) = & \frac{1}{2} \int \tau^2(\mathbf{x}_r, t; \mathbf{x}_s) d\mathbf{x}_s d\mathbf{x}_r dt \\ & - \int \mu(\mathbf{x}_r, t; \mathbf{x}_s) \alpha(\mathbf{x}_r, t; \mathbf{x}_s) d\mathbf{x}_s d\mathbf{x}_r dt \\ & - \int \delta\psi_i \left( \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x_j} (c_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l}) - f_i \right) d\mathbf{x}_s d\mathbf{x}_r dt \\ & - \int \psi_i \left( \rho \frac{\partial^2 \delta u_i}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x_j} (c_{ijkl} \frac{\partial \delta u_k}{\partial x_l}) - \frac{\partial}{\partial x_j} (\delta c_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l}) \right) d\mathbf{x}_s d\mathbf{x}_r dt, \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

其中， $\tau(\mathbf{x}_r, t; \mathbf{x}_s)$ ,  $\mathbf{u}$  和  $\delta\mathbf{u}$  为状态变量，同时  $\mu(\mathbf{x}_r, t; \mathbf{x}_s)$ ,  $\psi$  和  $\delta\psi$  为伴随状态变量。后两者也即反传波场。

伴随状态变量可以通过令增广函数对状态变量偏导数为零来求取，即使得  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tau} = 0$ ,  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \delta u} = 0$  和  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = 0$ 。首先

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tau} = \tau(\mathbf{x}_r, t; \mathbf{x}_s) - \mu(\mathbf{x}_r, t; \mathbf{x}_s) \frac{\partial \alpha(\mathbf{x}_r, t; \mathbf{x}_s)}{\partial \tau(\mathbf{x}_r, t; \mathbf{x}_s)}, \quad (\text{B.4})$$

可得

$$\mu(\mathbf{x}_r, t; \mathbf{x}_s) = \frac{\tau(\mathbf{x}_r, t; \mathbf{x}_s)}{h_i(\mathbf{x}_r, t; \mathbf{x}_s)}, \quad (\text{B.5})$$

其中  $h_i(\mathbf{x}_r, t; \mathbf{x}_s) = (\dot{d}_i^o(\mathbf{x}_r, t + \tau; \mathbf{x}_s))^2 - \ddot{d}_i^o(\mathbf{x}_r, t + \tau; \mathbf{x}_s)(d_i^c(\mathbf{x}_r, t; \mathbf{x}_s) - d_i^o(\mathbf{x}_r, t + \tau; \mathbf{x}_s))$ ,  $\dot{d}$  代表时间方向导数。

其次:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \delta u} = \rho \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x_j} (c_{ijkl} \frac{\partial \psi_k}{\partial x_l}) - \mu(\mathbf{x}_r, t; \mathbf{x}_s) \dot{d}_i^o(\mathbf{x}_r, t + \tau; \mathbf{x}_s). \quad (\text{B.6})$$

注意到这里利用反射数据的走时残差,因此  $\mathbf{d}^c = \mathcal{F}(\delta \mathbf{u})$ ,所以上式中对  $\delta u$  求导时需要加入 DIW 的约束。于是,背景波场的伴随状态方程为:

$$\rho \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x_j} (c_{ijkl} \frac{\partial \psi_k}{\partial x_l}) = \mu(\mathbf{x}_r, t; \mathbf{x}_s) \dot{d}_i^o(\mathbf{x}_r, t + \tau; \mathbf{x}_s). \quad (\text{B.7})$$

同上利用  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = 0$  可得散射波场的伴随状态方程:

$$\rho \frac{\partial^2 \delta \psi_i}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x_j} (c_{ijkl} \frac{\partial \delta \psi_k}{\partial x_l}) = \frac{\partial}{\partial x_j} (\delta c_{ijkl} \frac{\partial \psi_k}{\partial x_l}). \quad (\text{B.8})$$

利用式(B.7)和(B.8)求出伴随状态变量后就可以求得梯度:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_{ijkl}} = \frac{\partial E}{\partial c_{ijkl}} = - \int \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial \delta \psi_k}{\partial x_l} + \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} \frac{\partial \psi_k}{\partial x_l} \right). \quad (\text{B.9})$$

## 致 谢

朝雨浥去轻尘，窗外柳色正新。樱花第十次绽放，爱校路又一次挤满了即将远行的留影人。只是这一季的毕业，终于到了我们。十年前，弱冠懵懂，踏着同济百年校庆的灿烂而来；十年后，已近而立，见证了同济十年的辉煌。春夏秋冬四季景，印在脑海里的是美好的记忆；本硕博十载青春，放在时光里的是道不尽的感激与不舍。如今即将博士毕业，回首在上海的这十年，同济俨然已经成了第二个家。从新奇到熟悉，从熟悉到留恋，而这一次的离开又如同记忆中十八岁时的远行，留恋却又无奈。樱花灿烂，终会凋零；胜地不常，盛筵难再。有离别才会显得相聚的珍贵，人生总是在不停的变换中才会丰富多彩。

