数据、模型与决策

兰州大学管理学院　　何丽红

Address: 兰州大学管理学院，730000

E-mail: helh@lzu.edu.cn

Tel: 18152073210, 13659455688

教材及参考资料

- 陈士成, 宗胜亮, 何丽红. 《管理运筹学——面向未来的决策应用》[M]. 北京：高等教育出版社.
- David R. Anderson et al. 《数据、模型与决策》[M]. 北京：机械工业出版社.
- 韩伯棠. 《管理运筹学》[M]. 北京：高等教育出版社.

课程定位

本课程内容是决策分析的有力工具，是一门应用学科，是管理科学的基础，是大多数管理类专业的必修课程，是MBA专业学位核心基础课程之一。

教学目的

- 了解运筹学各分支体系的基本模型、求解方法和应用领域；
- 掌握建立和求解数学模型的基本技能；
- 认识运筹学在管理决策中的巨大应用价值；
- 引导并锻炼大家运用运筹学知识定量分析与解决实际问题的能力；
- 培养优秀的企业管理人才。

教学内容

运筹与决策

理论分析

数据、模型、决策

- 不确定型决策
- 风险型决策
- 确定型决策

运筹学的基础模型

原理、方法与操作

最大最小准则
最大最大准则
等可能性准则
乐观系数准则
后悔值准则

期望值准则
全情报价值准则
样本情报价值准则
效用值准则

线性规划模型
线性规划模型拓展
动态规划
排队论
存储论
…………

运筹学模型的应用拓展

原理、方法与操作

LP灵敏度分析
线性规划应用
整数规划模型
运输模型
目标规划模型
网络优化模型

价值系数变化影响
常数项变化影响
百分之百法则
相差值分析

生产安排问题
排班问题
套材下料问题
连续投资问题

纯整数规划模型
0-1整数规划模型
混合整数规划模型
整数规划的特殊应用

产销平衡运输模型
产大于销运输模型
销大于产运输模型
条件产销不平衡模型
转运模型

有优先级目标规划
加权目标规划

最短路模型
最小支撑树模型
最大流模型
最小费用流模型

考核方式

- 成绩构成：

  课程参与：20%

  随堂测验：20%

  课程报告：10%

  期末考试：50%

- 期末考试形式：

  闭卷考试

  基础知识：50%

  案例分析：25%

  数学建模：25%

运筹学课程知识结构导航

第一讲 运筹与决策

运筹与决策

理论分析

数据、模型、决策

- 不确定型决策
- 风险型决策
- 确定型决策

运筹学基础模型

原理、方法与操作

- 最大最小准则
- 最大最大准则
- 等可能性准则
- 乐观系数准则
- 后悔值准则

- 期望值准则
- 全情报价值准则
- 样本情报价值准则
- 效用值准则

- 线性规划模型
- 线性规划模型拓展
- 动态规划
- 排队论
- 存储论
- …………

运筹学模型的应用拓展

原理、方法与操作

- 价值系数变化影响
- 常数项变化影响
- 百分之百法则
- 相关性分析

- LP灵敏度分析
- 线性规划应用
- 整数规划模型
- 运输模型
- 目标规划模型
- 网络优化模型

- 最短路模型
- 最小支撑树模型
- 最大流模型
- 最小费用流模型

- 生产安排问题
- 排班问题
- 套材下料问题
- 连续投资问题

- 纯整数规划模型
- 0-1整数规划模型
- 混合整数规划模型
- 整数规划的特殊应用

- 产销平衡运输模型
- 产大于销运输模型
- 销大于产运输模型
- 条件产销不平衡模型
- 转运模型

- 有优先级目标规划
- 加权目标规划

主要内容

1. 什么是决策?
2. 决策及其分类
3. 决策方法
4. 运筹学及其应用

1. 什么是决策？

案例1.1 生产计划问题

用x代表某公司下周准备生产产品的数量，用p代表总利润，卖出一件产品可获得利润1000元，制造每件产品需要50小时，每周工作的总时间为400小时。

请制定生产计划以符合实现利润最大化的目标。

案例1.2　高富布鲁克公司难题

近期，一个拥80万美元资产的高富布鲁克公司，用50万美元在一大油田附近购买了一块土地，但那些石油公司都认为这块土地没有希望有石油储量。作为该公司的创始人和全资持有人弗雷尔，经过对地质学家的咨询，得到了一个比较详细的咨询报告。此时，弗雷尔面临如下抉择：

1、若要在这块土地上开采石油，需要一次性投资100万美元的开采成本；开采石油会有两种可能：若蕴含石油，则可以获得约800万美元的收入；若不蕴含石油（干涸），则100万美元的投资成本将全部损失。

2、另一个石油公司也听说了这份咨询报告的消息，提出以140万美元从高富布鲁克公司购买这块土地。

如果你是弗雷尔，该怎么做才能获得最多收益或损失最少？

- 从多个方案中选择一个最好方案（有目标）的过程
- 面临着一组明确或不明确的自然状态

决策

- 存在与问题有关的一组较为完整的数据
- 已知的数据间存在着紧密的、较为固定的相互关系

定量

定量化决策

《运筹学》 ⟷ 《数据、模型与决策》

决策与管理

决策是人们生活和工作中普遍存在的一种活动，以解决当前或未来可能发生的问题。

可以说自人类诞生以来，一直都经历着作出决策的过程。

决策与管理

决策是管理者从事管理工作的基础，在管理活动中具有重要的地位与作用。

- 决策贯穿于管理过程始终；
- 决策正确与否直接关系到组织的生存与发展；
- 决策能力是衡量管理者水平高低的重要标志之一；
- 决策是一项创造性的思维活动，体现了高度的科学性和艺术性。

决策与管理

决策方式：

- 科学决策
- 经验决策

1. 科学决策

科学决策是决策者遵循科学的原则、程序，依靠科学的方法和技术进行的决策活动。其主要特点是：

（1）强调建立科学的决策体制，注重集体共同决策，决策过程中特别注意依靠各种智囊组织，注意各种专家的横向联系,形成合理的人才结构，共同完成某个决策活动。

（2）强调将决策建立在科学分析的基础上，从传统的依靠经验进行决策，转变为依靠科学分析来进行决策，广泛运用科学技术的方法，将定性分析和定量分析结合起来，确保决策的正确性和可靠性。

2. 经验决策

经验决策，主要是凭借决策者个人的知识、才智和经验而做出的决策，决策是否成功，主要取决于领导者和个别高明谋士的认识和经验。经验决策的特点是：

（1）这种决策方式一般说来是个人的决策活动，主要依靠决策者个人的素质做出决断。

（2）这种决策方式,本质上是以决策者的经验为基础，所能处理的信息量有限，一般说来，是一种定性不定量的决策。

- 在实际工作中，人们通常采用的决策方法是基于个人信息的个人决策。
- 基于个人信息的个人决策的特点是：决策速度快、责任清楚、依赖个人信息。

- 在组织创业初期，基于个人信息的个人决策具有较大的优势，但随着组织的发展和外部环境的变化，组织管理出现了许多以前所没有遇到过的新问题，面对这些新问题，若仍采用基于个人信息的个人决策方式，就会产生比较多的决策失误：
- 决策速度缓慢：一个人的精力是有限的，面对大量需要决策的问题时，整体决策速度大为下降。
- 决策失误增多：一旦加快决策的速度，由于没有时间进行慎重的思考，伴随着快速决策导致的结果是决策失误的增多。

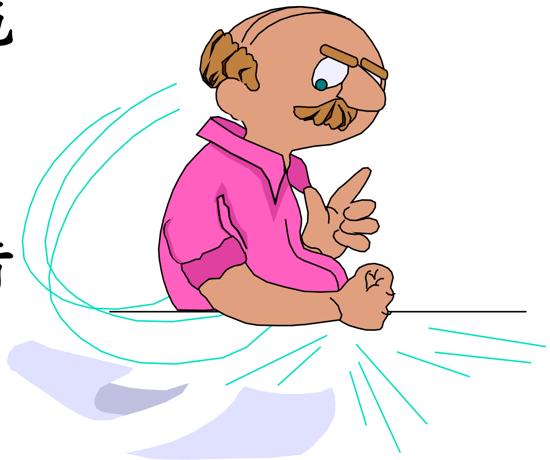
通常的对策

加快决策速度措施

- 下放权力
- 制度化

避免决策失误的措施

- 集体决策
- 多方论证



结果

- 失控
- 协调工作量大增

- 迟迟不能决策
- 无人负责

问题在于：组织目标不清、职责不明

- 组织决策效率与效益的的提高，是一项系统工程。
- 要提高组织决策的效率与效益，必须明确组织的目标和每一个岗位的职责，并改变基于个人信息的个人决策方法。
- 关键在于掌握科学决策的理论与方法。

- “一着不慎，满盘皆输；一着占先，全盘皆活”。
- 它喻示一个道理，无论做什么事情，成功与失败取决于决策的正确与否。科学的经营决策能使企业充满活力，兴旺发达，而错误的经营决策会使企业陷入被动，濒临险境。

2. 决策及其分类

决策(Decision making)

决策，就是为处理当前或未来可能发生的、处于特定的环境或状态下的事情，从两个及两个以上方案中选择最佳方案的过程。

决策的属性和特点

- 决策的主观性
- 决策的目的性
- 决策的选择性
- 决策的风险性
- 决策的科学性
- 决策的实践性
- 决策的时间性
- 决策的经济性
- 决策的动态性
- 决策优化准则的模糊性

决策要素

- 决策者
- 决策目标
- 决策效益
- 可行方案
- 结局
- 效用

1. 决策者：一个或几个人。

- ✓ 分析者：只提出、分析、评价方案，而不作出决断的人。
- ✓ 领导者：有责有权，能作出最后决断拍板的人。

2. **决策目标：必须至少有一个希望达到的既定目标**，这个目标一般都是优化目标，不追求优化，决策是没有意义的。

- ✓ 目标至少有1个；
- ✓ 目标间的不可公度性，即各个目标没有统一的度量标准；
- ✓ 目标间的矛盾性。

3. **决策效益：必须讲究决策的效益，**在一定的条件下寻找优化目标，不追求优化，决策是没有意义。

✓ 决策准则

用于选择方案的标准或依据。

4. 可行方案：必须至少有2个可行方案可供选择，一个方案，无从选择，也就无从优化。

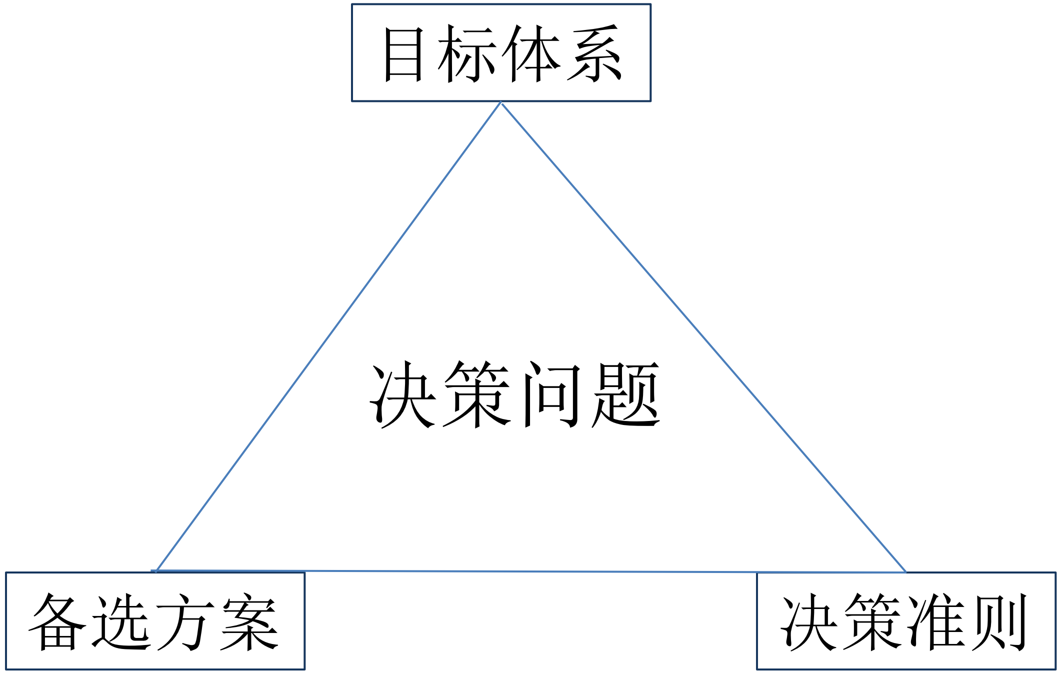
决策者根据实际问题设计出的解决方案。

- ✓ 明确的、有限的几个方案；
- ✓ 不明确的，有待于在决策过程中根据一系列约束条件确定出来。

5. **结局：又称自然状态，**每个方案选择之后可能发生的1个或几个可能结局，如果每个方案都只有1个结局，就称为“确定型”决策，否则就称为“不确定型”决策。

6. **效用：每一个方案各个结局的价值评估称为效用。**

决策要素



决策问题的分类

□ 根据决策者多少分类：

- 单人决策——决策者只有一人，或是利害关系完全一致的几个人组成的一个群体
- 多人决策——决策者至少2个人，且他们的目标、利益不完全一致，甚至相互冲突和矛盾
- 如果几个决策者的利益和目标互相对抗，就称为“对策”
- 如果几个决策者的利益和目标不完全一致，又必须相互合作，共同决策，则称为“群体决策”

决策问题的分类

□ 根据决策目标的多少分类：

●单目标决策——只有一个明确的目标，方案的优劣，完全由其目标值的大小决定。

●多目标决策——至少有2个目标；这些目标往往有不同的度量单位，且相互冲突，不可兼而得之，这时，仅比较一个目标值的大小已无法判断方案的优劣。

决策问题的分类

□根据决策方案的明确与否分类：

- 规划问题——如果只说明产生方案的条件，这一类决策称为规划问题，例LP、NLP、DP等。
- 决策问题——如果只有有限个明确的具体方案，这一类决策称为决策问题。

决策问题的分类

◻根据决策问题是否重复分类：

- 常规决策——重复性决策，是指企业生产经营中经常出现的问题的处理。
- 非常规决策——一次性决策，往往是企业中的重大战略性问题的决策。

决策问题的分类

自然状态的确定程度决定了决策的结局，也决定决策问题的类型

确定型决策----事先可以确定决策的后果。

风险型决策----又称“随机型决策”或“统计型决策”，事先可以知道决策的所有可能的后果及各种后果出现的概率而不能肯定后果。

不确定型决策----事先不知道决策可能出现的各种后果，或虽然知道决策的所有可能后果，但不能知道各种后果的出现概率。

不确定型决策

例1. 假定一个工程, 确定开工时间。如果开工后天气好，可获利润10万元；若开工后天气坏将造成经济损失3万元；假如不开工，不论天气好坏都要付出基本损失1万元。现在需要管理人员做出决定，确定下月是否开工，以使施工队能获得最多的利润或使损失为最小。

单位：万元

方案＼收益＼状态	B_1（天气好）	B_2（天气不好）
甲（开工）	10	-3
乙（不开工）	-1	-1

不确定型决策的基本特征

1、存在决策人希望达到的一个明确目标（收益最大或损失最小）

2、有两个或两个以上的行动方案可供决策人选择，最后只选择其中的一个方案（甲或乙）

3、存在着两个或两个以上的不以决策人的意志为转移的自然状态（天气好或不好）

4、不同的行动方案在不同自然状态下的相应收益值（利益或损失）可以计算出来

风险型决策

例2. 某厂要确定下一计划期内产品的生产批量，根已知产品销路N有好、一般、差三种情况，已知其可能性（即概率）P，产品采用大、中、小批量生产，可能获得的效益值A可计算出来。确定合理批量，使企业获得效益最大？

收益值 / 状态 / 方案	N_1（好）	N_2（一般）	N_3（差）
	$P(N_1)=0.2$	$P(N_2)=0.5$	$P(N_3)=0.3$
A_1(大批量生产)	7	10	9
A_2(中批量生产)	15	14	11
A_3(小批量生产)	11	9	13

风险型决策的基本特征

1、存在决策人希望达到的一个明确目标（收益最大或损失最小）

2、有两个或两个以上的行动方案可供决策人选择，最后只选择其中的一个方案

3、存在着两个或两个以上的不以决策人的意志为转移的自然状态

4、不同的行动方案在不同自然状态下的相应收益值（利益或损失）可以计算出来

5、在几种不同的自然状态中未来究竟将出现哪种自然状态，决策人不能肯定，但是各种自然状态出现的可能性（即概率）决策人可以预先估计或计算出来

确定型决策

案例1.1

用x代表产品数量，用p代表总利润，卖出一件产品可获得利润1000元，制造每件产品需要50小时，每周工作时间为400小时。

问每周生产多少产品才能实现利润最大化的目标？

$$\max\ p = 1000\,x$$

$$\text{s.t. } 50x \le 400$$

$$x \ge 0$$

确定型决策的基本特征

1、存在决策人希望达到的一个明确目标（收益最大或损失最小）

2、存在着两个或两个以上的行动方案可供决策人选择，最后只选择其中的一个方案

3、只存在一个确定的自然状态（资源、环境、条件）

4、不同的行动方案在确定状态下的收益值（利益或损失）可以计算出来

课堂讨论（决策问题）

请问以下三个决策问题分别属于什么类型的决策问题?

- 将一笔钱存入银行，存与不存?
- 投硬币游戏，猜字朝上或图朝上判输赢?
- 购买股票，确定明天该买与不该买?

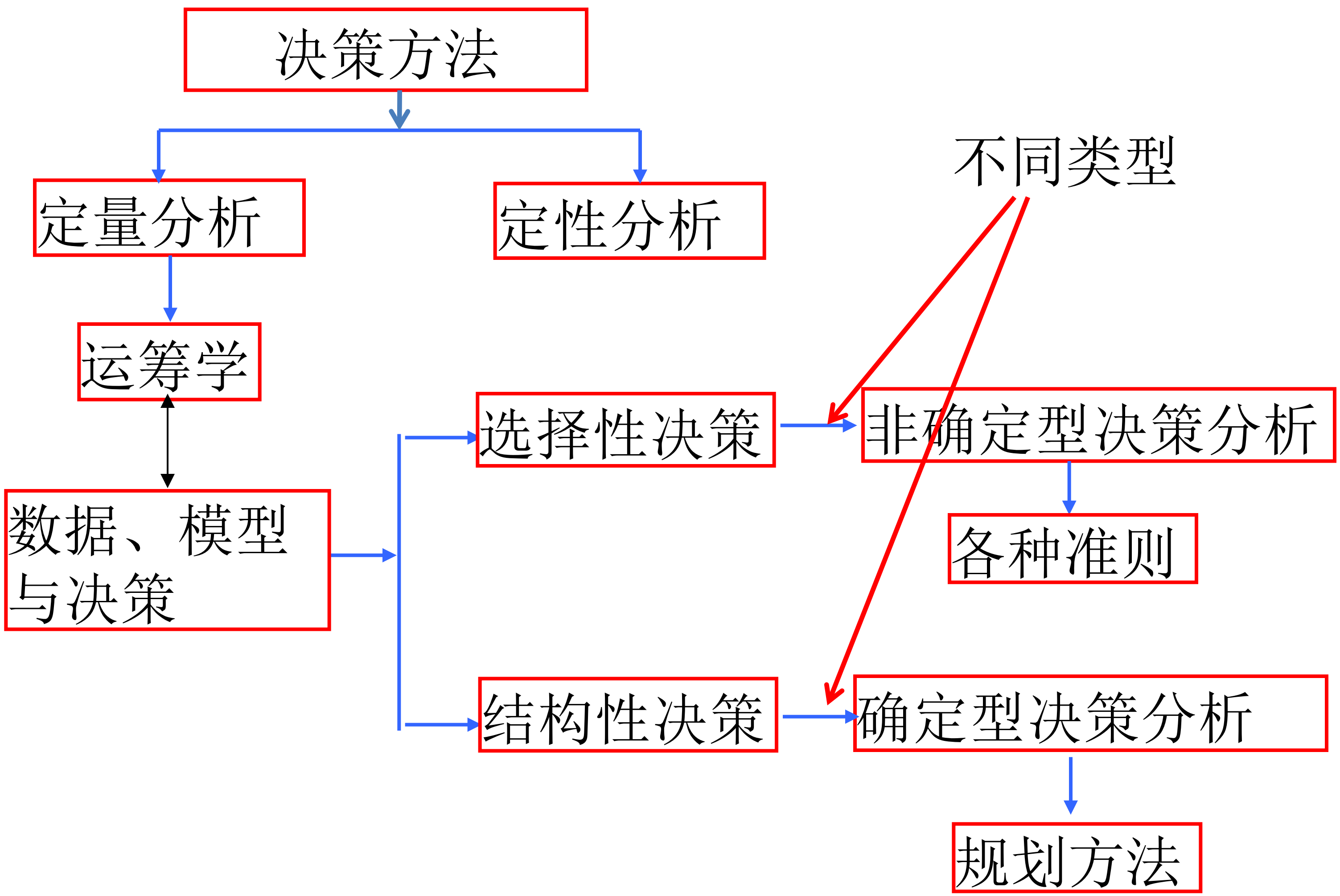
决策程序

1. 明确问题
2. 寻求备选方案
3. 确定评估目标及方案的标准
4. 评估备选方案
5. 选择最优方案：决策
6. 方案实施：回到实践中
7. 分析结果：检验问题是否达到预期的结果

构造问题

分析问题

3. 决策方法


决策方法
定量分析
定性分析
不同类型
运筹学
选择性决策
非确定型决策分析
数据、模型与决策
各种准则
结构性决策
确定型决策分析
规划方法

数据

- 决策对象关键因素的定量化描述
- 描述决策对象关键因素的相互关系

数学模型

主要是抽象模型

数学关系

数学方程

逻辑关系

描述

被研究对象的

实际关系

数学模型

例3. $ax^2+bx+c=0$

例4. 盈亏平衡分析模型

兰州大学出版社正在考虑出版《运筹学---MBA专用教材》的平装版。估计原稿准备、教科书设计及生产设备的固定成本为80000元，每本书的可变成本和材料费估计约3元。该书的预期需求大概有4000册，根据出版署的定价规则，该书的价格大致应定为25元/册。这类教科书的销售方式一般都是直接批发给大学或学院的书店，批发价格可以优惠到85折。问该方案是否可行？

例5. 战略核武器杀伤力模型

美国和苏联从六十年代起就展开了激烈的核武器竞争。六十年代初期，苏联主张武器往大型化方向发展，其理由是武器的威力越大，杀伤力越强。但美国有人认为：虽然武器的威力越大，杀伤力越强，但武器的杀伤力还与准确度有关。

经过大量的模拟试验，利用蒙特卡洛拟合而得到杀伤力K、威力Y、精度C的函数关系： $K=Y^{2/3}/C^2$

由此易得：

- 当Y*=8Y时，K*=4K，即威力提高8倍，杀伤力提高4倍。
- 当C*=C/8时，K*=64K，即精度提高8倍，杀伤力提高64倍。

这说明提高精度合理，因而美国走提高武器精度的道路。

案例1.1 生产计划问题

用x代表某公司下周生产产品的数量，用p代表总利润，卖出一件产品可获得利润1000元，制造每件产品需要50小时，每周工作的总时间为400小时。

请制定生产计划以符合实现利润最大化的目标.

$$\max\ p = 1000\,x$$

$$\text{s.t. } 50x \le 400$$

$$x \ge 0$$

运筹学中的数学模型

- 运筹学研究和解决问题的核心是正确建立和使用运筹学模型；
- 不仅要建立运筹学模型，而且对该模型能进行分析和求解。

决策方法

⇕

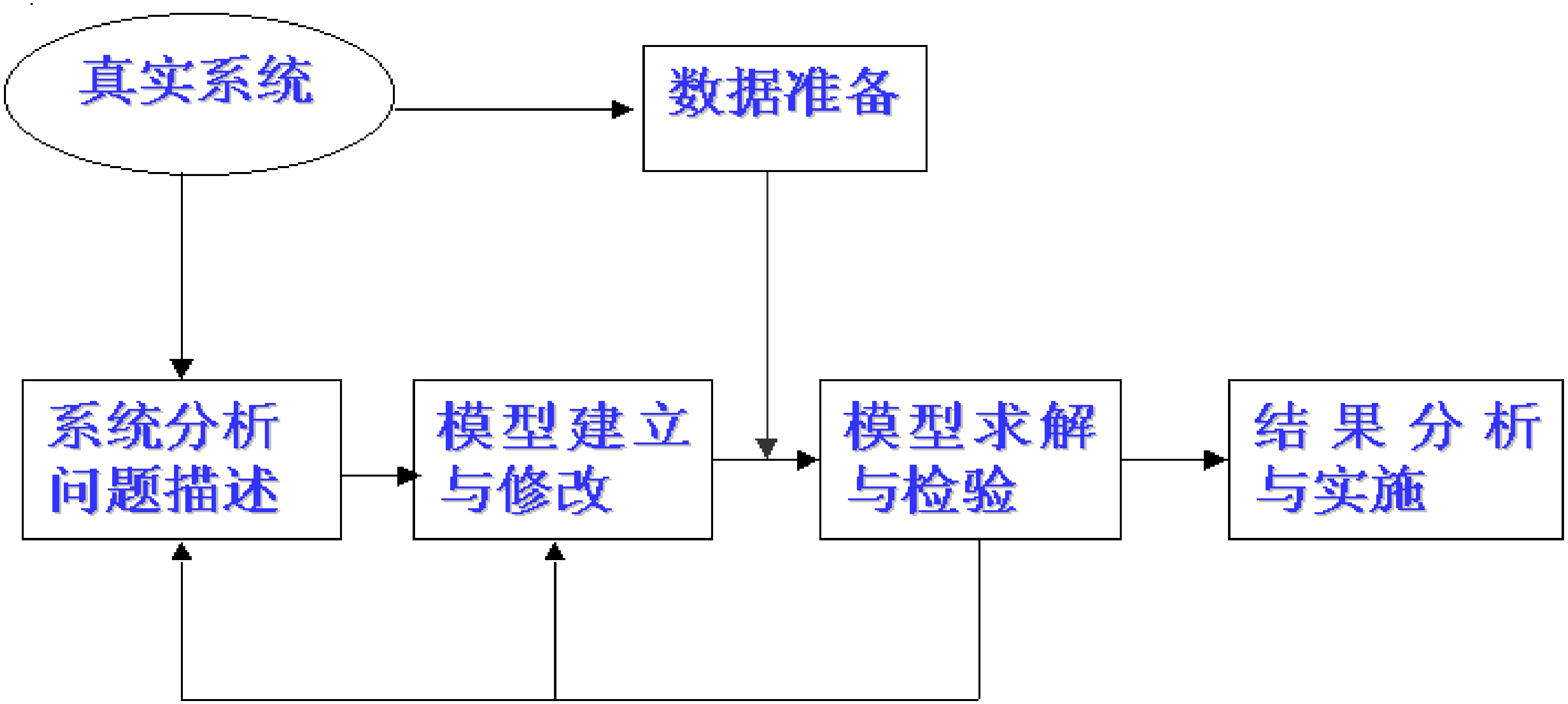
运筹学

在有限的资源、环境及自身条件下，使企业获得最优经营效果的定量决策方法。

- 决策分析
- 线性规划
- 整数规划
- 网络模型
- 目标规划

4. 运筹学及其应用

运筹学分析问题的主要步骤



运筹学模型

针对实际问题所建立的运筹学模型，一般应满足以下基本要求：

- 能完整地描述所研究的系统；
- 在适合问题的前提下，模型应尽量简单。

运筹学数学模型

运筹学模型的显著特点是大部分为最优化模型，即都有一个目标函数和一系列的约束条件，模型的目标是在满足约束条件的前提下使目标函数最大化或最小化。

$$
\begin{aligned}
\max\ & p = 1000x \\
\text{s.t.}\ & 50x \le 400 \\
& x \ge 0
\end{aligned}
$$

运筹学模型

- 决策变量：可控制变量，是模型所代表的系统中受到控制或能够控制的变量，在模型中表现为未知数。对模型进行分析研究，最后就是通过选定决策变量来实现其最优解；
- 目标函数：是模型所代表的性能指标或有效性的宏观度量，在模型中表现为决策变量的函数，反映实际问题所要达到的理想目标；
- 约束条件：决策变量客观上必须满足的限制条件，它反映了实际问题中不受控制的变量对受控制的决策变量的限制关系。

运筹学的应用

能源：能源总体规划、运输、产供销；石油如何分配、水电、核电发展规划

军事：武器论证、反坦克系统、高炮系统、坦克系统、作战模拟、陆海空军作战

农业：农业规划、农业施肥

交通：全国交通网、城市交通网、出租车、公交路线规划、港口选址、驳运、河运（航道堵塞）、空运（空中交通管制ATC）、物流

工业企业：企业发展规划、生产计划、库存问题、新设备可行性、下料问题、全面质量管理、投入产出、生产调度问题、投资问题。

管理信息系统：决策支持系统（企业计划、财务、人事、材料、银行……）

区域发展规划：

教育：人才预测、人才结构、师资、设备、职称提升、成人教育、毕业生考核

运筹学在工商管理中的具体应用

- 生产计划：生产作业的计划、日程表的编排、合理下料、配料问题、物料管理等；
- 库存管理：多种物资库存量的管理，库存方式、库存量等；
- 运输问题：确定最小成本的运输线路、物资的调拨、运输工具的调度以及建厂地址的选择等；
- 人事管理：对人员的需求和使用的预测，确定人员编制、人员合理分配，建立人才评价体系等；
- 市场营销：广告预算、媒介选择、定价、产品开发与销售计划制定等；
- 财务和会计：预测、贷款、成本分析、定价、证券管理、现金管理等；
- 其它：设备维修、更新，项目选择、评价，工程优化设计与管理等。

案例讨论

案例1.3 区域综合规划

引自朱逢春《固原县农业发展规划》

宁夏固原县地处黄土高原西部，海拔在1500米至1800米，全县土地面积为5400平方千米，其中耕地284600百亩，林地3000百亩，天然草原253000百亩，以及其它用地。

为了发展农牧业生产，迫切需要解决以下两个问题：其一，根据不同的土地类型（包括水肥条件），怎样合理安排各种作物的生产，以实现资源的最佳配合；其二，该县能否进一步扩大畜牧业生产，以实现农牧业生产的协调发展。

案例1.4

成品油市区二次配送路线选择的优化决策分析

（第六届“全国百篇优秀管理案例”）

本案例选取中石油某省区公司（以下简称SY公司）油品配送环节进行剖析研究，运用运筹学中的网络优化模型，对SY公司两个油库到十二个主要加油站配送路线的选择进行优化决策，并且根据每个加油站每天的需求量和每个油库每天的供应量，核算出整个配送系统每天最佳运送成本的预测值。

知识点总结

1. 不确定型决策问题的特征
2. 风险型决策问题的特征
3. 确定型决策问题的特征

第二讲 运筹学基础模型

运筹与决策

理论分析
数据、模型、决策

不确定型决策

风险型决策

确定型决策

运筹学基础模型

原理、方法与操作

最大最小准则
最大最大准则
等可能性准则
乐观系数准则
后悔值准则

期望值准则
全情报价值准则
样本情报价值准则
效用值准则

线性规划模型
线性规划模型拓展
动态规划
排队论
存储论
…………

运筹学模型的应用拓展

原理、方法与操作

价值系数变化影响
常数项变化影响
百分之百法则
相差值分析

LP灵敏度分析
线性规划应用
整数规划模型
运输模型
目标规划模型
网络优化模型

最短路模型
最小支撑树模型
最大流模型
最小费用流模型

生产安排问题
排班问题
套材下料问题
连续投资问题

纯整数规划模型
0-1整数规划模型
混合整数规划模型
整数规划的特殊应用

产销平衡运输模型
产大于销运输模型
销大于产运输模型
条件产销不平衡模型
转运模型

有优先级目标规划
加权目标规划

主要内容

1. 不确定型决策模型的求解方法
2. 风险型决策模型的求解方法
3. 确定型决策模型的求解方法

1. 不确定型决策模型的求解方法

决策者知道将面对的一些自然状态，并知道将采用的几种行动方案，以及在各个不同的自然状态下所获得的相应的收益值，但决策者不能预先估计或计算出各种自然状态出现的可能性。

解决方法：
- 最大最小准则（悲观准则）
- 最大最大准则（乐观准则）
- 等可能性准则
- 乐观系数准则
- 后 悔 值准则

例2.1　某公司现需对某新产品生产批量做出决策，现有四种备选行动方案：S_1、S_2、S_3、S_4。未来市场对这种产品的需求情况有三种可能发生的自然状态：N_1、N_2、N_3。经估计，采用某一行动方案而实际发生某一自然状态时，公司的收益如下表所示，请做出决策。

单位:万元

自然状态 / a_{ij} / 行动方案	N_1 (需求量大)	N_2 (需求量适中)	N_3 (需求量小)
S_1	12	14	13
S_2	15	17	14
S_3	13	15	18
S_4	10	16	12

最大最小准则（悲观准则）

决策者从最不利的角度去考虑问题，先选出每个方案在不同自然状态的最小收益值，再从这些最小收益值中选取一个最大值，从而确定最优行动方案——悲观主义准则。

$$Z = \max_{1 \le i \le 4} \left[\min_{1 \le j \le 3} \left(a_{ij} \right) \right]$$

其中：a_{ij}为收益表中第i个决策方案、第j个自然状态下的收益值

最大最小准则（悲观准则）

最大最小准则收益表

单位:万元

自然状态 a_{ij} 行动方案	N_1（需量大）	N_2（需量中）	N_3（需量小）	$Z=\max\limits_{1\le i\le 4}\left[\min\limits_{1\le j\le 3}(a_{ij})\right]$
S_1	12	14	13	12
S_2	15	17	14	14
S_3	13	15	18	13
S_4	10	16	12	10

最优方案： S_2

最大最大准则（乐观准则）

决策者从最有利的角度去考虑问题，先找出每个方案在不同自然状态下最大的收益值，再从这些最大收益值中选取一个最大值，相应的方案为最优方案——乐观准则。

$$Z=\max_{1\le i\le 4}\left[\max_{1\le j\le 3}\left(a_{ij}\right)\right]$$

最大最大准则（乐观准则）

最大最大准则收益表

单位:万元

自然状态 a_{ij} 行动方案	N_1（需量大）	N_2（需量中）	N_3（需量小）	$Z=\max\limits_{1\le i\le 4}\left[\max\limits_{1\le j\le 3}(a_{ij})\right]$
S_1	12	14	13	14
S_2	15	17	14	17
S_3	13	15	18	18
S_4	10	16	12	16

最优方案： S_3

等可能性准则

决策者把各自然状态发生的可能性看成是相同的，即每个自然状态发生的概率都是 $\frac{1}{\text{事件数}}$ 。这样决策者可以计算各行动方案的收益期望值。然后在所有这些期望值中选择最大者，以它对应的行动方案为最优方案。

$$Z = \max_{1 \le i \le 4} \left[\sum_{1 \le j \le 3} \left(p_j \times a_{ij} \right) \right]$$

其中p_j= $\frac{1}{\text{事件数}}$ = 1/3

等可能性准则

等可能性准则收益表

单位:万元

方案 \ a_{ij} \ 自然状态 / 概率	N_1(大)	N_2(中)	N_3(小)	$Z=\max\limits_{1\le i\le 4}\left[\sum\limits_{1\le j\le 3}\left(p_j\times a_{ij}\right)\right]$
	1/3	1/3	1/3	
S_1	12	14	13	13
S_2	15	17	14	15.333
S_3	13	15	18	15.333
S_4	10	16	12	12.667

