

## 磁控小卫星编队飞行的非线性控制\*

冯成涛<sup>1</sup>, 王惠南<sup>1</sup>, 刘海颖<sup>2</sup>, 丁尚文<sup>1</sup>

(1. 南京航空航天大学 自动化学院, 江苏 南京 210016;

2. 南京航空航天大学 高新技术研究院, 江苏 南京 210016)

**摘 要:** 磁控小卫星编队飞行利用磁力和磁力矩对编队小卫星进行位姿调控, 不受星载燃料的限制, 同时还避免了由推进器羽流造成的光学干扰和精密设备污染。基于磁力研究编队小卫星的相对运动控制问题, 介绍了编队卫星的磁力模型和相对运动模型, 采用饱和函数方法给出了非线性控制律, 利用李雅普诺夫稳定性理论证明了系统的稳定性, 最后, 利用该方法对两星编队磁力控制进行仿真验证, 结果表明: 完全依靠电磁力编队卫星是可控的。

**关键词:** 电磁; 卫星编队飞行; 非线性; 相对运动

**中图分类号:** V 448.2

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1000-9787(2009)03-0054-04

## Nonlinear control for electromagnetic formation flight of multi-satellites\*

FENG Cheng-tao<sup>1</sup>, WANG Hui-nan<sup>1</sup>, LIU Hai-ying<sup>2</sup>, DING Shang-wen<sup>1</sup>

(1. College of Automation, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China;

2. Academy of Frontier Science, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

**Abstract:** Electromagnetic formation flight uses forces and torques to control the position and attitude of satellites in the formation. Satellites become independent of the fuel available on board. Also the contamination of optics or sensitive formation instruments, due to thruster plumes, is avoided. Based on magnetic forces, the control problem of relative motion for satellite formation flight is studied. The models of magnetic force and relative motion are presented. A nonlinear control law based on saturation function is designed. System stability is proved using Lyapunov's stability theorem. The simulation of two satellites is also presented. The results indicate that the satellites in the formation are controllable under the electromagnetic force completely.

**Key words:** electromagnetic; satellite formation flight; nonlinear; relative motion

### 0 引言

编队小卫星群互相协同来实现单颗大卫星的功能, 具有低成本、高性能和较强灵活性的优势。近几年来, 小卫星编队飞行成为航天动力学与控制领域的研究热点之一<sup>[1-6]</sup>。调控小卫星之间的位、姿, 常用的方法有推进器法<sup>[2]</sup>和绳系编队法<sup>[3]</sup>。推进器消耗燃料提供推力, 燃料耗尽, 卫星就失去了应用价值; 推进器羽流还会造成光学干扰和精密设备污染。绳系编队不消耗燃料, 但编队中的绳索只能提供单向约束, 应用范围受到限制。

磁控卫星编队是一个新技术, 它利用电磁线圈为编队中不同的卫星提供力和力矩。许多文献研究了磁控技术用于单颗卫星的姿态控制<sup>[4]</sup>。Edmund M C Kong<sup>[5]</sup>最早提出了磁控卫星编队的概念, 将磁控技术应用到卫星编队中;

Sedwick R J 等人<sup>[6]</sup>研究了正交线圈产生易操作的磁偶极子, 通过磁偶极子生成力和力矩完成编队, 没有对编队的控制方法和可行性进行分析。本文将以两颗卫星编队为例, 建立磁控编队飞行相对运动模型, 设计非线性控制律, 进一步分析了其稳定性, 并进行了仿真验证, 证明了其科学可行性。

### 1 磁控编队相对运动模型

#### 1.1 坐标系定义

地球中心惯性坐标系  $OX_iY_iZ_i$ :  $OZ_i$  沿地球自转轴方向指向北天极,  $OX_i$  指向春分点,  $OY_i$  与另外两轴构成右手直角坐标系。

主星轨道坐标系  $oxyz$ : 原点  $o$  与主星质心重合,  $ox$  轴由地心指向主星,  $oy$  在轨道平面内与  $ox$  轴重合, 指向航向的

方向为正向, $oz$ 与 $ox,oy$ 轴构成右手系。图1给出上述两坐标系的示意图。

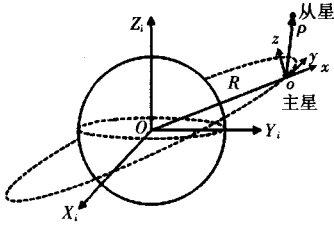


图1 坐标系示意图

Fig 1 Schematic diagram of coordinates

## 1.2 电磁力

以线圈作为产生磁偶极子的本体,偶极子的强度为

$$\mu = NiS\hat{n}, \quad (1)$$

式中  $N$  为线圈匝数; $i$  为线圈电流; $S$  为线圈的面积; $\hat{n}$  为满足右手法则的单位方向向量。以 2 个线圈 a 和 b 为例,线圈通入电流,磁极的方向如图 2 所示。

