关于高斯函数的小波性质的研究*)

宋 洁 范延滨 成金勇 潘振宽
(青岛大学信息工程学院 青岛266071)

摘 要 本文基于小波理论框架,分析探讨了有关高斯函数的小波特性。根据多尺度微分算子理论和多分辨分析思想,证明了高斯函数构造了一个多分辨分析(MRA),高斯函数的各阶导数均构成小波基函数。从滤波器组的角度,由高斯函数的导数构成的小波函数构造了低通滤波器的脉冲响应,也可视为一尺度函数。

关键词 小波,高斯函数,尺度函数,多分辨分析

The Discussion about Gaussian Function Based Wavelet Analysis

SONG Jie FAN Yan-Bin CHENG Jin-Yong PAN Zheng-Kuan
(Department of Information Engineering, Qingdao University, Qingdao 266071)

Abstract This paper discusses the Gaussian function based the frame of wavelet theory. According to the theory of multi-scale differential operator, the derivation of Gaussian function can be seen as the prototype wavelet. The wavelet functions can construct the pulse response of the low-filtering groups from the filtering groups in the engineering. With the multi-resolution analysis, this paper proofs Gaussian function can construct MRA.

Keywords Wavelet, Gaussian function, Scale-function, MRA

1 引言

在较早发展的短时傅立叶分析中,已经证明了给予高斯函数的窗函数是满足测不准原理的“最优窗”[1],基于高斯函数的短时傅立叶变换也称“Gabor”变换。在基于傅立叶分析发展的小波理论中,高斯函数的一阶、二阶导数已经证明是小波函数,并且用于检测信号的奇异性[2]。其中高斯函数的二阶导数,也称为Bubble子波,通常在数学上用来描述神经系统的侧抑制现象[3,4]。由此可见,高斯函数在理论和应用中具有重要地位。

文[6]中提出小波变换可以视为一个多尺度微分算子,并给出相应的定理。这表明高斯函数不仅其一阶、二阶导数可以作为小波基函数,而且大于二阶的导数也可以作为小波基函数。Daubechies将由空间分解引出的多分辨分析概念初步与滤波器组联系起来。从信号处理角度来看,多分辨分析中的尺度函数等价于低通滤波器的脉冲响应。本文基于这一思想由高斯函数的导数构造其响应的尺度函数。最后,根据尺度函数和多分辨分析之间的联系[5],进一步具体证明了高斯函数生成了一个多分辨分析。

2 高斯函数和小波

本文采用文[6]中高斯函数$g(t)$的一般形式:

$$g(t)=\frac{1}{(\sigma^2\pi)^{1/4}}\exp(-\frac{t^2}{2\sigma^2}) \tag{1}$$

上式两边进行傅立叶变换,有:

$$\hat{g}(\omega)=(4\sigma^2\pi)^{1/4}\exp(-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}) \tag{2}$$

人们已经证明了高斯函数的一阶、二阶导数是小波基函数,并在小波分析理论和应用中得到广泛使用。事实上,可以进一步证明高斯函数的各阶导数是小波基函数。根据小波函数的定义,容易证明高斯函数的各阶导数满足容许行条件,因此是小波函数。此外,下面的定理也表明高斯函数的导数可以构成小波基函数。

定理1[6] 快速衰减的小波$\psi(t)$具有n阶消失矩,当且仅当存在快速衰减的函数θ,使得

$$\psi(t)=(-1)^n\frac{\mathrm{d}^n\theta(t)}{\mathrm{d}t^n} \tag{3}$$

从而

$$Wf(u,s)=s^n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}u^n}(f*\bar{\theta}_s)(u) \tag{4}$$

其中$\bar{\theta}_s(t)=s^{1/2}\theta(-t/s)$,而且$\psi(t)$具有不超过$n$阶消失矩当且仅当$\int_{-\infty}^{\infty}\theta(t)\mathrm{d}t\neq 0$。

可以证明高斯函数满足快速衰减的条件,这一点也可以从其函数图像上看出。那么(3)式蕴涵着高斯函数的各阶导数是小波基函数,并且可以判断小波函数具有的消失矩和导数阶数相等。大部分文献仅给出了高斯函数当$\sigma=1$时的导数,本文保留了σ,推导了一般的高斯函数的各阶导数构成的小波函数$\varphi_n(t)=(-1)^n g^{(n)}(t)$,即:

$$\varphi_1(t)=-\frac{t}{\sigma\pi^{1/4}}\exp(-\frac{t^2}{2\sigma^2})$$

$$\varphi_2(t)=\frac{1}{\sigma\pi^{1/4}}(1-\frac{t^2}{\sigma^2})\exp(-\frac{t^2}{2\sigma^2})$$

$$\varphi_3(t)=-\frac{1}{\sigma\pi^{1/4}}(-\frac{3t}{\sigma^2}+\frac{t^3}{\sigma^4})\exp(-\frac{t^2}{2\sigma^2})$$

$$\varphi_4(t)=\frac{1}{\sigma\pi^{1/4}}(-\frac{3}{\sigma^2}+\frac{6t^2}{\sigma^4}+\frac{t^4}{\sigma^6})\exp(-\frac{t^2}{2\sigma^2})$$