最优方案: S_2和S_3

乐观系数准则

先计算出每个方案S_i的乐观系数准则下的收益值，然后在所有方案乐观系数准则中选出收益值最大的方案确定为最优方案。

$$Z=\max_{1\le i\le 4}\left[\alpha\max_{1\le j\le 3}\left(a_{ij}\right)+\left(1-\alpha\right)\min_{1\le j\le 3}\left(a_{ij}\right)\right]$$

其中乐观系数α（0≤α≤1）是由决策者根据经验确定的。

当α＝1时，为乐观准则

当α＝0时，为悲观准则

乐观系数准则

乐观系数准则收益表（ α=0. 7 ）

单位:万元

自然状态 / a_{ij} / α / 方案	N_1(大)	N_2(中)	N_3(小)	$Z=\max\limits_{1\le i\le 4}\left[\alpha\max\limits_{1\le j\le 3}(a_{ij})+(1-\alpha)\min\limits_{1\le j\le 3}(a_{ij})\right]$
	0.7			
S_1	12	14	13	**14*0.7+12*0.3=13.4**
S_2	15	17	14	**17*0.7+14*0.3=16.1**
S_3	13	15	18	**18*0.7+13*0.3=16.5**
S_4	10	16	12	**16*0.7+10*0.3=14.2**

最优方案： S_3

后悔值准则

将各自然状态下的最大收益值定为理想目标，并将该状态中的其他值与最高值之差称为未达到理想目标的后悔值，然后从各方案中的最大后悔值中取一个最小的，相应的方案为最优方案。——沙万奇准则

$$a'_{ij} = \max_{1\le i\le 4}\left(a_{ij}\right) - a_{ij} \qquad Z = \min_{1\le i\le 4}\left[\max_{1\le j\le 3}\left(a'_{ij}\right)\right]$$

后悔值准则

由原收益表创建后悔值表

单位:万元

自然状态N_j / a_{ij} / 行动方案S_i	N_1（需量大）	N_2（需量中）	N_3（需量小）	$Z=\min\limits_{1\le i\le 4}\left[\max\limits_{1\le j\le 3}(a'_{ij})\right]$
S_1	**3** 12	**3** 14	**5** 13	5
S_2	**0** 15	**0** 17	**4** 14	4
S_3	**2** 13	**2** 15	**0** 18	2 ←
S_4	**5** 10	**1** 16	**6** 12	6

最优方案： S_3

课堂练习1.（不确定型决策问题）

案例1.1是一个典型的不确定型决策问题，试分别用乐观准则、悲观准则、等可能性准则、乐观系数（0.7）准则和后悔值准则求解最优方案。

土地状况 / 收益 / 备选方案	有石油	干涸
开采石油	700	-100
出售土地	90	90

2. 风险型决策模型的求解方法

决策者在目标明确的前提下，对客观情况并不完全了解，存在事实上决策者无法控制的两种或两种以上的自然状态，但对于每种自然状态出现的概率大体可以估计，并可算出在不同状态下的收益值。

解决方法：

- 期望值准则
- 最大可能准则
- 全情报价值准则
- 样本情报价值准则

例2.2　在例2.1的基础上，根据经验估计出需求量N_j这些自然状态出现的概率为p_j，请做出决策。

单位:万元

自然状态 / 概率 / a_{ij} / 方案	N_1 (需求量大)	N_2 (需求量中)	N_3 (需求量小)
	0.2	0.5	0.3
S_1	12	14	13
S_2	15	17	14
S_3	13	15	18
S_4	10	16	12

期望值准则

把每个方案在各种自然状态下的收益值看成离散型随机变量，根据各自然状态发生的概率，计算每个方案收益值的数学期望，选取其中收益值的数学期望最大的行动方案为最优方案。

$$Z=\max_{1\le i\le 4}\left[E\left(S_i\right)\right]=\max_{1\le i\le 4}\left[\sum_{1\le i\le 3}\left(p_j\times a_{ij}\right)\right]$$

期望值准则

单位:万元

自然状态 / 概率 / a_{ij} / 方案	N_1 (大)	N_2 (中)	N_3 (小)	$Z=\max\limits_{1\le i\le 4}\left[E(S_i)\right]$
	0.2	0.5	0.3	
S_1	12	14	13	12*0.2+14*0.5+13*0.3=13.3
S_2 ←	15	17	14	15.7
S_3	13	15	18	15.5
S_4	10	16	12	13.6

最大可能准则

单位:万元

自然状态 概率 a_{ij} 方案	N_1 (需求量大)	N_2 (需求量中)	N_3 (需求量小)
	0.1	**0.85**	**0.05**
S_1	**12**	**14**	**13**
S_2 ←	**15**	**17**	**14**
S_3	**13**	**15**	**18**
S_4	**10**	**16**	**12**

最大可能准则

$$k=\left\{ j \middle| p_k=\max_{1\le j\le 3}\left(p_j\right)\right\} \qquad Z=\max_{1\le i\le 4}\left(a_{ik}\right)$$

在一次或极少数几次的决策中，取概率最大的自然状态，按照确定性决策问题进行讨论

全情报价值准则

无论哪种自然状态，只要认为它会发生，决策者肯定就会选用该状态下收益值最大的方案，用该最大收益值与相应的概率相乘并求和而得到的期望收益，就是全情报收益值。

$$Z=\sum_{1\le j\le 3}\left[p_j\times\max_{1\le i\le 4}(a_{ij})\right]$$

全情报价值准则

单位:万元

自然状态 / 概率 / a_{ij} / 方案	N_1 (大)	N_2 (中)	N_3 (小)	$Z=\sum\limits_{1\le j\le 3}\left[p_j \times \max\limits_{1\le i\le 4}(a_{ij})\right]$
	0.2	0.5	0.3	
S_1	12	14	13	**0.2*15+0.5*17+0.3*18 =16.9**
S_2	15	17	14	
S_3	13	15	18	全情报价值：16.9−15.7=1.2
S_4	10	16	12	

课堂练习2-1.（不确定型决策问题）

某企业有一新产品投放市场，在生产方面面临三种方案可以选择：扩建、新建和外包。新产品的市场需求量有四种可能：需求量大、需求量适中、需求量小和失败，而新产品投放市场后需求量状况本企业还一无所知，只知道五年内总的收益情况如下表：

	市场需求量			
	大	中	小	失败
扩建	50	25	10	-15
新建	70	30	-10	-40
外包	30	15	-5	-10

试分别用乐观准则、悲观准则、等可能性准则、乐观系数（0.6）准则和后悔值准则进行决策。

课堂练习2-2.（风险型决策问题）

某企业有一新产品投放市场，在生产方面面临三种方案可以选择：扩建、新建和外包。新产品的市场需求量有四种可能：需求量大、需求量适中、需求量小和失败，而新产品投放市场后需求量状况本企业还一无所知，只知道五年内总的收益情况如下表：

	市场需求量			
	大	中	小	失败
扩建	50	25	10	-15
新建	70	30	-10	-40
外包	30	15	-5	-10

若4种市场需求量发生的可能性分别为0.1、0.3、0.2、0.4，请用期望值准则进行决策。

3. 确定型决策模型的求解方法

描述的是在一定资源限制下(自然状态)，给出了很多个可以选择的不同方案(行动方案)，从这些方案中确定一个最好方案的决策过程。

解决方法：

- 线性规划模型
- 线性规划延伸
- 动态规划模型
- 存储模型
- 排队模型
- ……

线性规划模型

例2.3　某工厂在计划期内要安排I，II两种产品的生产。生产单位产品所需的设备台时及A，B两种原材料的消耗以及资源的限制如下表所示。工厂每生产一个单位产品I可获利50元，每生产一个单位产品II可获利100元，问工厂应分别生产多少单位产品I和产品II才能使获利最多？

产品资源	I	II	资源限制
设备	1	1	300台时
原料A	2	1	400kg
原料B	0	1	250kg

线性规划模型的基本要素

（1）决策变量（约束变量）：

用符号来表示可控制的因素，如x_j。

（2）目标函数：Max z 或 Min f，用来计算和实现决策问题的目标。

（3）约束条件：s.t. (subject to) 满足于（一个等式或不等式组），一般是问题的资源限制 条件。

线性规划模型的特点

（1）因为管理问题的决策量
不能为负，所有x_j都是非负的决策变量。

（2）目标函数、约束条件关系符左端的关系式都是决策变量 x_j的一次性（线性）函数。

（3）约束条件关系符右端都是不含x_j的非负常量，称之为常数项。

一般线性规划问题的建模过程

（1）分析问题

（2）确定决策变量

（3）确定线性目标函数

（4）确定约束条件（决策分析中的自然状态）

课堂练习3(建立线性规划模型)

某生产基地每天需从A、B两仓库中提取原材料用于生产，需要提取的原材料有：原材料甲不少于240件，原材料乙不少于80公斤，原材料丙不少于120吨。已知每辆车从A仓库能运回甲4件、乙2公斤、丙6吨，运费为每车200元；从B仓库辆车能运回甲7件、乙2公斤、丙2吨，运费为每车160元。为满足生产需要，基地每天应发往A、B两仓库多少辆车，使总的运费为最低。

线性规划数学模型的一般形式

$$\max(\min)\ z=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n$$

s.t. $a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n \leq (=,\ \geq)\ b_1$

$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n \leq (=,\ \geq)\ b_2$

....

$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n \leq (=,\ \geq)\ b_m$

x_1，x_2，…，x_n的简单约束

线性规划模型中的关键参数：

c_j是目标函数的变量系数，也称作价值系数

a_{ij}是约束条件的变量系数，也称作资源配置系数

b_i是常数项，也称作资源限制量

线性规划模型的求解方法

两个变量（二维）线性规划问题的图解法

多个变量（高维）线性规划问题的单纯形法

计算机软件求解

线性规划模型图解法

特征： 只包含两个决策变量的线性规划问题

优点：简单、直观地显现线性规划问题的基本概念

方法：在以x_1，x_2为坐标轴的直角坐标系里，图上任意一点的坐标代表了决策变量x_1，x_2的一组值，也就代表了一个具体的决策方案。

线性规划模型图解法

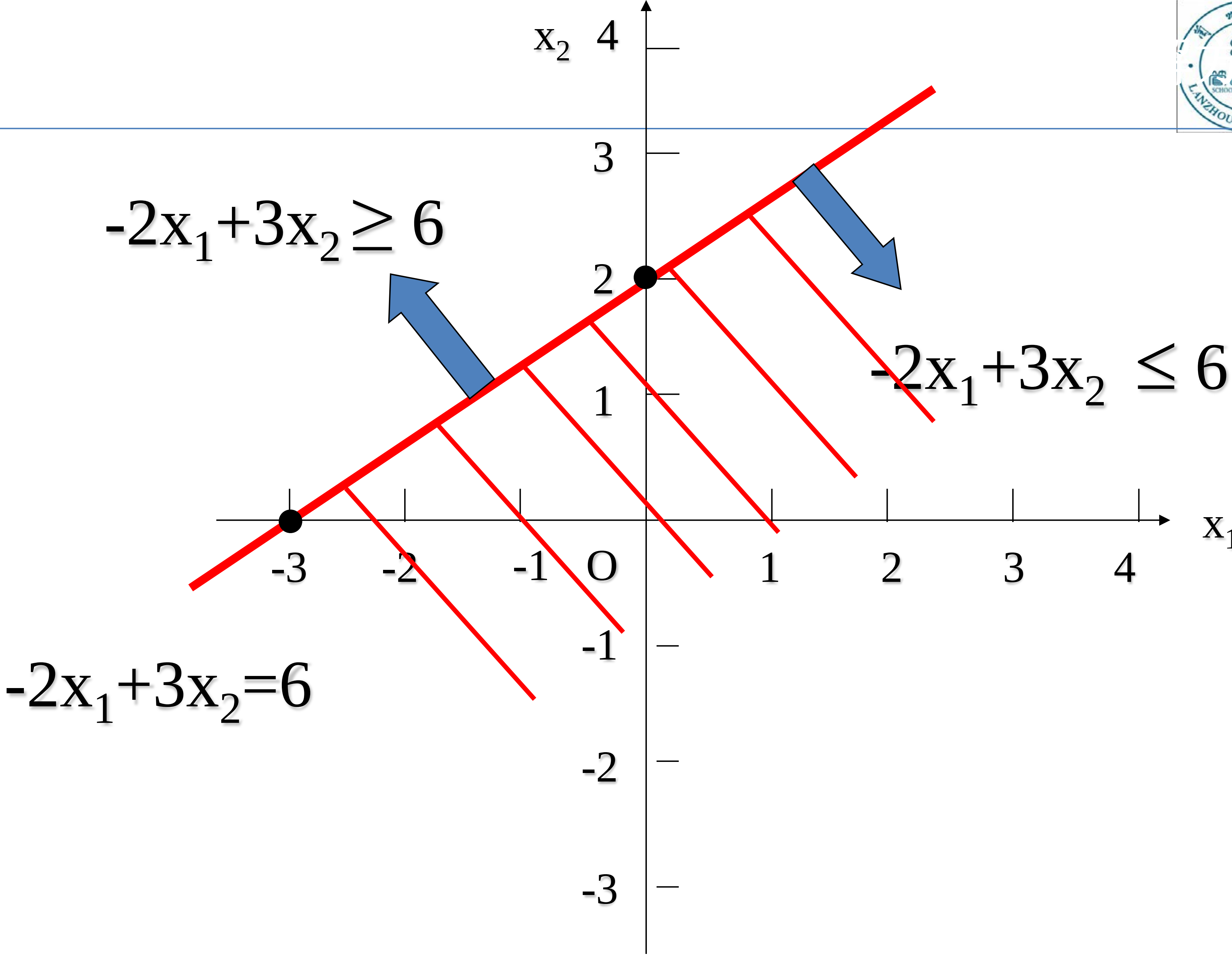
例2.4 $\max\ z = 2x_1 + 3x_2$

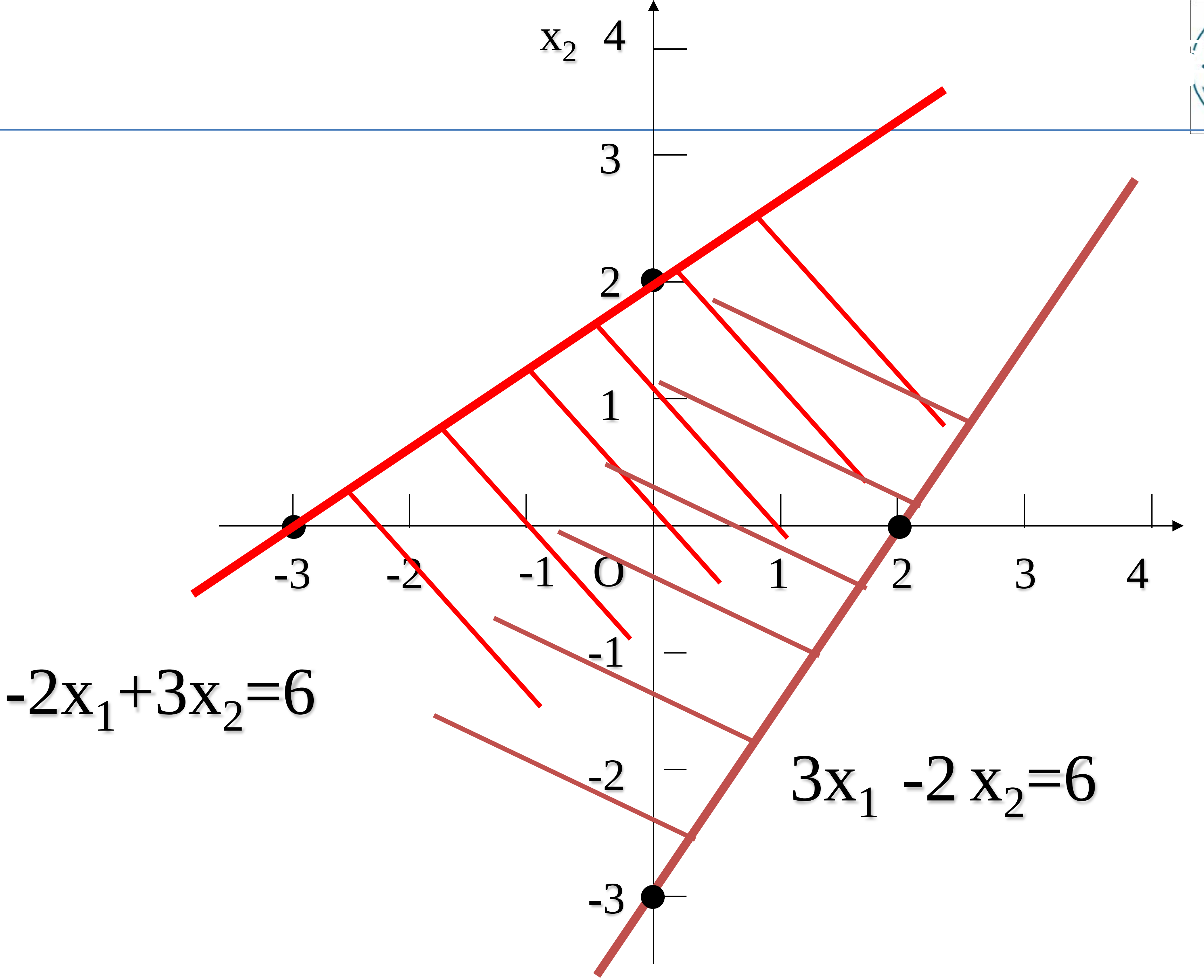
$$\text{s.t.}\ \ -2x_1 + 3x_2 \le 6 \qquad （1）$$

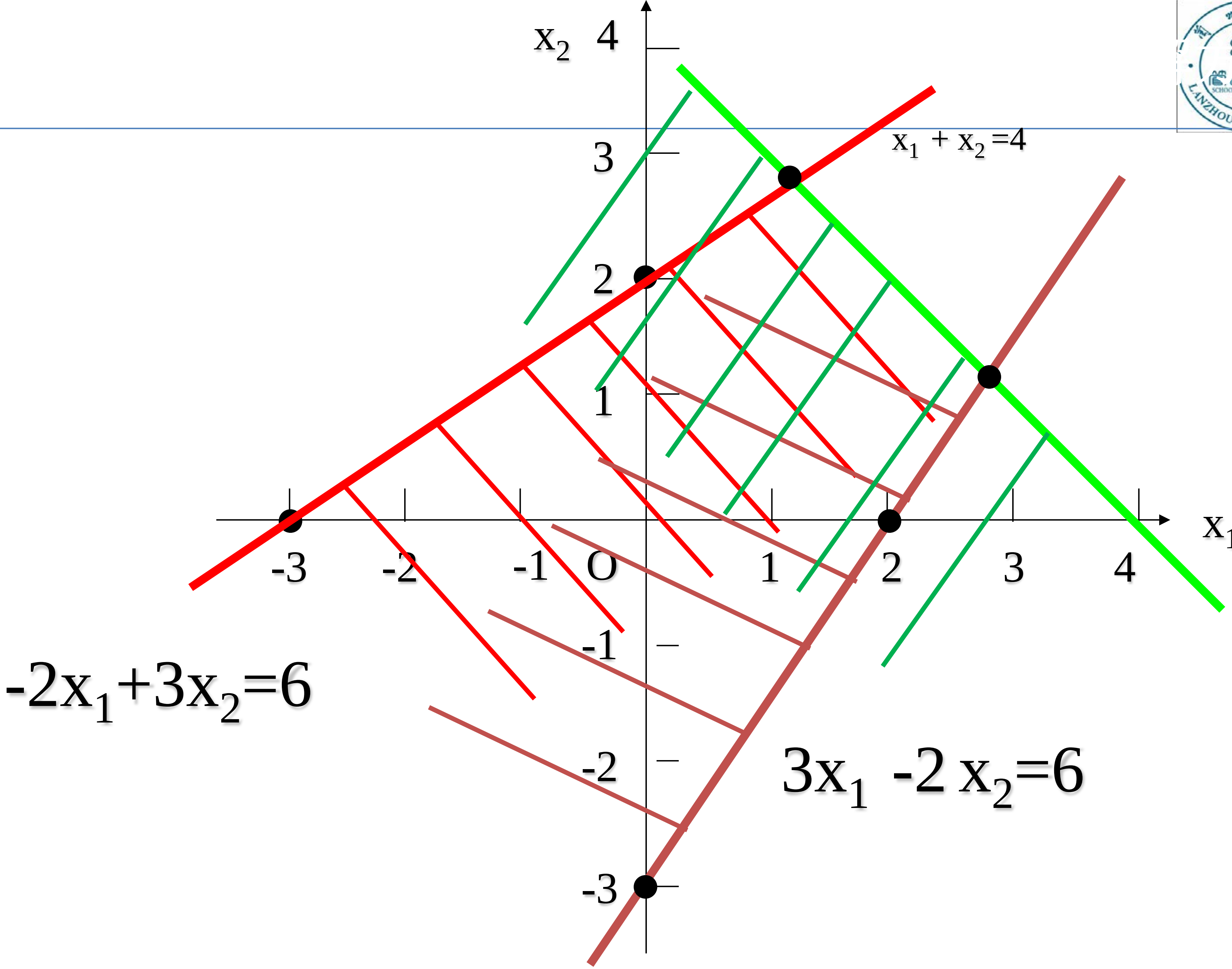
$$3x_1 - 2x_2 \le 6 \qquad （2）$$

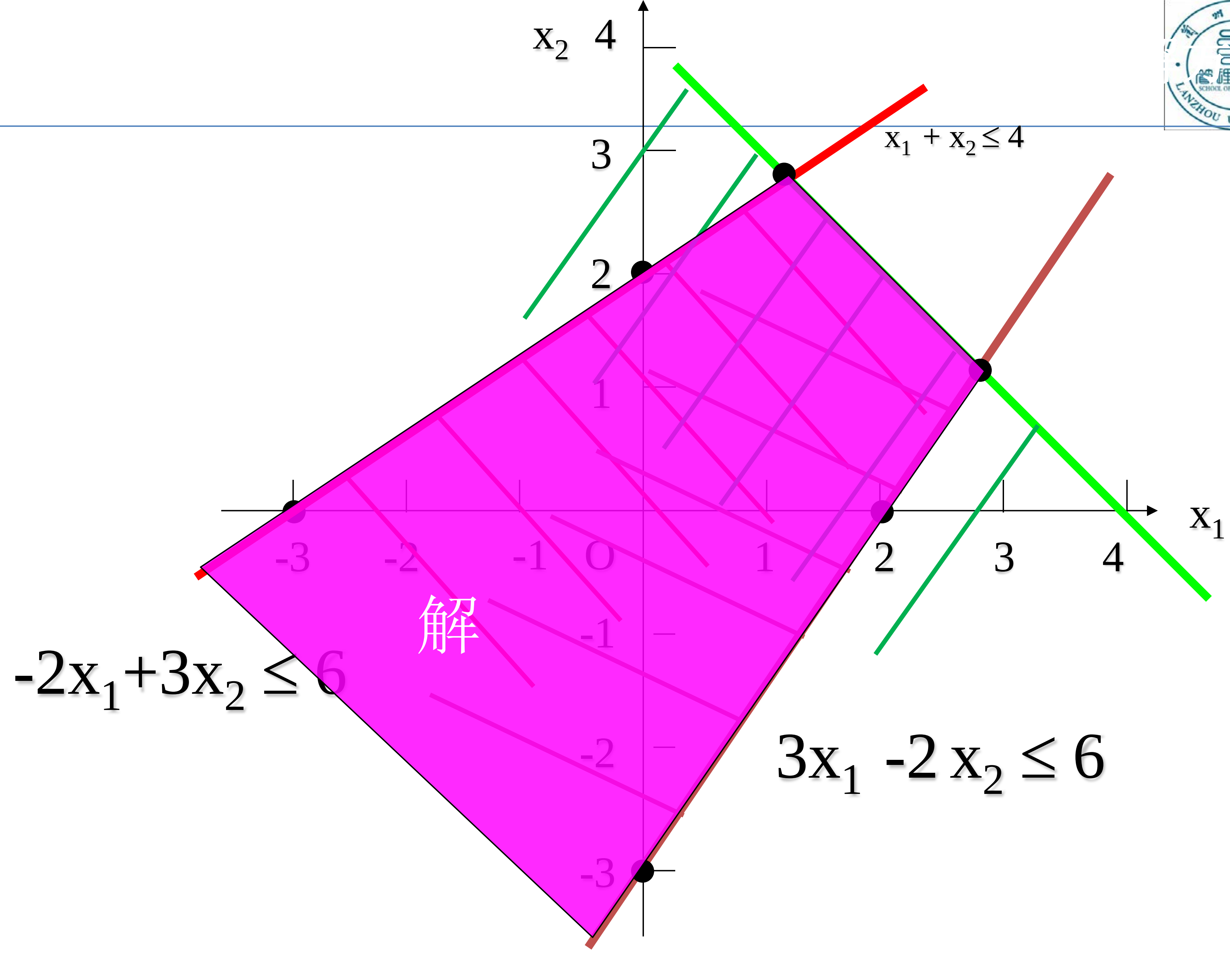
$$x_1 + x_2 \le 4 \qquad （3）$$

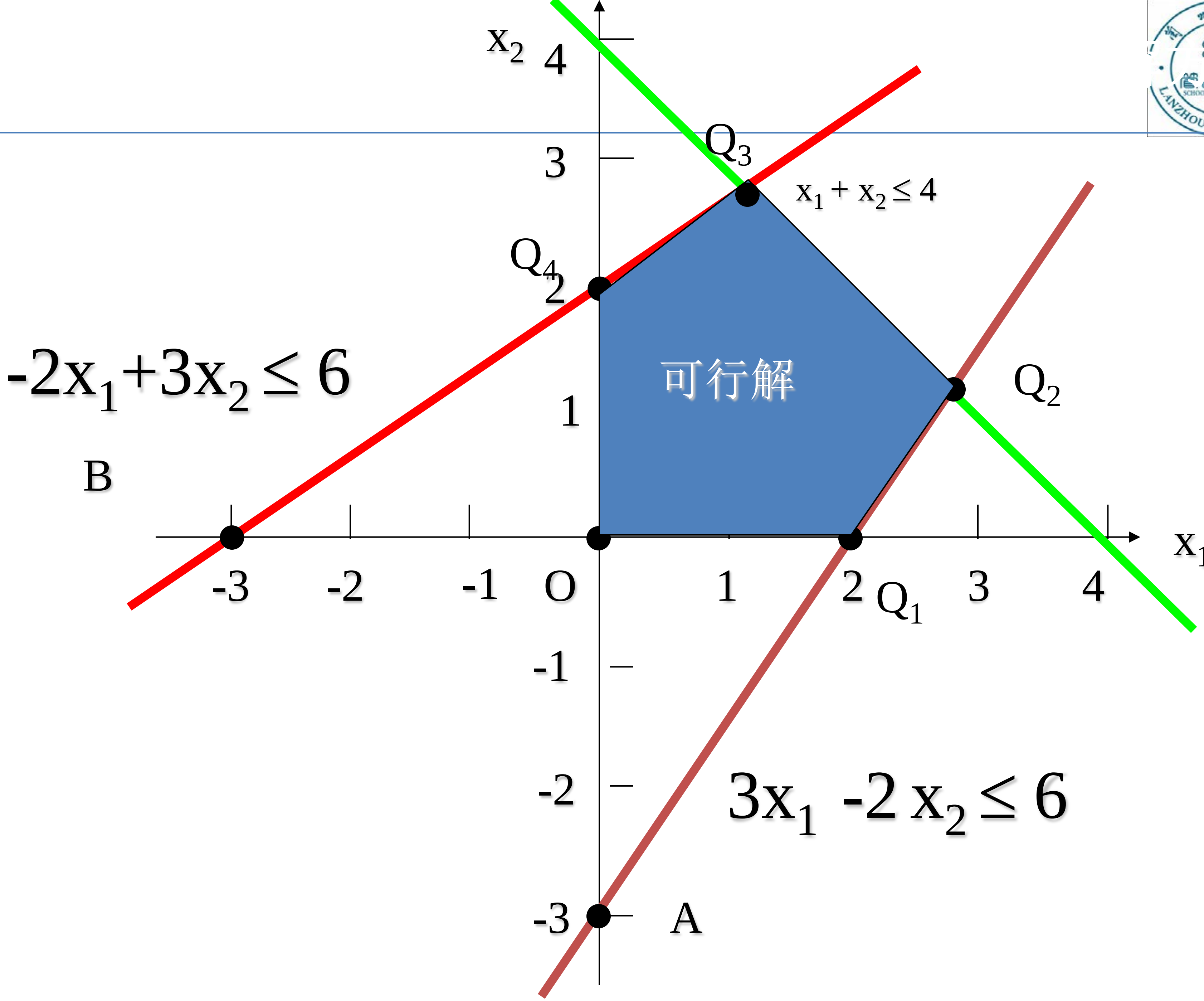
$$x_1,\ \ x_2 \ge 0$$


x_2
4
3
2
1
-1
-2
-3
x_1
-3
-2
-1
O
1
2
3
4
$-2x_1+3x_2 \geq 6$
$-2x_1+3x_2 \leq 6$
$-2x_1+3x_2=6$

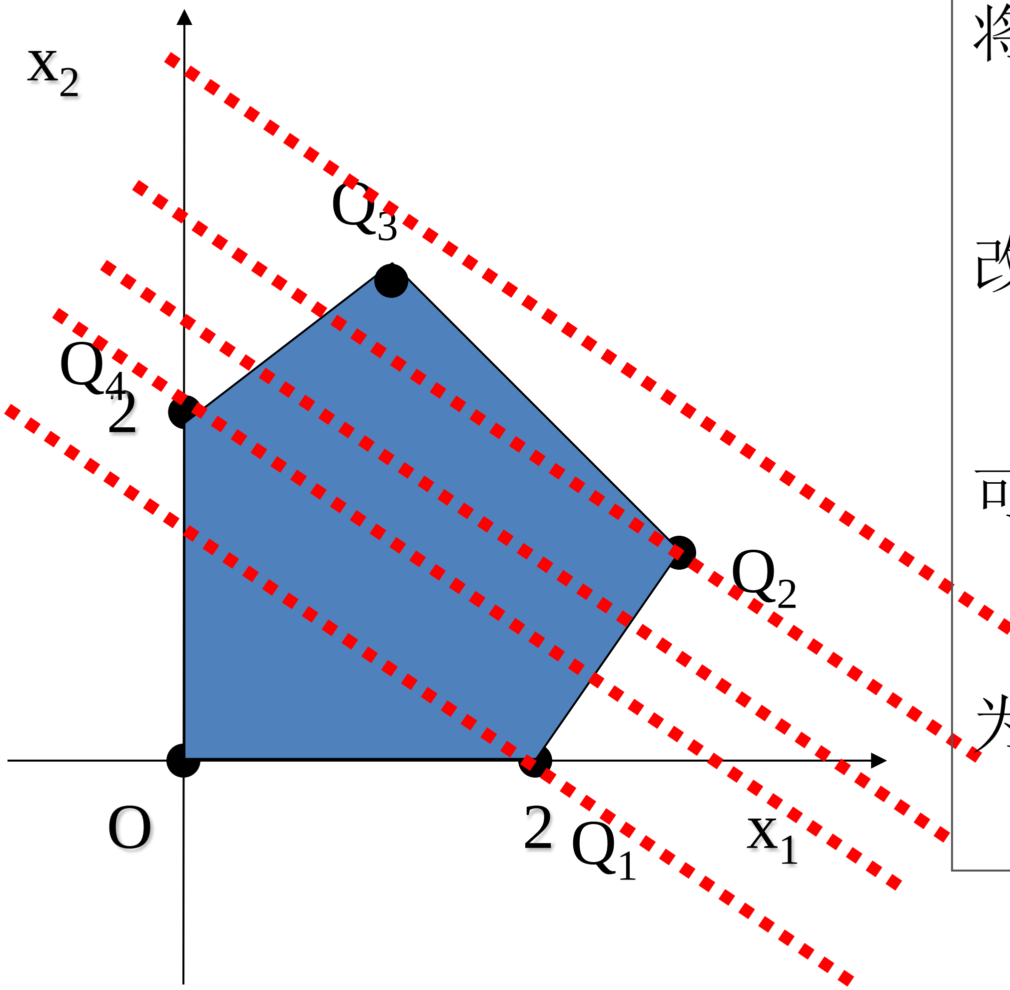

x_2
4
3
2
1
-1
-2
-3
x_1
-3
-2
-1
O
1
2
3
4
$-2x_1+3x_2=6$
$3x_1 -2 x_2=6$


x_2
4
3
2
1
$x_1 + x_2 = 4$
-3
-2
-1
O
1
2
3
4
x_1
-1
-2
-3
$-2x_1+3x_2=6$
$3x_1 -2 x_2=6$


x_2
4
3
2
1
$x_1 + x_2 \le 4$
x_1
-3
-2
-1
O
1
2
3
4
-1
-2
-3
解
$-2x_1+3x_2 \le 6$
$3x_1 -2 x_2 \le 6$



x_2
4
3
2
1
-1
-2
-3
Q_3
$x_1 + x_2 \leq 4$
Q_4
$-2x_1+3x_2 \leq 6$
可行解
Q_2
B
-3
-2
-1
O
1
2
Q_1
3
4
x_1
$3x_1 \ -2\,x_2 \leq 6$
A



将目标函数

$$\max\ z = 2x_1 + 3x_2$$

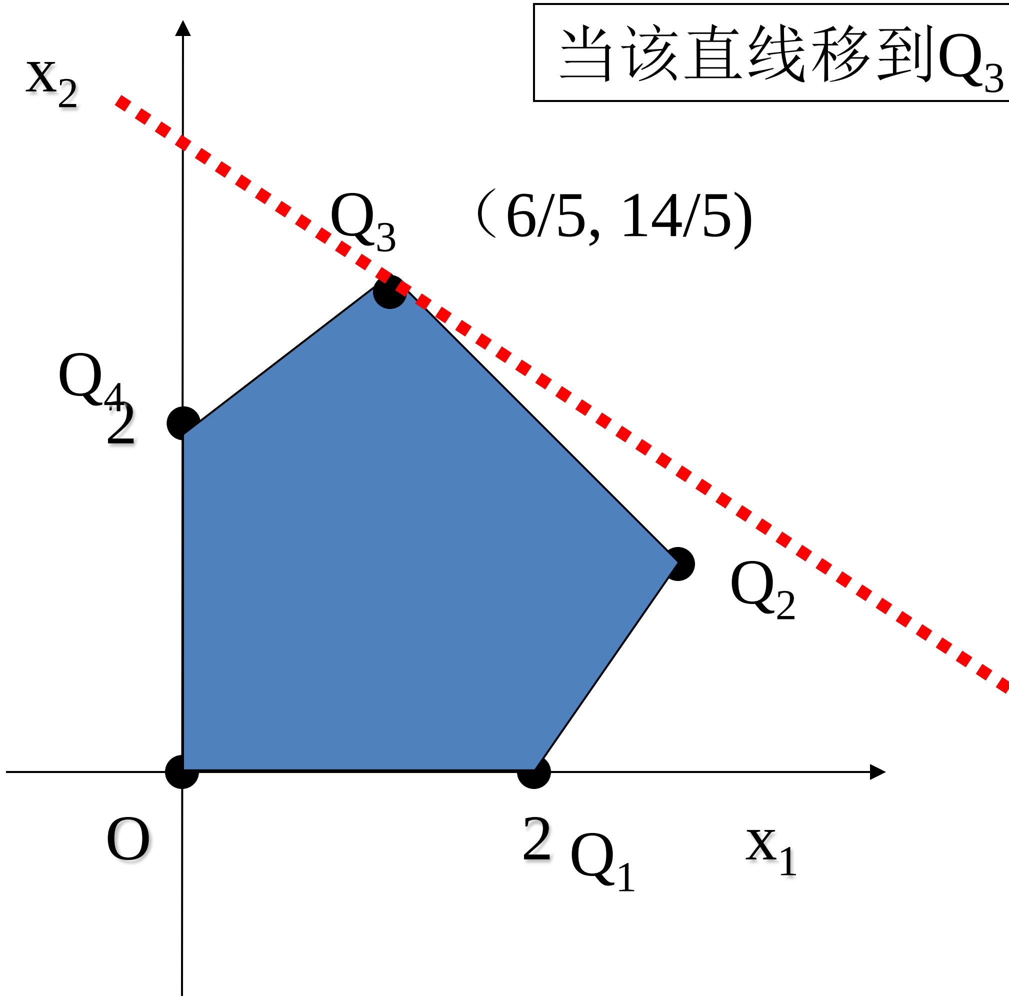
改写为

$$x_2 = z/3 - (2/3)x_1$$

可以看出

目标函数构成以 z 为参数的一组平行线。

当该直线移到Q_3点时，z值达到最大



最优解：

$x_1=6/5$,

$x_2=14/5$,

Max $z=54/5$.