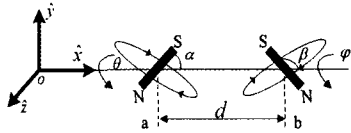


图2 2个磁偶极子

Fig 2 Two magnetic dipoles

给定某直角坐标系  $ox\hat{y}z$  (参见图 2),  $d$  为 2 个偶极子中心之间的距离; $\alpha, \beta$  为偶极子绕  $z$  旋转的角度; $\theta, \varphi$  为偶极子绕  $x$  轴旋转的角度。 $a, b$  2 个磁偶极子强度的向量分别为

$$\begin{cases} \vec{\mu}_a = (\mu_a \cos \alpha) \hat{x} + (\mu_a \sin \alpha \cos \theta) \hat{y} + (\mu_a \sin \alpha \sin \theta) \hat{z} \\ \vec{\mu}_b = (\mu_b \cos \beta) \hat{x} + (\mu_b \sin \beta \cos \varphi) \hat{y} + (\mu_b \sin \beta \sin \varphi) \hat{z} \end{cases} \quad (2)$$

由于偶极子 b 的作用,在偶极子 a 处产生的磁力为

$$\begin{cases} F_{mx} = \frac{3}{4\pi} \frac{\mu_0 \mu_a \mu_b}{d^4} (2 \cos \alpha \cos \beta - \cos(\varphi - \theta) \sin \alpha \sin \beta) \\ F_{my} = -\frac{3}{4\pi} \frac{\mu_0 \mu_a \mu_b}{d^4} (\cos \alpha \sin \beta \cos \varphi + \sin \alpha \cos \beta \cos \theta) \\ F_{mz} = -\frac{3}{4\pi} \frac{\mu_0 \mu_a \mu_b}{d^4} (\cos \alpha \sin \beta \sin \varphi + \sin \alpha \cos \beta \sin \theta) \end{cases} \quad (3)$$

式中  $\mu_0$  为真空磁导率; $\mu_a, \mu_b$  分别为 a, b 2 个磁偶极子的强度。在主星和从星分别安装 3 个正交线圈,主星与从星的磁偶极子强度向量分别为  $\vec{\mu}_1 [\mu_{1x}, \mu_{1y}, \mu_{1z}]^T$  与  $\vec{\mu}_2 [\mu_{2x}, \mu_{2y}, \mu_{2z}]^T$ 。由于主星的作用,在从星位置产生的电磁力为

$$\vec{F}_{12} = \frac{3\mu_0}{4\pi} \left( -\frac{\vec{\mu}_1 \cdot \vec{\mu}_2}{d^5} \vec{d} - \frac{\vec{\mu}_1 \cdot \vec{d}}{d^5} \vec{\mu}_2 - \frac{\vec{\mu}_2 \cdot \vec{d}}{d^5} \vec{\mu}_1 + 5 \frac{(\vec{\mu}_1 \cdot \vec{d})(\vec{\mu}_2 \cdot \vec{d})}{d^7} \vec{d} \right) \quad (4)$$

研究表明<sup>[7]</sup>:地球磁场对卫星产生的磁力小于  $1 \mu N$ , 可以忽略,在控制过程中可视为干扰力。

## 1.3 相对运动模型

以两颗卫星编队为例,在地球中心惯性坐标系  $OX_iY_iZ_i$  中,主、从卫星的动力学方程分别为

$$\ddot{\vec{R}}_1 + \frac{\mu_e \vec{R}_1}{R_1^3} = \frac{\vec{F}_1^m}{m_1} + \frac{\vec{F}_1^d}{m_1}, \quad (5)$$

$$\ddot{\vec{R}}_2 + \frac{\mu_e \vec{R}_2}{R_2^3} = \frac{\vec{F}_2^m}{m_2} + \frac{\vec{F}_2^d}{m_2}, \quad (6)$$

式中  $m$  为卫星的质量; $R$  为地球中心到卫星的矢径; $\mu_e$  为万有引力常数; $F^m, F^d$  分别为卫星受到的电磁力和干扰力,下标“1”,“2”分别表示主星和从星。

设定

$$\vec{f}_m = \frac{\vec{F}_2^m}{m_2} - \frac{\vec{F}_1^m}{m_1}, \vec{f}_d = \frac{\vec{F}_2^d}{m_2} - \frac{\vec{F}_1^d}{m_1}. \quad (7)$$