……

由傅立叶变换的微分性质可以得到小波函数$\varphi_n(t)$的傅立叶变换:

$$\hat{\varphi}_n(\omega)=(-j\omega)^n\hat{g}^{(n)}(\omega)=(-j\omega)^n(4\sigma^2\pi)^{1/4}\exp(-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}) \tag{5}$$

定理1还表明$\psi_n(t)$具有不超过n阶消失矩,故其满足消

*)山东自然科学基金资助项目(Y2003G01):虚拟手术仿真中的软组织器官建模。宋 洁 研究生,主要从事小波理论及应用,数字图像处理的研究。

失矩条件：$\int_{-\infty}^{+\infty} t^k \varphi_n(t) \mathrm{d}t = 0, (0 \leqslant k < n)$，随着微分阶数 n 的增长，可以看出 $\psi_n(t)$ 的衰减速度等价于 $O(t^{n-1})$。

3 高斯函数和尺度函数

在多分辨分析(MRA)思想中，尺度函数 $\phi(t)$ 经过伸缩平移 $\{\frac{1}{\sqrt{2^j}}\phi(\frac{t}{2^j}-k)\}_{j,k\in Z}$ 构成子空间 V_j 的 Riesz 基，并且闭子空间序列 $\{V_j\}_{j\in Z}$ 满足嵌套关系：

$$\{0\} \subset \underset{j\to\infty}{\cdots\cdots} \subset V_{j+1} \subset V_j \subset V_{j-1} \subset \underset{j\to-\infty}{\cdots\cdots} \subset L^2(R) \tag{6}$$

W_j 是 V_j 在 V_{j-1} 中的正交补，存在小波函数 $\psi(t)$ 经过伸缩平移生成子空间 W_j，并且子空间 V_j 和 W_j 满足如下关系：

$$\begin{cases} W_j \perp V_j \\ V_j = V_{j+1} \oplus W_j \end{cases} \tag{7}$$

由此可得子空间 V_j 的完全分解：

$$V_0 = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots\cdots \oplus W_2 \oplus V_j \quad \text{且} \quad \text{当 } j \to \infty \text{ 时 } V_j \to \{0\} \tag{8}$$

因此 V_0 空间的总能量应等于各 W_j 空间能量之和，即：

$$|\hat{\phi}(\omega)|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\hat{\psi}(2^j\omega)|^2 \tag{9}$$

式(9)是对尺度 s 的二分的情况，对任意尺度 $s\in R$，尺度函数 $\phi(t)$ 和小波函数 $\psi(t)$ 同样满足这样的关系。Mallat 从信号处理的角度出发，通过小波函数 $\psi(t)$ 引入尺度函数 $\phi(t)$，并且视 $\phi(t)$ 为小波在大于1的尺度的聚合体，其傅立叶变换模为：

Mallat 从函数的多分辨率空间分解概念出发，在小波变换与多分辨分析之间建立了联系[8,9]。

定义1(MRA) 设 $\{V_j\}_{j\in Z}$ 是 $L^2(R)$ 中的一串闭子空间列，若满足如下性质，则称 $\{V_j\}_{j\in Z}$ 为 $L^2(R)$ 的一个多分辨率分析：

1. $\forall\ (j,k)\in Z^2, f(t)\in V_j \Leftrightarrow f(t-2^jk)\in V_j$
2. $\forall\ j\in Z, V_{j+1}\subset V_j$
3. $\forall\ j\in z, f(t)\in V_j \Leftrightarrow f(\frac{t}{2})\in V_{j+1}$
4. $\lim\limits_{j\to\infty} V_j = \bigcap\limits_{j=-\infty}^{\infty} V_j = \{0\}, \lim\limits_{j\to-\infty} V_j = Closure(\bigcup\limits_{j=-\infty}^{+\infty} V_j) = L^2(R)$
5. 存在 θ，使得 $\{\theta(t-n)\}_{n\in z}$ 是 V_0 的一组 Riesz 基。

多分辨分析从空间的角度提出了构造小波的一个简单方法，很多常用的小波都可以根据 MRA 的方法构造出来，例如 Harr 小波。仔细分析 MRA 的定义，我们还可以根据另一种方法来构造一个多分辨分析。已经证明，存在一个函数 θ 能否构成多分辨分析的条件[5]：

定理2 假定 $\theta\in L^2(R)$ 满足下述条件：

(1) $\{\theta(t-k)\}_{k\in Z}$ 是 $L^2(R)$ 的 Riesz 基；

(2) $\theta(\frac{t}{2}) = \sum_{n\in Z} a[n]\theta(t-n)$，即 θ 满足某个双尺度方程；

(3) $\hat{\theta}(\omega)$ 在0点连续，且 $\hat{\theta}(0)\neq 0$；

则空间序列 $\{V_j\}_{j\in Z}, V_j = span\{2^{-j/2}\theta(\frac{t-k}{2^j})\}_{k\in Z}$，和 θ 一起构成了一个 MRA。