课堂讨论（线性规划模型图解法）

例2.3

$$\max z = 50x_1 + 100x_2$$

$$\text{s.t.}\quad \begin{cases} x_1 + x_2 \le 300 \\ 2x_1 + x_2 \le 400 \\ x_2 \le 250 \\ x_1,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

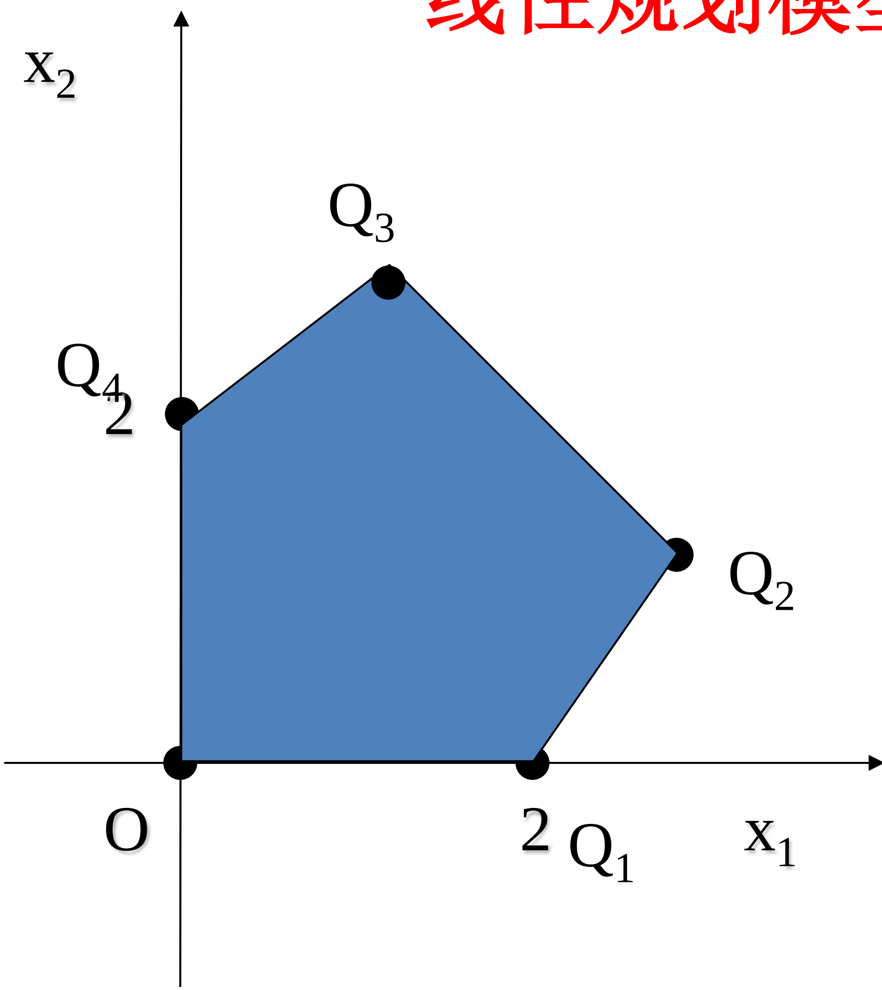
□ 基本概念

- 满足所有约束条件的决策变量的值，称为线性规划的可行解。
- 使目标函数达到最优的可行解X，称为线性规划的最优解。
- 把最优解代入目标函数，则称此时的目标函数值为最优值。

□ 重要结论

- 如果存在最优解的话，最优解必定能在可行域的某一个顶点上取得。

线性规划模型图解法



顶点	$Z = 2x_1+3x_2$
0（0，0）	0
Q_1（2，0）	4
Q_2（14/5, 6/5）	46/5
Q_3（ 6/5, 14/5 ）	54/5
Q_4（0，2）	6

线性规划模型图解法

- 二维线性规划图解法的基本步骤

  第一步：确定可行域

  第二步：确定可行域的顶点

  第三步：计算在所有顶点处的目标函数值

  第四步：比较目标函数值的大小，确定最优解

课堂讨论

例2.5　讨论如下线性规划模型的解

$$\max z = 100x_1 + 100x_2$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.}\quad x_1 + x_2 &\le 300 \\ 2x_1 + x_2 &\le 400 \\ x_2 &\le 250 \\ x_1,\ x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

课堂讨论

例2.6 讨论如下线性规划模型的解

$$\max \ z = x_1 + x_2$$

$$\text{s.t.} \quad -2x_1 + x_2 \le 40$$

$$x_1 - x_2 \le 20$$

$$x_1,\ x_2 \ge 0$$

课堂讨论

例2.7 讨论如下线性规划模型的解

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ x_1 \le 4 \\ x_2 \le 3 \\ -2x_1 + x_2 \ge 4 \\ x_1,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

线性规划模型的解的分类

最优方案

- 唯一最优解
- 多个最优解
- 无界解
- 无解

线性规划模型计算机求解

常用计算机软件：

- Matlab
- Lindo
- Lingo
- Management Scientist (MS)
- SOLVER IN EXCEL

线性规划模型计算机求解

例2.3 $\max z = 50x_1 + 100x_2$

$$
\begin{aligned}
\text{s.t. } x_1 + x_2 &\le 300 \\
2x_1 + x_2 &\le 400 \\
x_2 &\le 250 \\
x_1,\ x_2 &\ge 0
\end{aligned}
$$

线性规划模型计算机求解结果

运筹学模型求解系统------线性规划问题

决策变量个数：2　　约束条件个数：3　　◉ 最大化 ○ 最小化　　求 解　　返 回

目标函数系数

	x1	x2			
	50	100	约束条件实际值	约束关系	约束条件常数项
约束条件系数					
1	1	1	300	<	300
2	2	1	350	<	400
3		1	250	<	250

最优解：50　250　　　最优值：27500

最优值(最优决策效果):计划期内可获得最多利润27500元

最优解(最优方案):产品I生产50件，产品 II 生产250件

最优方案

变量	最优解	目标函数变量系数相差值	下限值	当前值	上限值
X1	50	0	0	50	100
X2	250	0	50	100	1E+30

约束条件

约束	实际值	松弛/剩余量	对偶价格	常数项下限值	当前值	上限值
1	300	0	50	250	300	325
2	350	50	0	350	400	1E+30
3	250	0	50	200	250	300

课堂讨论

在例2.3所示决策问题中，已用数学模型获得了最优生产方案，但还有两个重要问题需要分析：

1、在已得的最优方案下，资源的利用情况如何，从中可以得到什么有用的信息？

2、由于市场上产品的价格随时在发生着变化，导致两个产品的单位利润也随时发生变化，这种变化对原决策结果（生产方案）有什么影响？

课堂讨论

- 应用短板理论(木桶理论)分析哪些约束条件起到了约束作用？

约束条件: $x_1 + x_2 \le 300$

$2x_1 + x_2 \le 400$

$x_2 \le 250$

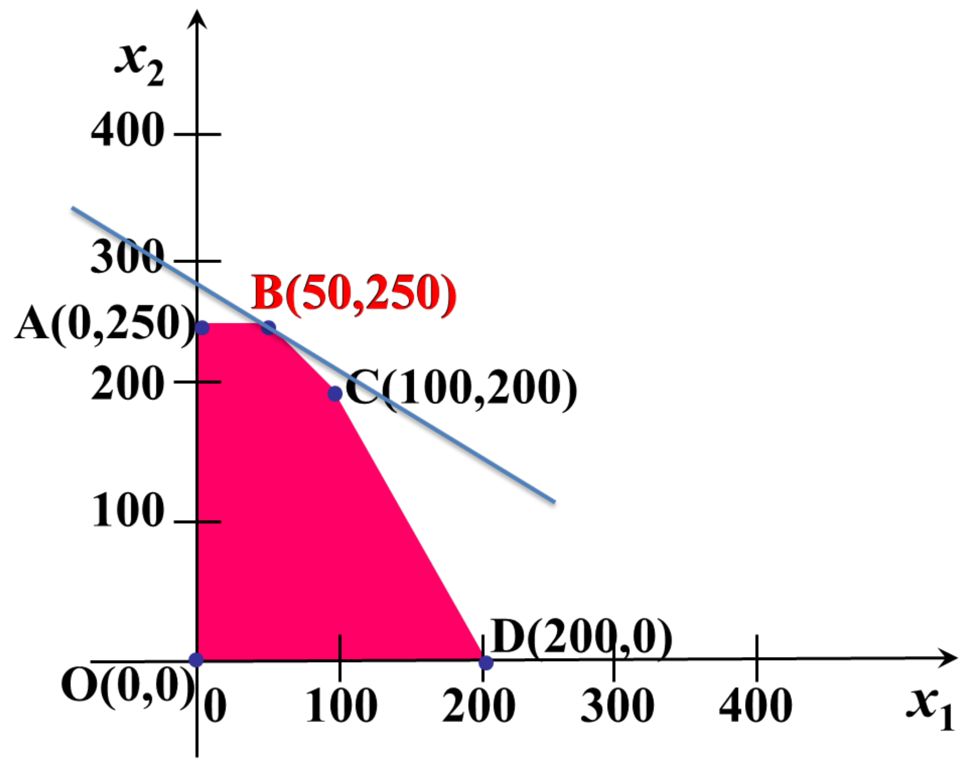
最优解: $x_1 = 50$

$x_2 = 250$

木桶理论----瓶颈

课堂讨论

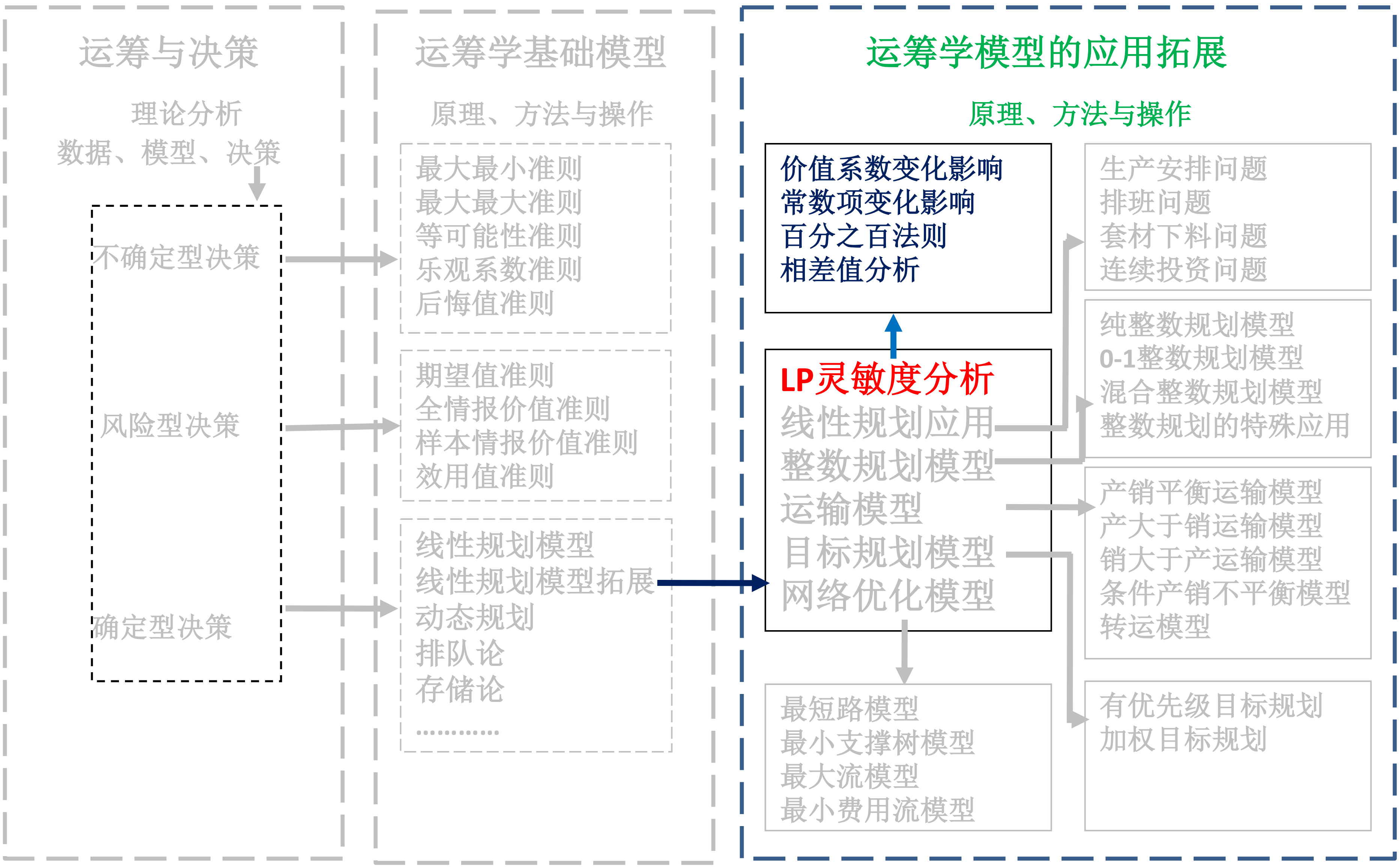
- 若产品I的利润由原来的50元/件增加到55元/件，原最优方案将怎么变化？增加到105元/件、减少到40元/件，结果又如何？



知识点总结

1. 不确定型决策模型的五种求解方法（乐观准则、悲观准则、等可能性准则、乐观系数准则和后悔值准则）
2. 风险型决策模型的期望值求解方法
3. 二维线性规划模型的图解法

第三讲 LP灵敏度分析


运筹与决策
理论分析
数据、模型、决策
不确定型决策
风险型决策
确定型决策
运筹学基础模型
原理、方法与操作
最大最小准则
最大最大准则
等可能性准则
乐观系数准则
后悔值准则
期望值准则
全情报价值准则
样本情报价值准则
效用值准则
线性规划模型
线性规划模型拓展
动态规划
排队论
存储论
…………
运筹学模型的应用拓展
原理、方法与操作
价值系数变化影响
常数项变化影响
百分之百法则
相差值分析
LP灵敏度分析
线性规划应用
整数规划模型
运输模型
目标规划模型
网络优化模型
生产安排问题
排班问题
套材下料问题
连续投资问题
纯整数规划模型
0-1整数规划模型
混合整数规划模型
整数规划的特殊应用
产销平衡运输模型
产大于销运输模型
销大于产运输模型
条件产销不平衡模型
转运模型
有优先级目标规划
加权目标规划
最短路模型
最小支撑树模型
最大流模型
最小费用流模型

主要内容

松弛量和剩余量

价值系数变化影响

常数项变化影响

百分之百法则

相差值分析

案例3.1　线性规划模型(MAX)

某工厂在计划期内要安排I，Ⅱ两种产品的生产。生产单位产品所需的设备台时及A，B两种原材料的消耗以及资源的限制如下表所示。工厂每生产一个单位产品I可获利50元，每生产一个单位产品Ⅱ可获利100元，问工厂应分别生产多少单位产品I和产品Ⅱ才能使获利最多？

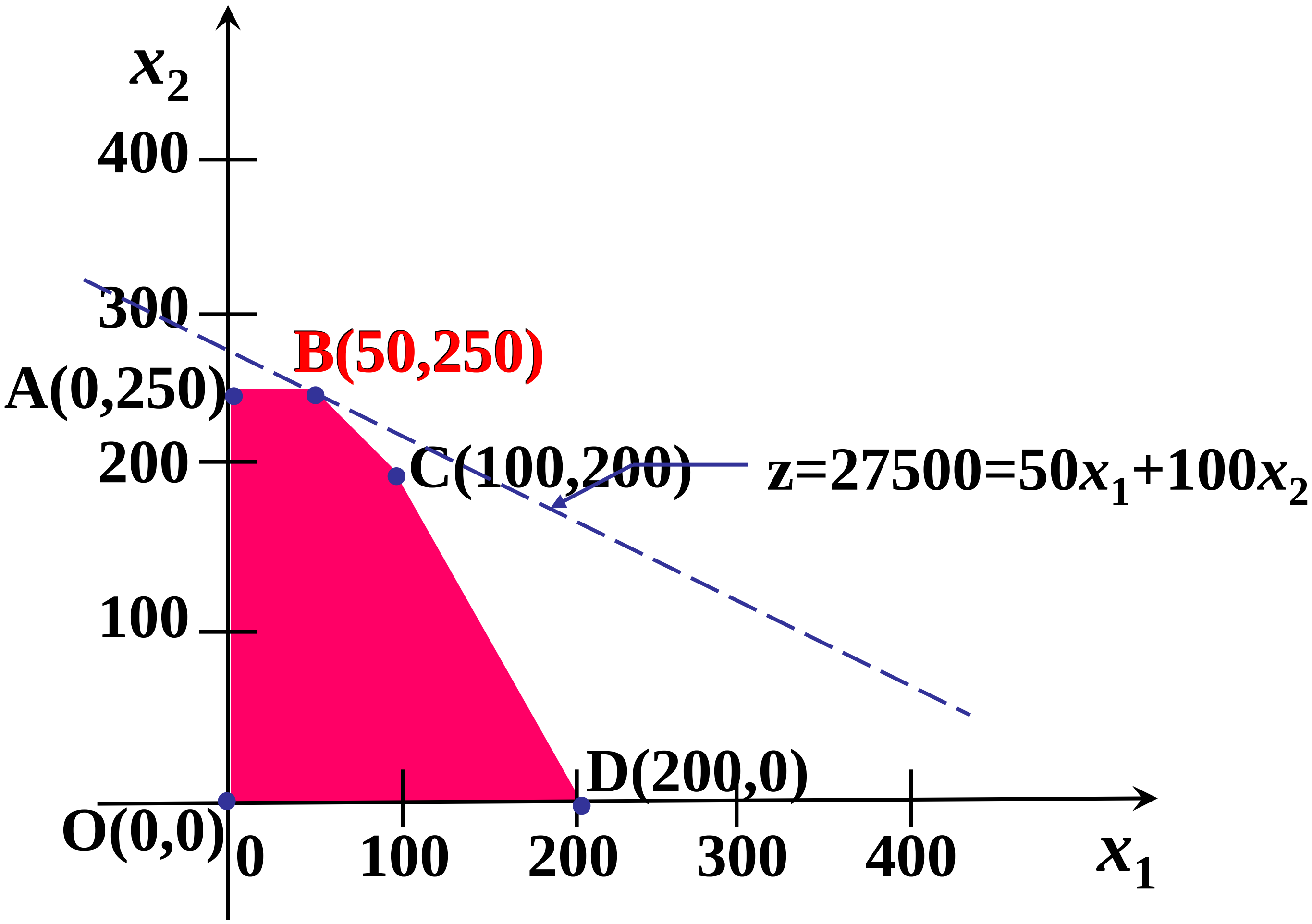
产品 资源	I	II	资源限制
设备	1	1	300台时
原料A	2	1	400kg
原料B	0	1	250kg

线性规划模型(LP1)

$$\max z = 50x_1 + 100x_2$$

$$\text{s.t.}\quad \begin{aligned} x_1 + x_2 &\le 300 \\ 2x_1 + x_2 &\le 400 \\ x_2 &\le 250 \\ x_1,\ x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

线性规划模型(LP1)


x_2
400
300
A(0,250)
B(50,250)
200
C(100,200)
$z=27500=50x_1+100x_2$
100
D(200,0)
O(0,0)
0
100
200
300
400
x_1

主要内容

松弛量和剩余量

价值系数变化影响

常数项变化影响

百分之百法则

相差值分析

实际值

在线性规划模型中，约束条件的实际值与常数项（资源限制量）的关系确定了资源利用的效果。

把最优解代入约束条件的左边所得到的具体值就是实际值，表示资源的实际使用量。

LP1

$$\max z = 50x_1 + 100x_2$$

$$\text{s.t.}\quad \begin{cases} x_1 + x_2 \le 300 \\ 2x_1 + x_2 \le 400 \\ x_2 \le 250 \\ x_1,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

最优解

$x_1=50$

$x_2=250$

实际值

设备台时：　$1\times50+1\times250=300$ (kg)

原料A：　$2\times50+1\times250=350$ (kg)

原料B：　$0\times50+1\times250=250$ (kg)

实际值

运筹学模型求解系统------线性规划问题

决策变量个数：2　约束条件个数：3　最大化　最小化　求 解　返 回

目标函数系数

x1	x2
50	100

约束条件系数

	x1	x2	约束条件实际值	约束关系	约束条件常数项
1	1	1	300	<	300
2	2	1	350	<	400
3		1	250	<	250

最优解		最优值
50	250	27500

最优方案

变量	最优解	目标函数变量系数相差值	下限值	当前值	上限值
X1	50	0	0	50	100
X2	250	0	50	100	1E+30

约束条件

约束	实际值	松弛/剩余量	对偶价格	常数项下限值	当前值	上限值
1	300	0	50	250	300	325
2	350	50	0	350	400	1E+30
3	250	0	50	200	250	300

低于资源最高限制的松弛量

在线性规划模型中，“≤”约束条件中没使用的资源或能力被称之为该约束条件的松弛量。

松弛量 =常数项 - 实际值

松弛量

运筹学模型求解系统-------线性规划问题

决策变量个数: 2　约束条件个数: 3　最大化　最小化　求 解　返 回

目标函数系数

	x1	x2	约束条件实际值	约束关系	约束条件常数项
	50	100			
约束条件系数					
1	1	1	300	<	300
2	2	1	350	<	400
3		1	250	<	250

最优解 x1	最优解 x2	最优值
50	250	27500

松弛量=常数项-实际值

0 = 300 - 300

50 = 400 - 350

0 = 250 - 250

最优方案

变量	最优解	目标函数变量系数相差值	下限值	当前值	上限值
X1	50	0	0	50	100
X2	250	0	50	100	1E+30

约束条件

约束	实际值	松弛/剩余量	对偶价格	常数项下限值	当前值	上限值
1	300	0	50	250	300	325
2	350	50	0	350	400	1E+30
3	250	0	50	200	250	300

多于资源最低限额的剩余量

线性规划模型中，“≥”约束条件中超过资源或能力最低限量的部分称之为剩余量。

剩余量 =实际值 - 常数项

多于资源最低限额的剩余量

LP2

$$\min z=200x_1+160x_2$$

$$\text{s.t.}\quad 4x_1+7x_2\ge 240$$

$$2x_1+2x_2\ge 80$$

$$6x_1+2x_2\ge 120$$

$$x_1,\ x_2\ge 0$$

决策结果

$$x_1=10$$

$$x_2=30$$

$$Max\ z=6800$$

剩余量

运筹学模型求解系统------线性规划问题

决策变量个数: 2　约束条件个数: 3　最大化　最小化　求 解　返 回

目标函数系数

	x1	x2	约束条件实际值	约束关系	约束条件常数项
	200	160			
约束条件系数					
1	4	7	250	>	240
2	2	2	80	>	80
3	6	2	120	>	120
最优解	10	30		最优值	6800

剩余量=实际值-常数项

10	=	250	-	240
0	=	80	-	80
0	=	120	-	120

最优方案

变量	最优解	目标函数变量系数相差值	下限值	当前值	上限值
X1	10	0	160	200	480
X2	30	0	66.6667	160	200

约束条件

约束	实际值	松弛/剩余量	对偶价格	常数项下限值	当前值	上限值
1	250	10	0	-1E+30	240	250
2	80	0	-70	77.6471	80	120
3	120	0	-10	80	120	133.333

松弛量和剩余量的决策含义

1、松弛量和剩余量表征了资源的利用情况

2、可以通过松弛量和剩余量掌握资源瓶颈

主要内容

松弛量和剩余量

价值系数变化影响

常数项变化影响

百分之百法则

相差值分析

目标函数中变量系数c_j的取值范围分析

c_j代表广义的产品价值，称之为价值系数。

c_j的灵敏度分析是研究经营环境的变化对最优解(最优方案)的影响。

c_j的改变有一个由量变到质变的过程，其灵敏度分析是研究最优解不发生变化的c_j的范围。

目标函数中变量系数c_j的取值范围分析

运筹学模型求解系统-------线性规划问题

决策变量个数: 2　约束条件个数: 3　最大化　最小化　求 解　返 回

目标函数系数

	x1	x2	约束条件实际值	约束关系	约束条件常数项
	50	100			
约束条件系数					
1	1	1	300	<	300
2	2	1	350	<	400
3		1	250	<	250
最优解	50	250		最优值	27500

	最低限	当前值	最高限
C_1	0	50	100
C_2	50	100	不限

最优方案

变量	最优解	目标函数变量系数相差值	下限值	当前值	上限值
X1	50	0	0	50	100
X2	250	0	50	100	1E+30

约束条件

约束	实际值	松弛/剩余量	对偶价格	常数项下限值	当前值	上限值
1	300	0	50	250	300	325
2	350	50	0	350	400	1E+30
3	250	0	50	200	250	300

目标函数中变量系数c_j的取值范围分析

将产品I的利润由原来的50元/件分别增加到55元/件、105元/件、或者减少到40元/件，根据计算结果，可得以下结论：

即当产品 II 的利润100 （元/单位）不变，而产品I的利润在0~100 （元/单位）之间，原最优方案不变。

或当产品I的利润为50（元/单位）不变，而产品 II 的利润只要大于等于50 （元/单位）时，原最优方案不变。

目标函数中变量系数c_j的取值范围分析

当目标函数的系数 c_j单一变化时，只要不超过其上、下限，最优解不变。

↓

最优范围

课堂讨论(灵敏度分析)

模型0:　$\max z = 50x_1 + 100x_2$

模型1:　$\max z = 20x_1 + 100x_2$

模型2:　$\max z = 80x_1 + 100x_2$

模型3:　$\max z = 120x_1 + 100x_2$

模型4:　$\max z = 50x_1 + 30x_2$

模型5:　$\max z = 50x_1 + 70x_2$

模型6:　$\max z = 50x_1 + 150x_2$

模型7:　$\max z = 80x_1 + 70x_2$

模型8:　$\max z = 120x_1 + 150x_2$

最优解会变吗

主要内容

松弛量和剩余量

价值系数变化影响

常数项变化影响

百分之百法则

相差值分析

约束条件中常数项b_i的取值范围分析

常数项b_i代表的是提供给企业经营的资源限制量。

b_i的灵敏度分析是研究资源的变化对最优解的影响。

一般情况下b_i的改变 极有可能 导致最优解和最优值的改变。

约束条件中常数项b_i的取值范围分析

假设设备台时数增加到301个台时，则模型中的设备台时数的约束条件变为：

$$
\begin{aligned}
&\max z = 50x_1 + 100x_2 \\
&\text{s.t.}\quad x_1 + x_2 \le 300 \longrightarrow 301 \\
&\qquad 2x_1 + x_2 \le 400 \\
&\qquad\qquad x_2 \le 250 \\
&\qquad x_1,\ x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

最优解是（50，250），最优值是27500。

约束条件中常数项b_i的取值范围分析

最优解为$x_1= 51, x_2=250$，获得的最大利润为27550（元）。

则每增加一个设备台时会使企业多获利（27550-27500）=50

对偶价格

约束条件中常数项b_i的取值范围分析

对偶价格

对于此例来说，D_1=50，说明每增加1个设备台时，就可以多获得利润50元。

同样地，每减少1个设备台时，就会少获得利润50元？

约束条件中常数项b_i的取值范围分析

假设设备台时数减少299个台时，则模型中的设备台时数的约束条件变为：

$$\max z = 50x_1 + 100x_2$$

$$\text{s.t.} \quad x_1 + x_2 \le 299$$

$$2x_1 + x_2 \le 400$$

$$x_2 \le 250$$

$$x_1, \quad x_2 \ge 0$$

$x_1 = 49$, $x_2 = 250$，获得的最大利润为27450（元）。

则每减少一个设备台时会使企业获利减少50元（27450-27500=-50）

约束条件中常数项b_i的取值范围分析

同理：

- 若原料A增加（减少）1 kg，约束条件变为： $2x_1+x_2 \le 401(399)$

  最优解不变，对偶价格是0

- 若原料B增加（减少） 1 kg，约束条件变为： $x_2 \le 251(249)$

  最优解为（49, 251），获得的最大利润为27550。

  最优解为（51, 249），获得的最大利润为27450。

  则原料B增加（减少）一个单位，企业利润增加（减少）50。

  对偶价格

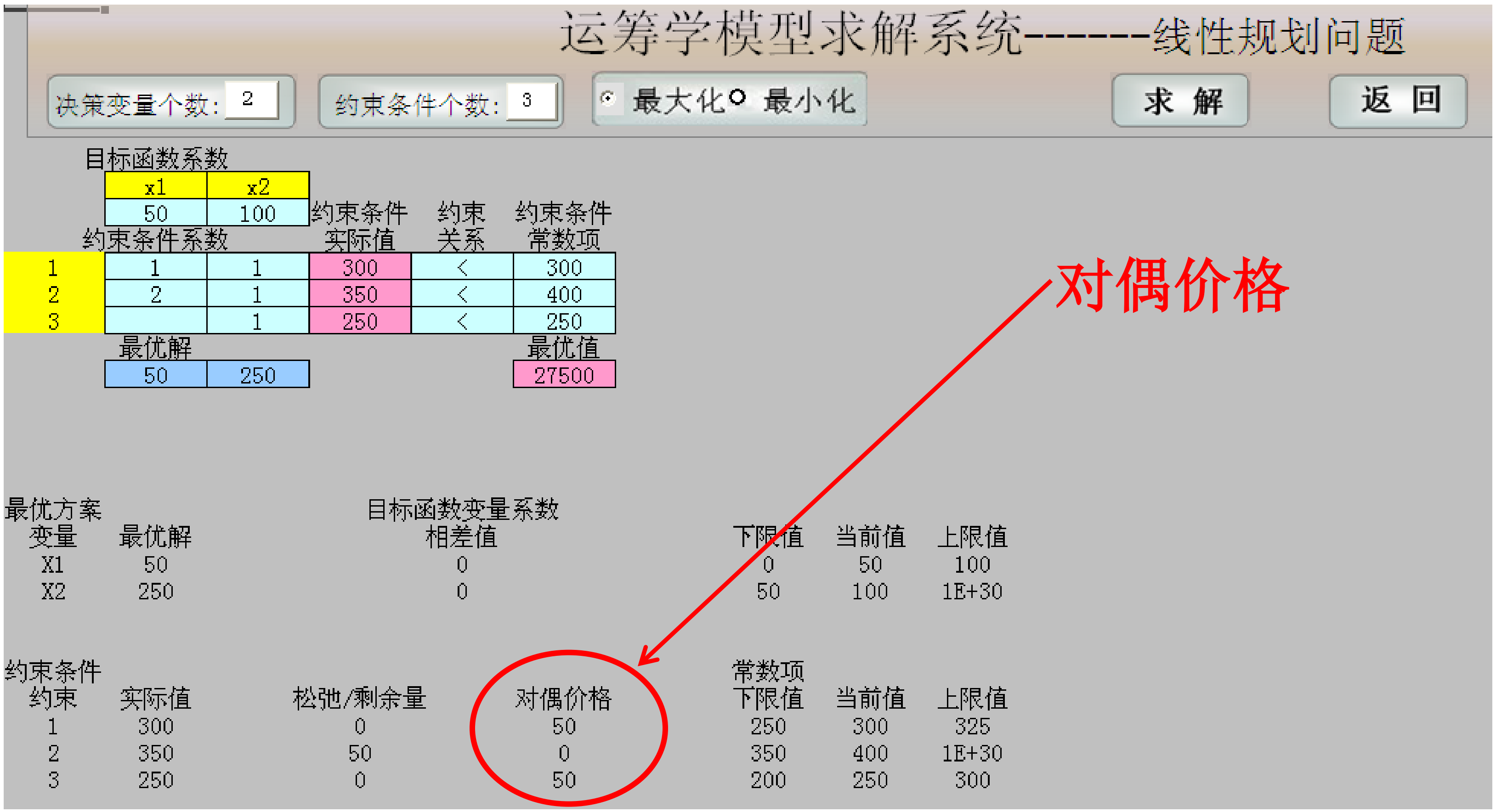
约束条件中常数项b_i的取值范围分析

对偶价格

在约束条件中的常数项增加一个单位而使最优目标函数值得到改进的数量称之为这个约束条件的对偶价格。

每个约束条件都有一个对偶价格，第i个约束条件的对偶价格用D_i来表示。

约束条件中常数项b_i的取值范围分析



约束条件中常数项b_i的取值范围分析

- 目标函数是最大化问题；
- 在一定范围内，若约束条件的对偶价格d_i大于0，则当b_i增加1个单位时，其最优目标函数值相应地增大d_i个单位；
- 同理可知，当b_i减少1个单位时，其最优目标函数值相应地减少d_i个单位。

约束条件中常数项b_i的取值范围分析

运筹学模型求解系统-------线性规划问题

决策变量个数: 2　约束条件个数: 3　最大化　最小化　求 解　返 回

目标函数系数

	x1	x2	约束条件实际值	约束关系	约束条件常数项
	50	100			
约束条件系数					
1	1	1	300	<	300
2	2	1	350	<	400
3		1	250	<	250

最优解: 50　250　最优值: 27500

	最下限	当前值	最高限
b_1	250	300	325
b_2	350	400	不限
b_3	200	250	300

最优方案

变量	最优解	目标函数变量系数相差值	下限值	当前值	上限值
X1	50	0	0	50	100
X2	250	0	50	100	1E+30

约束条件

约束	实际值	松弛/剩余量	对偶价格	常数项下限值	当前值	上限值
1	300	0	50	250	300	325
2	350	50	0	350	400	1E+30
3	250	0	50	200	250	300

课堂讨论(对偶价格的变化范围)

线性规划模型

$$\max z = 50x_1 + 100x_2$$

$$\text{s.t.}\quad x_1 + x_2 \le 300$$

$$2x_1 + x_2 \le 400$$

$$x_2 \le 250$$

$$x_1 \ge 0,\quad x_2 \ge 0$$

350

260

220

最优解

$x_1=50$

$x_2=250$

对偶价格

$D_1=50$

课堂讨论

- 若目标函数为最大化问题，而约束条件的对偶价格d_i小于0，此时会对目标函数最优值产生什么样的影响？
- 若目标函数为最小化问题，结论又如何？

约束条件中常数项b_i的取值范围分析

对偶价格值	求最大化问题		求最小化问题	
	b_i	z	b_i	z
$D_i>0$ (松/剩=0)	↑			
	↓			
$D_i=0$ (松/剩≠0)	↑			
	↓			
$D_i<0$ (松/剩=0)	↑			
	↓			

