

# 基于 Daubechies 小波的谐波分析算法

黄文清 戴瑜兴 全慧敏

(湖南大学电气与信息工程学院 长沙 410082)

**摘要** 针对基于傅里叶变换 (FFT) 的谐波分析方法易受噪声干扰和对暂态谐波处理精度差的缺点, 提出了一种基于小波包变换的谐波分析算法。该算法能实现信号频带的均匀划分, 通过选择适当的采样频率和小波包分解树, 可使所关心的谐波频率落在小波包频带的中心, 从而减少频谱泄露, 有效提高频谱分析精度。通过对比研究表明该算法抗干扰能力明显优于 FFT 方法, 仿真和实验结果进一步表明了该算法的有效性。

**关键词:** Daubechies 小波 傅里叶变换 小波包变换 谐波分析

**中图分类号:** TM76

## Harmonic Estimation Method Based on Daubechies Wavelet

Huang Wenqing Dai Yuxing Quan Huimin

(Hunan University Changsha 410082 China)

**Abstract** This paper presents a method to estimate voltage and current harmonics using the wavelet-packet transform. The proposed method overcomes the shortcomings of FFT-based method such as sensitivity to noise and inaccurate performance in non-stationary environments. This method divides the frequency bands linearly, with constant bandwidth to separate each harmonic. Based on simulation studies, performance of the method is presented and its accuracy is compared with FFT-based method.

**Keywords :** Daubechies wavelet, FFT, wavelet-packet transform, harmonic analysis

## 1 引言

谐波检测和谐波治理是电力系统的热门研究课题。傅里叶变换(FFT), 由于其运算的简洁性和有效性, 是谐波分析的主要方法<sup>[1, 2]</sup>, 该方法对被分析信号的采样点数有一定的要求, 需要对被分析信号进行同步采样或者用特定的窗函数(比如 Hanning 窗等)进行加窗处理。理论上, 对于稳态的周期信号, 比较容易实现同步采样, FFT 能够精确反映其频谱; 而实际应用中, 负载大多是动态的, 而且由于噪声及各种暂态干扰的存在, 被分析信号往往是非稳态的, 不仅基波频率有可能产生偏离, 使得同步采样很难实现, 从而使得 FFT 方法存在“栅栏效应”、“频谱泄露”等缺点; 而且, 由于暂态干扰的频谱范围分布很广, 使得加窗处理也变得很困难<sup>[3]</sup>。近年来, 由于小波变换(DWT)具有优越的时频局部化功能,

常用来进行电能质量的暂态分析, 包括暂态干扰信号的定位, 暂态信号去噪等, 文献[4, 5]提出了基于 DWT 的谐波分析方法, 指出小波分解后的子频带内包含信号的所有频谱信息。然而基于 DWT 的谐波分析也存在信号频带划分不均匀——高频频带宽、低频频带窄的特点, 这样不利于准确判断出信号所含有的各次谐波情况。为克服这些缺点, 本文提出一种基于小波包变换(WPT)的谐波分析算法, 该算法能实现频带的均匀划分, 通过选择适当的采样频率和适当的小波包分解树, 可以使得关心的谐波频率落在小波包频带的中间, 从而最大程度地减少谐波泄露; 同时, 为了减少小波包频带间的“串扰”, 小波函数的选择也很关键, 在比较研究几种小波基特性的基础上<sup>[6, 7]</sup>, 采用 Daubechies 小波(DB20)作为所提算法的小波函数。

## 2 基于 Daubechies 小波的谐波分析算法

在文献[8]中, Mallat 对小波理论及其数学背景

作了详细的叙述,同时指出小波基的构造可与多分辨率信号逼近联系起来。遵循这种联系,导出了小波基与共轭镜像滤波器之间的等价性。这些滤波器组实现了一种快速正交小波变换。

### 2.1 多分辨率逼近 (MRA) 和小波正交基

MRA 是指一串嵌套式闭子空间逼近序列  $\{V_j\}$ , 它满足下列要求

$$V_{j+1} \subset V_j; V_j = V_{j+1} \oplus W_{j+1} \quad (1)$$

其中  $W_{j+1}$  是  $V_{j+1}$  在  $V_j$  中的补空间,  $\oplus$  表示两个子空间的直和关系。正交尺度函数  $\{\phi_{j,k}; j, k \in \mathbb{Z}\}$  属于  $V_j$  子空间, 小波正交基  $\{\psi_{j,k}; j, k \in \mathbb{Z}\}$  属于  $W_j$  子空间。