在这里我首先想感谢我的导师程玖兵教授。您教我成长，诲我做人，从大三至今已将有八年矣。从概念到理论，从编程到撰文，您在科研中每一处细节都用精益求精的态度来要求自己和我们。解惑时您耳提面命，懈怠时您谆谆教诲，迷茫时您指点迷津，如今博士论文已行将完成，其中每一页里面都包含了您的心血与付出。明师之恩，重于父母多矣，无以为报，当以更大的努力向您看齐。

地震组大家庭是我梦想启航的地方，从这里收获的知识与技能让我有信心奔向远方。马在田院士蜚声海外，他的努力让今天的地震组人才济济，先生之风，山高水长。耿建华教授在储层地球物理课上悉心指导，王华忠教授在成像与反演以及信号处理中耐心研讨，董良国教授在地震波传播与成像方面开导启蒙，杨锴教授在地震勘探原理细心讲解，钟广法和刘堂晏教授在地震解释、测井以及岩石物理方面尽心辅导，刘玉柱教授在反演理论中指点迷津，赵峦啸和屠宁老师在组会讨论中指点帮助。衷心感谢各位老师传道育人，让我们这些学子终身受益！

师兄弟姐妹的同门之谊亦令我终生难忘。特别感谢王晨龙博士，十年里学习、科研与生活的相伴，手足之情无过于此。感谢已毕业的三位硕士师兄滕龙、康玮、段鹏飞，你们留下的丰厚研究成果让我们受益良多。感谢尚颖霞、徐文才、杨涛、杨亚丽、邹鹏、阮晟、于洋、阮伦一众师弟师妹在生活与学业上的无私帮助。此外，感谢一众博士师兄王雄文、王义、王毓伟、杨积忠、迟本鑫、黄超、孙维蔷、周洋，与你们在科研上的讨论使我少走了许多弯路。感谢孙敏敖、于鹏飞、王红涛、杨靖康博士和其他兄弟姐妹的无私慷慨的帮助。

最后，我要感谢父母的养育之恩、长兄的手足之情，感谢亲朋好友在读博期间的支持。我更要感谢我的未婚妻张悦。此生幸运，在最美好的年华里遇到你；夫复何求，在剩下的人生中与你相濡以沫、风雨相伴。谨以此文献给你们！

王腾飞于二零一七年樱花盛开之际



## 个人简历、在学期间发表的学术论文与研究成果

### 个人简历

王腾飞,男,汉族,1990年2月出生于河南省襄城县。

2007年9月,考入同济大学海洋与地球科学学院。

2011年6月获地球物理学学士学位。

2011年9月,免试直接攻读同济大学固体地球物理学博士学位至今。

### 已发表期刊论文

- [1] **Tengfei Wang** and Jiubing Cheng, 2017, Elastic full waveform inversion based on mode decomposition: the approach and mechanism. *Geophysical Journal International*, 209, 606–622. (SCI)
- [2] 程玖兵, 陈茂根, **王腾飞**, 康玮, 2014, 各向异性介质 qP 波传播描述 II: 分离纯模式标量波. *地球物理学报*, 57(10), 3389-3401. (SCI)
- [3] 程玖兵, 康玮, **王腾飞**, 2013, 各向异性介质 qP 波传播描述 I: 伪纯模式波动方程. *地球物理学报*, 56(10), 3474-3486. (SCI)
- [4] Cheng Jiubing, **Wang Tengfei**, Wang Chenlong, and Geng Jianhua, 2012, Azimuth-preserved local angle-domain prestack time migration in isotropic, vertical transversely isotropic and azimuthally anisotropic media. *Geophysics*, 77, 2, S51-S64. (SCI)

### 已发表会议论文

- [1] **Wang Tengfei**, Jiubing Cheng and Chenlong Wang, 2017, Elastic wave-equation reflection traveltime inversion using dynamic warping and wave mode decomposition. *79th EAGE Conference & Exhibition 2017*, Paris, France.
- [2] **Wang Tengfei** and Jiubing Cheng, 2016, Comparison between mode decomposition based and Gaussian Newton methods in elastic full waveform inversion. *78th EAGE Conference & Exhibition*, Vienna, Austria.

- [3] Yang Tao, **Wang Tengfei**, Cheng Jiubing, 2016, Regularization method of tomography based on the ADCIGs with geologic dip information. *SEG International Geophysical Conference* Beijing, China.
- [4] **Wang Tengfei**, Jiubing Cheng and Chenlong Wang, 2015, Elastic wave mode decoupling for full waveform inversion. *77th EAGE Conference & Exhibition*, Madrid, Spain.
- [5] **Wang Tengfei** and Jiubing Cheng, 2015, Elastic wave mode decoupling for full waveform inversion. *85th SEG Annual International Meeting*, Expanded Abstracts.
- [6] **Wang Tengfei**, Kang Wei, Cheng Jiubing, 2014, Migration velocity model building using local angle domain non- linear tomography. *International Geophysical Conference and Exposition*, Beijing, China.
- [7] Wang Chenlong, Cheng Jiubing and **Wang Tengfei**, 2014, Local angle domain elastic reverse time migration in TI media. *76th EAGE Conference & Exhibition*, Amsterdam, Netherlands.
- [8] **Wang Tengfei**, Cheng Jiubing and Kang Wei, 2012, Pure mode modeling and reverse-time migration of P-wave in HTI and orthorhombic media. *82nd Ann. Internat Mtg. SEG*, Expanded Abstracts, Las Vegas, USA.