

## 复倒谱实现技术的研究

马晓建 周保堂 贺世正

(浙江大学化工系 杭州, 310027)

**摘要** 简要地论述了复倒谱的各种实现方法, 分析了各种方法的优缺点, 在此基础上对 Tribometer 算法进行了针对性的改进, 并用计算机模拟的方法对改进前后的性能进行了比较。

**关键词:** 倒谱; 复倒谱; 相位卷绕

**中图分类号:** TP14

### 引言

卷积同态系统能够将时域内的两个卷积组合的信号, 转化到倒频域内以相加组合的信号。时域信号  $x(n)$  作用于卷积同态系统  $D$  以后, 输出可以记为  $\hat{x}(n)$ 。根据  $D$  的不同实现方法,  $\hat{x}(n)$  可以称为  $x(n)$  的倒谱或复倒谱<sup>[1]</sup>。倒谱分析技术在噪声分析和故障诊断方面得到了广泛的应用<sup>[2]</sup>。倒谱的实现技术很简单, 然而,  $\hat{x}(n)$  的求取过程中有一次求模运算, 该运算的结果使  $x(n)$  的富氏变换的相位信息丢失了, 所以倒谱  $\hat{x}(n)$  中只含有  $X(k)$  的幅值信息, 要想从  $\hat{x}(n)$  中完全地恢复出原信号  $x(n)$ , 在一般情况下是不可能的, 除非有其他条件。信号  $x(n)$  的复倒谱(为了不引起混淆起见, 记为  $c\hat{x}(n)$ )就是  $x(n)$  的富氏变换的复对数的逆富氏变换, 可以表示为图 1 所示的形式。

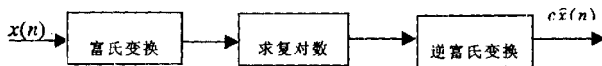


图1 信号  $x(n)$  的复倒谱图

从以上的过程可以看出, 复倒谱的实现过程中, 各步运算完全是可逆的, 因而没有造成信息的丢失, 所以可以从复倒谱中完全地恢复出原信号  $x(n)$ ; 因而在信号分析中, 复倒谱比倒谱具有更广泛的应用, 然而, 在求复对数时造成了相位的卷绕, 为了解决相位卷绕问题, 就形成了一系列的方法。

## 1 复倒谱的实现方法

### 1.1 对数导数法<sup>[1]</sup>

设信号  $x(n)$  的  $Z$  变换  $X(z)$  是单值可微的, 则有

$$\frac{dX(z)}{dz} = \frac{d}{dz} \ln[X(z)] = \frac{1}{X(z)} \frac{dX(z)}{dz} \quad \text{其中} \quad \frac{dX(z)}{dz} = \frac{1}{z} Z[-nx(n)]$$

截取  $x(n)$  为有限长, 用 DFT 代替  $Z$  变换, 则有以下公式:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_n^{kn} \quad X'(k) = -j \sum_{n=0}^{N-1} nx(n) W_n^{kn}$$

$$cx(n) = \begin{cases} -\frac{1}{jnN} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{X'(k)}{X(k)} W_n^{-kn}, & 0 < n < N-1 \\ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \ln |X(k)|, & n = 0 \end{cases} \quad \text{其中 } W_n = e^{-j2\pi n/N}$$

该方法中, 在求对数导数时, 不但要计算输入信号  $x(n)$  的富氏变换  $X(k)$ , 而且要对序列  $nx(n)$  计算一次富氏变换。一般说来, 对信号  $x(n)$  进行采样的采样频率, 只满足对  $x(n)$  作富氏变换时不引起频率混叠, 由于  $nx(n)$  的最高频率比  $x(n)$  的最高频率高许多, 所以, 对  $x(n)$  不引起频率混叠的采样频率不能保证  $nx(n)$  不发生频率混叠。实际上, 在求  $nx(n)$  的富氏变换时, 往往要引起一定的频率混叠。该方法虽然避免了相位卷绕, 却是以频率混叠为代价的, 尤其是当采样频率不太高时, 严重的混叠会带来很大的误差, 甚至是不可容忍的。