课堂讨论（最小化问题）

考虑如下线性规划问题

$$\min z = 2A+3B$$

$$
\begin{aligned}
\text{s.t.}\quad & A \geq 125 && (1)\\
& A + B \geq 350 && (2)\\
& 2A + B \leq 600 && (3)\\
& A,\ B \geq 0
\end{aligned}
$$

请讨论对偶价格的实际意义。

课堂讨论（最小化问题）

计算机输出结果

运筹学模型求解系统------线性规

决策变量个数: 2　　约束条件个数: 3　　最大化　最小化　　求 解

目标函数系数

x1	x2
2	3

约束条件系数

	x1	x2	约束条件实际值	约束关系	约束条件常数项
1	1		250	>	125
2	1	1	350	>	350
3	2	1	600	<	600

最优解

250	100

最优值

800

最优方案　　　　目标函数变量系数

变量	最优解	相差值	下限值	当前值	上限值
X1	250	0	-1E+30	2	3
X2	100	0	2	3	1E+30

约束条件　　　　常数项

约束	实际值	松弛/剩余量	对偶价格	下限值	当前值	上限值
1	250	125	0	-1E+30	125	250
2	350	0	-4	300	350	475
3	600	0	1	475	600	700

约束条件中常数项b_i的取值范围分析

对偶价格的变化特征：

对偶价格值	目标函数	
	b_i	z
$D_i>0$	↑	变好
$D_i=0$	↑	无变化
$D_i<0$	↑	变坏

约束条件中常数项b_i的取值范围分析

对偶价格的用途

1、资源的价值衡量

对偶价格高于该资源的市场价格，表明该资源在本组织有获利能力。就应该购入该资源；

对偶价格等于该资源的市场价格，表明该资源在本组织无获利能力；

对偶价格低于该资源的市场价格，表明该资源在本组织处于负利状态。在整体利益得到保障的前提下，就可以卖掉该资源。否则用该资源生产的产品越多，企业亏损得越多。

约束条件中常数项b_i的取值范围分析

2、将资源紧缺程度定量化

每种资源都有对偶价格不同大小的定量值，因此这个值也就定量地反映资源在企业内部的紧缺程度。

3、定量地确定了资源瓶颈

用数字来确定了企业经营活动中的瓶颈环节（处于木桶中的最短板，其对偶价格才不为0），并且定量地分析了瓶颈环节的紧张程度，以及改进这些瓶颈环节后可给企业带来的收益。

主要内容

松弛量和剩余量

价值系数变化影响

常数项变化影响

百分之百法则

相差值分析

多个价值系数同时变化的百分之百法则

对于所有变化的多个价值系数，当其所有实际增加量与允许增加量的百分比以及所有实际减少量与允许减少量的百分比之和不超过百分之百时，最优解不变。即：

$$\sum \frac{\text{增加后的参数值}-\text{当前值}}{\text{允许增加量}}+\sum \frac{\text{当前值}-\text{减少后的参数值}}{\text{允许减少量}} \leq 100\%$$

其中，允许增加量=上限值-当前值；允许减少量=当前值-下限值

多个价值系数同时变化的百分之百法则

在上例中，原来每件产品I和产品 II 的利润分别为50和100元，现在每件产品I和产品 II 的利润分别变为70和80元，试问对最优解有无影响？

<table>
<tr><td rowspan="2">增加/减少</td><td colspan="2">实际改变量</td><td colspan="3">允许改变量</td><td rowspan="2">百分比</td></tr>
<tr><td>当前值</td><td>改变后</td><td>下限</td><td>当前值</td><td>上限</td></tr>
<tr><td>增加</td><td>50</td><td>70</td><td></td><td>50</td><td>100</td><td>(70−50)/(100−50)</td></tr>
<tr><td>减少</td><td>100</td><td>80</td><td>50</td><td>100</td><td></td><td>(100−80)/(100−50)</td></tr>
<tr><td colspan="7">百分之百法则：80 % < 100%</td></tr>
</table>

结论：最优解不变，最优值为23500

多个价值系数同时变化的百分之百法则

在上例中，原来每件产品I和产品 II 的利润分别为50和100元，现在每件产品I和产品 II 的利润分别变为70和70元 ，对其进行灵敏度分析。

增加/减少	实际改变量		允许改变量			百分比
	当前值	改变后	下限	当前值	上限	
增加	50	70		50	100	(70−50)/(100−50)
减少	100	70	50	100		(100−70)/(100−50)
百分之百法则：100 % = 100%						

结论：最优解不变，最优值为21000

多个价值系数同时变化的百分之百法则

在上例中，原来每件产品I和产品 II 的利润分别为50和100元，现在每件产品I和产品 II 的利润分别变为70和69元 ，对其进行灵敏度分析。

增加/减少	实际改变量		允许改变量			百分比
	当前值	改变后	下限	当前值	上限	
增加	50	70		50	100	(70−50)/(100−50)
减少	100	69	50	100		(100−69)/(100−50)
百分之百法则：102 % > 100%						

结论：不能确定最优解是否改变。

多个常数项同时变化的百分之百法则

对于所有变化的多个常数项，当其所有实际增加量与允许增加量的百分比以及所有实际减少量与允许减少量的百分比之和不超过百分之百时，对偶价格不变。即：

$$\sum \frac{\text{增加后的参数值}-\text{当前值}}{\text{允许增加量}}+\sum \frac{\text{当前值}-\text{减少后的参数值}}{\text{允许减少量}} \leq 100\%$$

其中，允许增加量=上限值-当前值；允许减少量=当前值-下限值

多个常数项同时变化的百分之百法则

在上例中，设备台时数从300台时增加为315台时（上限325），而原料A从400kg减少到390 kg（下限350），原料B从250 kg减少到240kg（下限200）可得：

增加/减少	实际改变量		允许改变量			百分比
	当前值	改变后	下限	当前值	上限	
增加	300	315		300	325	15/(325-300)
减少	400	390	350	400		10/(400-350)
减少	250	240	200	250		10/(250-200)
百分之百法则：100 % = 100%						

结论：三个约束条件的对偶价格不变，最优值变为：27500+50*15-0*10-50*10=27750

多个常数项同时变化的百分之百法则

在上例中，设备台时数从300台时增加为316台时（上限325），而原料A从400kg减少到390 kg（下限350），原料B从250 kg减少到240kg（下限200）可得：

增加/减少	实际改变量		允许改变量			百分比
	当前值	改变后	下限	当前值	上限	
增加	300	316		300	325	16/(325-300)
减少	400	390	350	400		10/(400-350)
减少	250	240	200	250		10/(250-200)
百分之百法则：104 % ＞ 100%						

结论：不能判断对偶价格是否改变。

百分之百法则的特点：

1、百分之百法则是判断最优解或对偶价格是否发生变化的充分条件，但不是必要条件。也就是说，当其允许增(减)的百分比之和不超过(小于等于)100%时，其最优解或对偶价格不变；但是当其允许增(减)的百分比之和超过(大于)100%时，我们并不知道其最优解或对偶价格是否发生变化。

举例说明：

$$\max z = 500x_1+460x_2+360x_3$$
$$\text{S.T.}\quad 7x_1+6x_2+8x_3 \le 550$$
$$6x_1+4x_2+2x_3 \le 360$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3 \ge 0$$

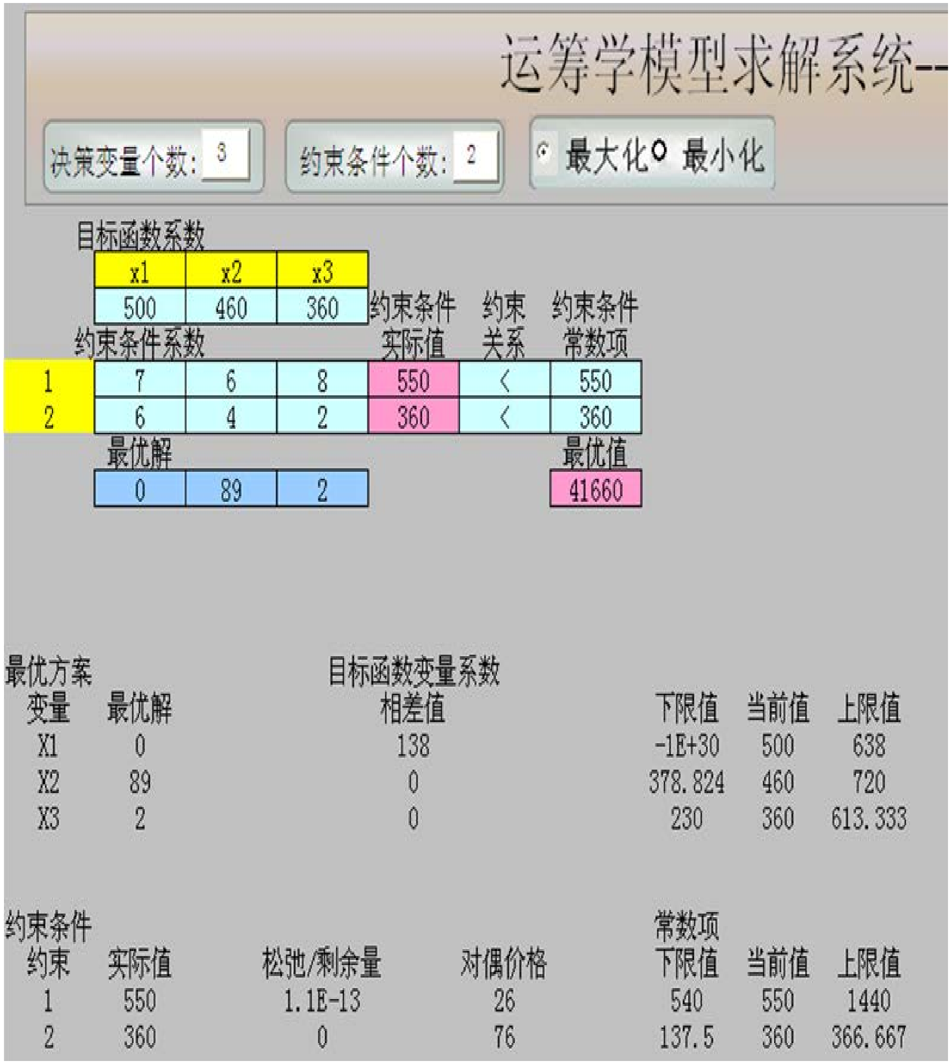
$\Rightarrow$

$$\max z = 500x_1+460x_2+360x_3$$
$$\text{S.T.}\quad 7x_1+6x_2+8x_3 \le 605$$
$$6x_1+4x_2+2x_3 \le 396$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3 \ge 0$$

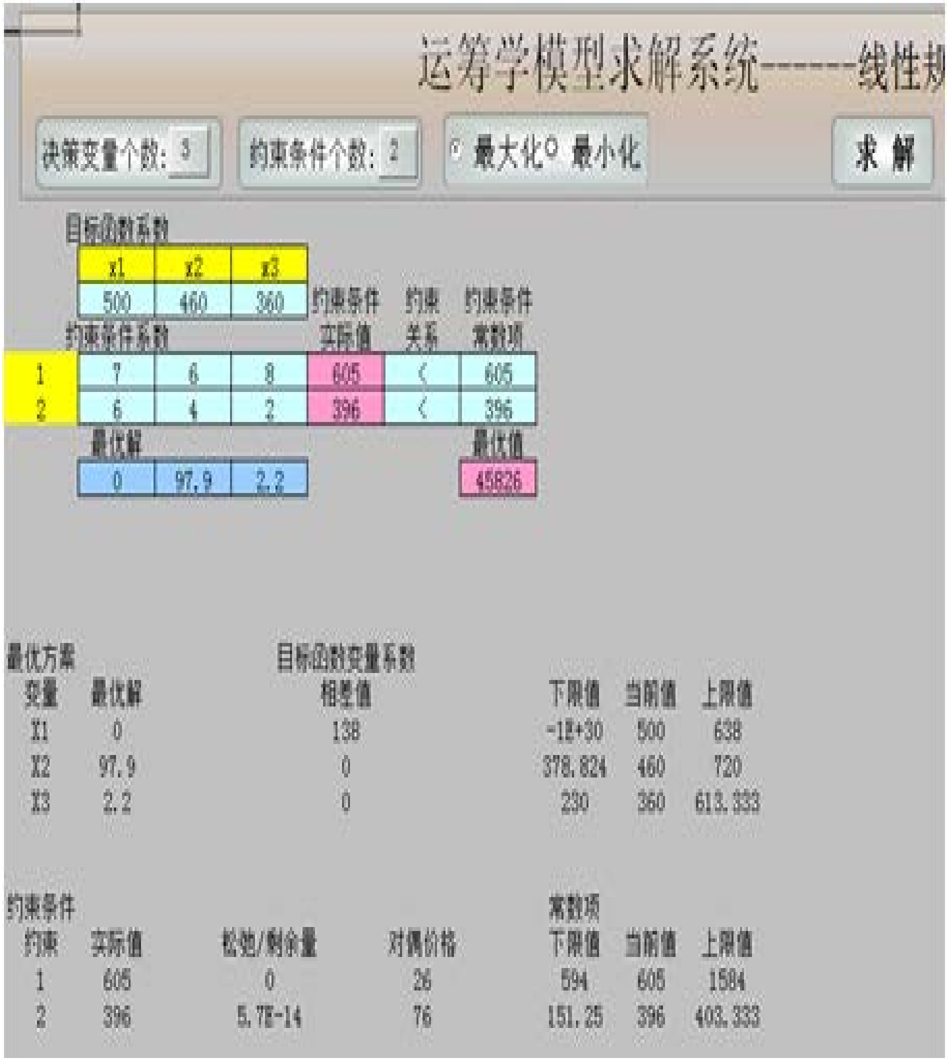
即：b1增加55， b2增加36，此时有： $\frac{55}{890}+\frac{36}{6.667}=5.46$

该值远大于100%，但是对偶价格发生变化了吗？

举例说明：



运筹学模型求解系统--
决策变量个数: 3
约束条件个数: 2
最大化 最小化
目标函数系数
x1 x2 x3
500 460 360
约束条件 实际值
约束 关系
约束条件 常数项
约束条件系数
1 7 6 8 550 < 550
2 6 4 2 360 < 360
最优解
0 89 2
最优值
41660
最优方案
变量 最优解
目标函数变量系数 相差值
下限值 当前值 上限值
X1 0 138 -1E+30 500 638
X2 89 0 378.824 460 720
X3 2 0 230 360 613.333
约束条件
约束 实际值 松弛/剩余量 对偶价格
常数项 下限值 当前值 上限值
1 550 1.1E-13 26 540 550 1440
2 360 0 76 137.5 360 366.667



运筹学模型求解系统------线性规
决策变量个数: 3
约束条件个数: 2
最大化 最小化
求 解
目标函数系数
x1 x2 x3
500 460 360
约束条件 实际值
约束 关系
约束条件 常数项
约束条件系数
1 7 6 8 605 < 605
2 6 4 2 396 < 396
最优解
0 97.9 2.2
最优值
45826
最优方案
变量 最优解
目标函数变量系数 相差值
下限值 当前值 上限值
X1 0 138 -1E+30 500 638
X2 97.9 0 378.824 460 720
X3 2.2 0 230 360 613.333
约束条件
约束 实际值 松弛/剩余量 对偶价格
常数项 下限值 当前值 上限值
1 605 0 26 594 605 1584
2 396 5.7E-14 76 151.25 396 403.333

百分之百法则的特点：

2、百分之百法则不能应用于目标函数决策变量系数和约束条件中常数项同时变化的情况，在这种情况下，只有重新求解。

课堂练习4.（线性规划模型 MIN）

$$\min z = 200x_1 + 160x_2$$

s.t.

$$4x_1 + 7x_2 \geq 240$$

$$2x_1 + 2x_2 \geq 80$$

$$6x_1 + 2x_2 \geq 120$$

$$x_1,\ x_2 \geq 0$$

线性规划模型计算机求解

运筹学模型求解系统-------线性规划问题

决策变量个数：2　约束条件个数：3　最大化　最小化　求 解　返 回

目标函数系数

	x1	x2			
	200	160	约束条件实际值	约束关系	约束条件常数项
约束条件系数					
1	4	7	250	>	240
2	2	2	80	>	80
3	6	2	120	>	120

最优解		最优值
10	30	6800

最优方案

变量	最优解	相差值	下限值	当前值	上限值
X1	10	0	160	200	480
X2	30	0	66.6667	160	200

（下限值、当前值、上限值为目标函数变量系数）

约束条件

约束	实际值	松弛/剩余量	对偶价格	常数项下限值	当前值	上限值
1	250	10	0	-1E+30	240	250
2	80	0	-70	77.6471	80	120
3	120	0	-10	80	120	133.333

根据计算机软件输出结果，回答下列问题：

1. 指出该问题的最优解和目标函数的最优值；

2. 指出目标函数中X1的系数c1的最优范围，并解释其含义；

3. 指出目标函数中X2的系数c2的最优范围，并解释其含义？

4. 如果c1从200减少到180，最优解和最优值分别是多少?为什么？

5. 如果c2从160增加到170，最优解和最优值分别是多少?为什么？

6. 指出每个约束条件的对偶价格，并解释其决策意义；

7. 若c1从200减少到180，同时c2从160增加到170，对该问题的最优解有无影响？可否估计出此时的最优值是多少？

8. 若c1从200减少到180，同时c2从160增加到180，对该问题的最优解有无影响？可否估计出此时的最优值是多少？

9. 若b1从240变到243，b2从80变到90，b3从120变到110，对该问题的对偶价格有无影响？可否估计出此时的最优值是多少？

10. 若b1从240变到245，b2从80变到90，b3从120变到100，对该问题的对偶价格有无影响？可否估计出此时的最优值是多少？

主要内容

松弛量和剩余量

价值系数变化影响

常数项变化影响

百分之百法则

相差值分析

目标函数中变量系数c_j的相差值分析

线性规划模型：

$$\max z = 50x_1 + 100x_2;$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 \le 300 \\ & 2x_1 + x_2 \le 400 \\ & x_2 \le 301 \\ & x_1,\ x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

目标函数中变量系数c_j的相差值分析

运筹学模型求解系统———线性规划问题

决策变量个数：2　约束条件个数：3　最大化　最小化　求　解　返　回

目标函数系数

	x1	x2	约束条件实际值	约束关系	约束条件常数项
	50	100			
约束条件系数					
1	1	1	300	<	300
2	2	1	300	<	400
3		1	300	<	301

最优解		最优值
0	300	30000

c1相差值=50

c2相差值=0

最优方案

变量	最优解	目标函数变量系数相差值	下限值	当前值	上限值
X1	0	50	-1E+30	50	100
X2	300	0	50	100	1E+30

约束条件

约束	实际值	松弛/剩余量	对偶价格	常数项下限值	当前值	上限值
1	300	0	100	0	300	301
2	300	100	0	300	400	1E+30
3	300	1	0	300	301	1E+30

目标函数中变量系数c_j的相差值分析

“相差值”也称作“递减成本”

或“缩减成本”

所谓目标函数变量系数的相差值，是指最优解中为0的变量，在其它变量系数保持不变的情况下，使最优解中该变量的值不为0时，相应目标函数系数由现有值再改变的量。

目标函数中变量系数c_j的相差值分析

1、最优解不为0的变量，相差值必为0，反之不然，因为也有可能是外在约束所致；

2、对于相差值不为0的变量系数：

当目标为求最大值时，当前值加上这个相差值，必等于该变量系数的上限值，此时其相应的变量值就会由原来为0变为非0。

当目标为求最小值时，当前值减去这个相差值，必等于该变量系数的下限值，此时其相应的变量值就会由原来为0变为非0。

目标函数中变量系数c_j的相差值分析

最优解	相差值	C_j	
		求最大化目标	求最小化目标
=0	必 >0	当前值+相差值 =上限 最优解才不为0	当前值－相差值 =下限 最优解才不为0
>0	必 =0		

课堂练习5.（计算机求解结果分析）

某厂利用2种原料A、B生产甲、乙、丙3种产品，生产单位产品所需原料数（公斤）、单件利润（元/单位）及有关数据如下表：

	甲	乙	丙	原料
A	7	6	8	≤ 550
B	6	4	2	≤ 360
单位利润	500	460	360	

此问题的线性规划数学模型：

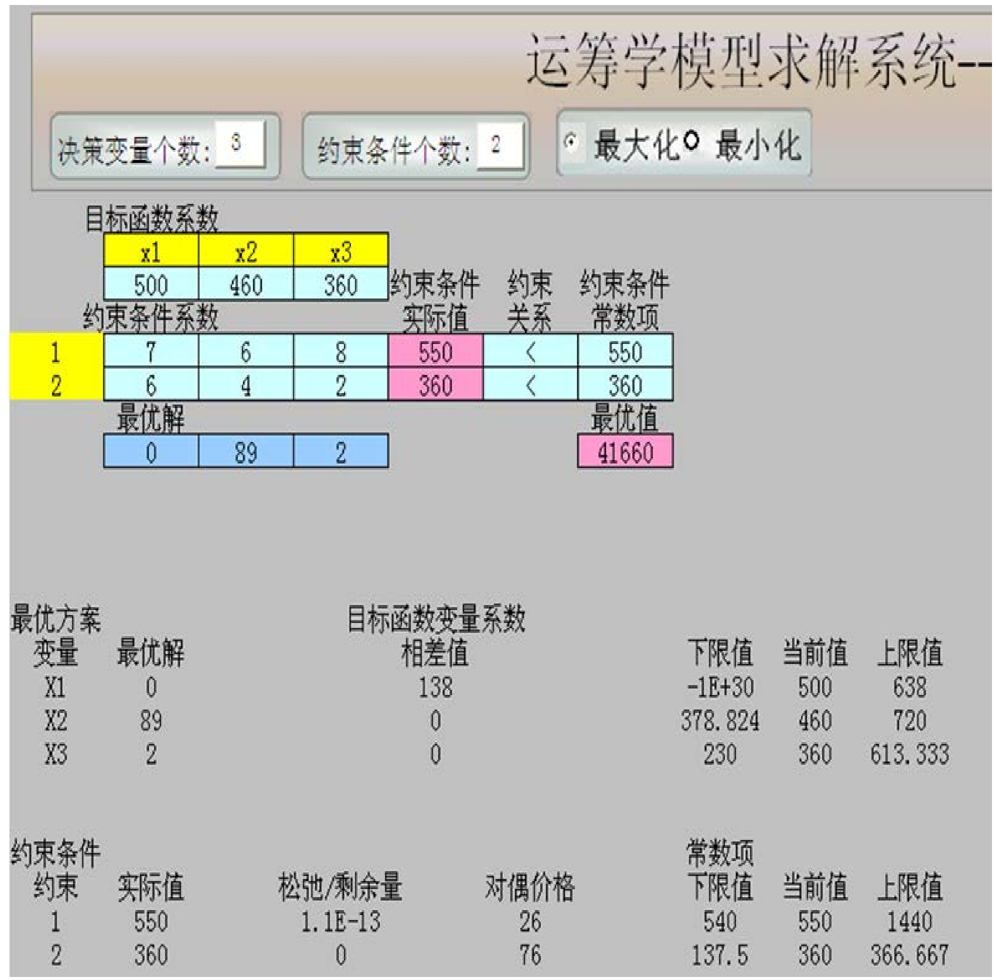
$$\max z = 500x_1+460x_2+360x_3$$

$$\text{s.t.}\quad 7x_1+6x_2+8x_3\le 550$$

$$6x_1+4x_2+2x_3\le 360$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3\ge 0$$

该模型的决策结果如右图：



回答下列问题：

1. 请给出该工厂的最优生产方案；

2. 在该方案中，产品甲不生产，那么在什么情况下产品甲就可以投产了，为什么？

3. 若b2从360增加到366.67，对该问题的对偶价格有无影响？

4. 若其它企业愿意以高于市场价格40元的价格出售原料A和原料B，该厂应不应该购进原料以扩大生产？为什么？

5. 若企业愿意以高于市场价格40元的价格再购进100公斤原料，那么原料A, B各为多少才能使公司获利最大？

课堂讨论

牧草农场问题

- 牧草农场正在试验以下三种新的赛马食品：普通饲料、富含维生素的燕麦饲料和一种新的含维生素和矿物质的食品添加剂饲料。
- 这些赛马食品分别由A、B、C三种营养成分添加组合而成。
- 一匹马一天的最小进食量为3单位A，6单位B，4单位C，总摄入量不超过6磅。

牧草农场饲料的营养价值和成本值

饲料营养成分	普通饲料	营养燕麦	添加剂饲料
A	0.8	0.2	0.0
B	1.0	1.5	3.0
C	0.1	0.6	2.0
每磅成本(元)	0.25	0.5	3.0

问题：如何购买饲料，既可以满足马一天的营养需要，又可以使成本最低？

知识点总结

1. 松弛量/剩余量
2. 对偶价格
3. 价值系数范围
4. 常数项范围
5. 百分之百法则
6. 相差值

第四讲 线性规划应用

运筹与决策

理论分析

数据、模型、决策

- 不确定型决策
- 风险型决策
- 确定型决策

运筹学基础模型

原理、方法与操作

最大最小准则
最大最大准则
等可能性准则
乐观系数准则
后悔值准则

期望值准则
全情报价值准则
样本情报价值准则
效用值准则

线性规划模型
线性规划模型拓展
动态规划
排队论
存储论
…………

运筹学模型的应用拓展

原理、方法与操作

LP灵敏度分析
线性规划应用
整数规划模型
运输模型
目标规划模型
网络优化模型

价值系数变化影响
常数项变化影响
百分之百法则
相差值分析

生产安排问题
排班问题
套材下料问题
连续投资问题

纯整数规划模型
0-1整数规划模型
混合整数规划模型
整数规划的特殊应用

产销平衡运输模型
产大于销运输模型
销大于产运输模型
条件产销不平衡模型
转运模型

有优先级目标规划
加权目标规划

最短路模型
最小支撑树模型
最大流模型
最小费用流模型

主要内容

目标：建立模型

工商管理

- 产品自制与外购问题
- 合理排班问题
- 套材下料问题
- 生产安排问题
- 营养配餐问题
- 配料或混合问题
- 媒体选择问题
- 关于环境保护问题
- 市场调查问题
- 连续投资问题

产品自制及外购问题

例4.1 某工厂生产甲、乙、丙三种产品，这三种产品都要经过铸造、机械加工和装配三道工序。甲、乙两种产品的铸件可以外包协作，亦可以自行生产，但产品丙必须由本厂铸造才能保证质量。有关情况如下表所示，工厂为了获得最大利润，甲、乙、丙三种产品各应生产多少件？甲、乙两种产品的铸件有多少由本公司铸造？有多少为外包协作？

工时与成本	甲	乙	丙	工时限制
每件铸造工时/小时	5	10	7	8000
每件机械加工工时/小时	6	4	8	12000
每件装配工时/小时	3	2	2	10000
自行生产铸件每件成本/元	3	5	4	
外包协作铸件每件成本/元	5	6	-	
机械加工每件成本/元	2	1	3	
装配每件成本/元	3	2	2	
每件产品售价/元	23	18	16	

合理排班问题

例4.2　一家中型的新华书店根据市场多年客户购书情况,经过详细统计分析后,发现一周每天的客流量都呈现一些规律性的变化,需要对店内售货员安排做相应的调整,所需人员情况如下表:

时间	所需要售货员人数	时间	所需要售货员人数
星期一	20	星期五	28
星期二	24	星期六	32
星期三	25	星期日	34
星期四	20		

为了保证售货员充分休息，要求售货员每周工作五天，休息两天，并要求休息的两天是连续的，问应该如何安排售货员的每天上班人数，既满足工作需要，又使配备的售货员的人数最少？

连续投资问题

例4.3 某部门现有资金300万元，今后五年内考虑给以下的项目投资：

项目A：从第一年到第五年每年年初都可投资，当年末能收回本利110％。

项目B：从第一年到第四年每年年初都可以投资，次年末收回本利125％，但规定每年最大投资额不能超过50万元。

项目C：第三年初需要投资，到第五年末能收回本利140％，但规定最大投资额不能超过100万元。

项目D：第二年初需要投资，到第五年末能收回本利155％，但规定最大投资额不能超过150万元。

应如何确定这些项目每年的投资额，从而使得第五年末拥有资金的本利金额最大？

套材下料问题

例4.4　某工厂要做100套钢架，每套钢架需要长度分别为2.9m，2.1m和1.5m的圆钢各一根。已知原料每根长7.4m，问应如何下料，可使所用原料最省？

线性规划模型的应用类型

生产安排问题（例题4.5）

营养配餐问题（课堂讨论——牧草农场问题）

市场调研问题（练习4.8）

媒体选择问题

配料或混合问题（练习4.4）

环境保护问题（问题3-3）

营养配餐问题

假定一个成年人每天需要从食物中获得3000千卡的热量、55克蛋白质和800毫克的钙。如果市场上只有四种食品可供选择，它们每千克所含的热量和营养成分和市场价格见下表。问如何选择才能在满足营养的前提下使购买食品的费用最小？

各种食物的营养成分表

序号	食品名称	热量（千卡）	蛋白质（克）	钙（毫克）	价格（元）
1	猪肉	1000	50	400	14
2	鸡蛋	800	60	200	6
3	大米	900	20	300	3
4	白菜	200	10	500	2

市场调查问题

市场调查公司（MSI）专门评定消费者对新产品、服务和广告活动的反应。一个客户公司要求MSI帮助确定消费者对一种近期推出的家居产品的反应。在与客户会面的过程中，MSI同意开展日间和晚间的个人入户调查，分别从有儿童的家庭和无儿童的家庭获得调查结果。此外，客户的合同要求依据以下限制条款进行1000个入户访问。

1. 至少访问400个有儿童的家庭。
2. 至少访问400个无儿童的家庭。

市场调查问题

3. 晚间访问的家庭数量必须不少于日间访问的家庭数量。
4. 至少40%有儿童的家庭必须在晚间访问。
5. 至少60%无儿童的家庭必须在晚间访问。

基于以往的调查研究，预计的访问费用如下：

家庭情况	日间（美元）	晚间（美元）
有儿童	20	25
无儿童	18	20

以最小总访问成本满足合同的家庭一时间访问计划应该如何制定？

媒体选择问题

兰州黄河酒业公司主要生产各种包装的啤酒。近期公司准备新上市一种罐装生啤，为在短时间内推向市场，采取的营销手段就是媒体广告。通过市场调查，公司决定在电视、报纸、网络和杂志四种媒体上做广告，经与各媒体联系后得到基本情况如下表：

媒体	可达消费者人数（万人）	广告成本（元/个）	可提供广告数（个）	广告影响力指数
电视一般档	1.5	1500	30	65
电视黄金档	2	4000	20	90
网络	4	2000	45	30
报纸	1.2	450	40	40
杂志	1	600	35	20

针对这种情况公司决定按以下原则要求安排广告投放：

1、通过各种广告，可达信息传播量不少于200万人次；

2、由于电视的影响力比较大，要求电视广告总投放量不少于40个；

3、在总的营销计划中，广告总费用的总预算15万元，其中，电视广告费用预算为10万元；

问公司应如何确定具体的广告投放方案，使得广告的影响力最大？

媒体选择问题

休闲享受发展公司在私人湖边开发一环湖社区，聘请BP&J来设计宣传活动。

媒体	预计受众(人)	媒体价格($)	月最高频率	宣传效果
DTV	1000	1500	15	65
ETV	2000	3000	10	90
DN	1500	400	25	40
SN	2500	1000	4	60
R	300	100	30	20

媒体选择问题

1. 月广告预算：30000$
2. 至少使用10部电视广告
3. 电视广告的费用不超过18000$
4. 到达的预计受众至少50000人

目标：如何推荐广告媒体选择计划以获得最大的宣传效果？

配料或混合问题

Grand Strand 石油公司通过混合3种石油成份来生产两种汽油产品，在保证成本最小化情况下使利润最大化。该石油公司石油成份成本及供给量如下表所示：

石油成份	单位成本（美元）	最大供应量（加仑）
1	0.5	5000
2	0.6	10000
3	0.84	10000

配料或混合问题

Grand Strand 石油公司混合问题的具体要求如下：

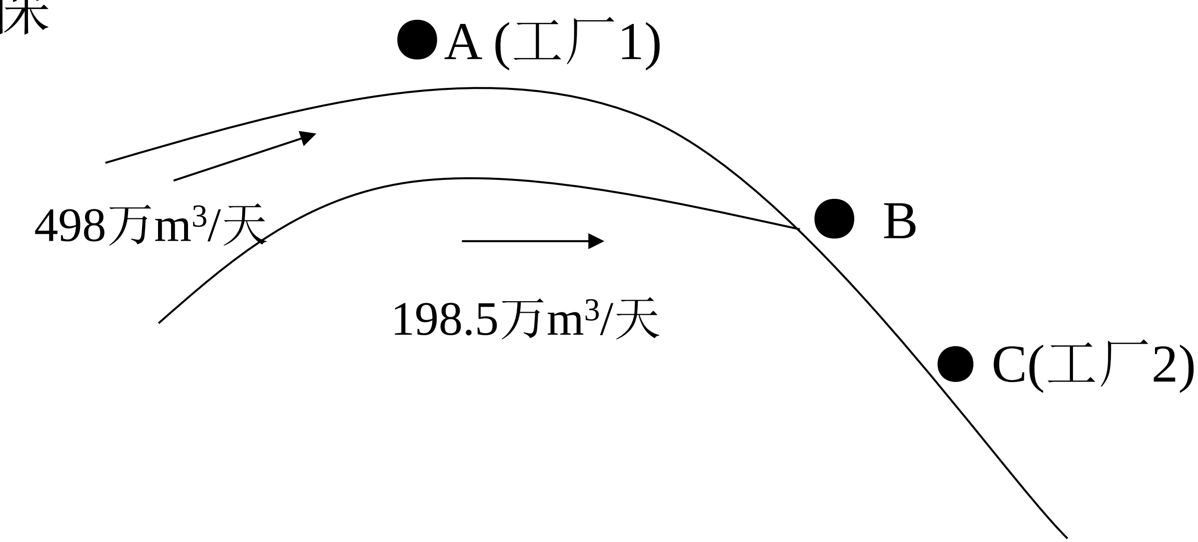
产品	售价(美元/加仑)	规格
一般规格汽油	1.00	最多30%成份1
		最少40%成份2
		最多20%成份3
特殊规格汽油	1.08	最多25%成份1
		最多40%成份2
		最多30%成份3

最少要求生产10000加仑一般规格汽油。

环境保护问题

靠近某河流有两化工厂（如下图所示）。流经第一个工厂的河水流量是每天498万m^3；在两个工厂之间有一条流量为每天198.5万m^3的支流。第一个工厂每天排放工业污水2万m^3；第二个工厂每天排放工业污水1.5万m^3。从第一个工厂排出的污水流到第二个工厂之前，有20%可自然净化。根据环保要求，河流中的工业污水含量应不大于0.2%。若这两个工厂都各自处理一部分污水，第一个工厂处理污水的成本是1000元/万m^3，第二个工厂处理污水的成本是800元/万m^3。