且有

$$\phi_{j,k}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \phi\left(\frac{t-2^j k}{2^j}\right) \quad (2)$$

$$\psi_{j,k}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \psi\left(\frac{t-2^j k}{2^j}\right) \quad (3)$$

正交小波基满足下列属性

$$\int \psi_{j,k}^p(t) \psi_{j,k}^q(t) dt = \begin{cases} 1 & \text{当 } p=q \\ 0 & \text{当 } p \neq q \end{cases} \quad (4)$$

$$\int (\phi_{j,k}(t))^2 dt = 1 \quad (5)$$

$$\int \phi_{j,k}(t) \psi_{j,k}^p(t) dt = 0 \quad p \neq 0 \quad (6)$$

函数  $f$  在分辨率  $2^{-j}$  上的逼近定义为它在  $V_j$  时的正交投影  $P_{V_j} f$

$$P_{V_j} f = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \langle f, \phi_{j,k} \rangle \phi_{j,k} \quad (7)$$

内积

$$\begin{aligned} a_j[k] &= \langle f, \phi_{j,k} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{2^j}} \phi\left(\frac{t-2^j k}{2^j}\right) dt \\ &= f * \bar{\phi}_j(2^j k) \end{aligned} \quad (8)$$

给出了  $f$  在尺度  $2^j$  上的一个离散逼近。

### 2.2 小波变换和滤波器组

快速小波变换不断地将每一尺度逼近  $P_{V_j} f$  分解成更小尺度上的尺度系数  $P_{V_{j+1}} f$  与小波系数  $P_{W_{j+1}} f$  之和。因  $\{\phi_{j,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  和  $\{\psi_{j,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  是  $V_j$  和  $W_j$  的规范正交基, 在这两个空间的投影可刻划为

$$a_j[n] = \langle f, \phi_{j,n} \rangle; d_j[n] = \langle f, \psi_{j,n} \rangle \quad (9)$$

这些系数可用离散卷积的迭代计算和子采样得到, 如下两式

$$a_{j+1}[k] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n-2k] a_j[n] = a_j * \bar{h}[2k] \quad (10)$$

$$d_{j+1}[k] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g[n-2k] a_j[n] = a_j * \bar{g}[2k] \quad (11)$$

式 (10) 式 (11) 表明,  $d_{j+1}$  和  $a_{j+1}$  由  $a_j$  分别与  $\bar{g}$ 、 $\bar{h}$  卷积再做因子为 2 的下采样而得到, 且满足

$$g[k] = (-1)^n h[1-k] \quad (12)$$

$h$  和  $g$  组成一对共轭镜像滤波器组。

小波系数分解如图 1 所示, 其中 level 0 为原始信号。

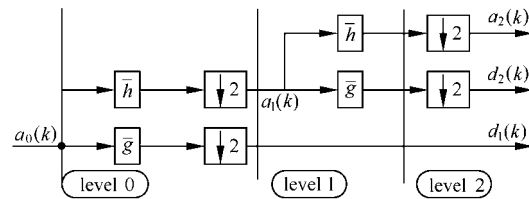


图 1 小波分解树

Fig.1 Wavelet decomposition tree

### 2.3 小波包分析

进一步对小波子空间按照  $W_j$  二进制方式进行频率细分, 以提高频率分辨率。在分解时

$$d_{j+1}^{2p}[k] = \sum_n h(n) d_j^p(n-2k) = d_j^p * \bar{h}[2k] \quad (13)$$

$$d_{j+1}^{2p+1}[k] = \sum_n g(n) d_j^p(n-2k) = d_j^p * \bar{g}[2k] \quad (14)$$

小波包系数分解见图 2, 其中 level 0 是原始信号。

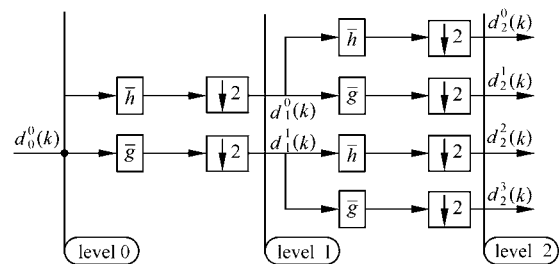


图 2 小波包分解树

Fig. 2 Wavelet packet decomposition tree

### 2.4 均方根值 RMS 的小波表达

在观察时间段  $T$  内,  $v(t)$  和  $i(t)$  分别代表模拟信号的电压和电流, 经采样、A/D 转换后, 其对应的数字化信号为  $v(n)$  和  $i(n)$ ,  $n=0, 1, \dots, 2^N-1$ 。  $v(t)$  可表示为<sup>[6]</sup>