式(6)减去式(5),得到  $OX_iY_iZ_i$  坐标系下从星相对主星的动力学方程

$$\ddot{\vec{r}} + \frac{\mu_e (\vec{R}_1 + \vec{r})}{\|\vec{R}_1 + \vec{r}\|^3} - \frac{\mu_e \vec{R}_1}{R_1^3} = \vec{f}_m + \vec{f}_d. \quad (8)$$

为了建立主星与从星在坐标系  $oxyz$  中相对运动方程,有<sup>[8]</sup>

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{\delta^2 \vec{r}}{\delta t^2} + 2\vec{\omega} \times \frac{\delta \vec{r}}{\delta t} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}, \quad (9)$$

式中  $\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$  表示主星与从星在  $OX_iY_iZ_i$  坐标系下的相对加速度矢量; $\frac{\delta^2 \vec{r}}{\delta t^2}$  和  $\frac{\delta \vec{r}}{\delta t}$  分别为主星与从星在  $oxyz$  坐标系下的相对加速度矢量和相对速度矢量; $\vec{\omega}, \dot{\vec{\omega}}$  分别为主星轨道坐标系  $oxyz$  相对于惯性系转动的角加速度矢量和角速度矢量。为了简便,假设主星的轨道为圆轨道,则

$$\vec{\omega} = \omega_0 \vec{k}, \quad (10)$$

式中  $\omega_0 = \sqrt{\frac{\mu_e}{R_1^3}}$  为主星轨道角速率,为常量,则  $\dot{\vec{\omega}} = \vec{0}$ ;  $\vec{k}$  表示主星坐标系  $z$  轴方向的单位向量。

从星在主星坐标系  $oxyz$  中的位置表示为

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \quad (11)$$

利用式(8)~式(11),得到  $oxyz$  坐标系下两颗卫星的相对运动模型

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\omega_0 \dot{y} - \omega_0^2 x + \frac{\mu_e (R_1 + x)}{R_2^3} - \frac{\mu_e}{R_1^2} = f_{mx} + f_{dx} \\ \ddot{y} + 2\omega_0 \dot{x} - \omega_0^2 y + \frac{\mu_e y}{R_2^3} = f_{my} + f_{dy} \\ \ddot{z} + \frac{\mu_e z}{R_2^3} = f_{mz} + f_{dz} \end{cases} \quad (12)$$

改写式(12),有

$$\begin{cases} \ddot{x} = (\omega_0^2 - \frac{\mu_c}{R_2^3})x + 2\omega_0\dot{y} + \frac{\mu_c R_1}{R_2^3} - \frac{\mu_c}{R_1^2} + \vec{f}_{mx} + \vec{f}_{dx} \\ \ddot{y} = (\omega_0^2 - \frac{\mu_c}{R_2^3})y - 2\omega_0\dot{x} + \vec{f}_{my} + \vec{f}_{dy} \\ \ddot{z} = \frac{\mu_c z}{R_2^3} + \vec{f}_{mz} + \vec{f}_{dz} \end{cases} \quad (13)$$

## 2 非线性控制律

定义主从星相对位置矢量  $\vec{p}(t) = [x, y, z]^T$ , 给出从星相对主星运动的期望轨迹  $\vec{p}_d(t)$ , 编队控制的主要目的是当  $t \rightarrow \infty$ ,  $\vec{p}(t) \rightarrow \vec{p}_d(t)$ 。

令  $X = [x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}]^T$  为系统状态,  $X_d = [x_d, y_d, z_d, \dot{x}_d, \dot{y}_d, \dot{z}_d]^T$  为期望运动状态, 干扰矢量  $D = [d_x, d_y, d_z]^T$ , 系统输出  $Y = [x, y, z]^T$ , 根据式(13), 得到系统状态方程

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + B(U + D) \\ Y = C^T X \end{cases} \quad (14)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \omega_0^2 - \frac{\mu_c}{R_2^3} & 0 & 0 & 0 & 2\omega_0 & 0 \\ 0 & \omega_0^2 - \frac{\mu_c}{R_2^3} & 0 & -2\omega_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\mu_c}{R_2^3} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

引入跟踪误差  $e = X - X_d$ , 则误差方程为

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \dot{X} - \dot{X}_d \\ &= Ae + B[B^T(AX_d - \dot{X}_d) + U + D]. \end{aligned} \quad (15)$$

为避免高频抖动, 采用饱和函数的方法<sup>[2]</sup>, 引入非线性控制律

$$U = -B^T(AX_d - \dot{X}_d) + Ke - \rho \text{sat}(B^T Pe / \varphi_0), \quad (16)$$