### 1.2 最小相位法实现<sup>[1]</sup>

根据最小相位序列满足希尔伯特变换这一特点, 可以构造出复倒谱实现的最小相位法, 整个过程可以由以下示意图表示

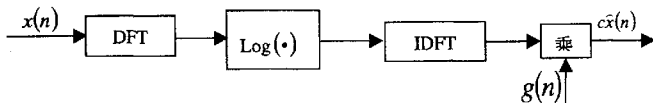


图 2 复倒谱实现的最小相位法

$$\text{其中 } g(n) = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n = 0 \\ 2, & n > 0 \end{cases}$$

这种方法避免了相位卷绕, 但它只适应于最小相位输入这一特殊情况, 因而缺乏通用性。

### 1.3 用复对数实现

由复倒谱的定义可知, 复倒谱的实现方法可由图 1 所示的示意图表示。按解决相位卷绕

问题的不同方法,又可将复对数法分为以下几种方法:

### 1.3.1 主值差判别法<sup>[3]</sup>

主值差判别法的基本原理是认为展开的相位是连续的,而且相位主值曲线之所以发生折断,是由于相位对  $2\pi$  做模运算(加或减去  $2\pi$  的某一整数倍)而发生的。因此,要恢复原来的相位,就要找出主值的间断点,再在主值上加上或减去  $2\pi$  的同样倍数。寻找间断点的方法是用一个临界值与相邻的两个频率采样点的主值差相比较,如果主值差小于临界值,则认为无间断点;如果大于临界值,则认为有间断点。

显然,这种相位展开的方法简单易行,特别是在采样非常密集,而且临界值又选择得很恰当时,展开的相位很准确。然而,在位值变化比较突然,采样频率也不太高时,要选择一个十分恰当的临界值,是一件十分困难的事情。也就不能恰当的选择临界值,就容易出现误判现象,也就不可能得到实际的相位值,影响到相位展开的精度,得到的复谱就难以达到预期的精度。

### 1.3.2 数值积分法

$x(n)$  的富氏变换为  $X(e^{j\omega})$ ,  $\arg[X(e^{j\omega})]$  表示  $X(e^{j\omega})$  的相位,那么,

$$\arg'[x(e^{j\omega})] = \frac{X_r X_i - X_i X_r}{|x|^2}, \quad \arg[x(e^{j\omega})] = \int_0^\omega \arg'[x(e^{j\omega})] d\omega \quad (1)$$

上式中  $X_r, X_i$  分别表示  $X(e^{j\omega})$  的实部和虚部,  $X_r', X_i'$  分别表示  $X(e^{j\omega})$  的导数的实部和虚部。对式(1)进行数值积分便可以得到  $\arg[x(e^{j\omega})]$ 。该方法比较直接,容易实现而且运算量也不大,然而它的计算精度与离散富氏变换的步长  $2\pi/N$  有密切关系。由于计算前难以确定究竟多大的采样点数  $N$  才能满足精度要求,而且在求数值积分时,累积误差也上升很快,即使数字频率  $K$  的值不大,  $X(k)$  的相位误差也会很大。因此,这种相位展开方法不可靠。

### 1.3.3 Tribolet 算法<sup>[4]</sup>

Tribolet 算法是综合了上述两种算法的优点,采用自适应数值积分的方法进行估值,在主值上加上(或减去)  $2\pi$  的整数倍的方法来展开的相位。

设  $\arg_a[x(e^{j\omega})]$  为展开相位,则必有

$$\arg_a[x(e^{j\omega})] = \arg[x(e^{j\omega})] + 2\pi l_i(\Omega_i)$$

其中  $l_i(\Omega_i)$  是一个与频率  $\Omega_i$  有关的一个整数。 $l_i(\Omega_i)$  的求取将用一个自适应数值积分法来实现。这种算法虽然比较复杂,但是它可以在大多数情况下,比较可靠地计算出展开的相位。