$$\begin{aligned}
 v(t) &= \sum_{i=1}^{2^{j-1}} \sum_{k=0}^{2^{N-j-1}} d_j^{2i-2}(k) \psi_{j,k}^{2i}(t) + \\
 &\quad \sum_{i=1}^{2^{j-1}} \sum_{k=0}^{2^{N-j-1}} d_j^{2i-1}(k) \psi_{j,k}^{2i+1}(t) \\
 &= \sum_{i=0}^{2^{j-1}} \sum_{k=0}^{2^{N-j-1}} d_j^i(k) \psi_{j,k}^i(t) \quad (15)
 \end{aligned}$$

于是, 有

$$\begin{aligned}
 \int v(t)^2 dt &= \int \left[ \sum_{k=0}^{2^{N-j-1}} d_j^0(k) \phi_{j,k}(t) + \right. \\
 &\quad \left. \sum_{i=1}^{2^{j-1}} \sum_{k=0}^{2^{N-j-1}} d_j^i(k) \psi_{j,k}^i(t) \right]^2 dt \\
 &= \sum_{k=0}^{2^{N-j-1}} (d_j^0(k))^2 \int (\phi_{j,k}(t))^2 dt + \\
 &\quad \sum_{i=1}^{2^{j-1}} \sum_{k=0}^{2^{N-j-1}} (d_j^i(k))^2 \int (\psi_{j,k}^i(t))^2 dt + \\
 &\quad 2 \sum_{i=1}^{2^{j-1}} \sum_{k=0}^{2^{N-j-1}} d_j^0(k) d_j^i(k) \int \phi_{j,k}(t) \psi_{j,k}^i(t) dt \quad (16)
 \end{aligned}$$

根据小波属性式 (4) (5) (6), 式 (16) 简化为

$$\int v(t)^2 dt = \sum_{i=0}^{2^{j-1}} \sum_{k=0}^{2^{N-j-1}} (d_j^i(k))^2 \quad (17)$$

电压的总的 rms 值为

$$\begin{aligned}
 V_{\text{rms}} &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v(t)^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{2^N} \sum_{n=0}^{2^N-1} v(n)^2} \\
 &= \sqrt{\frac{1}{2^N} \sum_{i=0}^{2^{j-1}} \sum_{k=0}^{2^{N-j-1}} (d_j^i(k))^2} = \sqrt{\sum_{i=0}^{2^{j-1}} (V_j^i)^2} \quad (18)
 \end{aligned}$$

其中,  $V_j^i$  是第  $j$  层, 第  $i$  节点的频带的 rms 值

$$V_j^i = \sqrt{\frac{1}{2^N} \sum_{k=0}^{2^{N-j-1}} (d_j^i(k))^2} \quad (19)$$

同理, 电流总的 rms 值为

$$\begin{aligned}
 I_{\text{rms}} &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i(t)^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{2^N} \sum_{n=0}^{2^N-1} i(n)^2} \\
 &= \sqrt{\frac{1}{2^N} \sum_{i=0}^{2^{j-1}} \sum_{k=0}^{2^{N-j-1}} (d_j^{*i}(k))^2} = \sqrt{\sum_{i=0}^{2^{j-1}} (I_j^i)^2} \quad (20)
 \end{aligned}$$

其中

$$I_j^i = \sqrt{\frac{1}{2^N} \sum_{k=0}^{2^{N-j-1}} (d_j^{*i}(k))^2} \quad (21)$$

式中,  $d_j^{*i}$  是  $i(n)$  的小波变换参数。

## 2.5 THD 计算

谐波畸变率 (HR) 指  $k$  次谐波分量 rms 和基波分量 rms 之比, 通过小波包变换, 电压信号和电流信号的基波分别包含在  $V_j^0$  和  $I_j^0$  频带内, 其  $k$  次谐波畸变率分别为

$$\text{HR}_k = \frac{V_j^k}{V_j^0} \text{ 和 } \text{HR}_k = \frac{I_j^k}{I_j^0} \quad (22)$$