由此可见，若能找到一个函数 θ，经过平移构成 $L^2(R)$ 空间的 Riesz 序列，并且满足双尺度方程，那么由这个 Riesz 序列张成的空间能满足多分辨分析的条件，生成了一个多分比分析(MRA)。对于高斯函数，可以具体证明其能构成一个 MRA：

证明：(1) 若要证明 $\{g(t-k)\}_{k\in Z}$ 构成 $L^2(R)$ 空间的一个 Riesz 系，通常利用其等价命题，即存在常数 A、B，使得

$$\forall\ \omega, A \leqslant \sum_{k\in Z} |\hat{g}(\omega+2k\pi)|^2 \leqslant B \tag{11}$$

可以得到：

$$A \leqslant \sum_{k\in Z} 2\sigma\sqrt{\pi}\exp(-(\omega+2k\pi)^2\sigma^2) \leqslant B \tag{12}$$

此条件显然成立。

(2) g 满足双尺度方程：$g(\frac{t}{2}) = \sum_{n\in Z} a[n]g(t-n)$

这等价于证明在频域满足

$$\hat{g}(2\omega) = \hat{m}_g(\omega)\hat{g}(\omega) \tag{13}$$

其中 $\hat{m}_g(\omega)$ 为：

$$\hat{m}_g(\omega) = \frac{1}{2}\sum_{n\in Z} a_n \exp(-in\omega) \tag{14}$$

由(13)式可以得：$\hat{m}_g(\omega) = \frac{\hat{g}(2\omega)}{\hat{g}(\omega)}$

将高斯函数的频域表示(2)式带代入可以得到 $\hat{m}_g(\omega) = \exp(-\frac{3\omega^2\sigma^2}{2})$。

又已知 $\{\exp(-in\omega)\}_{n\in Z}$ 是复域空间一组正交基，则由(14)式可以求得 $a[n] = \sqrt{\frac{2\pi}{3\sigma^2}}\exp(-\frac{2n^2}{3\sigma^2})$，故存在 $\{a[n]\}_{n\in Z} \in l^2(Z)$，所以高斯函数满足双尺度方程。

(3) 由于 $|\hat{g}(0)| = (4\pi\sigma^2)^{1/4} \neq 0$ 且 $|\hat{g}(\infty)| = 0$，所以高斯函数显然也满足条件3。

由上面的证明我们可以看出 $\{g(t-k)\}_{k\in Z}$ 张成的空间 V_0，进而构成的空间序列 $\{V_j\}_{j\in Z}$ 和 g 一起构成一多分辨分析。

小结 本文在小波分析的框架中主要分析了高斯函数与小波函数，高斯函数与 MRA 之间的特殊关系。基于多尺度微分算子理论，分析讨论了高斯函数的各阶导数构成一系列的小波基函数，并且能构造出其尺度函数。根据多分辨分析思想，我们系统的分析了任一高斯函数能构成一个 MRA。在分析探讨的过程中，还有三个问题有待进一步的解决：一、高斯函数能构成 MRA，但其能否根据 MRA 思想正交化，构成正交尺度函数，进而构成正交小波基；二、高斯函数的各阶导数构成的小波基函数对应的尺度函数的形式是否都为高斯函数；三、在小波分析中，高斯函数构成的滤波器系数问题。

基于小波分析理论框架，系统的分析高斯函数的几个特性将有助于我们对小波理论的深刻理解，并且能有效地应用于实际工程中。

参 考 文 献

1 崔锦泰著，程正兴译. 小波分析导论[M]. 西安：西安交通大学出版社，1993. 66～80

2 杨福生著. 小波变换的工程分析与应用[M]. 北京：科学出版社，1999. 146～152

3 袁晓，虞厥邦. 基于 Bubble 函数的子波构造[J]. 信号处理，1999，15(3)：37～41

4 袁晓，虞厥邦. Bubble 小波的正交条件研究[J]. 电子科技大学学报，1998，27(1)：25～28

5 Daubechies I. Orthonormal bases of compactly supposed wavelet，Comm. On Pure and Appl. Math.，1998，41：909～996

6 Stephane Mallat 著，杨力华，等译. 信号处理的小波导论[M]. 北京：机械工业出版社，2002

7 冯象初，等编著. 数值泛函与小波理论[M]. 西安：西安电子科技大学出版社，2002

8 Mallat S. A theory of multiresolution signal decomposition：The wavelet transform. IEEE Trans. PAM，1989，11(7)：674～693

9 Mallat S. Multiresolution approximation and wavelet orthonormal based of L^2(R). Trans. Amer. Math. Soc.，1989，315：69～87