现在要问在满足环保要求的前提下，每厂各应处理多少污水，才能使两厂总的处理污水费用最小。



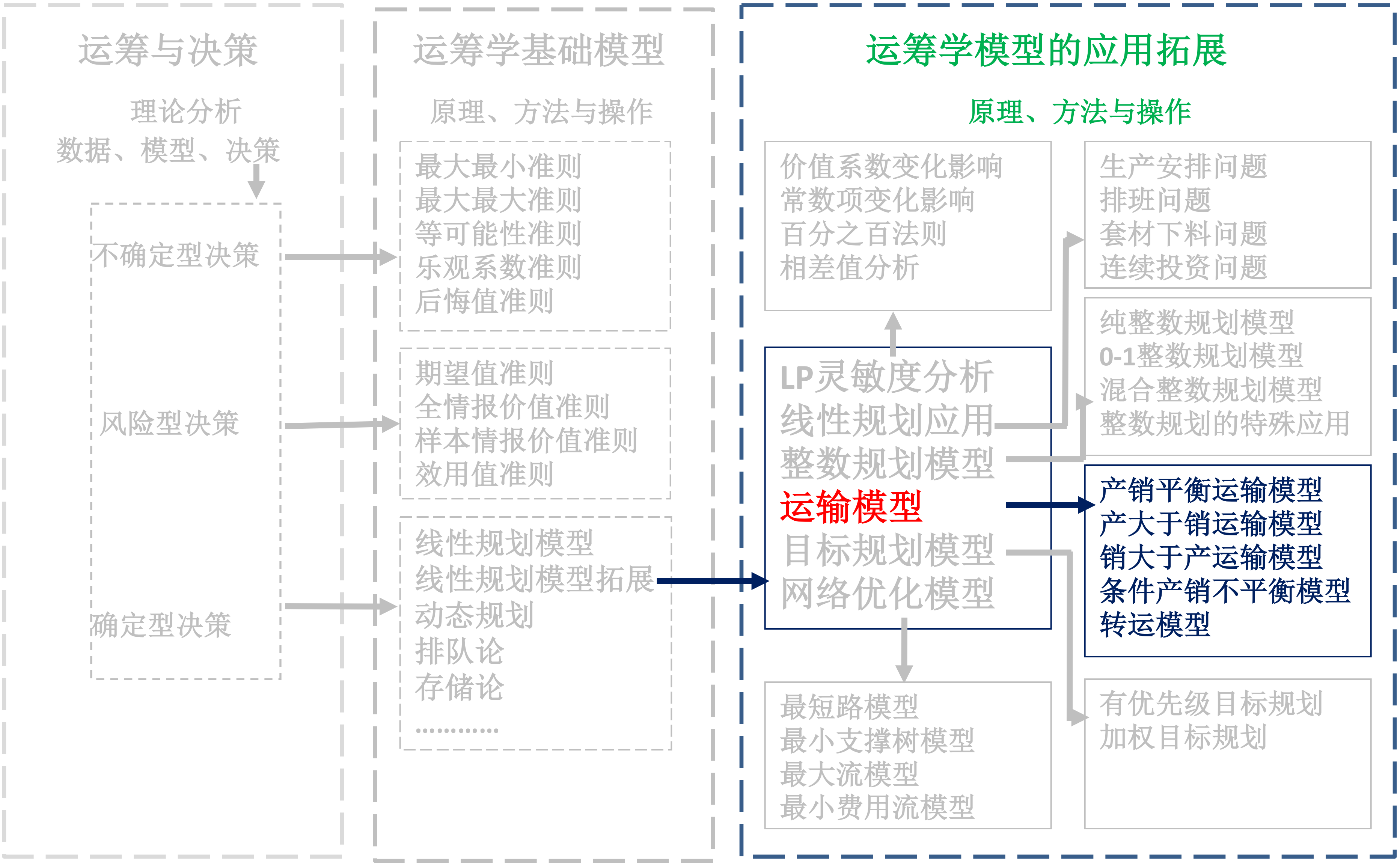
课堂讨论

- 北方食品公司106个零售点中，有50个点在距工厂半径5公里以内，送货车20分钟可达；36个点在5-10公里内，送货40分钟可达；20个点在10公里以上，送货60分钟可达。
- 106个销售点日销量在0.3—0.6吨，但大多数在0.4—0.5吨之间。为简便计算，假定每个点日销量为0.5吨。
- 送货用的冷藏车种类有2吨、4吨两种。已知4吨车每台18万元，2吨车每台12万元。
- 将5公里以内的零售点设为A类点，10公里以内的零售点设为B类点，10公里以上设为C类点。

课堂讨论

- A类点间运输时间为5分钟，B类点间运输时间为10分钟，C类点间运输时间为20分钟。A类点到B类点的时间为20分钟， B类点到C类点的时间为20分钟。
- 每点卸货、验货时间为30分钟。
- 工厂从凌晨4点开始发货（过早无人接货），车辆发车先后时间忽略不计。因7点后交通没有保障，故要求冷藏车必须在7点前到达零售点。故最迟送完货时间为7：30。全程允许时间为210分钟。
- 问题：如何以最少的投资（冷藏车）在指定时间内以最少的成本（费用）完成运输任务？

第五讲 运输模型

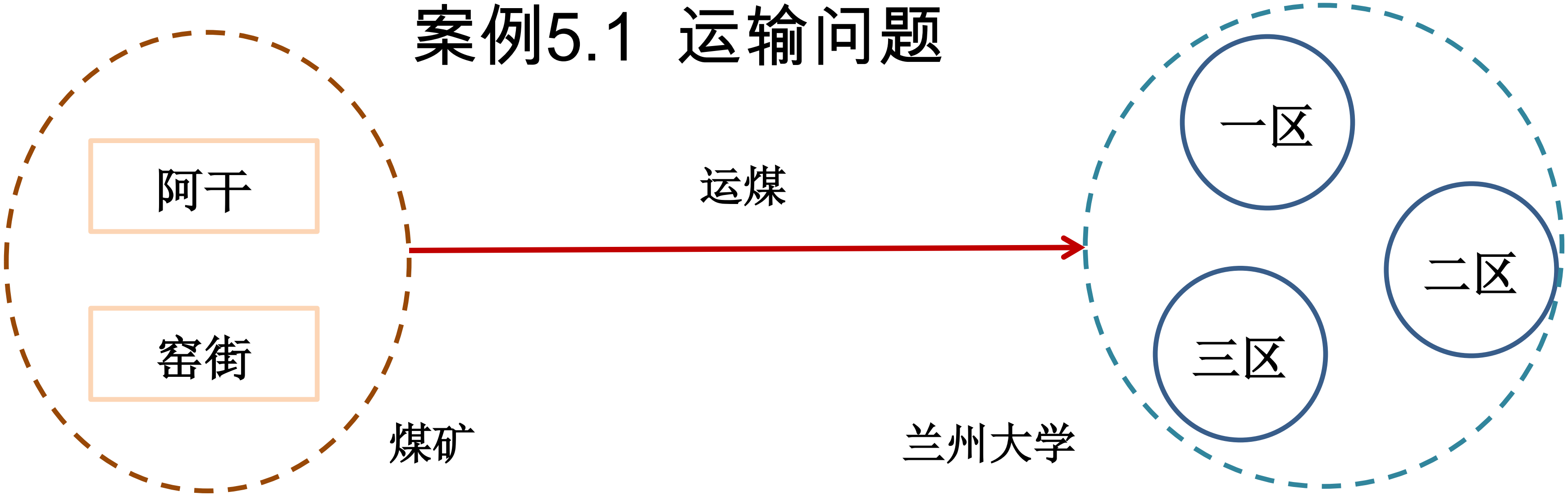

运筹与决策
理论分析
数据、模型、决策
不确定型决策
风险型决策
确定型决策
运筹学基础模型
原理、方法与操作
最大最小准则
最大最大准则
等可能性准则
乐观系数准则
后悔值准则
期望值准则
全情报价值准则
样本情报价值准则
效用值准则
线性规划模型
线性规划模型拓展
动态规划
排队论
存储论
…………
运筹学模型的应用拓展
原理、方法与操作
价值系数变化影响
常数项变化影响
百分之百法则
相差值分析
LP灵敏度分析
线性规划应用
整数规划模型
运输模型
目标规划模型
网络优化模型
最短路模型
最小支撑树模型
最大流模型
最小费用流模型
生产安排问题
排班问题
套材下料问题
连续投资问题
纯整数规划模型
0-1整数规划模型
混合整数规划模型
整数规划的特殊应用
产销平衡运输模型
产大于销运输模型
销大于产运输模型
条件产销不平衡模型
转运模型
有优先级目标规划
加权目标规划

主要内容

1. 产销平衡运输模型
2. 产销不平衡运输模型
3. 运输模型的应用

案例分析

案例5.1 运输问题



	一区	二区	三区	煤矿供应量(吨)
阿干镇	1.8	1.7	1.55	3500
窑　街	1.6	1.5	1.75	2500
用量（吨）	3000	1000	2000	

问题：确定运输方案，在满足运煤数量要求的前提下，使总的运输费用为最低。

运输问题的五个基本要素

产地

销地 “产销平衡运价表”

运价

	一区	二区	三区	煤矿供应量(吨)
阿干镇	1.8	1.7	1.55	3500
窑 街	1.6	1.5	1.75	2500
用量（吨）	3000	1000	2000	

产量

销量

建立线性规划数学模型

	一区	二区	三区	煤矿供应量(吨)
阿干镇	1.8	1.7	1.55	3500
窑　街	1.6	1.5	1.75	2500
用量（吨）	3000	1000	2000	

确定决策变量

	一区	二区	三区	煤矿供应量(吨)
阿干镇	x_{11}	x_{12}	x_{13}	3500
窑 街	x_{21}	x_{22}	x_{23}	2500
用量（吨）	3000	1000	2000	

确定目标函数

$$\min f = 1.8x_{11} + 1.7x_{12} + 1.55x_{13} + 1.6x_{21} + 1.5x_{22} + 1.75x_{23}$$

确定决策变量

	一区	二区	三区	煤矿供应量(吨)
阿干镇	x_{11}	x_{12}	x_{13}	3500
窑　街	x_{21}	x_{22}	x_{23}	2500
用量（吨）	3000	1000	2000	

确定目标函数

$$min\ f = 1.8\,x_{11} + 1.7\,x_{12} + 1.55\,x_{13} + 1.6\,x_{21} + 1.5\,x_{22} + 1.75\,x_{23}$$

确定约束条件

煤矿运出：

阿干镇：$x_{11} + x_{12} + x = 3500$

窑　街：$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 2500$

学校运入：

一区：$x_{11} + x_{21} = 3000$

二区：$x_{12} + x_{22} = 1000$

三区：$x_{13} + x_{23} = 2000$

最后得到如下线性规划模型：

$$\min f = 1.8\, x_{11} + 1.7\, x_{12} + 1.55\, x_{13} + 1.6\, x_{21} + 1.5\, x_{22} + 1.75\, x_{23}$$

$$
\begin{aligned}
s.t.\quad & x_{11} + x_{12} + x_{13} = 3500 \\
& x_{21} + x_{22} + x_{23} = 2500 \\
& x_{11} + x_{21} = 3000 \\
& x_{12} + x_{22} = 1000 \\
& x_{13} + x_{23} = 2000 \\
& x_{ij} \geq 0 \quad (i=1, 2;\ j=1, 2, 3)
\end{aligned}
$$

运输问题线性规划模型的计算机求解结果

运筹学模型求解系统——————线性规

决策变量个数：6　约束条件个数：5　最大化　最小化　求 解

目标函数系数

	x1	x2	x3	x4	x5	x6			
	1.8	1.7	1.55	1.6	1.5	1.75	约束条件实际值	约束关系	约束条件常数项
约束条件系数									
1	1	1	1				3500	=	3500
2				1	1		2500	=	2500
3	1			1			3000	=	3000
4		1			1		1000	=	1000
5			1			1	2000	=	2000
最优解	1500	0	2000	1500	1000	0		最优值	9700

产销平衡运价表

	一区	二区	三区	煤矿供应量(吨)
阿干镇	1.8	1.7	1.55	3500
窑 街	1.6	1.5	1.75	2500
用量（吨）	3000	1000	2000	

方案表

	一区	二区	三区	煤矿供应量(吨)
阿干镇	**1500**	**0**	**2000**	3500
窑 街	**1500**	**1000**	**0**	2500
用量（吨）	3000	1000	2000	

最低总运费:9700元

运输问题的计算机直接求解结果

运筹学模型求解系统——产销平衡的

产地个数： 2 销地个数： 3 最大化 最小化 求 解

产地 / 销地

运价表	B1	B2	B3	产量
A1	1.8	1.7	1.55	3500
A2	1.6	1.5	1.75	2500
销量	3000	1000	2000	

最优值： 9700

产地 / 销地

最优解	B1	B2	B3	产量	关系	产能量
A1	1500	0	2000	3500	=	3500
A2	1500	1000	0	2500	=	2500
实际销量	3000	1000	2000			
关系	=	=	=			
销能量	3000	1000	2000			

产销平衡运输模型

运输问题的基本特征

- 从 m 个起点(如工厂) A_1，A_2，…，A_m 向 n 个终点(如分销中心) B_1，B_2，…，B_n 发送某种货物；
- 起点A_i的供应量为 s_i，终点B_j 的需求量为d_j；
- 由A_i 运往 B_j 单位货物的运输成本为c_{ij}；
- 总供应 Σs_i 与总需求 Σd_j 相等，称此运输问题为平衡运输问题，否则称非平衡运输问题。

产销平衡运价表

运价 销地 产地	B_1	B_2	------	B_n	产量
A_1	c_{11}	c_{12}	------	c_{1n}	s_1
A_2	c_{21}	c_{22}	------	c_{2n}	s_2
------	------	------	------	------	------
A_m	c_{m1}	c_{m2}	------	c_{mn}	s_m
销量	d_1	d_2	------	d_n	

决策变量表

运价 销地 / 产地	B_1	B_2	------	B_n	产量
A_1	x_{11} c_{11}	x_{12} c_{12}	------	x_{1n} c_{1n}	s_1
A_2	x_{21} c_{21}	x_{22} c_{22}	------	x_{2n} c_{2n}	s_2
------	------	------	------	------	------
A_m	x_{m1} c_{m1}	x_{m2} c_{m2}	------	x_{mn} c_{mn}	s_m
销量	d_1	d_2	------	d_n	

运输问题的线性规划模型

目标函数

$$\min(\max) f = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

i,j分别表示第i个产和第j个销地

运输问题的线性规划模型

约束条件：

i产地总的运出量

i产地总产量

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = s_i, i = 1,2,\cdots,m$$

j销地总的运入量

j销地总的需求量

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j, j = 1,2,\cdots,n$$

运输问题的线性规划模型

$$\min(\max) f = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

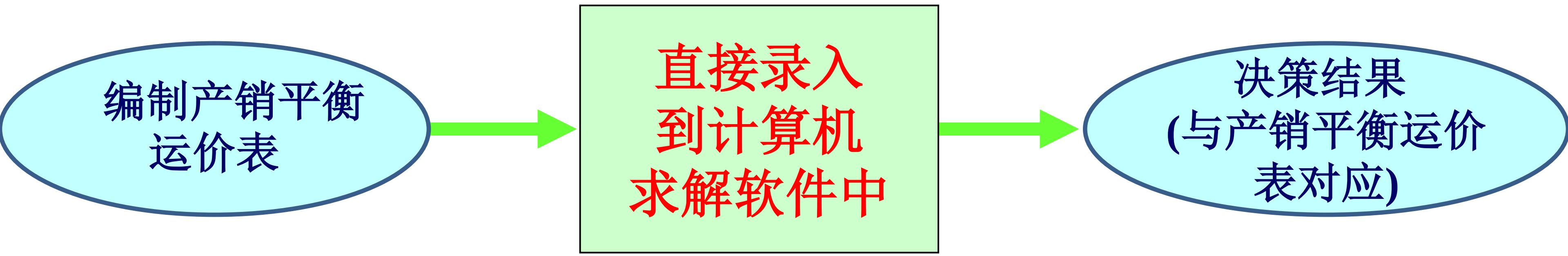
s.t.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = s_i, i = 1,2,\cdots,m \quad <?$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j, j = 1,2,\cdots,n \quad <?$$

$x_{ij} \geq 0$, $i=1,2,\ldots.m$, $j=1,2,\ldots.n$

求解方法——直接求解产销平衡运价表



产销不平衡运输模型

一般产销不平衡问题的处理

直接用计算机软件求解

转化为产销平衡的运输问题

产大于销的模型转换

销大于产的模型转换

1. 产大于销的运输模型转换

$$\sum_{i}^{m} s_i > \sum_{j}^{n} d_j$$

如：案例5.1的问题中一区需求量减少500吨，其“运价表”如下：

“运价表”

	一区	二区	三区	煤矿供应量(吨)
阿干镇	1.8	1.7	1.55	3500
窑　街	1.6	1.5	1.75	2500
用量（吨）	2500	1000	2000	

1. 产大于销的运输模型转换

增加虚设的销地和销量

产销平衡运价表

	一区	二区	三区	四区	煤矿供应量(吨)
阿干镇	1.8	1.7	1.55	0	3500
窑 街	1.6	1.5	1.75	0	2500
用量（吨）	2500	1000	2000	500	

2. 产小于销的运输模型转换

$$\sum_{i}^{m} s_i < \sum_{j}^{n} d_j$$

如：案例5.1的问题中二区需求量增加500吨，其“运价表”如下：

“运价表”

	一区	二区	三区	煤矿供应量(吨)
阿干镇	1.8	1.7	1.55	3500
窑　街	1.6	1.5	1.75	2500
用量（吨）	3000	1500	2000	

2. 产小于销的运输模型转换

增加虚设的产地和产量

产销平衡运价表

	一区	二区	三区	煤矿供应量(吨)
阿干镇	1.8	1.7	1.55	3500
窑 街	1.6	1.5	1.75	2500
虚产地	**0**	**0**	**0**	**500**
用量（吨）	3000	1500	2000	

课堂讨论

案例5.2：2013年冬煤采购过程中,我校遇到了一个具体的问题：两个煤矿的供应量不能满足学校的总体需求，如下表 。由于供不应求，经学校平衡决定：一区的供应量可减少0-300吨，二区的需要应全部满足，三区的供应量不少于1500吨。试重新做出总运费为最低的调运方案。

运价单位（元/吨）

	一区	二区	三区	煤矿供应量(吨)
阿干镇	1.8	1.7	1.55	4000
窑　街	1.6	1.5	1.75	1500
用量（吨）	3000	1000	2000	

针对这个销大于产运输问题有具体处理方法:

1、增加虚设的产地或产量，将其化为产销平衡的问题。

2、将有销量要求的每个销地都分为两个部分（两个销地），对于虚设产地的产量，用0运价调剂可以不满足的需求（一个销地）的运量 ；而用大M运价（相对于正常运价是很大的数）来限制必须满足的需求（另一个销地）的运量。

注意多解情形

有条件的产销平衡运价表：

	一区	一区’	二区	三区	三区’	煤矿供应量(吨)
阿干镇	1.8	1.8	1.7	1.55	1.55	4000
窑　街	1.6	1.6	1.5	1.75	1.75	1500
虚设产地	M	0	M	M	0	500
用量（吨）	2700	300	1000	1500	500	

求解结果：

	一区	一区’	二区	三区	三区’	煤矿供应量(吨)
阿干镇	2200	0	0	1500	300	4000
窑　街	500	0	1000	0	0	1500
虚设产地	0	300	0	0	200	500
用量（吨）	2700	300	1000	1500	500	
具体方案	2700		1000	1800		

最低运费:9050元

注意多解情形

有条件的产销平衡运价表：

	一区	一区’	二区	三区	三区’	煤矿供应量(吨)
阿干镇	1.8	1.8	1.7	1.55	1.55	4000
窑　街	1.6	1.6	1.5	1.75	1.75	1500
虚设产地	M	0	M	M	0	500
用量（吨）	2700	300	1000	1500	500	

求解结果：

	一区	一区’	二区	三区	三区’	煤矿供应量(吨)
阿干镇	1200	0	1000	1500	300	4000
窑　街	1500	0	0	0	0	1500
虚设产地	0	300	0	0	200	500
用量（吨）	2700	300	1000	1500	500	
具体方案	2700		1000	1800		

最低运费:9050元

课堂练习6.（运输模型）

甲、乙、丙三个城市需要冬暖供煤，甲、乙两城每年分别需要320万吨，250万吨，丙城350万吨。所用煤炭分别由A，B两煤矿负责供应。A矿每年可供量400万吨，B矿450万吨。各煤矿至各城市的单位运价（万元/万吨）见下表。由于需大于供，经研究平衡决定，甲城市供应量可减少0--30万吨，乙城市需要量应全部满足，丙城市供应量不少于270万吨。试将下面产销不平衡的运输问题化为产销平衡的问题。

煤矿至各城市的单位运价　　单位：万元/万吨

	甲	乙	丙	供应量（万吨）
A	15	18	22	400
B	21	25	16	450
需求量（万吨）	290-320	250	270-350	

运输模型的应用

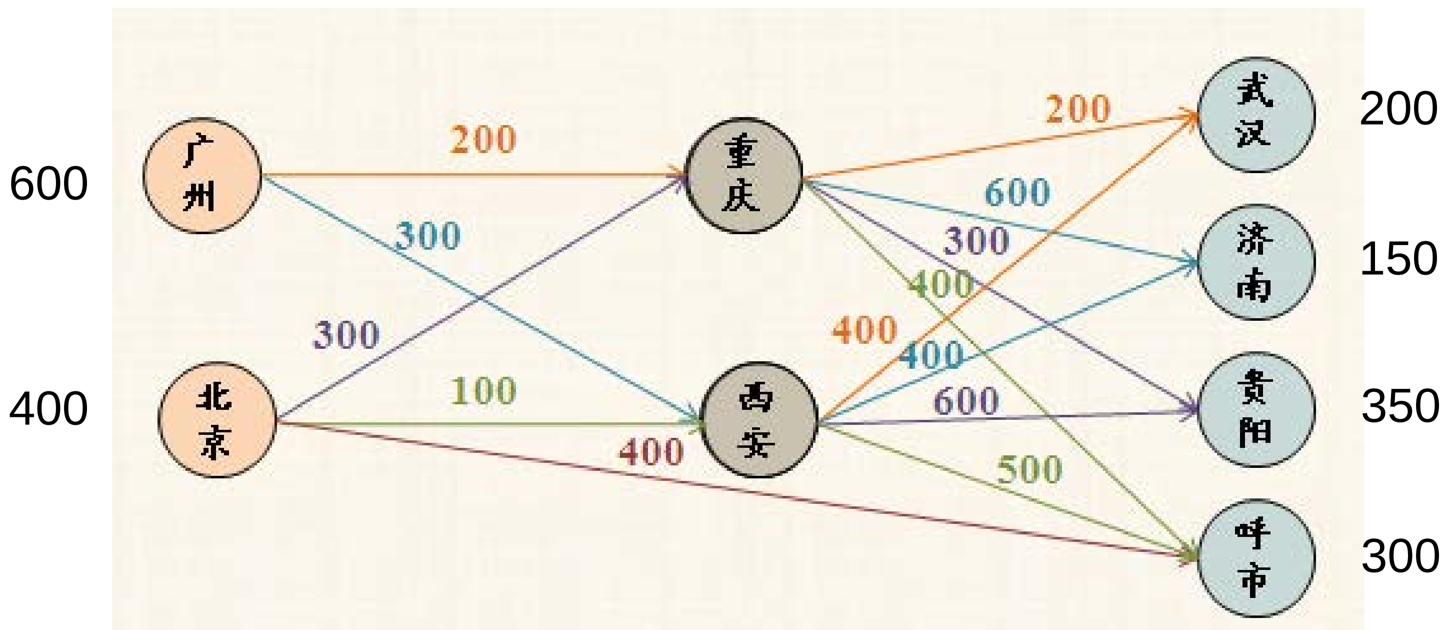
运输模型的应用（生产问题）

例5.1 光明仪器厂生产电脑绣花机是以销定产的。1-6月份各月的生产能力、合同销量和单台电脑绣花机平均生产费用如表7-22所示。又已知上年末库存103台绣花机。如果当月生产出来的机器当月不交货，则需要运到分厂库房，每台增加运输成本0.1万元，每台机器每月的平均仓储费、维护费为0.2万元。在7—8月份销售淡季，全厂停产1个月，因此在6月份完成销售合同后还要留出库存80台。加班生产机器每台增加成本1万元。问应如何安排1—6月份的生产使总的生产（包括运输、仓储、维护）费用最少？

月份	正常生产能力(台)	加班生产能力(台)	销量(台)	单台费用(万元)
1	60	10	104	15
2	50	10	75	14
3	90	20	115	13.5
4	100	40	160	13
5	100	40	103	13
6	80	40	70	13.5

运输模型的应用（转运问题）

例5.2 某公司在北京和广州有两个分厂，北京分厂每月生产400台产品，广州分厂每月生产600台产品。该公司在重庆与西安有两个销售公司负责对武汉、济南、贵阳与呼和浩特四个城市的产品供应。又因为北京与呼和浩特有较近的直达交通线，公司同意北京分厂也可以向呼和浩特直接供货，这些城市间的每台产品的运输费用用箭头标在两个城市之间，单位为元，问应该如何调运产品，使得总的运输费用最低？



运输模型的应用（逆向运输）

例5.3　有A_1、A_2、A_3三个面粉厂，每天分别将3吨、4吨、3吨面粉运往B_1、B_2两个糕点厂，而两个糕点厂每天分别需要4吨、6吨面粉。在面粉厂与糕点厂之间有T_1、T_2两个中转站。三个面粉厂、两个糕点厂及两个中转站之间都可以有条件地调拨面粉。各地间的运价见下表。请做出在满足各厂要求的前提下，使总的运费最低的调运方案。

面粉运输的价格表　　单位：元/吨

运价 产地＼销地	A_1	A_2	A_3	T_1	T_2	B_1	B_2
A_1	0	3	2	3	-	6	8
A_2	4	0	2	5	2	13	7
A_3	-	2	0	3	2	11	4
T_1	3	5	2	0	6	2	5
T_2	-	3	2	7	0	2	5
B_1	6	-	-	2	-	0	9
B_2	-	-	4	-	3	9	0

课堂讨论（指派模型）

某航空公司经营兰州、北京、广州三个城市之间的航线，其中兰州—北京飞行时间为2小时；北京—广州及广州—兰州飞行时间都为3小时，这些航线每天班机起飞与到达时间如下表：

航班号	起飞城市	起飞时间	到达城市	到达时间
1011	兰州	6:00	北京	8:00
1012	兰州	12:00	北京	14:00
1013	兰州	18:00	北京	20:00
2011	兰州	7:00	广州	10:00
2012	兰州	9:00	广州	12:00
1021	北京	7:00	兰州	9:00
1022	北京	10:00	兰州	12:00
1023	北京	17:00	兰州	19:00
2021	广州	14:00	兰州	17:00
2022	广州	17:00	兰州	20:00
3011	北京	5:00	广州	8:00
3012	北京	9:00	广州	12:00
3013	北京	13:00	广州	16:00
3014	北京	18:00	广州	21:00
3021	广州	6:00	北京	9:00
3022	广州	10:00	北京	13:00
3023	广州	14:00	北京	17:00
3024	广州	18:00	北京	21:00

设飞机在机场停留期间的费用与停留时间的平方成正比，又每架飞机从降落到再起飞至少需要2小时的时间准备。确定一个使总的停留费用为最小的方案。

知识点总结

1. 如何将产销不平衡运输模型转化为产销平衡运输模型？
2. 运输模型的应用。

第六讲 整数线性规划模型

运筹与决策

理论分析

数据、模型、决策

- 不确定型决策
- 风险型决策
- 确定型决策

运筹学基础模型

原理、方法与操作

- 最大最小准则
- 最大最大准则
- 等可能性准则
- 乐观系数准则
- 后悔值准则

- 期望值准则
- 全情报价值准则
- 样本情报价值准则
- 效用值准则

- 线性规划模型
- 线性规划模型拓展
- 动态规划
- 排队论
- 存储论
- …………

运筹学模型的应用拓展

原理、方法与操作

- LP灵敏度分析
- 线性规划应用
- **整数规划模型**
- 运输模型
- 目标规划模型
- 网络优化模型

价值系数变化影响
常数项变化影响
百分之法则
相差值分析

生产安排问题
排班问题
套材下料问题
连续投资问题

纯整数规划模型
0-1整数规划模型
混合整数规划模型
整数规划的特殊应用

产销平衡运输模型
产大于销运输模型
销大于产运输模型
条件产销不平衡模型
转运模型

有优先级目标规划
加权目标规划

最短路模型
最小支撑树模型
最大流模型
最小费用流模型

主要内容

1. 整数线性规划模型
2. 整数线性规划模型的求解
3. 整数线性规划模型的应用

案例分析

案例6.1　某工厂用两种原材料A和B生产两种产品Ⅰ、Ⅱ，两种产品的定额及原材料库存情况如下表：

货物	产品Ⅰ(件)	产品Ⅱ(件)	原材料库存量
原材料A(Kg)	2	3	14
原材料B(Kg)	2	1	9

每件产品Ⅰ和产品Ⅱ可获得的利润分别为3元和2元。问工厂应如何安排生产，使总的利润为最高?

案例分析

案例 6.2 背包问题(Knapsack Problem)

一登山队员做登山准备，他需要携带的物品有：食品，氧气，冰镐，绳索，帐篷，照相机和通讯设备，每种物品的重要性系数和重量如下，且假定登山队员可携带最大重量为25公斤。

序号	1	2	3	4	5	6	7
物品	食品	氧气	冰镐	绳索	帐篷	相机	设备
重量	5	5	2	6	6	2	4
重要系数	20	15	18	14	10	4	8

问题为：在携带物品总重量不超过规定条件下，应当携带哪些物品，可使重要性最大?

整数线性规划模型

整数线性规划（ILP，Integer Linear Programming）是一类要求变量取整数值的线性规划。

根据变量取值的性质，又可分为以下三类：

1、纯整数规划（所有变量全都是非负整数）

2、0-1整数规划（所有变量全都是0-1整数）

3、混合整数规划（三种变量都可以）

整数线性规划模型的一般形式

特殊要求

$$\text{Max (min) } Z = \Sigma\, c_j\, x_j$$

$$\text{s.t. } \Sigma\, a_{ij}\, x_j \le b_i \quad (i=1, 2, \ldots, m)$$

$$x_j \ge 0$$ 且部分或全部是整数

整数线性规划模型 ⟷ LP松弛问题

整数线性规划模型的求解

- 假如放弃变量整数要求后所求得的最优解恰好满足整数性要求，则此解就是原整数线性规划的最优解。

- 假如放弃变量整数要求后所求得的最优解不满足整数性要求?