### 1.3.4 Tribolet 算法的改进<sup>[5]</sup>

Tribolet 算法是一种比较麻烦的方法,每算一步都要进行一次自适应积分,若不能满足精度要求,就要进一步修正步长。因此,它的计算精度很大程度上依赖于积分步长的取值,即阈值的选择,而且它的计算量也比较大,并且展开的相位也不一定满足任意二点之间的相位跳跃不大于  $2\pi$  的要求。

针对以上情况,可以对 Tribolet 算法作以下几个方面的改进:

(a) 将自适应数值积分改为两点的梯形积分算法,即每一次积分的步长都固定为一个频率单位  $(f/N)$ , 这样,既简化了运算,也以采样所能达到的最高精度来保证计算的精度。

(b) 每次积分运算的起点值都是由一个标准值来充当,这个标准值用以下方法来获得:

上次积分得到的数值  $\Omega_{i-1}$  同直接对  $x(n)$  的富氏谱求对数得到的未展开的相位值  $\Omega_0$  作比较, 由于  $\Omega_0$  的获取过程中未进行任何近似处理, 它的准确程度只依赖于采样精度和计算机的计算精度, 因而, 可以看作是一个准确值 (只和真实值差  $2\pi$  的某个整数倍), 将二者的差值用  $2\pi$  相除再作取整处理, 随后将得到的这个整数  $l$  乘  $2\pi$  加到  $\Omega_0$  上, 便得到了一个非常准确的展开值。这样的处理方法, 使每一步积分都是在一个准确的基础上进行的, 整个运算的精度得以保证。

(c) 一个信号的相位对于其频率来说是奇对称的, 这是一个比较重要的性质, Tribolet 算法没有利用这个特征, 而恰恰是这一个特征可以使相位展开的运算量减少将近一半: 将相位展开只进行一半, 后一半的展开值可以利用前半截的值按一定的规律加上一个负号即可。

(d) Tribolet 算法虽然能够可靠地展开相位, 但是仍可能出现个别点的失误, 即得到的展开相位同真正的相位相差  $2\pi$  的某个整数倍, 因此, 在改进的 Tribolet 算法中, 对初步展开得到的一组数据值再进行一次类似于相位主值展开法的处理, 便可以消除或弥补可能出现的几个失误的点, 使相位展开值更加接近于真实值, 更加可靠。

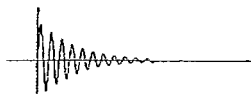
## 2 计算机模拟

### 2.1 选择一个衰减的正弦信号作为已知信号, 对各种复倒谱的实现方法进行验证

该衰减的正弦信号可用以下公式表示

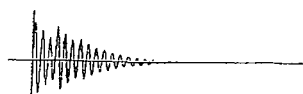
$$x(t) = e^{-at} \sin(\omega t)$$

其图形如图 3 所示。



最大值为 1.86

图 3 作为已知信号的衰减正弦信号

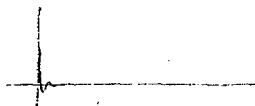


最大值为 1.86

图 4 含有回声的衰减正弦信号

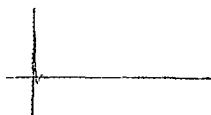
采用对以上已知信号进行同态处理, 求出其复倒谱, 再用一个逆同态系统来恢复的信号, 比较该恢复的信号和原来已知的信号的异同, 来判定实现方法的有效性。下面将分别用对数导数法、主值差判别法、Tribolet 算法、Tribolet 改进算法等同态系统的实现方法来处理以上已知信号, 并根据处理的结果, 对各种实现方法作进一步的比较。对数导数法求得的复倒谱如图 5 所示。主值差判别法求得的复倒谱如图 6 所示。Tribolet 算法求得的复倒谱如图 7 所示。改进 Tribolet 算法求得的复倒谱如图 8 所示。

从图 5 所示的复倒谱中恢复的信号 (图省略) 同图 3 相比, 恢复的信号保持了原来信号的主要特征, 如正弦成份的周期, 以及衰减特性等, 然而, 该恢复信号和原来信号的幅值 (为 0.4534) 却有较大的差别, 即恢复信号的误差是相当大的, 如果用这个恢复的信号来代替原来信号, 将会造成原有信息的丢失。从图 6 所示的复倒谱中恢复的信号 (图省略) 在形状上同