总谐波畸变率 (THD) 指信号所含谐波 rms 与总的畸变信号 rms 之比, 电压 THD<sub>v</sub> 和电流 THD<sub>i</sub> 为

$$\begin{cases} \text{THD}_v = \frac{V_{\text{rms}} - V_j^0}{V_{\text{rms}}} \times 100\% \\ \text{THD}_i = \frac{I_{\text{rms}} - I_j^0}{I_{\text{rms}}} \times 100\% \end{cases} \quad (23)$$

## 3 算法评估及结果

为了验证算法的有效性, 分静态谐波、带噪声的静态谐波和暂态谐波等三种情况对该算法进行仿真实验。在进行谐波分析时, 以采样频率 6400Hz 对信号进行采样, 并取 1024 个采样点 (8 个周波) 进行谐波分析。根据采样定律, 能检测到的最大频率为 3200Hz。对该信号进行 5 层小波包分解, 于是第 5 层包含了 32 个节点, 每个节点对应的频带包含有 1 个奇次谐波。

### 3.1 静态谐波分析

该波形包含有 1 个基波 (频率为 50Hz) 和 3 个幅值不同的奇次谐波, 即 3 次、5 次和 7 次谐波, 信号的函数表达式如下

$$\begin{aligned}
 v(t) &= \sqrt{2} \times [1.0 \sin(2\pi 50t) + 0.2 \sin(2\pi 150t + 135^\circ) + \\
 &\quad 0.1 \sin(2\pi 250t + 150^\circ) + 0.2 \sin(2\pi 350t)] \quad (24)
 \end{aligned}$$

图 3 给出了小波包参数在各个分解层次的分布图, 每层的参数总数量是相同的 (为清晰起见, 本图

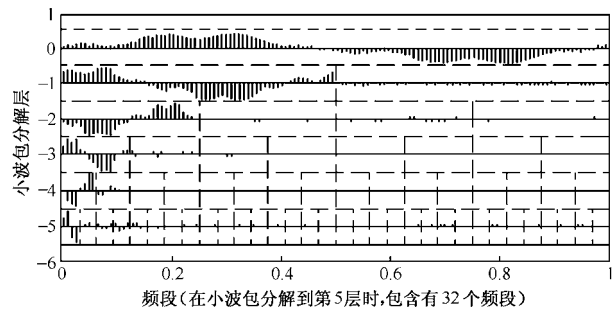


图 3 小波包参数在各个分解层次的分布图

Fig.3 Wavelet coefficients of the voltage at each levels

取信号的 128 个点), 分解到第 5 层, 32 个频带中包含有所要检测的谐波信息。表 1 给出了相应的各次谐波的 rms 真实值(分析值) FFT 分析值与 WPT 分解值的比较。在静态谐波情况下, 虽然小波包分解后的信号频带间有一定的“串扰”, 基于 WPT 的谐波分析精度与 FFT 谐波分析方法相当。

表 1 静态谐波 RMS 值比较

| Tab.1 Comparison results of RMS of state harmonics |         |      |                  |                  |                         |
|--|---------|------|------------------|------------------|-------------------------|
| 节点   | 频带/Hz   | 谐波次数 | $V_{rms}$<br>真实值 | FFT<br>$V_{rms}$ | WPT (DB20)<br>$V_{rms}$ |
| 0  | DC-100  | 1    | 1.0000           | 1.0000           | 1.0000                  |
| 1  | 100-200 | 3    | 0.2000           | 0.2000           | 0.1997                  |
| 2  | 200-300 | 5    | 0.1000           | 0.1000           | 0.1004                  |
| 3  | 300-400 | 7    | 0.2000           | 0.2000           | 0.1992                  |
| 总 RMS 值  |         |      | 1.0440           | 1.0440           | 1.0439                  |
| THD  |         |      | 4.21%            | 4.21%            | 4.21%                   |

### 3.2 带噪声的静态谐波分析

在上节中式(24)所示的信号上叠加加性噪声, 信噪比为 21dB。表 2 给出了各次谐波的 rms 真实值(分析值) FFT 分析值与 WPT 分解值的比较, 在该种情况下, 基于 WPT 的谐波分析精度优于 FFT 分析方法。