式中  $\varphi_0 > 0$ ;  $\rho = \text{diag}[\rho_x, \rho_y, \rho_z]$ , 且有  $|d_i| \leq \rho_i (i = x, y, z)$ ; 状态反馈增益  $K$ , 使得如下二次型性能指标最小

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty (e^T Q e + U^T R U) dt, \quad (17)$$

式中 加权矩阵  $Q$  为半正定对称矩阵;  $R$  为正定对称矩阵。解得

$$K = -R^{-1} B^T P. \quad (18)$$

其中,  $P$  为 Riccati 代数方程(19)的唯一正定对称解,

即

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0. \quad (19)$$

对于标量  $t$ , 定义

$$\text{sat}(t) = \begin{cases} t, & |t| < 1 \\ \text{sgn } t, & |t| \geq 1 \end{cases}. \quad (20)$$

下面证明控制律  $U$  可以使系统全局渐进稳定。定义李雅普诺夫函数

$$V = e^T P e, \quad (21)$$

式中  $V$  为正定的, 对  $V$  求导, 并代入式(15)、式(16)、式(18)得

$$\begin{aligned} \dot{V} &= e^T P e + e^T P e \\ &= e^T [(A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P) - PBR^{-1}B^T P] e + \\ &\quad 2e^T PB[D - \rho \text{sat}(B^T Pe / \varphi_0)] \\ &= -e^T (Q + PBR^{-1}B^T P) e - \\ &\quad 2(B^T P e)^T [\rho \text{sat}(B^T Pe / \varphi_0) - D] \\ &\leq -e^T (Q + PBR^{-1}B^T P) e. \end{aligned}$$

可见  $\dot{V}$  负定。根据李雅普诺夫稳定定理,  $e$  将全局渐近收敛到 0。

## 3 仿真结果与分析

两颗编队卫星的磁控参数设置如下:

$$\mu_c = 3.9865 \times 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2, m_1 = m_2 = 50 \text{ kg}, F_d = [-1.025 \ 6.248 \ -2.415] \times 10^{-5} \text{ N}.$$

主星运行于圆轨道, 轨道半径为 7 500 km。期望的相对运动轨迹选用如下形式<sup>[2]</sup>

$$\begin{cases} x_d = 50 \sin(\omega_0 t + \frac{\pi}{4}) \\ y_d = 100 \cos(\omega_0 t + \frac{\pi}{4}) \\ z_d = 50\sqrt{3} \cos(\omega_0 t + \frac{\pi}{4}) \end{cases}. \quad (22)$$

不妨假设从星的初始相对状态为  $\vec{p}(0) = [50, 100, 50]^T \text{ m}$ ,  $\dot{\vec{p}}(0) = [0, 0, 0]^T \text{ m/s}$ 。

控制参数取值: 式(19)中的矩阵  $Q = \text{diag}[1, 1, 1, \frac{1}{\omega_0^2}, \frac{1}{\omega_0^2}, \frac{1}{\omega_0^2}]$ ,  $R = 10^{11} E_{3 \times 3}$ , 其中,  $E$  为单位矩阵。通过式(19)

求得矩阵  $P$ , 进而求得控制增益矩阵  $K$ 。选取  $\rho = 2 \times 10^{-4} \times E_{3 \times 3}$ ,  $\varphi_0 = 2 \times 10^{-3}$ 。

电磁力参数取值: 式(4)中取  $\vec{\mu}_1 = \vec{\mu}_2 = [\mu_x, \mu_y, \mu_z]^T$ , 利用控制律求得保持编队需要的电磁力, 通过式(4)求得三轴磁场强度。

图3为期望轨迹和得到的实际轨迹, 通过控制, 实际轨迹是收敛的, 并且, 接近期望轨迹(图中“\*”表示主星的位置)。图4为3个方向的误差跟踪曲线, 3个方向的误差渐

进收敛到0。图5为三轴电磁力。图6为磁偶极子强度曲线,从图6可以看出:磁偶极子强度的量级较大,根据式(1),折算成线圈匝数,会导致工程量较大,Umai Ahsun等人<sup>[7]</sup>还提出了利用超导电磁线圈的思想。

