**薄板样条插值（Thin-Plate Spline）**

1. 插值

假设已知函数在N+1个点处的函数值为但函数的表达式未知,那么可以通过插值函数来逼近未知函数,并且必须满足

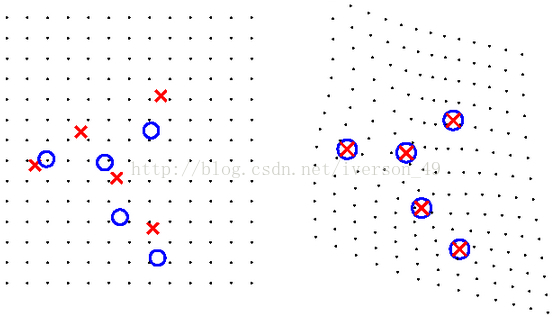
(1)

常见的插值函数的形式有多项式函数、样条函数。

* 多项式函数：令为N次多项式函数，于是有N+1个参数，而由公式(1)可知这N+1个参数满足N+1个约束条件，所以可以求出的表达式。
* 样条函数：我们知道N阶多项式函数必然有个极值点，所以得到的插值函数摆动会比较大，这有点像机器学习中的过拟合现象，可以用样条函数来避免这个问题。这里的样条函数其实就是分段函数，表示在相邻点和之间用低阶多项式函数插值。分段线性插值和三次样条插值都属于样条插值。

1. TPS简介

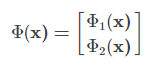
薄板样条函数(TPS)是一种很常见的插值方法。因为它一般都是基于2D插值，所以经常用在在图像配准中。在两张图像中找出N个匹配点，应用TPS可以将这N个点形变到对应位置，同时给出了整个空间的形变(插值)。



一般人都会提到该形变会使薄板的弯曲能量最小，这里有个最容易进入的误区：是把这张2D图像看作薄板没错，但弯曲能量指的并不是N个点形变到对应位置所产生在薄板内的“弯曲”。事实上，该样条函数是对每一维的坐标变化分别进行插值。我们把每一维的形变(x或y坐标的变化)施加于垂直于薄板的方向，此时使得弯曲能量最小的形变给出了该维的插值。

1. TPS原理

考虑这样一个插值问题：自变量是2维空间中的一点，函数值也是2维空间中的一点，并且都在笛卡尔坐标系下表示。给定个自变量和对应的函数值，求插值函数



使得

(2)

我们可以认为是求两个插值函数和

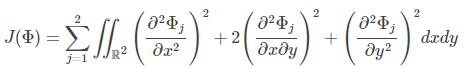
TPS插值函数的形式如下:

(3)

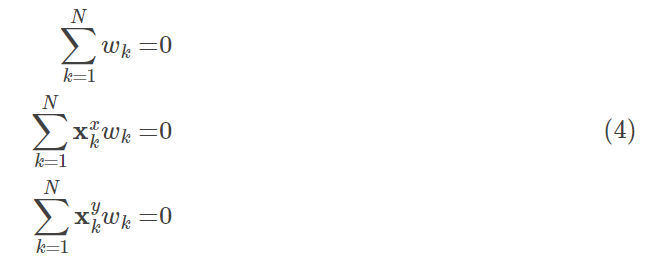
其中是标量，向量，向量，函数向量

其中

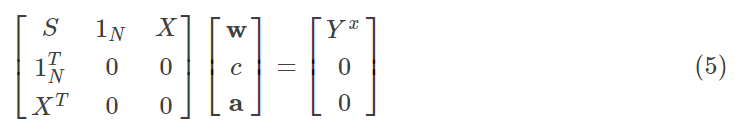
弯曲能量最小的插值函数(Kent, J. T. and Mardia, K. V. (1994a). The link between kriging and thin-plate splines. In: Probability, Statistics and Optimization: a Tribute to Peter Whittle (ed. F. P. Kelly), pp 325–339. John Wiley & Sons, Ltd, Chichester. page 282, 287, 31):



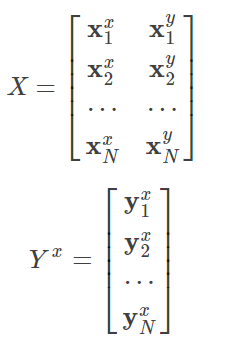
TSP插值函数有N+3个参数，而条件(2)只给出了N个约束，我们再添加三个约束：



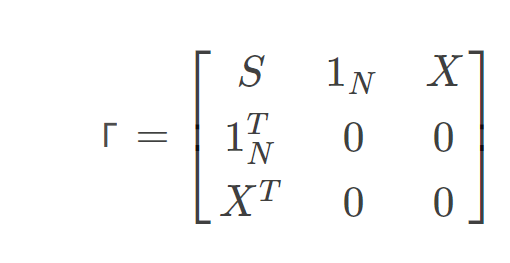
和分别表示点x的x坐标值和y坐标值.于是(2)和(4)可以写成:



其中,表示值全为1的N维列向量,

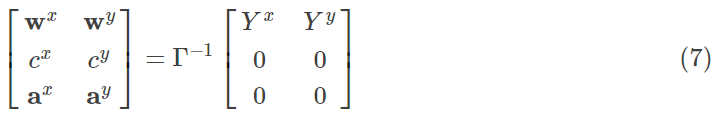


可以令Γ等于

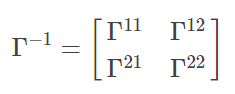


那么可知当S是非奇异矩阵时也就是说满秩时，Γ也是非奇异矩阵，于是参数为：

  
可以把和的参数通过一个矩阵运算计算出来：



我们把写成下面的形式：



称矩阵为弯曲能量矩阵，其秩为。