表 2 带噪声的静态谐波 RMS 值比较

| Tab.2 Comparison results of RMS of noise-corrupt harmonics |         |      |                  |                  |                         |
|--|---------|------|------------------|------------------|-------------------------|
| 节点   | 频带/Hz   | 谐波次数 | $V_{rms}$<br>真实值 | FFT<br>$V_{rms}$ | WPT (DB20)<br>$V_{rms}$ |
| 0  | DC-100  | 1    | 1.0000           | 1.0002           | 1.0002                  |
| 1  | 100-200 | 3    | 0.2000           | 0.2110           | 0.2034                  |
| 2  | 200-300 | 5    | 0.1000           | 0.1007           | 0.1015                  |
| 3  | 300-400 | 7    | 0.2000           | 0.2069           | 0.1861                  |
| 总 RMS 值  |         |      | 1.0440           | 1.0478           | 1.0438                  |
| THD  |         |      | 4.21%            | 4.54%            | 4.18%                   |

### 3.3 暂态谐波

设第 5 次奇次谐波发生时间段为(0.03s, 0.10s), 即

$$v(t) = \sqrt{2} \times [1.0 \sin(2\pi 50t) + 0.2 \sin(2\pi 150t + 135^\circ) + 0.1 \sin(2\pi 250t + 150^\circ) + 0.2 \sin(2\pi 350t)] \quad (25)$$

通过 WPT 分解后, 各频带所含波形如图 4 所示, 从中可以得出每次谐波发生的起止时间并可计算其对应的 rms 值。

## 4 结论

基于 WPT 的谐波分析算法对暂态谐波的处理能力优于 FFT, 抗干扰能力强。仿真和实验结果进

一步验证了该算法的有效性。

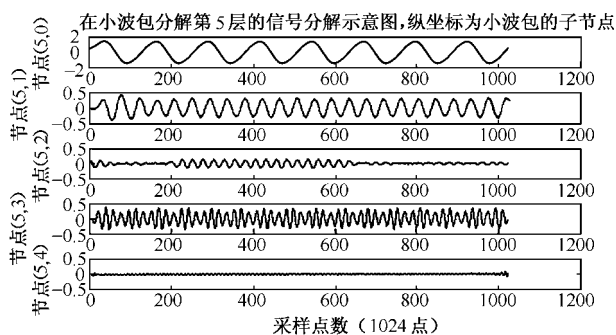


图 4 暂态谐波的 WPT 分解

Fig.4 WPT decomposition of instantaneous harmonics

(1) 小波包变换可较好地分解出原始波形所含的各次谐波, 基于 Daubechies 小波的谐波分析方法对计算电信号各次谐波的 rms 值以及谐波畸变率 (HR) 和总谐波畸变率 (THD) 是有效的。

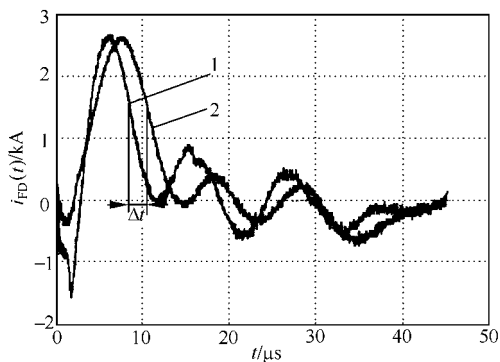
(2) 基于 Daubechies 小波的谐波分析方法继承了小波变换的优点, 所以在处理带噪信号和暂态信号时, 比 FFT 方法更有优势。

(3) 由于小波包变换后的信号频带间存在“串扰”, 使得基于小波包变换的谐波分析也存在频谱泄露的问题, 解决该问题的关键是寻找合适的小波基。

## 参考文献

- George T A, Bones D. Harmonic power flow determination using the fast Fourier transform. IEEE Trans. on Power Del., 1991, 6(2): 530 ~ 535
- 祁才君, 王小梅. 基于插值 FFT 算法的间谐波参数估计. 电工技术学报, 2003, 18 (1): 92 ~ 95
- Lai L L, Tse C T, Chan W L, et al. Real-time frequency and harmonic evaluation using artificial neural networks. IEEE Trans. on Power Del., 1999, 14(1): 52 ~ 59
- Yoon W K, Devaney M J. Power measurement using the wavelet transform. IEEE Trans. on Instrum. Meas., 1998, 47: 1205 ~ 1209
- Angrisani L, Daponte P, D'Apuzzo M, et al. A measurement method based on the wavelet transform for power quality analysis. IEEE Trans. on Power Del., 1998, 13: 990 ~ 998
- Hamid E Y, Kawasaki Z I. Wavelet packet transform for RMS and power measurement. IEEE Power Engineering Review, 2001, 21(9): 49 ~ 51