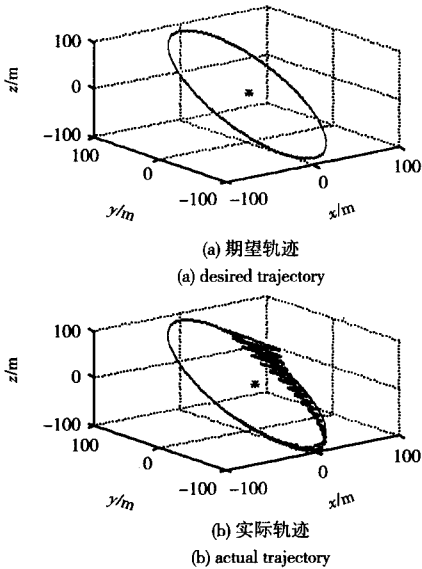


图3 期望轨迹和实际轨迹

Fig 3 Desired trajectory and actual trajectory

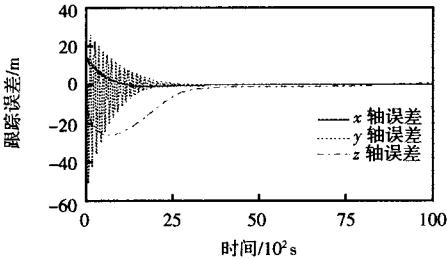


图4 跟踪误差曲线

Fig 4 Curves of tracking error

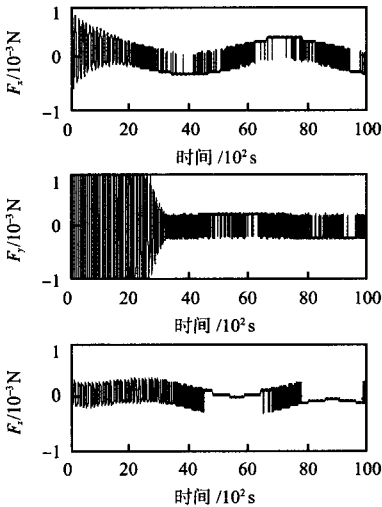


图5 三轴电磁力

Fig 5 Magnetic forces in three axis

4 结束语

本文研究了磁控卫星编队飞行,以两颗卫星编队为例,

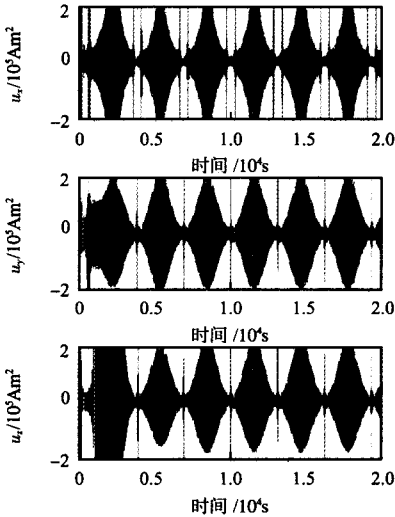


图6 三轴磁偶极子强度

Fig 6 Magnetic dipole strength in three axis

建立了相对运动模型,设计了非线性鲁棒控制律,利用李雅普诺夫稳定性理论证明了系统的稳定性,并进行了仿真实验。得到实际轨迹是收敛的,并接近期望轨迹,三轴的位置误差渐进收敛到0,得到了磁偶极子强度控制曲线。仿真结果表明:在没有喷气作为动力的情况下,完全依靠电磁力,通过非线性控制律控制,编队卫星的相对运动能够达到期望的轨迹。

参考文献:

[1] Queiroz M S D, Kapila V, Yan Qiguo. Adaptive nonlinear control of multiple spacecraft formation flying[J]. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 2000, 23(3): 385-390.

[2] 张玉银,戴金海. 卫星编队飞行的无速度测量非线性鲁棒控制[J]. 宇航学报, 2003, 24(1): 23-27.

[3] Kumar K D, Yasaka T. Rotating foamation flying of three satellites using tethers[J]. Journal of Spacecraft and Rockets, 2004, 41(6): 973-985.

[4] 刘海颖,王惠南,程月华. 主动磁控微卫星姿态控制[J]. 应用科学学报, 2007, 25(4): 377-381.

[5] Edmund M C Kong. Electromagnetic formation flight for multi-satellite arrays[J]. Journal of Spacecraft and Rockets, 2004, 4(4): 659-666.

[6] Sedwick R J, Schweighart S A. Electromagnetic formation flight[C]// Guidance and Control 2003; Proceedings of the 26th Annual AAS Rocky Mountain Conference, Breckenridge, CO, Feb. 5-9, 2003, San Diego, CA, 2003: 71-83.

[7] Umai Ahsun. Dynamics and control of electromagnetic satellite formations in low earth orbits[C]// AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit, August 2006, Keystone, Colorado, 2006.

[8] 郝晓宁. 近地航天器轨道基础[M]. 长沙:国防科技大学出版社, 2003: 243-244.

作者简介:

冯成涛(1984-),男,山东济宁人,博士研究生,研究方向为卫星编队飞行控制。