  - 分支定界法
  - 割平面法

  - 隐枚举法
  - 匈牙利法

整数线性规划模型的应用

例6.1 工商银行准备用不超过900万元的投资，完成在兰州市五个城区扩展银行储蓄所。拟议中有14个位置B_i（i=1，2，3，…，14）可以选择，考虑到各地区居民的消费水平及居民居住密集度，规定：

在城关区由B_1，B_2，B_3，B_4四个点最多选择三个；
在七里河区由B_5，B_6，B_7三个点中至少选两个；
在安宁区由B_8，B_9两个点中至少选一个；
在西固区由B_{10}，B_{11}两个点中至少选一个；
在红古区由B_{12}，B_{13}，B_{14}三个点中至少选两个。
B_i各点的投资及每年可获利润由于地点不同都是不一样的，预测情况如下表所示。

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	B_9	B_{10}	B_{11}	B_{12}	B_{13}	B_{14}
投资额	80	100	120	110	70	90	80	140	160	150	130	60	80	70
利润	36	54	22	28	35	23	46	59	60	40	28	25	35	40

问应选择哪几个储蓄点，可使总的年利润为最大？

例6.2　兰州一企业在兰州已有一个生产具有西北特产药材的中药厂，其产品的年生产能力为3万件，并且已在新疆、黑龙江、广东设立了三个固定的分销点。现在为了扩大生产，打算在北京、广州、成都和沈阳四处再选择几个地方建厂。各地建厂的固定成本、兰州厂及新建厂的产量、各分销点的销量以及产地到销地的单位运价（元/件）如下表所示。问应该在哪几个地方建厂，在满足销量的前提下，使工厂扩建后总的固定成本和总的运输费用之和为最少。

运输价格　销地 产地	新疆	黑龙江	广东	固定成本（元）	产量（件）
兰州	8	15	10	0	30000
北京	12	7	9	370000	20000
广州	18	16	1	300000	40000
成都	11	12	8	375000	30000
沈阳	19	4	15	500000	10000
销量（件）	30000	20000	20000		

例6.3 四台设备加工4种零件所需时间（分钟）如下，应如何安排各零件的加工设备，可使加工效率最高？

零件 设备	A	B	C	D
甲	14	9	4	15
乙	11	7	9	10
丙	13	2	10	5
丁	17	9	15	13

例6.4 某公司在今后五年内考虑给下列项目投资，已知：

项目*A*：从第一年到第四年每年年初需要投资，并于次年末回收本利115％，但要求第一年要么不投资,要么投资最低金额为4万元，第二、三、四年不限。

项目*B*：第三年初需要投资，到第五年末能回收本利128％，但规定要么不投资,要么最低投资金额为3万元，最高金额为5万元。

项目*C*：第二年初需要投资，到第五年末能回收本利140％，但规定要么不投资,要么其投资额或为2万元或为4万元，或为6万元或为8万元。

项目*D*：五年内每年初可购买公债，于当年末归还，加利息6％，此项投资金额不限。

该部门现有资金10万元，问它应如何确定给这些项目的每年投资额，使到第五年末拥有的资金本利总额为最大？

课堂练习7.（整数线性规划）

某企业在A_1地已有一个工厂，其产品的生产能力为3万箱，产品专供于B_1、B_2两个销地。为了扩大生产，准备在A_2、A_3两再进行扩建。经考察，在A_2地建厂的固定成本为15.5万元，而在A_3地建厂的固定成本需要21万元。三个厂建成后的产能量、销地的需求量以及产地到销的单位运价（万元/万箱）如下表：

	B1	B2	固定成本/万元	产量/万箱
A1	6	4.5	0	3
A2	5	5.6	15.5	5
A3	3.5	2	21	6
销量（万箱）	7.5	2.5		

请建立模型用于决策，确定在哪里建厂，在满足销量的前提下，使总的固定成本及运输成本之和为最低。

知识点总结

1．0-1整数线性规划模型的建立

第七讲 目标规划模型

纵横运筹学

理论分析

数据、模型、决策

- 不确定型决策
- 风险型决策
- 确定型决策

运筹学基础模型

原理、方法与操作

最大最小准则
最大最大准则
等可能性准则
乐观系数准则
后悔值准则

期望值准则
全情报价值准则
样本情报价值准则
效用值准则

线性规划模型
线性规划模型拓展
动态规划
排队论
存储论
…………

运筹学模型的应用拓展

原理、方法与操作

价值系数变化影响
常数项变化影响
百分之百法则
相差值分析

LP灵敏度分析
线性规划应用
整数规划模型
运输模型
目标规划模型
网络优化模型

最短路模型
最小支撑树模型
最大流模型
最小费用流模型

生产安排问题
排班问题
套材下料问题
连续投资问题

纯整数规划模型
0-1整数规划模型
混合整数规划模型
整数规划的特殊应用

产销平衡运输模型
产大于销运输模型
销大于产运输模型
条件产销不平衡模型
转运模型

有优先级目标规划
加权目标规划

主要内容

1. 目标规划问题的提出
2. 有优先级目标规划模型
3. 加权目标规划模型

案例分析

案例7.1 一位投资商有一笔资金准备购买股票。资金总额为10万元，目前可选的股票有A和B两种（可以同时投资于两种股票）。其价格以及年收益率和风险系数下表所示：

股票	价格（元）	年收益（元）	风险系数
A	25	3	0.5
B	50	4.5	0.3

假设这两种股票可以以元为单位购买，试求一种投资方案，使得一年的总投资风险值不高于800，且投资收益不低于1.2万元。

目标规划问题的提出

线性规划只研究在满足一定条件下，单一目标函数取得最优解。

而在企业管理中，经常遇到多目标决策问题，且这些目标之间的重要程度（即优先顺序）也不相同，有些目标之间往往相互发生矛盾。

如：拟订生产计划时，不仅考虑总产值，同时要考虑利润、产品质量和设备利用率等。

此外，线性规划把各个约束条件的重要性都不分主次地等同看待，这也不符合实际情况。

求解线性规划问题，首先要求约束条件必须相容，如果约束条件中，由于人力、设备等资源条件的限制，使约束条件之间出现了矛盾，就得不到问题的可行解，但生产还得继续进行，这将给人们进一步应用线性规划方法带来困难。

没有可行域，但还必须进行决策。

目标规划

多个目标

有具体的目标值但不一定是最优且未必能达到

仍是线性规划应用的拓展

例1. 某工厂用同一种原材料生产甲乙两种产品，该厂提出如下目标: (1) 利润达到280百元；(2) 钢材不超过100吨；(3) 工时不超过120小时。如果存在以下4个方案，请问应该选择哪一个生产方案？

方案编号	*利润(百元)*	*钢(吨)*	*工时(时)*
1	290	110	130
2	280	100	115
3	285	95	190
4	270	90	120

例2. 某工厂用同一种原材料生产甲乙两种产品，该厂提出如下目标: (1) 利润达到280百元；(2) 钢材不超过100吨，工时不超过120小时。如果存在以下4个方案，请问应该选择哪一个生产方案？

方案编号	利润(百元)	钢(吨)	工时(时)
1	290	110	130
2	280	100	115
3	285	95	190
4	270	90	120

课堂讨论

方案编号	利润(百元)	钢(吨)	工时(时)
1	270	108	130
2	270	80	160
3	260	80	120
	> 280	**< 100**	**< 120**

试对上述三个方案进行评价。

理论分析

多目标问题

- 每个目标都必须考虑
- 分优先级或加权重
  - 重要的目标优先保证
  - 次要的目标尽量满足
- 若达不到目标，就找距目标的偏差最小

1. 多目标优先级

先将目标等级化：将目标按重要性的程度不同依次分成一级目标、二级目标、.....，最次要的目标放在最次要的等级中。

为了将不同级别的目标的重要性用数量表示，引进P1，P2，…，用它表示各级的重要程度，规定P1>P2 > P3 >…。称P1，P2，…为级别系数。

2. 目标优先级的约定

对同一个目标而言，若有几个决策方案都能使其达到，可认为这些方案就这个目标而言都是最优方案；若达不到，则与目标差距越小的越好。

2. 目标优先级的约定

同一级别的目标可以是多个。各自之间的重要程度可用数量（权数）来描述。因此，同一级别的目标的其中一个的损失，可由其余目标的适当收获来弥补。

2. 目标优先级的约定

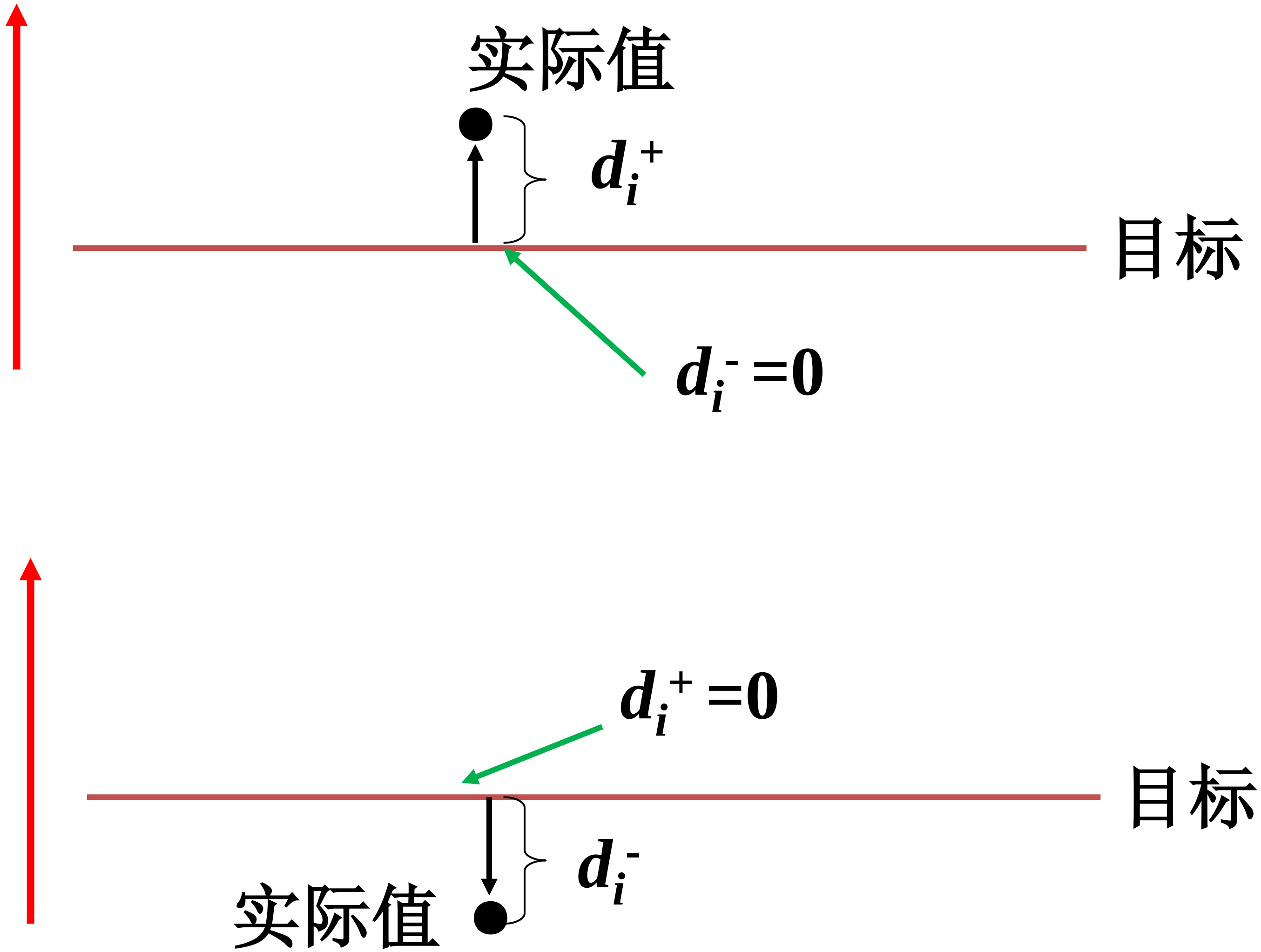
不同级别的目标的重要性是不可比的。即较高级别的目标没有达到的损失，任何较低级别的目标上的收获都不可弥补。所以在判断最优方案时，首先从较高级别的目标达到的程度来决策，然后再对其它次级目标进行判断。

3. 引入偏差变量

- 将第i个目标函数表示为：$\sum a_{ij}x_j \le(\ge)\ b_i$，称之为目标约束条件

- 在第i个目标约束条件 中引入非负偏差变量 d_i^+, d_i^-

其中，d_i^+表示第i个目标约束条件左边的实际值高于目标(b_i)的部分，d_i^-表示第i个目标约束条件左边的实际值低于目标(b_i)的部分，且$d_i^+\ge0$，$d_i^-\ge0$。


实际值
d_i^+
目标
$d_i^-=0$
$d_i^+=0$
目标
d_i^-
实际值

由上图可知，偏差变量 d_i^+, d_i^-之间必定存在如下关系：

若 $d_i^+>0$ 必定有$d_i^-=0$；$d_i^->0$ 也必定有$d_i^+=0$，两者不会同时大于0。但若约束条件中左右两边相等时，d_i^+、d_i^-同时等于0。

3. 引入偏差变量

- 将第i个目标函数表示为：$\sum a_{ij}x_j \leq(\geq)$ b_i， 称之为目标约束条件

- 在第i个目标约束条件 中引入非负偏差变量 d_i^+, d_i^-

- 则第i个目标约束条件表示如下：

$\sum a_{ij}x_j$ (实际值) = b_i (常数项/目标值)+ d_i^+ - d_i^-

即： $\sum a_{ij}x_j$ (实际值)) - d_i^+ + d_i^- = b_i (常数项/目标值)

因此，若决策目标中规定 $\sum a_{ij}x_j \leq b_i$，当 d_i^+ =0 时目标才算达到。

若决策目标中规定 $\sum a_{ij}x_j \geq b_i$，当 d_i^- =0 时目标才算达到。

若决策目标中规定 $\sum a_{ij}x_j = b_i$，当 $d_i^+ = d_i^-$ =0 时目标才算达到。

若上述决策目标不能实现，怎么办？

若上述决策目标不能实现，则希望 d_i^+ 或者 d_i^- 尽可能的小，即目标函数转变为：

$$\min \ d_i^+$$

或 $$\min \ d_i^-$$

或 $$\min \ (d_i^+ + d_i^-)$$

目标规划数学模型特点：

目标函数： $\min\ d_i^+$

或 $\min\ d_i^-$

或 $\min\ (d_i^+ + d_i^-)$

约束条件：

$\sum a_{ij}x_j - d_i^+ + d_i^- = b_i$ (目标函数)

目标规划模型

有优先级目标规划模型

加权目标规划模型

有优先级目标规划模型

有优先级目标规划模型

案例7.1 一位投资商有一笔资金准备购买股票。资金总额为10万元，目前可选的股票有A和B两种（可以同时投资于两种股票）。其价格以及年收益率和风险系数下表所示：

股票	价格（元）	年收益（元）	风险系数
A	25	3	0.5
B	50	4.5	0.3

假设这两种股票可以以元为单位购买，试求一种投资方案，使得一年的总投资风险值不高于800，且投资收益不低于1.2万元。

案例7.1解析(一)

在一般的投资活动中，都有争取收益最大化和风险最小化两个目标。

第一目标：降低风险

第二目标：增加收益

因此，对于该投资决策的问题，就应该建立有两个优先级的目标规划模型

第一级目标规划模型：

$$\min d_1^+$$

绝对约束

s.t. $x_1+x_2\leq 100000$

目标约束

$$0.02x_1+0.006x_2-d_1^++d_1^-=800$$

$$x_1,\ x_2,\ d_1^+,\ d_1^-\geq 0$$

绝对变量 偏差变量

决策变量

第二级目标规划模型：

$$\min d_2^-$$

s.t. $x_1+x_2 \le 100000$

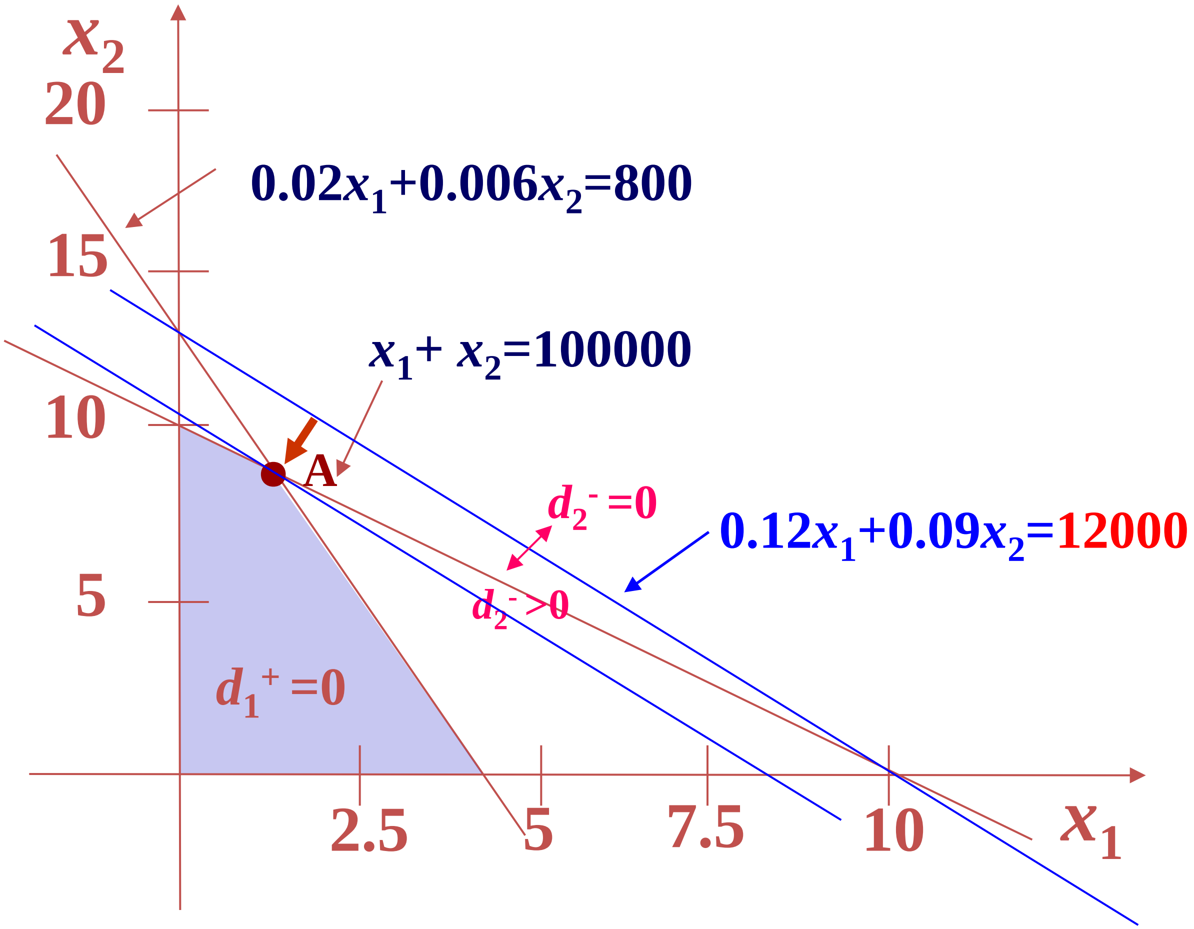
$0.02x_1+0.006x_2-d_1^++d_1^-=800$

$0.12x_1+0.09x_2-d_2^++d_2^-=12000$

增加第一级d_1^+的结果

$x_1, x_2, d_1^+, d_1^-, d_2^+, d_2^- \ge 0$

图解法



x_2
20
15
10
5
$0.02x_1+0.006x_2=800$
$x_1+x_2=100000$
A
$d_2^-=0$
$d_2^->0$
$0.12x_1+0.09x_2=12000$
$d_1^+=0$
2.5
5
7.5
10
x_1

最优解: A点的坐标是（14285.71，85714.29 ）

最优值: 第一级 $d_1^+ = 0$

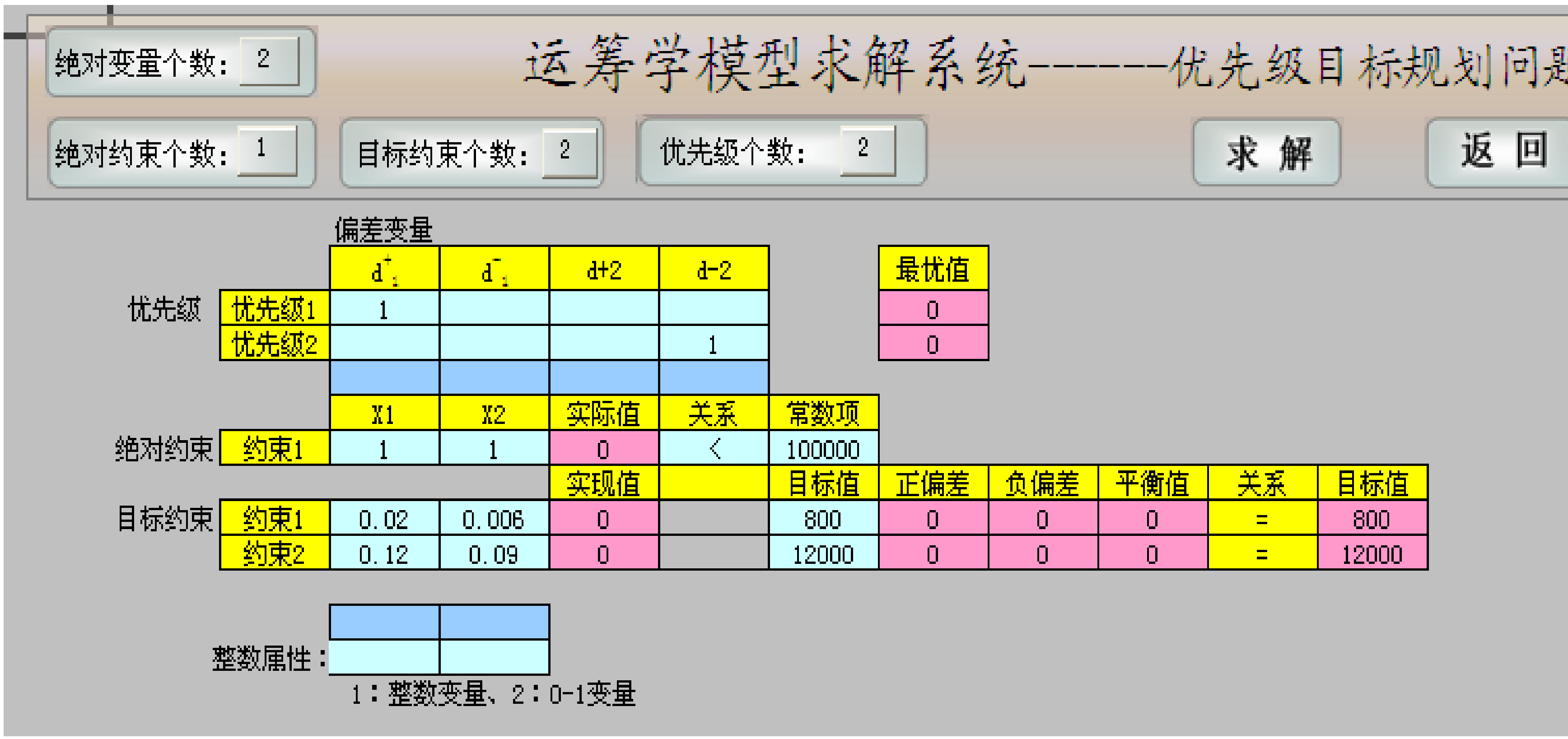
第二级 $d_1^- = 2751.43$

即：总风险为800，实现了第一级目标;

总收益为0.12×14285.71+0.09×85714.29＝9248.57＜12000， 还差2751.43没有达到第二个目标。

本案例中，优先级高的目标实现了，并付出了优先级低的目标没有实现的代价。

计算机求解结果



绝对变量个数: 2
运筹学模型求解系统——————优先级目标规划问题
绝对约束个数: 1
目标约束个数: 2
优先级个数: 2
求 解
返 回
偏差变量
优先级
优先级1
优先级2
d+1 d-1 d+2 d-2
1
1
最优值
0
0
X1 X2 实际值 关系 常数项
绝对约束 约束1 1 1 0 < 100000
实现值 目标值 正偏差 负偏差 平衡值 关系 目标值
目标约束
约束1 0.02 0.006 0 800 0 0 0 = 800
约束2 0.12 0.09 0 12000 0 0 0 = 12000
整数属性：
1：整数变量、2：0-1变量

计算机求解结果

绝对变量个数：2

绝对约束个数：1　　目标约束个数：2　　优先级个数：2

运筹学模型求解系统------优先级目标规划

求 解

偏差变量

		d_1^+	d_1^-	d+2	d-2		最优值
优先级	优先级1	1					0
	优先级2				1		2571.43
		0	0	0	2571.43		

		X1	X2	实际值	关系	常数项
绝对约束	约束1	1	1	100000	<	100000

		X1	X2	实现值		目标值	正偏差	负偏差	平衡值	关系	目标值
目标约束	约束1	0.02	0.006	800		800	0	0	800	=	800
	约束2	0.12	0.09	9428.57		12000	0	2571.43	12000	=	12000

	14285.7	85714.3
整数属性：		

1：整数变量、2：0-1变量

第1级结果	绝对变量	X1	X2			最优值	0
		0	0				
	偏差变量	d_1^+	d_1^-	d_2^+	d_2^-		
		0	800	0	0		
第2级结果	绝对变量	X1	X2			最优值	2571.43
		14285.7	85714.3				
	偏差变量	d_1^+	d_1^-	d_2^+	d_2^-		
		0	0	0	2571.43		

课堂讨论

案例7.1解析(二)

若是调整公司的收益最大化和风险最小化两个目标的优先级：

第一目标：增加收益

第二目标：降低风险

请思考该目标规划问题的解是否一致？

计算机求解结果

运筹学模型求解系统——优先级目标规划问题

绝对变量个数：2

绝对约束个数：1　目标约束个数：2　优先级个数：2　求 解　返 回

偏差变量

优先级	d_1^+	d_1^-	d+2	d-2	最优值
优先级1				1	0
优先级2	1				1200
	1200	0	0	0	

绝对约束	X1	X2	实际值	关系	常数项
约束1	1	1	100000	<	100000

目标约束			实现值		目标值	正偏差	负偏差	平衡值	关系	目标值
约束1	0.02	0.006	2000		800	1200	0	800	=	800
约束2	0.12	0.09	12000		12000	0	0	12000	=	12000

	100000	0
整数属性：		

1：整数变量、2：0-1变量

有优先级目标规划模型的求解过程

1、分级确定解的可行域

2、对优先级高的目标求解，如果找不到能满足的目标解，则寻找最接近该目标的解

3、对次级优先级的目标进行求解，但必须保证所有先前优先级的目标不变

4、重复第3步，直至所有优先级目标都求解完。

有优先级目标规划模型的特征

1、所有决策模型都是最小化目标，且都只包含偏差变量，不包含绝对变量

2、约束条件中可以有绝对约束和条件约束，但条件约束都是“=”

3、需要分级建模型、分级求解，每一级都解决一组目标的最小值问题，上级目标函数值，要作为下级的约束条件来使用（每级都是保证在前期决策结果的前提下进行再决策）

4、目标规划模型可分为标准型和分级型，但具体求解只能按分级型求解

目标规划模型的标准形式 ——案例7.1

表示优先级

$$\min p_1(d_1^+) + p_2(d_2^-)$$

s.t.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 100000 \\ 0.02x_1 + 0.006x_2 - d_1^+ + d_1^- = 800 \\ 0.12x_1 + 0.09x_2 - d_2^+ + d_2^- = 12000 \\ x_1,\ x_2,\ d_1^+,\ d_1^-,\ d_2^+,\ d_2^- \ge 0 \end{cases}$$

包括所有的约束条件

课堂练习8（目标规划模型）

将如下目标规划模型标准型转换为有优先级目标规划模型的分级形式：

$$\mathrm{Min}\ f = P_1(d_1^+) + P_2(d_2^+ + d_3^+ + d_4^+) + P_3(d_5^- + d_6^-)$$

$$\begin{aligned}
\text{s.t.}\quad & 500x_1 + 500x_2 + 1000x_3 + d_1^- - d_1^+ = 9000 \\
& x_1 + d_2^- - d_2^+ = 3 \\
& -x_1 + x_2 + d_3^- - d_3^+ = 3 \\
& -x_2 + x_3 + d_4^- - d_4^+ = 0 \\
& x_2 + d_5^- - d_5^+ = 4.5 \\
& x_3 + d_6^- - d_6^+ = 4.5 \\
& x_1、x_2、x_3 \ge 0,\ d_i^+、d_i^- \ge 0,\ (i = 1, 2, \ldots, 6)
\end{aligned}$$

课堂讨论

某公司近期准备投放两个新产品A、B，为保证一次投放成功，公司决定在大量投放前先做一次从生产到销售一体化的小批量试点。已知生产一件产品A需要成本200元，生产一件产品B需要成本300元。A，B产品的单位利润分别为250元和125元。

企业决策层决定:

该批试点的首要任务是保证质量和资金投入，要求总耗费资金不能低于60000元，但也不能超过68000元的极限；

次要任务是要求总的利润不低于70000元；

在前两个任务的前提下，为了保证库存需要，要求产品A和B的总产量分别不低于200和120件。由于B产品比A产品更重要，再假设B完成最低产量120件的重要性是A完成200件的重要性的2倍。

试做该试点安排的最优决策。

加权目标规划模型

加权目标规划模型

加权目标规划是另一种解决多目标决策问题的方法，其基本方法是通过量化的方法分配给每个目标偏离严重程度的一个罚数权重，然后建立总的目标函数，该目标函数表示的目标是要使每个目标函数与各自目标的加权偏差之和最小。此时，除具有两种性质不同的决策变量外，所有单个的目标函数及约束条件都符合线性规划的要求，因此整个问题就可以表述为一个单目标规划模型。

如在例7.2中我们对每周总耗费资金超过68000元或低于60000元的每元罚数权重定为7；总利润低于70000元时，每元的罚数权重为5；每周产品A产量低于200件时每件罚数权重为2，而每周产品B产量低于120件时每件罚数权重为4，则其目标变为

$$\min\ 7d_1^+ + 7d_2^- + 5d_3^- + 2\,d_4^- + 4d_5^-$$

约束条件与有优先级目标规划一样。

加权目标规划模型如下：

$$\min\ 7d_1^+ + 7d_2^- + 5d_3^- + 2d_4^- + 4d_5^-$$

s.t.

$$200x_1 + 300x_2 - d_1^+ + d_1^- = 68000$$
$$200x_1 + 300x_2 - d_2^+ + d_2^- = 60000$$
$$250x_1 + 125x_2 - d_3^+ + d_3^- = 70000$$
$$x_1 - d_4^+ + d_4^- = 200$$
$$x_2 - d_5^+ + d_5^- = 120$$
$$x_1、x_2、d_i^+、d_i^- \geq 0 \quad i=1.2.3.4.5$$

计算机求解结果

绝对变量个数: 2

绝对约束个数: 0　　目标约束个数: 5

运筹学模型求解系统------加权目标规划问题

求 解　　返 回

偏差变量

优先级	d^+_1	d^-_1	d+2	d-2	d+3	d-3	d+4	d-4	d+5	d-5
优先级1	7			7		5		2		4
	0	0	8000	0	0	0	50	0	0	60

最优值
240

目标约束			实现值		目标值	正偏差	负偏差	平衡值	关系	目标值
约束1	200	300	68000		68000	0	0	68000	=	68000
约束2	200	300	68000		60000	8000	0	60000	=	60000
约束3	250	125	70000		70000	0	0	70000	=	70000
约束4	1		250		200	50	0	200	=	200
约束5		1	60		120	0	60	120	=	120

	250	60
整数属性：		

1：整数变量、2：0-1变量

策结果：

绝对变量	X1	X2			最优值	240				
	250	60								
偏差变量	d^+_1	d^-_1	d^+_2	d^-_2	d^+_3	d^-_3	d^+_4	d^-_4	d^+_5	d^-_5
	0	0	8000	0	0	0	50	0	0	60

知识点总结

1. 有优先级目标规划模型及其标准形
2. 加权目标规划模型

第八讲 网络优化模型

运筹与决策

理论分析
数据、模型、决策

- 不确定型决策
- 风险型决策
- 确定型决策

运筹学基础模型

原理、方法与操作

- 最大最小准则
- 最大最大准则
- 等可能性准则
- 乐观系数准则
- 后悔值准则

- 期望值准则
- 全情报价值准则
- 样本情报价值准则
- 效用值准则

- 线性规划模型
- 线性规划模型拓展
- 动态规划
- 排队论
- 存储论
- …………

运筹学模型的应用拓展

原理、方法与操作

- 价值系数变化影响
- 常数项变化影响
- 百分之百法则
- 相差值分析

- LP灵敏度分析
- 线性规划应用
- 整数规划模型
- 运输模型
- 目标规划模型
- **网络优化模型**

- 最短路模型
- 最小支撑树模型
- 最大流模型
- 最小费用流模型

- 生产安排问题
- 排班问题
- 套材下料问题
- 连续投资问题

- 纯整数规划模型
- 0-1整数规划模型
- 混合整数规划模型
- 整数规划的特殊应用

- 产销平衡运输模型
- 产大于销运输模型
- 销大于产运输模型
- 条件产销不平衡模型
- 转运模型

- 有优先级目标规划
- 加权目标规划

主要内容

1．网络优化问题的提出

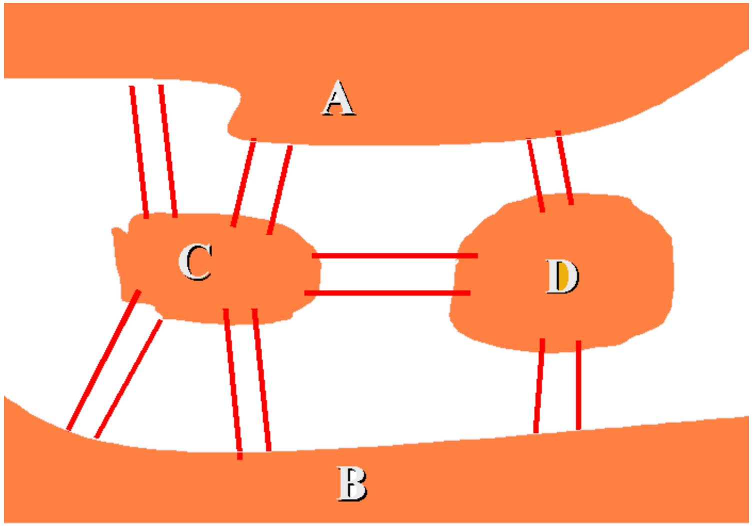
2．基本概念

3．典型问题（最短路问题、最小支撑树问题、最大流问题、最小费用流模型、最小费用最大流模型）

网络优化问题的提出

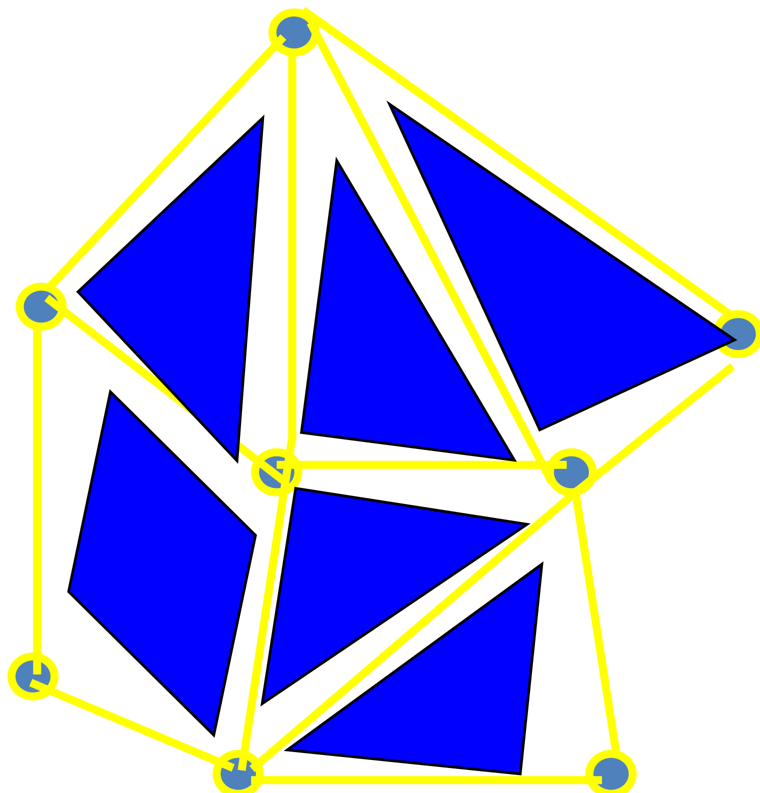
案例8.1　哥尼斯堡七桥问题

哥尼斯堡(现名加里宁格勒)是欧洲一个城市，Pregei河把该城分成两部分，河中有两个小岛。十八世纪，在这条河上建有七座桥，将河中间的两个岛和河岸联结起来。当时人们提出这样的问题：能不能每座桥都只走一遍，最后又回到原来的位置？



案例8.2　一笔画问题

某料场货物堆放如图。每晚有值班小组沿巡视道路巡视检查。问应如何设置两个休息站及确定一条以两个休息站为起、终点的巡视路线，使每条巡视道路恰好走过一次？



一笔画问题

显然，一个图若能一笔画出，这个图必然无奇次（奇阶）顶点；或者图中奇次（奇阶）顶点个数为2。

顶点次(阶)数：图中与顶点V关联的边数。

案例8.3　中国邮路问题

一个邮递员每次送信，从邮局出发，必须至少一次地走过他所负责投递的范围的每一条街道，待完成任务后仍回到邮局。问他应如何选择一条投递路线，使他能从邮局出发，走遍他负责送信的所有街道，最后回到邮局，并且所走的路程最短？

案例8.4　四色问题

四色问题的提出来自英国。1852年，毕业于伦敦大学的弗南西斯.格思里来到一家科研单位搞地图着色工作时，发现了一种有趣的现象："看来，每幅地图都可以用四种颜色着色，使得有共同边界的国家都被着上不同的颜色。"

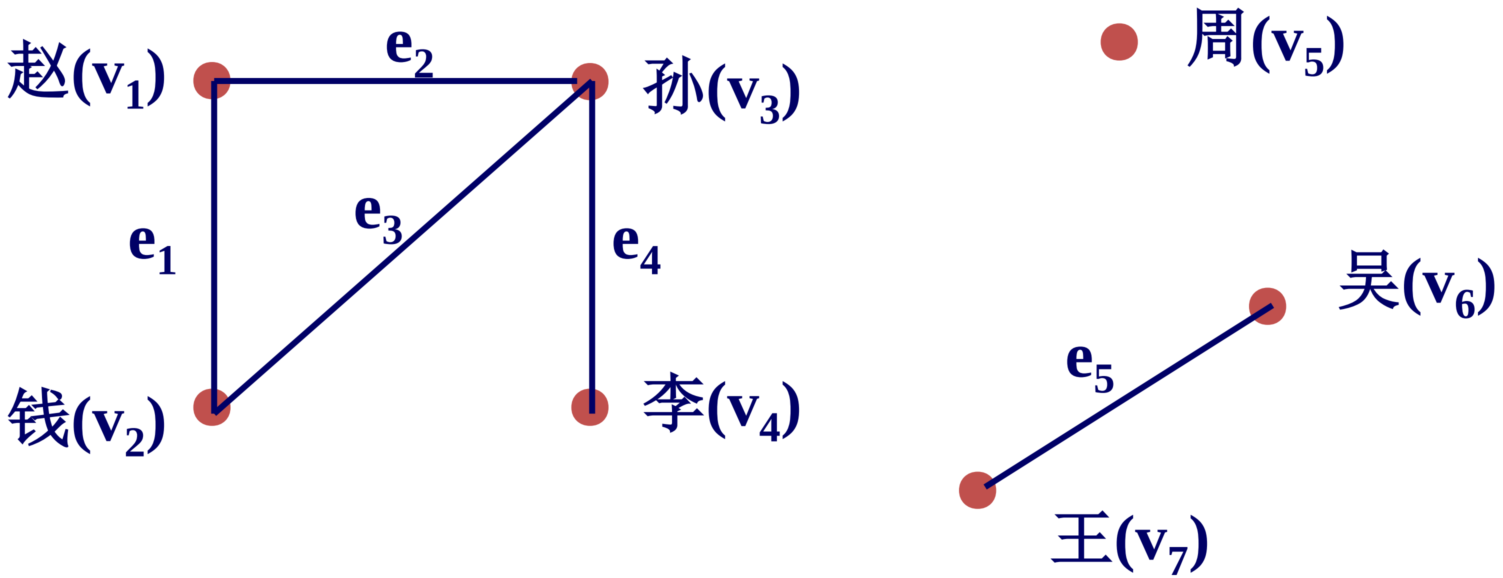
案例8.5 Hamilton回路

1859年，英国数学家哈密顿发明了一种游戏：用一个规则的实心十二面体，它的20个顶点标出世界著名的20个城市，要求游戏者找一条沿着各边通过每个顶点刚好一次的闭回路，即「绕行世界」。