(下转第 53 页)

图 3 RSD 开关状态电流  $i_{FD}(t)$  的试验波形

1—罗氏线圈采得的电流波形

2—分流器采得的电流波形

Fig.3 Experimental waveform of the current  $i_{FD}(t)$ 

respectively detected by shunt and Rogowski coil

分析图 3 可知：分流器获得的电流波形与罗氏线圈获得的波形之间存在明显的时间差(即图中  $\Delta t$  所示)，说明罗氏线圈的快速性优于分流器。根据前面计算可知，罗氏线圈自身的上升时间(10.4ps)远远小于 RSD 开关状态电流的上升时间(0.5μs)，因此，它可以快速反映被测电流，然而分流器的快速性却明显受到分布电容、杂散电感和集肤效应等不良影响；罗氏线圈的积分时间(82μs)远远大于 RSD 开关状态电流的主脉宽(约为 8μs)，因此，利用罗氏线圈可以对被测电流实现快速、准确和可靠测量。由于分布电容对罗氏线圈的动态特性将产生重要影响，因此还需要均匀绕制线圈并采取重要的屏蔽措施，以降低其分布电容的不良影响，确保罗氏线圈的快速性，请参见文献[7,8]。

## 5 结论

要有效减小用于检测 RSD 开关放电电流的传感系统的测量误差，必须选用自积分式罗氏线圈测量系统，它能够可靠、准确和有效地完成 RSD 开关状态电流的检测任务。按照本文介绍的方法，构建反映 RSD 开关的放电电流的试验平台和罗氏线

圈传感系统的仿真模型是可行的。本文的研究，对有效检测纳秒开关状态电流，研究其开通和关断特性，具有参考价值。

## 参考文献

- 1 Podlesak T F, Simon F M, Schneider S. Single shot and burst repetitive operation of thyristors for electric launch applications. *IEEE Transactions on Magnetics*, 2001, 37(1): 385~388
- 2 李焕扬, 余岳辉, 胡乾. RSD 开关在脉冲电源中的应用研究. *中国电机工程学报*, 2003, 23 (11):23~28
- 3 李焕扬, 余岳辉, 彭昭廉. RSD 开关的谐振式触发电路设计与研究. *电力电子技术*, 2003, 37(6):33~36
- 4 李维波, 毛承雄, 李启炎等. 神光 III 强激光能源模块测量线圈研究. *中国电机工程学报*, 2003, 23 (5):53~57
- 5 Li Weibo, Mao Chengxiong, Lu Jiming. Study of the virtual instrumentation applied to measure pulsed heavy currents. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 2005, 54(1): 284~288
- 6 李维波, 毛承雄, 陆继明等. 单磁芯可控饱和电抗器控制量研究. *电工技术学报*, 2005, 20(2): 46~50
- 7 李维波, 毛承雄, 陆继明等. 分布电容对 Rogowski 线圈动态特性影响研究. *电工技术学报*, 2004, 19(6): 12~17
- 8 李维波. 基于 Rogowski 线圈的大电流测量传感理论研究与实践.[博士学位论文]. 武汉: 华中科技大学, 2005

## 作者简介

李维波 男, 1973 年生, 博士, 主要从事电力系统和电力电子测控技术研究。

毛承雄 男, 1964 年生, 博士, 博士生导师, 主要从事电力系统自动化与控制技术研究、同步发电机微机控制、电力系统并行仿真计算和电力电子技术在电力系统中的应用研究。

(上接第 48 页)

- 7 Parameswariah C, Cox M. Frequency characteristics of wavelets. *IEEE Trans. on Power Del.*, 2002, 17 (3): 800~804
- 8 Mallat S. *A Wavelet Tour of Signal Processing*. 2nd ed. San Diego: Academic Press, 1992

## 作者简介

黄文清 男, 1968 年生, 博士研究生, 研究方向为电能质量检测, 小波理论、神经网络及其在电力系统中的应用。

戴瑜兴 男, 1956 年生, 博士, 教授, 博士生导师, 目前主要研究领域为数字化与智能化系统设计理论与应用。