最大值为 0.7255

图 5 用对数导数法求得的复倒谱



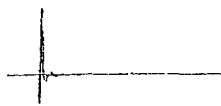
最大值为 0.7255

图 6 用主值差判别法求得的复倒谱



最大值为 0.7255

图 7 用 Tribolet 算法求得的复倒谱



最大值为 0.7255

图 8 用改进 Tribolet 算法求得的复倒谱

图 3 没有什么差别,从图 7 和图 8 所示的复倒谱中恢复的原信号同图 3 完全相同,因此,以上的处理只能说明对数导数法并不可靠,而不能分出其他三种方法的优劣。

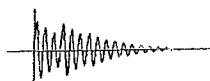
## 2.2 对含有回声的衰减正弦信号进行处理

原信号如图 4 所示。用主值差判别法求得的复倒谱及恢复信号见图 9。Tribolet 算法求得的复倒谱如图 10 所示。改进 Tribolet 算法求得的复倒谱如图 11 所示。



最大值为 1.1826

(a) 复倒谱



最大值为 1.8688

(b) 恢复的信号

图 9 用主值差判别法求得的复倒谱及恢复的信号



最大值为 0.7255

图 10 用 Tribolet 算法求得的复倒谱



最大值为 0.7255

图 11 用改进 Tribolet 算法求得的复倒谱

具有回声的信号复倒谱相当于原信号的复倒谱加上一系列的脉冲,而图 9 所示的信号并非与此论相符。但是对图 9 所示的信号作逆处理,得到的信号同原信号完全相同,这说明,这种实现方法的失效是由相位展开的不成功造成的,主要表现在是否有相位跳变的判断上,导致展开的相位和真实的相位相差  $2\pi$  的某个整数倍,这个差别并不影响逆运算的正常进行。

图 10 和图 11 所示的复倒谱都是由没有回声的信号复倒谱和一系列脉冲组成的,并且它们的形状几乎完全相同。这说明这两种算法都是可用的,它们恢复的信号(形状同原信号一样,故省略)同原信号的相似性也说明了这个问题。仔细分析发现,虽然它们非常相似,但是仍有细微的差别,那就是用改进 Tribolet 算法处理后又恢复的信号更接近于原来的信号,主要表现在幅值上的差别比较小。

### 3 结论

本文在分析了复倒谱的几种实现方法之后,对 Tribolet 法进行了针对性的改进,和原来的算法相比,改进后的算法实现简单,性能可靠,而且运算量小,计算机模拟的结果表明,改进的 Tribolet 算法是成功的。

#### 参 考 文 献

- 1 奥本海姆 A V, 谢弗 R V. 数字信号处理. 南京:南京工学院出版社,1987
- 2 屈梁生,何正嘉等. 机械故障诊断学. 西安:西安交通大学出版社,1991
- 3 吴兆熊,黄振兴,黄顺吉. 数字信号处理,下册. 北京:国防工业出版社,1985
- 4 中国电子仪表学会信号处理学会. 数字信号处理程序库. 北京:清华大学出版社,1983
- 5 马晓建. 机械装备中跌落物冲击信号的恢复. 硕士学位论文,杭州:浙江大学,1994

## The Study on the Realizing Technology of Complex Cepstrum

Ma Xiaojian Zhou Baotang He Shizheng

(Department of Chemical Engineering, Zhejiang University Hangzhou, 310027)

**Abstract** In this paper, several complex cepstrum realizing algorithms are described. After comparing each other, some improvements are made to the Tribolet algorithm. Simulation results show that the improved Tribolet algorithm is effective.

**Key words:** cepstrum; complex cepstrum; phase wrapping

第一作者 马晓建 男, 博士: 研究生, 1966 年 6 月生。

# 复倒谱实现技术的研究

作者：[马晓建](#)，[周保堂](#)，[贺世正](#)

作者单位：[大学化工系\(杭州\)](#)

本文链接：[http://d.g.wanfangdata.com.cn/Conference\\_94100.aspx](http://d.g.wanfangdata.com.cn/Conference_94100.aspx)