基本概念

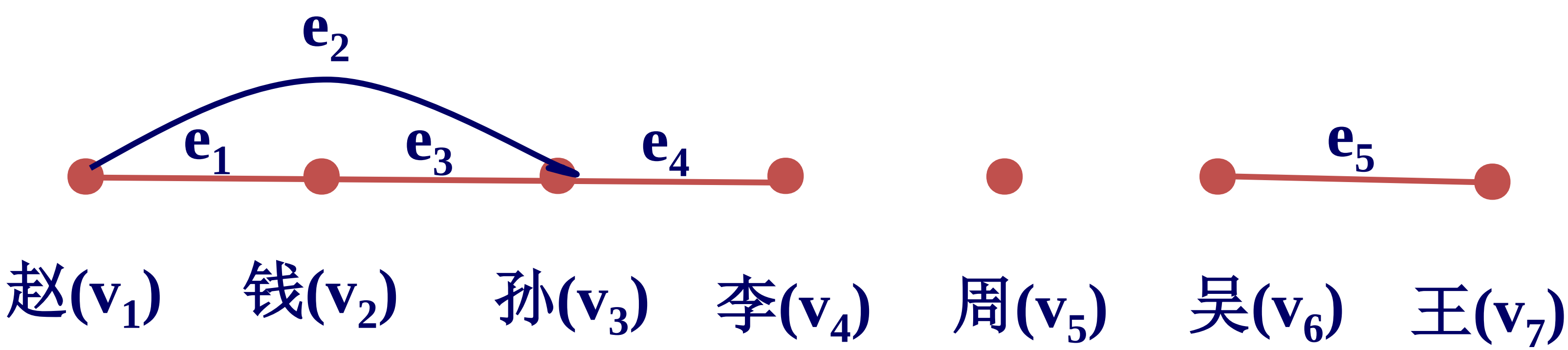
图论中的图是由若干给定的点及连接两点的线所构成的图形，这种图形通常用来描述某些事物之间的某种特定关系，用点代表事物，用连接两点的线表示相应两个事物间具有这种关系。因此图论主要是研究点和线之间的几何关系。

1、点和边



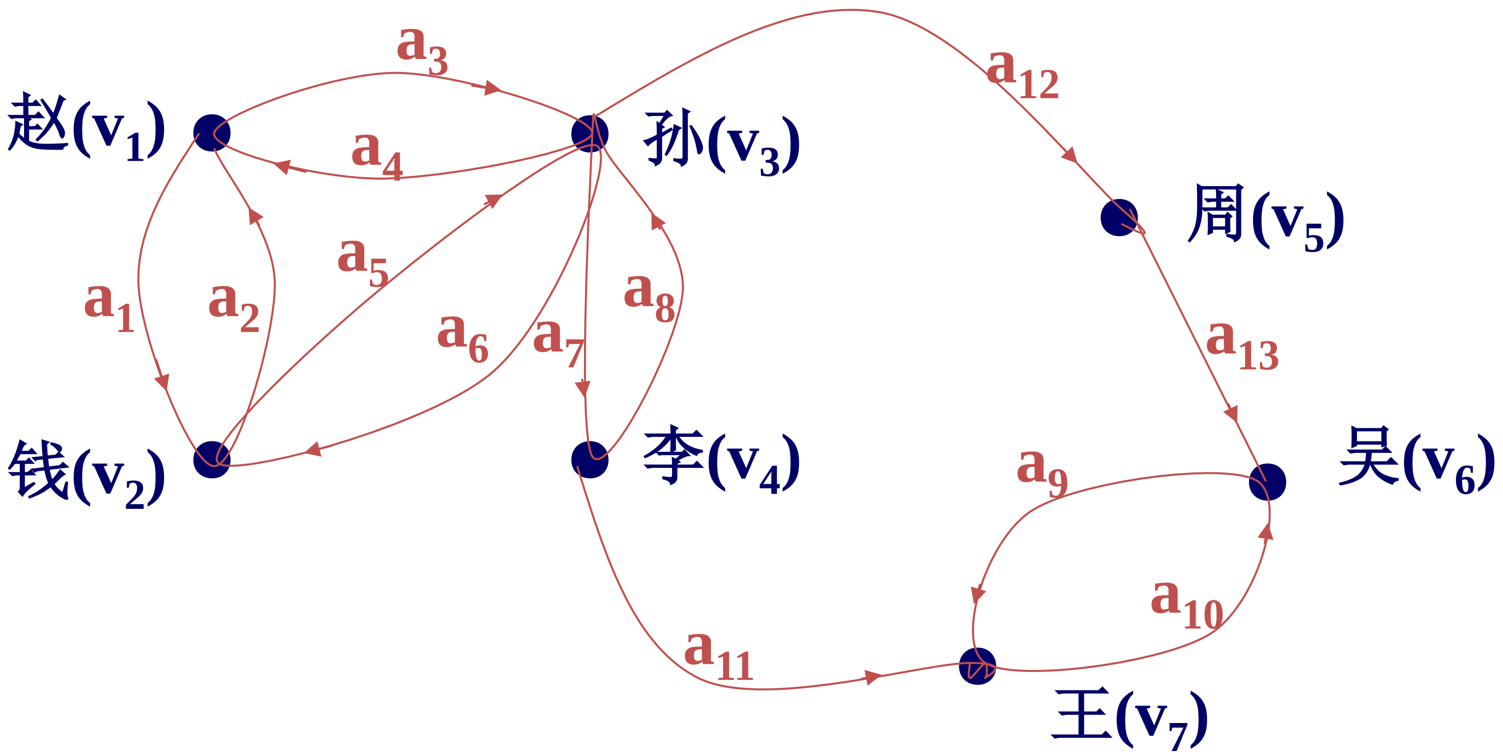
人群中相互认识关系图------无向图

1、点和边



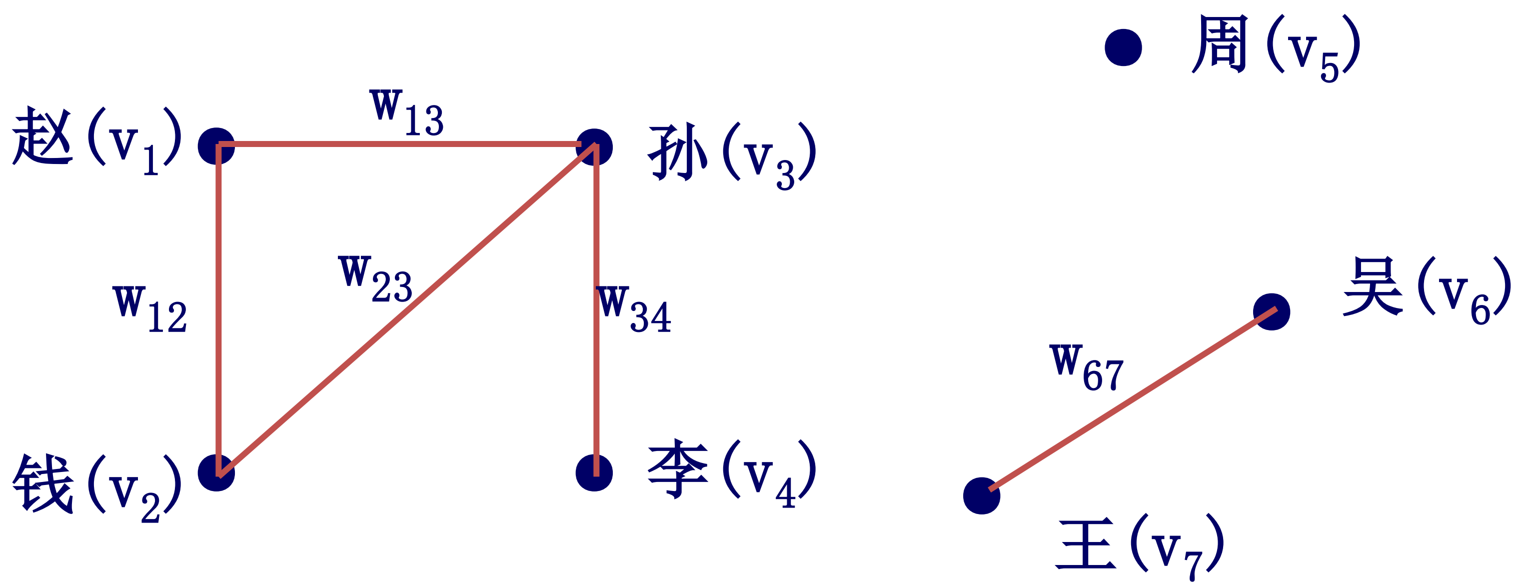
人群中相互认识关系图———无向图（另一种表述形式）

2、弧



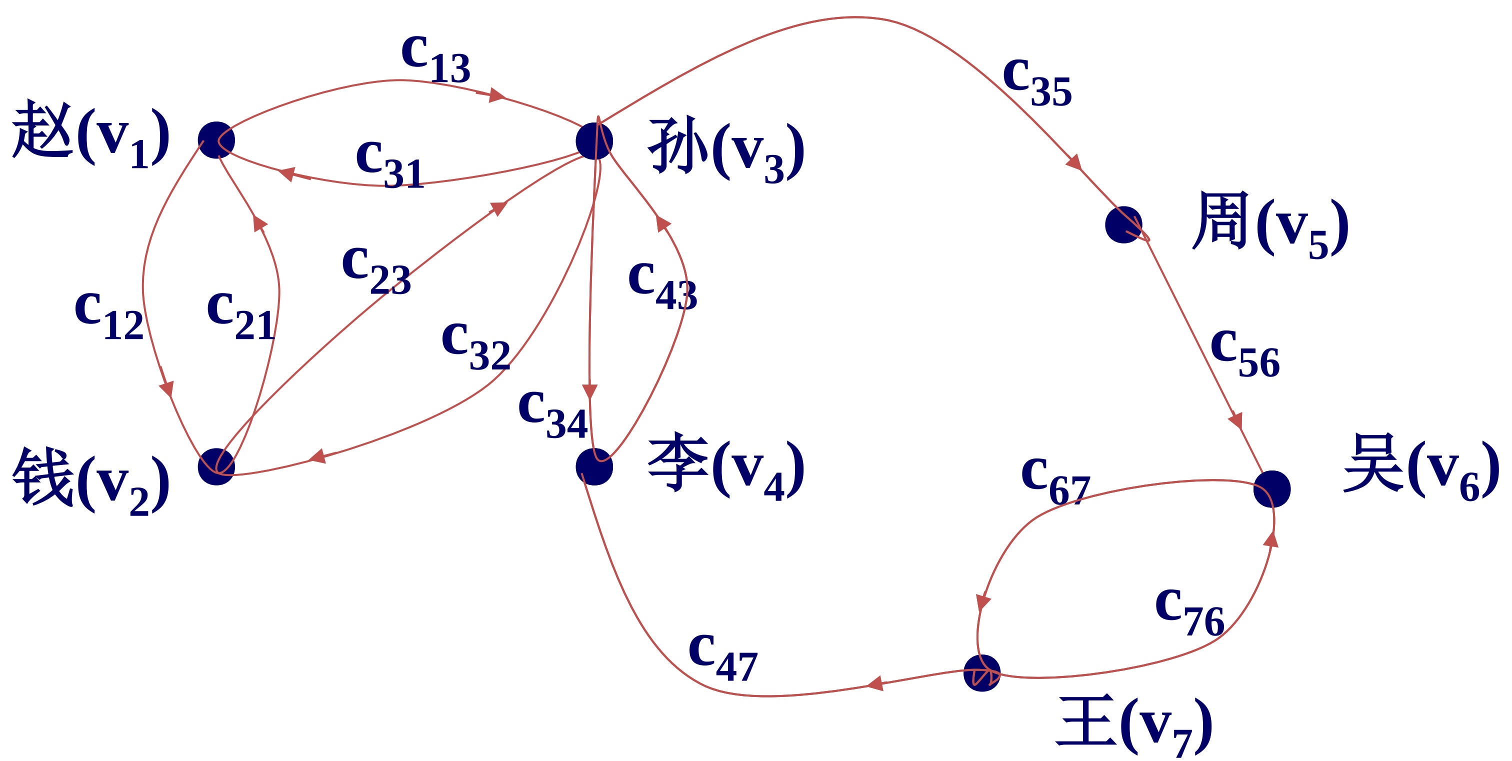
人群中相互认识关系图------有向图

3、赋权图



人群中相互认识关系图------无向赋权图

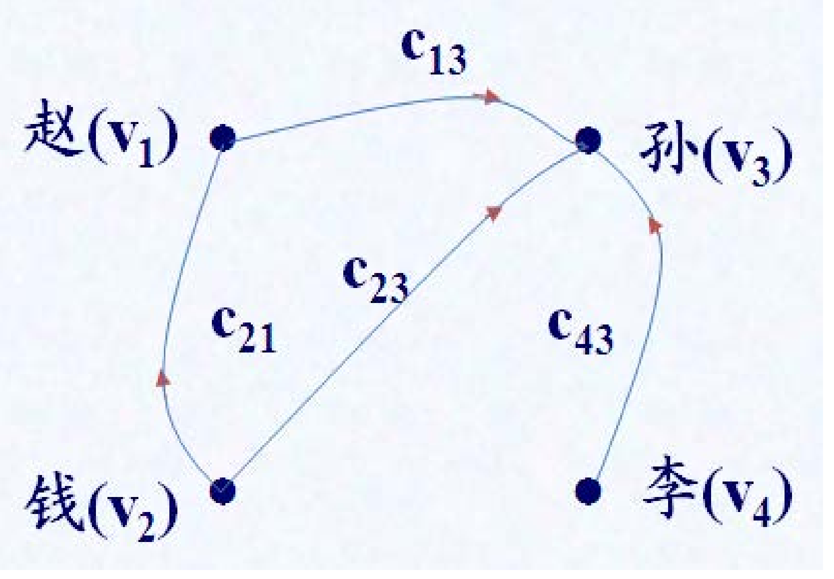
3、赋权图



人群中相互认识关系图------有向赋权图

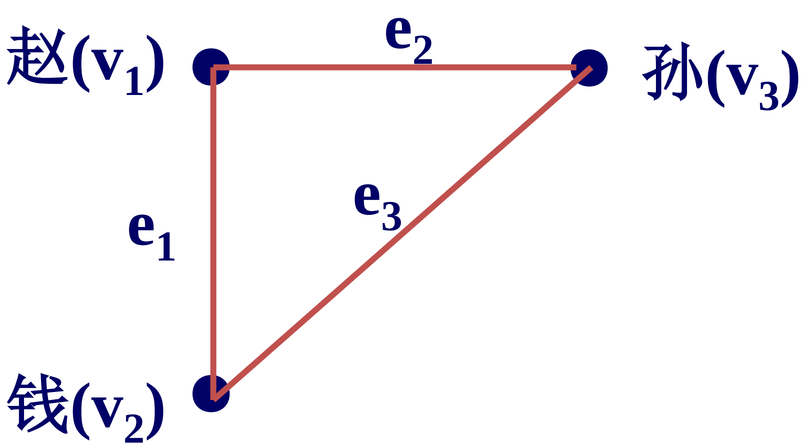
4、链

在有向图中，点v_i到v_j之间有两条以上的弧构成点和弧的交替序列, 其中点可重复，但弧不能重复，则称为一条链。



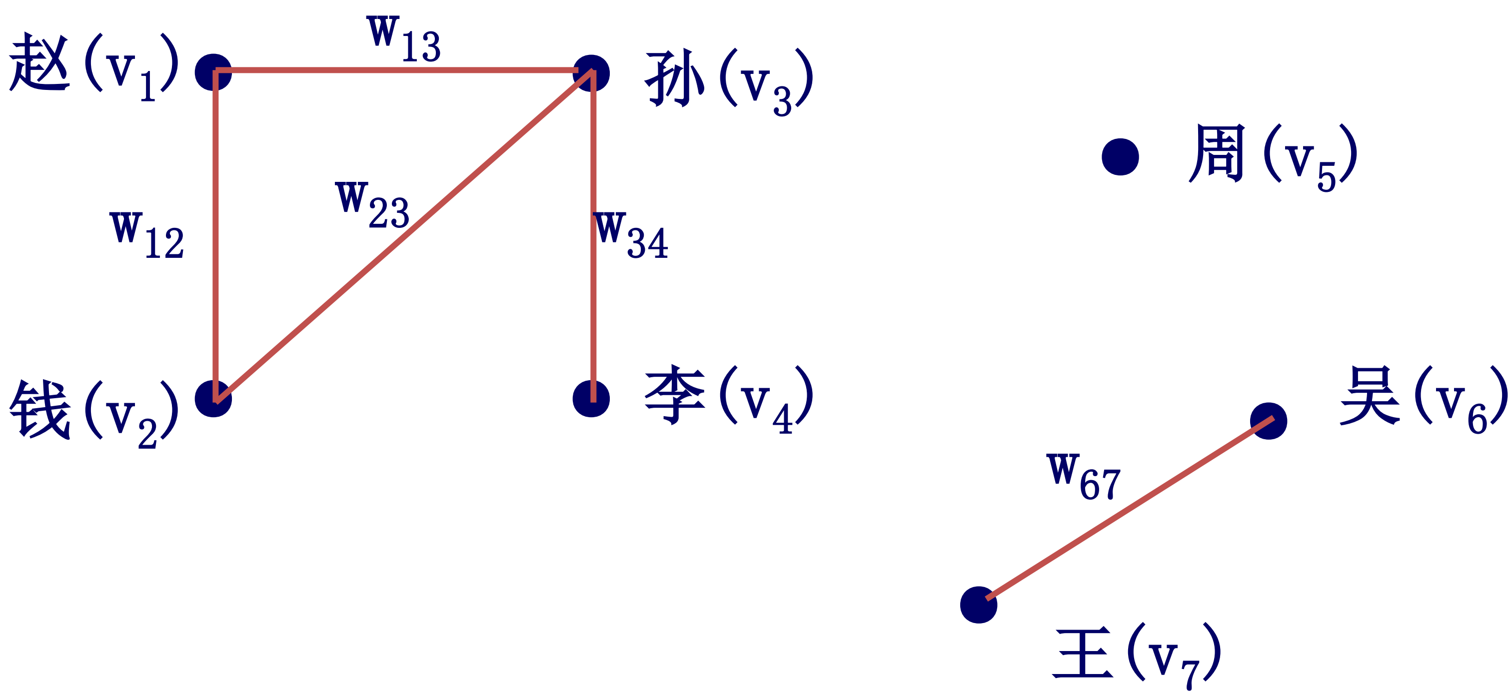
5、圈

始点和终点重合的链就是一个圈。



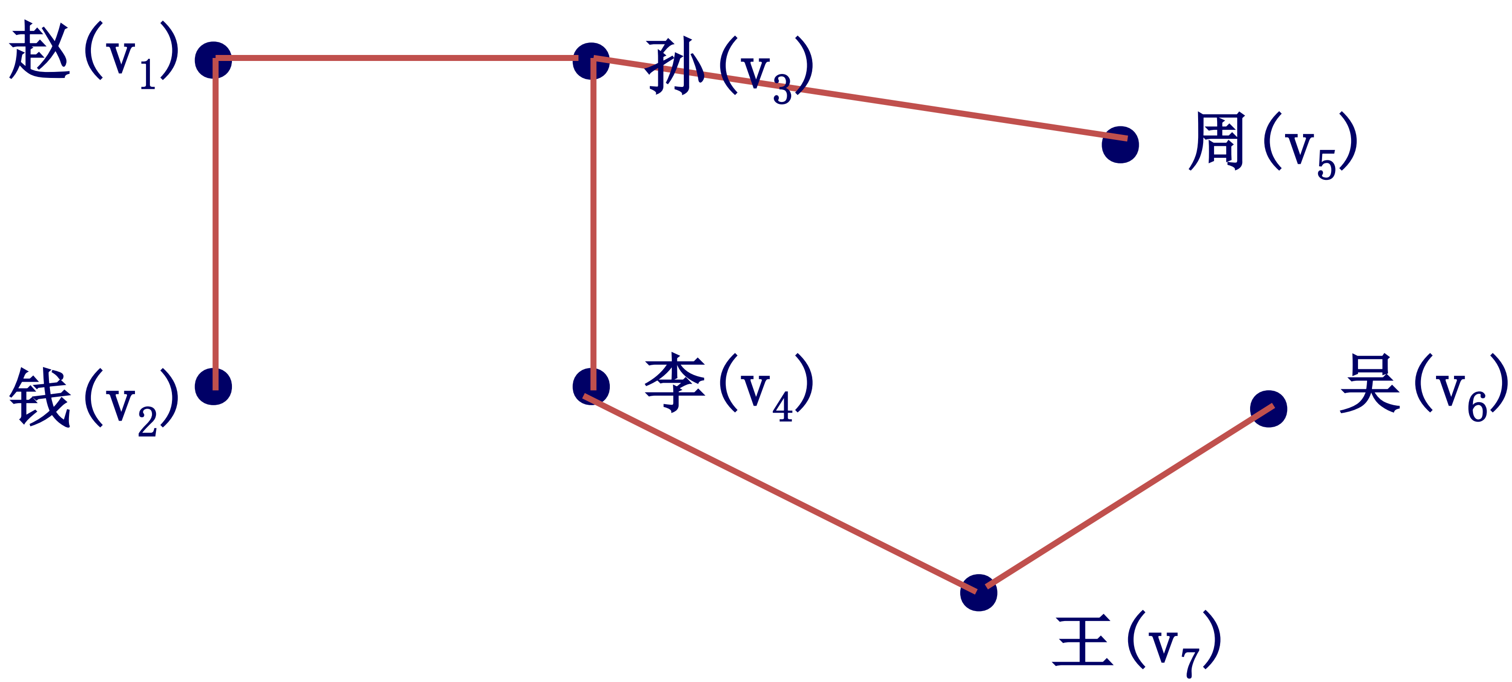
6、连通图

若一个图中，任意两点之间至少存在一条链，称这样的图为连通图。否则称之为不连通图。



7、树

树就是无圈的连通图。



7、树

(1)在图中任意两点之间必有一条而且只有一条通路。

(2)在图中划去一条边，则图不连通。

(3)在图中不相邻的两个顶点之间加一条边，可得一个且仅得一个圈。

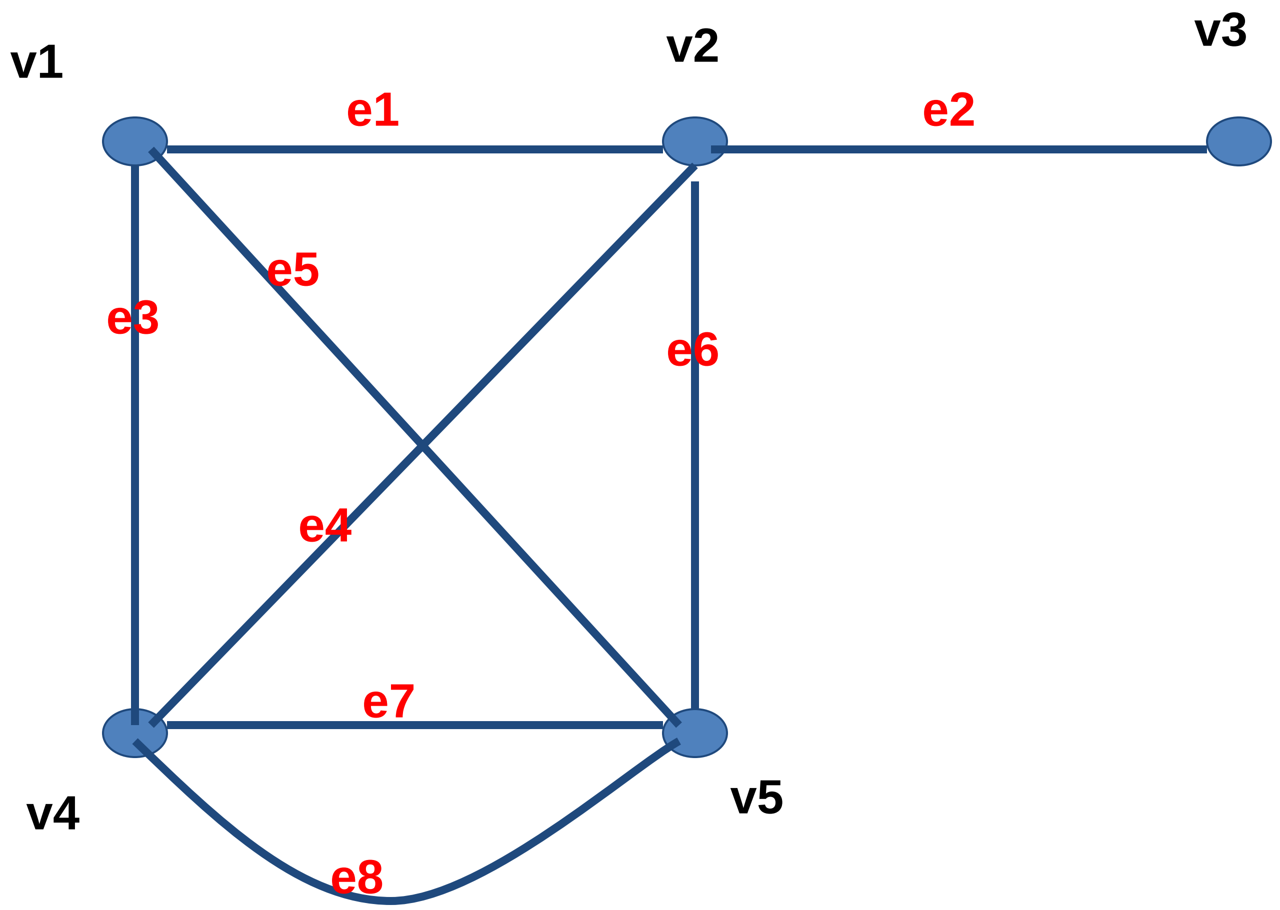
(4)图中边数有ne=p-1（p为顶点数）。

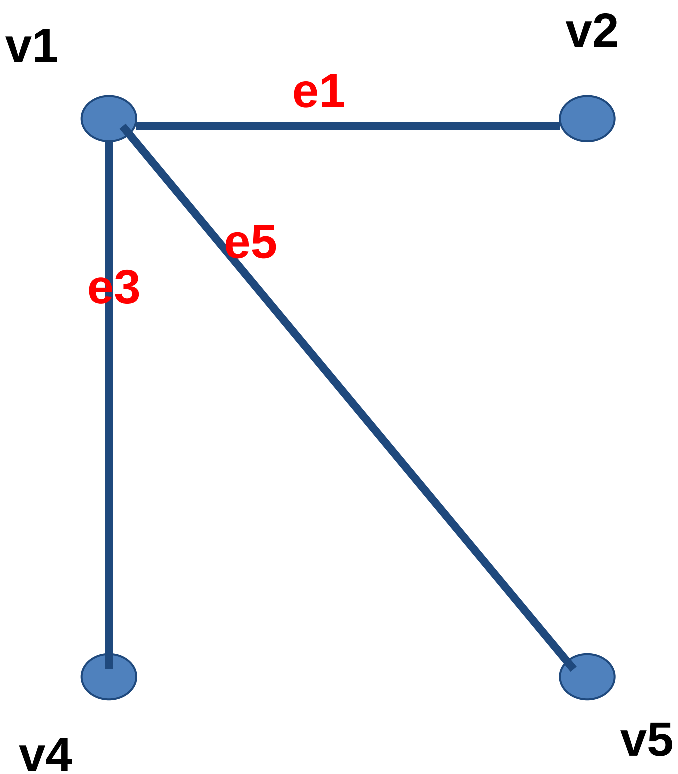
8. 子图和生成子图

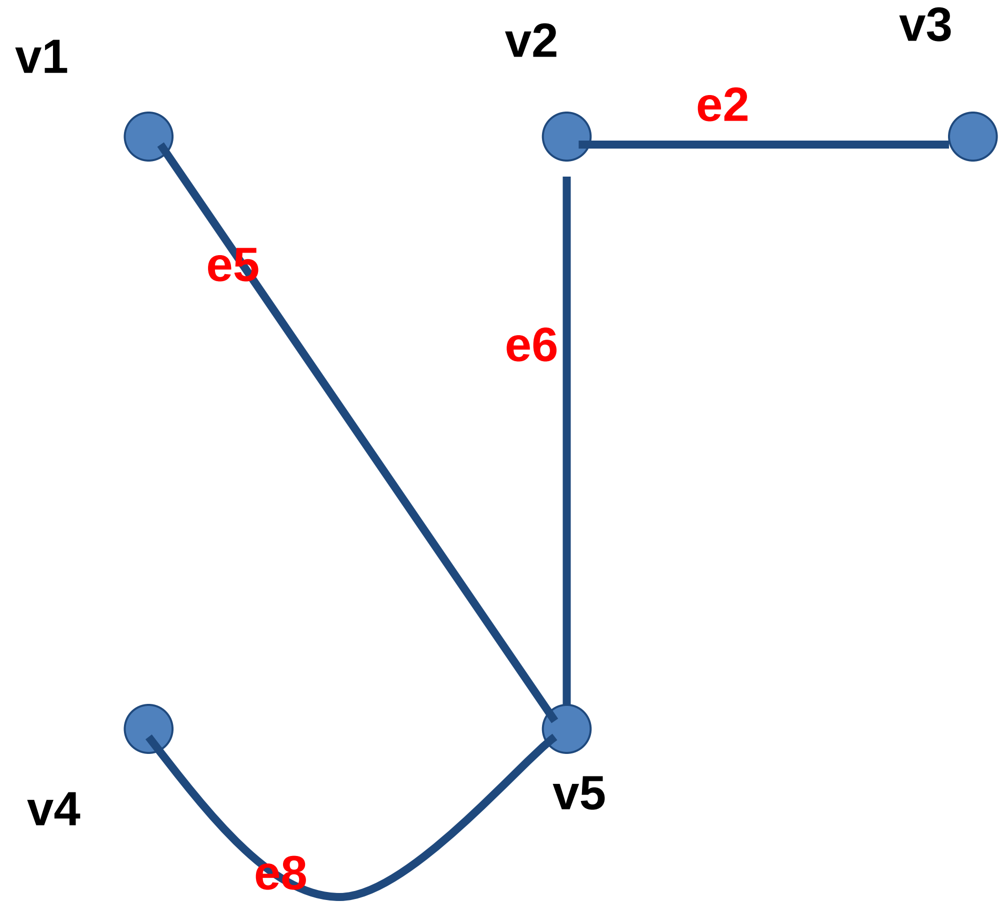
设有图G和G_1，若图G_1的顶点和边都是图G的顶点和边，则称G_1为G的子图；

