科目 訊號

長庚大學期中、期末考試答案用紙

108 學年度 第 1 學期 末考 資工 系 姓名 王舒姍 學號 B0729037

[3] (a) Convolution Theorem 是函數摺積的傅立葉轉換是函數傅立葉轉換的乘積。即一個域中的摺積對應於另一個域中的乘積，例如時域中的摺積對應於頻域中的乘積。$F\{f*g\}=F\{f\}\cdot F\{g\}$

其中 $F\{f\}$ 表示 f 的傅立葉轉換。下面這種形式也成立 $F\{f\cdot g\}=F(f)*F(g)$

藉由傅立葉逆轉換 F^{-1}，也可以寫成 $f*g=F^{-1}\{F\{f\}\cdot F\{g\}\}$

(b) 令 f、g 屬於 $L^1(\mathbb{R}^n)$。F 為 f 的傅立葉轉換，G 為 g 的傅立葉轉換：

$F(v)=F\{f\}=\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i x\cdot v}\,dx$

$G(v)=F\{g\}=\int_{\mathbb{R}^n} g(x)e^{-2\pi i x\cdot v}\,dx$，其中 x 和 v 之間的點表示 $\mathbb{R}^n$ 上的內積。

$h(z)=\int_{\mathbb{R}} f(x)g(z-x)\,dx$，現在發現 $\iint |f(z)g(x-z)|\,dx\,dz=\int |f(z)|\int |g(z-x)|\,dx\,dz=\int |f(z)|\,\|g\|_1\,dz=\|f\|_1\|g\|_1$

因此通過富比尼我們有 $h\in L^1(\mathbb{R}^n)$，於是它的傅立葉轉換 H 由積分式定義為

$H(v)=F\{h\}=\int_{\mathbb{R}} h(z)e^{-2\pi i z\cdot v}\,dz=\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x-z)\,dx\,e^{-2\pi i z\cdot v}\,dz$

觀察到 $|f(x)g(z-x)e^{-2\pi i z\cdot v}|=|f(x)g(z-x)|$，因此對此變量我們可以再次應用富比尼定理：

$H(v)=\int_{\mathbb{R}} f(x)\left(\int_{\mathbb{R}^n} g(z-x)e^{-2\pi i z\cdot v}\,dz\right)dx$，代入 $y=z-x$；$dy=dz$

$H(v)=\int_{\mathbb{R}} f(x)\left(\int_{\mathbb{R}} g(y)e^{-2\pi i (y+x)\cdot v}\,dy\right)dx.=\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi i x\cdot v}\left(\int_{\mathbb{R}} g(y)e^{-2\pi i y\cdot v}\,dy\right)dx$

$=\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi i x\cdot v}\,dz\int_{\mathbb{R}} g(y)e^{-2\pi i y\cdot v}\,dy$

[2] (a) [(1+0j), (1+0j), (1+0j), (1+0j), (1+0j), (1+0j), (1+0j), (1+0j)]

(b) [(8+0j), (-4.440892098500626e-16+2.220446049250313e-16j), (-4.286263797015736e-16-4.440892098500626e-16j), (-3.3306690738754696e-16+8.881784197001252e-16j), (-4.898587196588413e-16j), (-2.1094237467877974e-15-1.3322676295501878e-15j), (-2.932968335447087742e-15-6.661338147750939e-16j), (3.441691376337985e-15+1.1102230246251565e-15j)]

(b) [(0j), (-2.220446049250313e-16j), (9.555947231402665e-17-1.1102230246251565e-16j), (9.992007221626409e-16-1.5543122344752192e-15j), (8+3.429011037612385e-15j), (-2.6645352591003757e-15+1.1102230246251565e-16j), (2.932968335447087742e-15-6.661338147750939e-16j), (-5.218048215738236e-15-2.6645352591003757e-15j)]

(c) [(9+0j), (0.9999999999999997-4.440892098500626e-16j), (1-4.898587196589412e-16j), (1.0000000000000007-6.661338147750939e-16j), (9+2.9391523179536475e-15j), (0.9999999999999993-1.3322676295501878e-15j), (1-7.469376158976824e-15j), (0.9999999999999981-1.7763568394002505e-15j)]

(d) [(0.5+0j), (0.3017766952966369-0.1250000000003j), (-5.357829746269967e-17+5.551115123125783e-17j), (-0.05177669529663696+0.1249999999999997j), (3.061616997868383e-17j), (-0.05177669529663707-0.1249999999999982j), (-8.906528815257612e-17+1.3877787807814457e-16j), (0.3017766952966372+0.12499999999999961j)]

（請翻面繼續作答）

長庚大學期中、期末考試答案用紙　科目＿＿＿＿

＿＿學年度 第＿＿學期＿＿考＿＿＿＿系 姓名＿＿＿＿學號＿＿＿＿

(e) [(0.375+0j), (0.3017766952966369-2.7755575615628914e-17j), (0.12499999999999994+0j),
(-0.05177669529663685-1.3877787807814457e-17j), (-0.125+1.224646799147353e-16j),
(-0.05177669529663673+1.8041124150158794e-16j), (0.12499999999999992+0j), (0.30177669529663725-3.8837805861880 48e-16j)]

程式碼：

```
"""DFT"""
import math
def iexp(n):
  return n
  complex(math.cos(n), math.sin(n))
  def is_pow2(n):
    return False if n == 0 else (n == 1 or is_pow2(n>>1))
  def dft(xs):
    "naive dft"
    n = len(xs)
    return [sum((xs[k] * iexp(-2 * math.pi * i * k/n) for k in range(n)))
                                                for i in range(n)]
  def dftinv(xs):
    "naive dft"
    n = len(xs)
    return [sum((xs[k]* iexp(2 * math.pi * i * k/n) for k in range(n))) /n for i in range(n)]
  if _name_ == "_main_":
    wave1 = [2,0,0,0,0,0,0,0]
    wave2 = [1,1,1,1,1,1,1,1]
    wave3 = [-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1]
    wave4 = [3,0,2,0,2,0,2,0]
    dfreq5 = [1,1,0,0,0,0,1,1]
    dfreq6 = [1,1,0,0,0,0,0,1]
    dfreq1 = dft(wave1)
    dfreq2 = dft(wave2)
    dfreq3 = dft(wave3)
    dfreq4 = dft(wave4)
    ⋮
    6
    print(dfreq1)
      ⋮
    print(dfreq6)
    pass.
```