如果图G_1的顶点和图G的顶点完全一致，图G_1的边是图G的边，则称G_1为G的生成子图。

例：

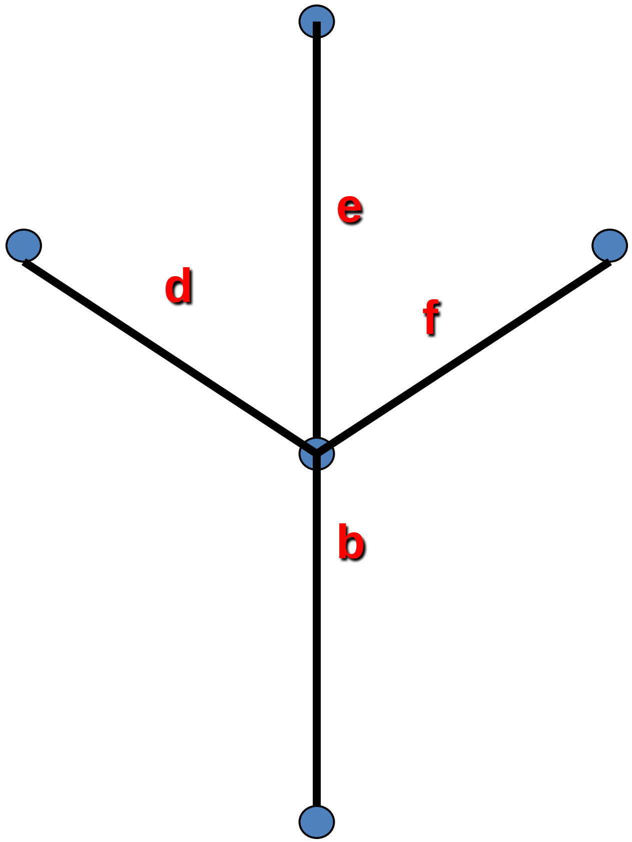


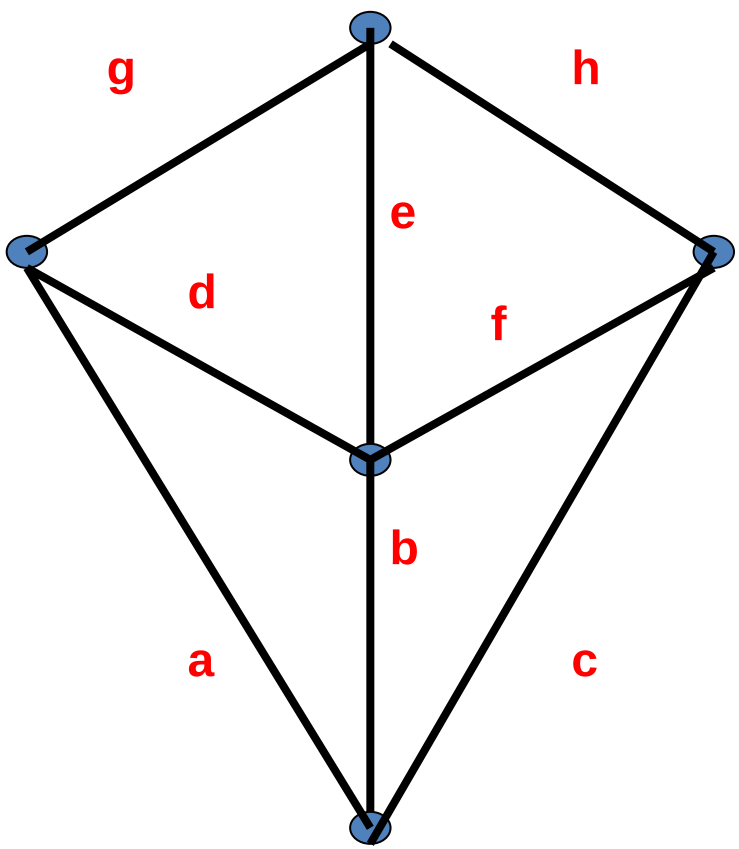

v1
v2
e1
e5
e3
v4
v5

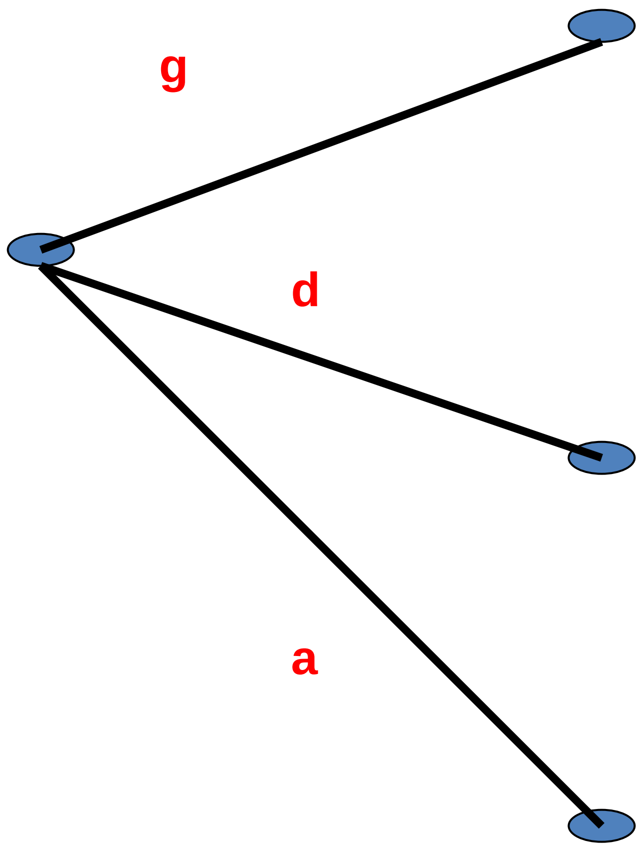

v1
v2
v3
e2
e5
e6
v4
v5
e8

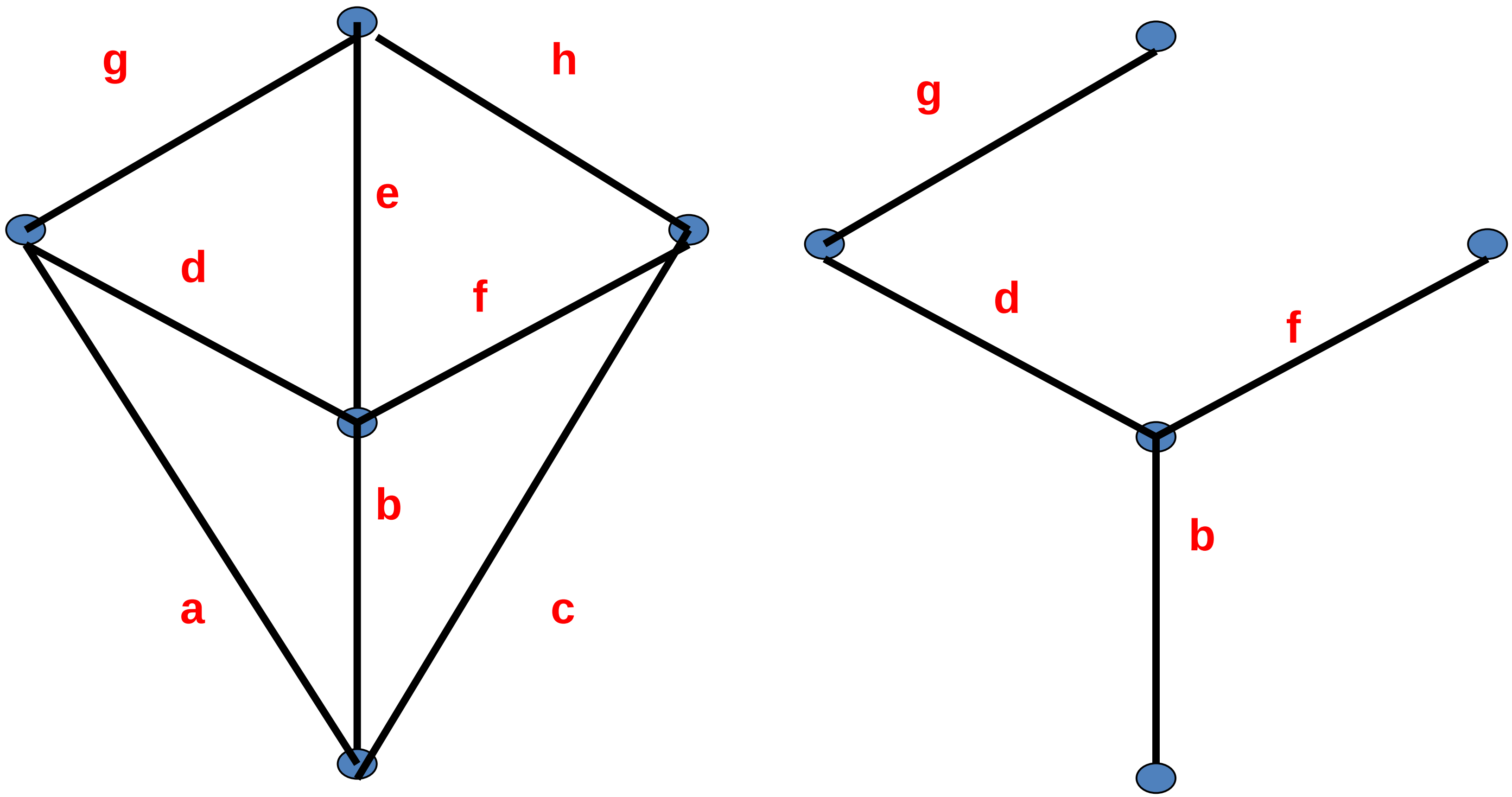
9. 生成树

- 如果图T是G的一个生成子图，而且T又是一棵树，则称图T为一棵生成树。




g
h
e
d
f
b
a
c

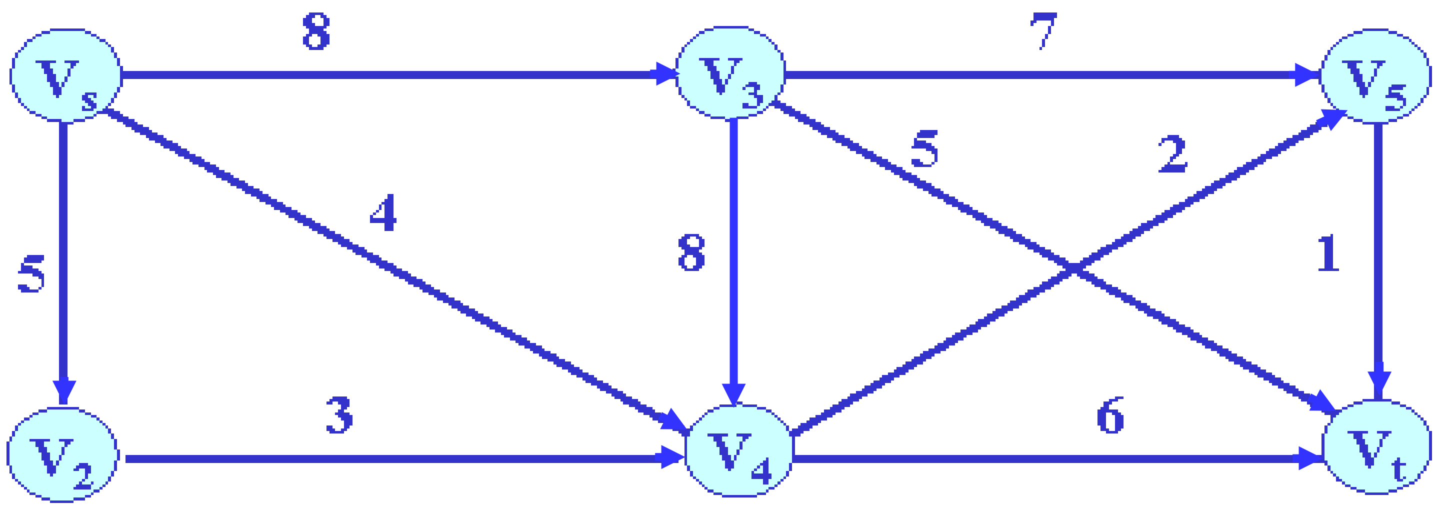

g
d
a


g
h
e
d
f
b
a
c
g
d
f
b

网　络

在赋权的有向图中指定了一点，称为发点（或称为源，记为v_s），指定另一点为收点（或称为汇，记为v_t），其余的点称为中间点，并把图中的每一条弧的赋权数c_{ij}称之为弧（v_i，v_j）的容量，这样的赋权有向图就称之为网络。

网络最优化问题



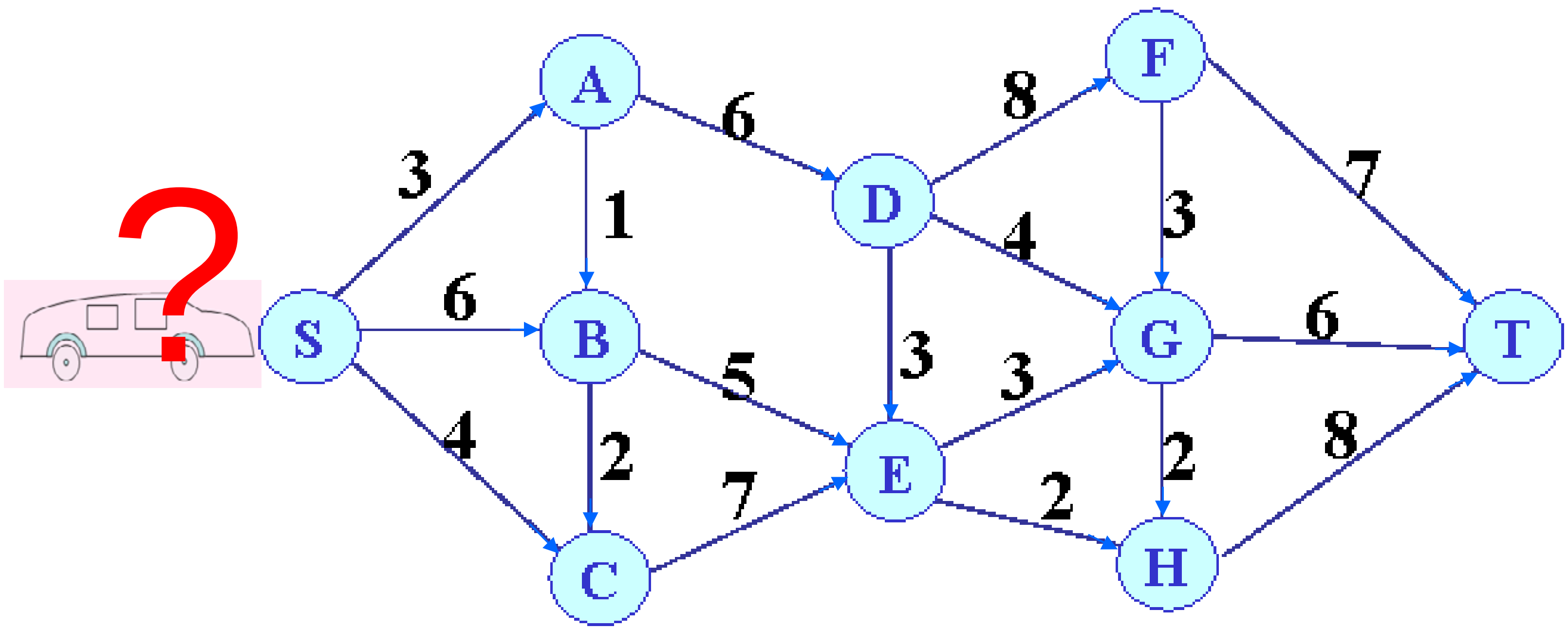
网络最优化问题就是基本于这样的网络图，建立相应的网络模型，求最大值或最小值。

典型问题

最短路模型

最短路模型要解决的问题：在一有向的赋权图中，指定一个发点v_s和一个收点v_t，目标是使通过网络找到一条路，使两点间的总距离为最短。

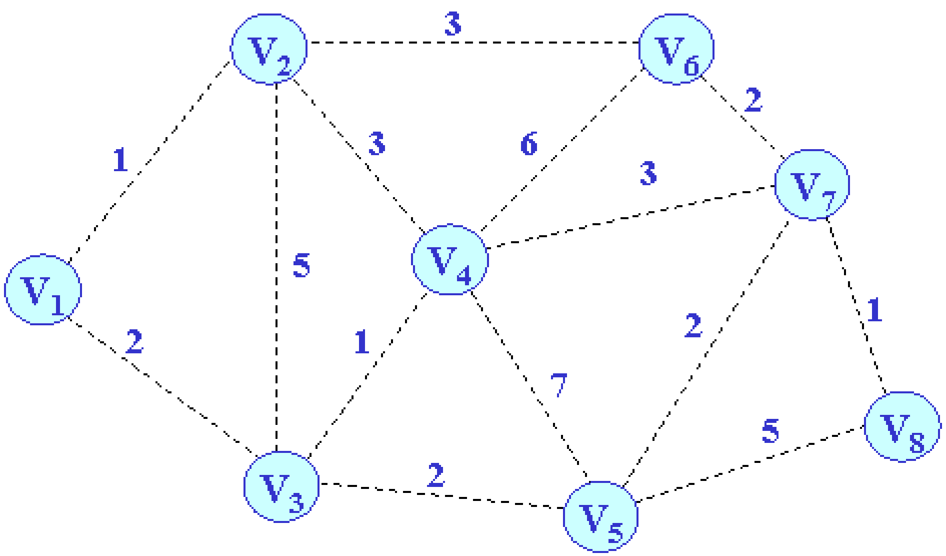
例8.1　如下图所示，某人每天从住处S开车到工作地T上班，图中各弧旁的数字表示道路的长度（千米），试问他从家出发到工作地，应选择哪条路线，才能使路上行驶的总距离最短？



最小支撑树模型

最小支撑树模型要解决的问题：在给定的无向赋权图中，确定一个生成树，目标是使该树的各边权数之和为最小 。

例8.2 某公司铺设光导纤维网络问题。公司的管理层已经决定铺设最先进的光导纤维网络，为公司的主要部门之间提供高速通信（数据、声音和图像）。下图中的节点显示了该公司主要部门（包括公司的总部、巨型计算机、科研区、生产和配送中心等）的分布图。虚线是铺设纤维光缆的可能位置。每条虚线旁边的数字表示了如果选择在这个位置铺设光缆需要花费的成本（单位：万元）。



最小支撑树模型的求解

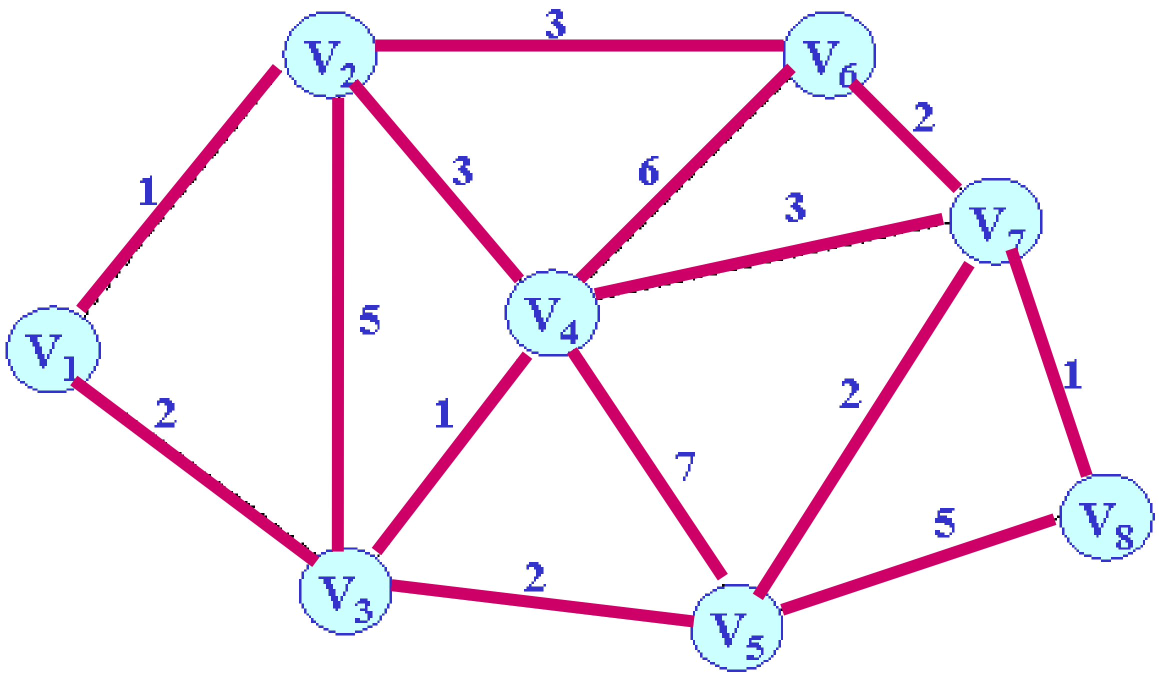
- 贪婪法求解（手工）
- 破圈法求解（手工）
- 计算机程序模块求解（基于贪婪法）

最小支撑树模型的求解-----破圈法

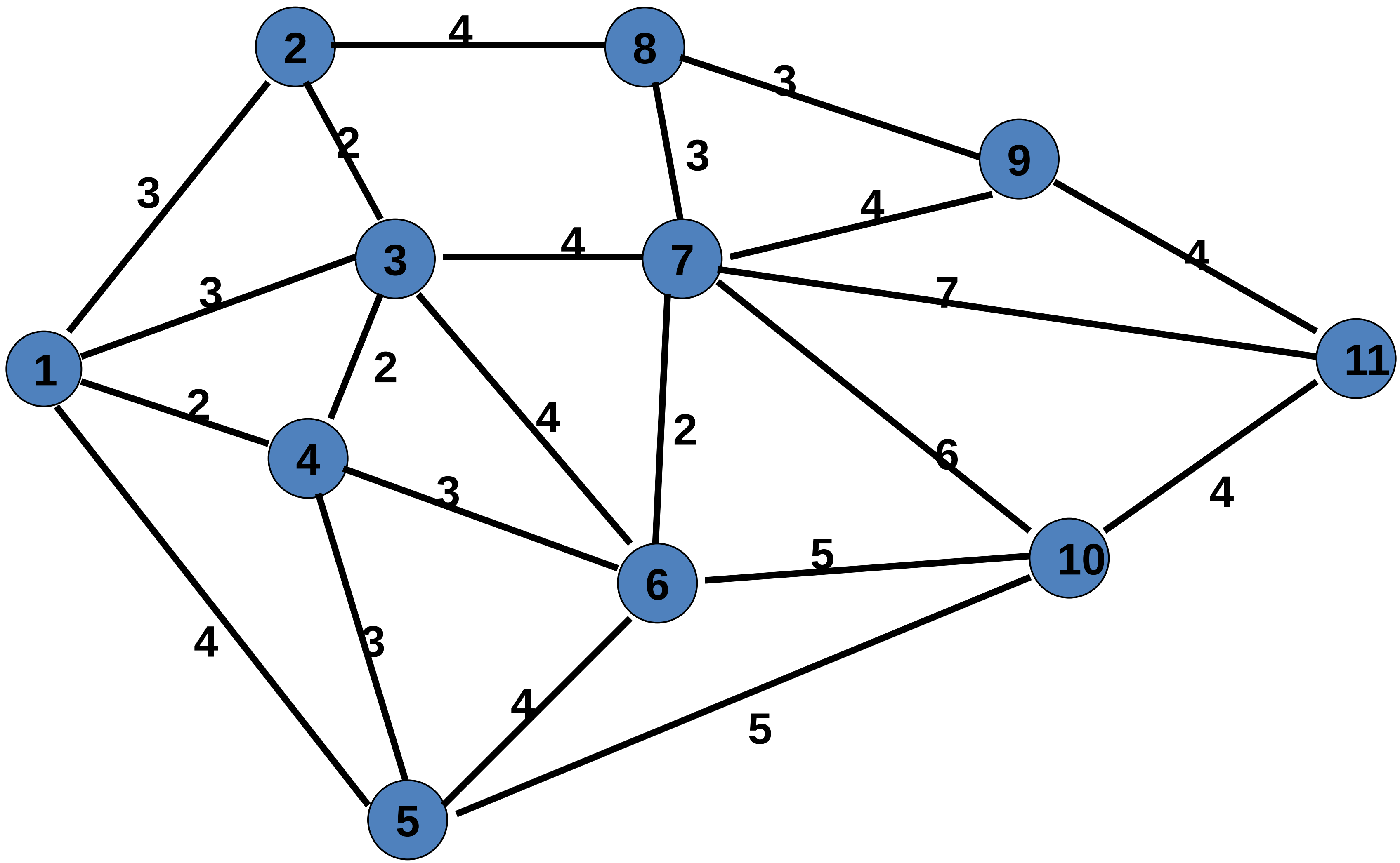
（1）任取一圈，去掉其中一条最长的边；

（2）重复直至图中不存在任何圈为止。

最小支撑树模型的求解-----破圈法



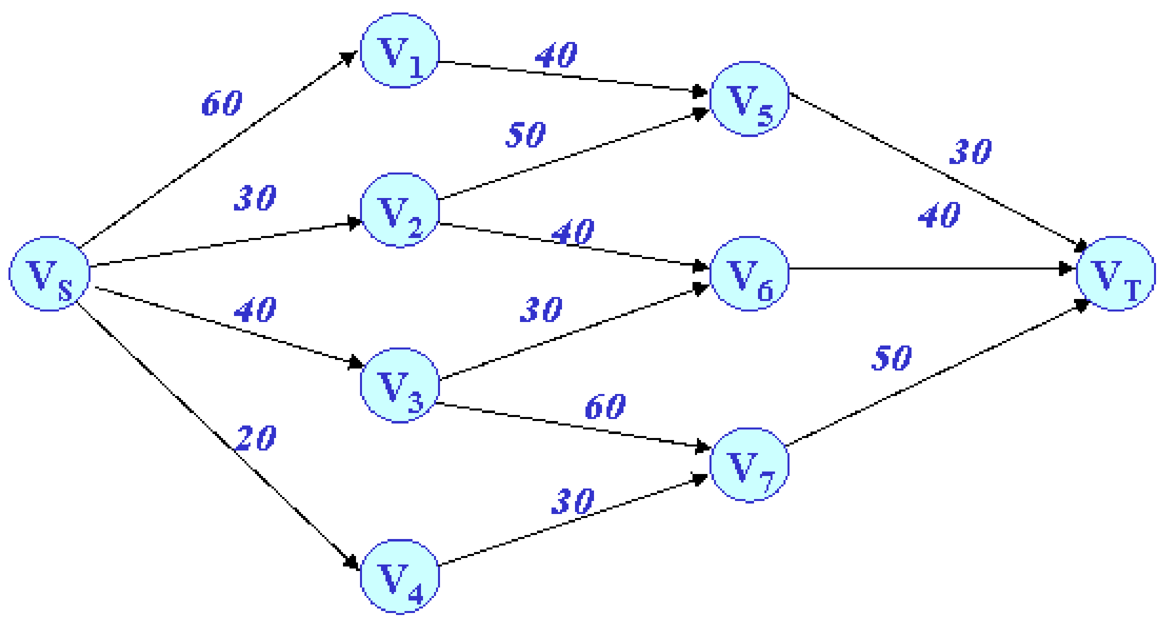
课堂练习9（最小支撑树）



最大流模型

最大流模型要解决的问题：在一有向的赋权图中，指定一个发点和一个收点。目标是使通过网络确定各网路上的流量，使发点到收点间总流量为最大。

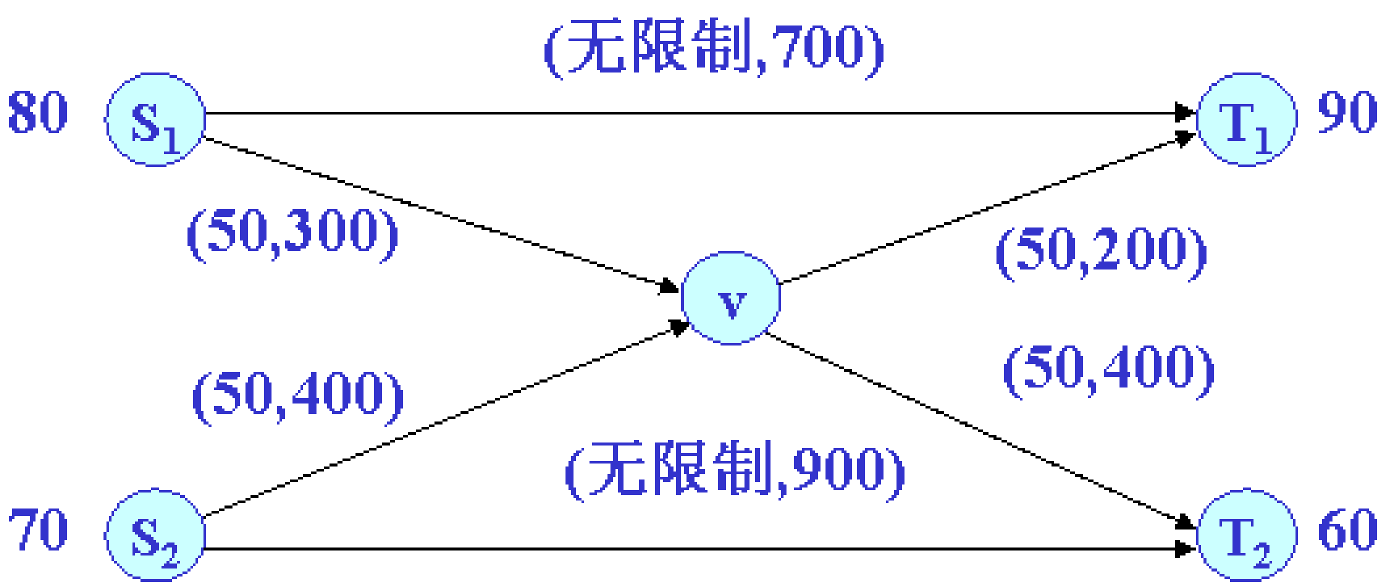
例8.3　某石油公司有一个管道网络，使用这个管道网络可以将石油从采油场运送到一些销售点，这个网络的一部分如下图所示。由于管道直径不同，各段管道的流量也不一样，在图中每个弧（每段管道）上标的数字是该段管道的最大流量（吨/小时）。如果使用这个网络系统从采油场V_S向销地V_T运送石油，每小时最多能运送多少吨石油？



最小费用流模型

最小费用流模型要解决的问题：在一有向的赋权图中，指定多个发点和多个收点。目标是使通过网络确定各网路上的流量，使所有发点到所有收点间总流量所花的费用为最小。

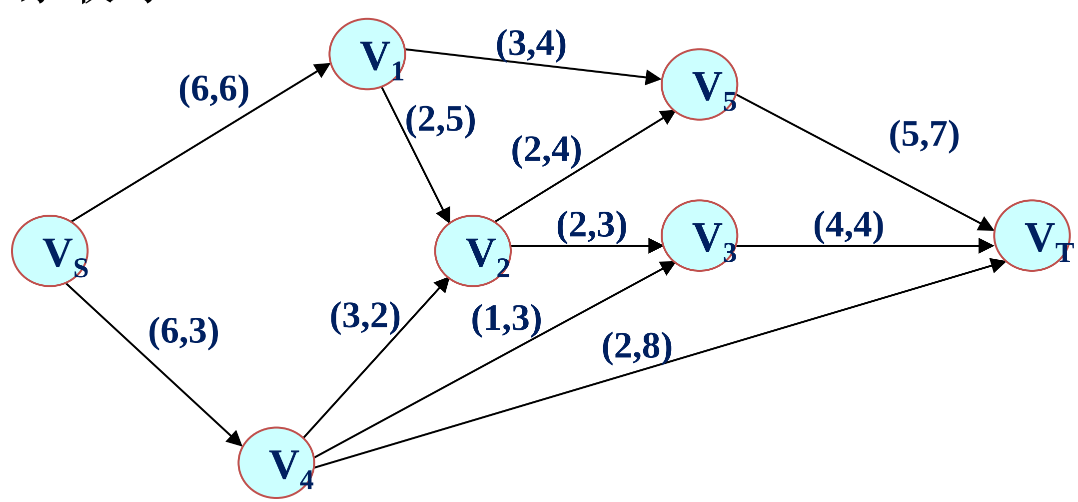
例8.4　某公司有两个工厂生产产品，这些产品需要运送到两个仓库中，其配送网络如下图所示（产品数量单位：件；费用单位：元）。目标是确定一个运输方案（即每条路线运送多少件的产品），使通过配送网络的运输成本最小。



最小费用最大流模型

最小费用最大流模型要解决的问题：在一有向的赋权图中，指定一个发点和一个收点。目标是在网络中系统中不但要追求运量最大，还要考虑总费用最小　。

例8.5 某石油公司有一个管道网络，使用这个管道网络可以将石油从采油场V_s运送到一些销售点V_t，这个网络的一部分如下图所示。由于管道直径不同，输油管道长短也不一样，使得各段管道除了流量不一样外，还有不同的单位流量的费用。图中每条弧（每段管道）旁的括号中，前一个数字是该段管道的最大流量（吨/小时），后一个数字是该段管道的单位流量的费用（元/吨）。如何安排网络各段的流量，使整个网络系统能运送最多的石油并使得总的运送费用最小？



网络优化模型的应用

例8.6 设备更新问题。某工厂的某台机器可连续工作5年，决策者在每年年初都要决定机器是否需要更新。若购置新机器，就要支付购置费用；若继续使用，则需要支付维修与运行费用，而且随着机器使用年限的增加费用会逐年增多。已知计划期（5年）中每年的购置价格及维修与运行费用，如下表所示。试制定今后5年的机器更新计划使总的支付费用最少。

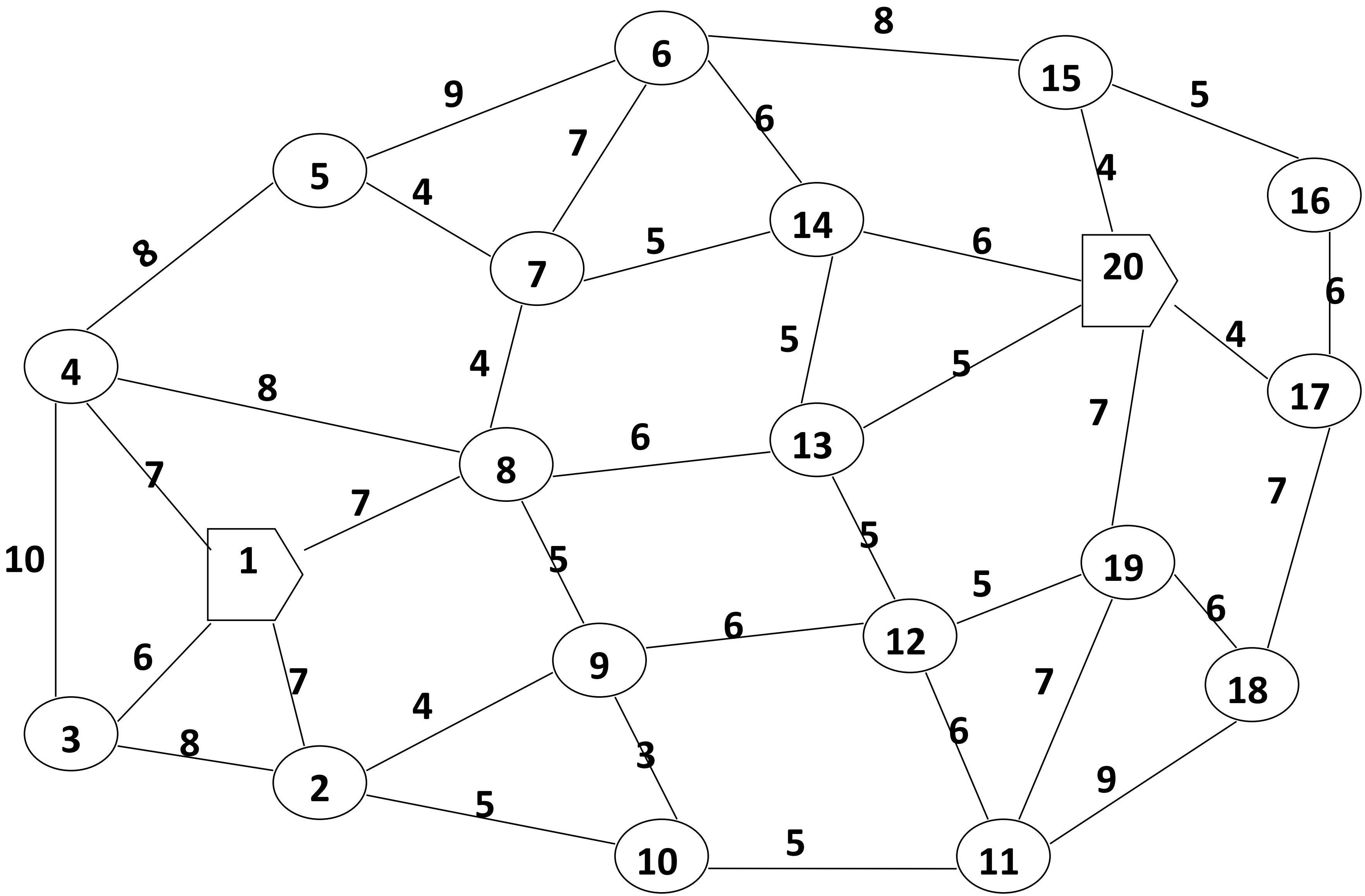
购置价格及维修与运行费用

年限	1	2	3	4	5
购置费（万元）	11	11	12	12	13
维修与运行费（万元）	5	6	8	11	18

案例分析

救护医院行程安排

宾厄姆顿市两大主要医院：西部医疗和宾厄顿大众，西部医疗坐落于城市西南部，而宾厄姆顿市位于东北部。鲍勃.仲斯，西部医疗的医院主管，一直在和宾厄姆顿大众的主管玛格丽特.约翰逊讨论救护车的时间和行车安排。两位主管都感到某些类型需要改进，以便更好地协调两个医院间的救护服务，以便他们能提供尽可能快的紧急服务。**通过一中心系统处理所有救护服务的提议正在考虑之中，此中心系统会自动地把呼叫转到能够提供最快服务的机构。**在研究提议的过程中，一个由两个医院员工组成的工作组决定其最好方法是**把城市分为20个服务区，在此服务机构中，西部医疗将会位于1区而宾厄姆顿大众位于20区。**展示此20区城的布置图以及相关区域间的往返时间如下图所示。



8
6
9
15
5
6
7
5
4
14
16
4
8
7
5
6
20
6
5
4
4
5
8
4
17
7
6
8
13
7
7
7
10
1
5
5
19
5
6
6
12
18
6
7
7
4
9
3
8
6
3
9
2
5
5
10
11

根据所提出的操作程序，新的紧急呼叫将会以区号划分，也就是说最靠近该区的医院会派出救护车来完成服务。如果最近医疗所有救护车都在使用之中，此服务将由另一个医院完成。无论哪一个医院负责服务，要求紧急服务的这个人将会被带到最近的医院。

为了使此协调性服务尽可能高效，救护车司机必须预先知道到达每一区的最短路线。需要知道救护者应被带到哪个医院以及最快到达该院的路线 。

知识点总结

1. 如何建立最短路问题的线性规划模型？
2. 最小支撑树的求解