什么是平衡二叉树（AVL）

程序员吴…
公众号：五分钟学算法，专注分享算法知识！

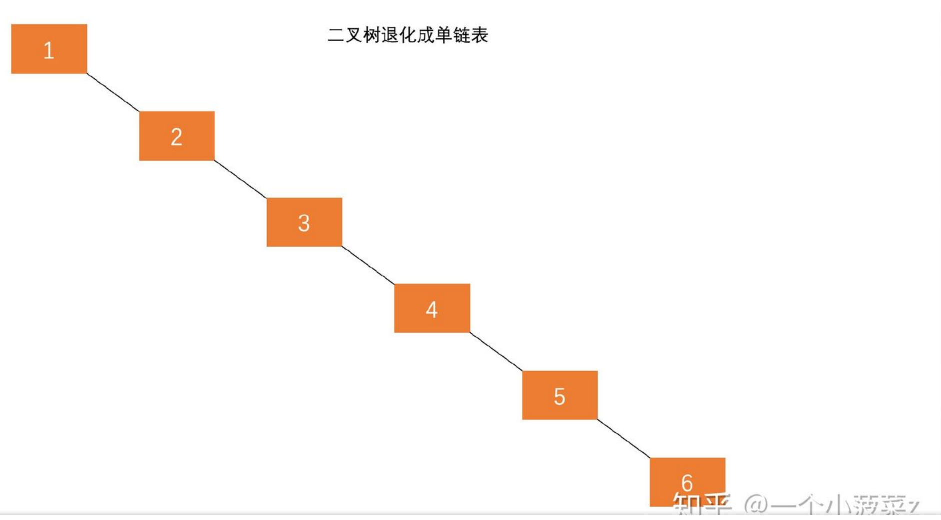
前言

> Wiki:在计算机科学中，**AVL树**是最早被发明的自平衡二叉查找树。在AVL树中，任一节点对应的两棵子树的最大高度差为1，因此它也被称为**高度平衡树**。查找、插入和删除在平均和最坏情况下的时间复杂度都是{\displaystyle O(\log {n})}

。增加和删除元素的操作则可能需要借由一次或多次树旋转，以实现树的重新平衡。AVL 树得名于它的发明者 G. M. Adelson-Velsky 和 Evgenii Landis，他们在1962年的论文《An algorithm for the organization of information》中公开了这一数据结构。

1 为什么要有平衡二叉树

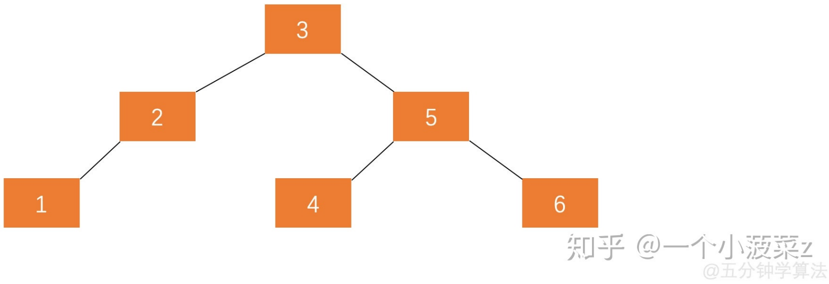
二叉搜索树一定程度上可以提高搜索效率，但是当原序列有序时，例如序列 A = {1，2，3，4，5，6}，构造二叉搜索树如图 1.1。依据此序列构造的二叉搜索树为右斜树，同时二叉树退化成单链表，搜索效率降低为 O(n)。



在此二叉搜索树中查找元素 6 需要查找 6 次。

二叉搜索树的查找效率取决于树的高度，因此保持树的高度最小，即可保证树的查找效率。同样的序列 A，将其改为图 1.2 的方式存储，查找元素 6 时只需比较 3 次，查找效率提升一倍。

平衡二叉树



可以看出当节点数目一定，保持树的左右两端保持平衡，树的查找效率最高。

这种左右子树的高度相差不超过 1 的树为平衡二叉树。

2. 定义

平衡二叉查找树：简称平衡二叉树。由前苏联的数学家 **A**delse-**V**elskil 和 **L**andis 在 1962 年提出的高度平衡的二叉树，根据科学家的英文名也称为 AVL 树。它具有如下几个性质：

1. 可以是空树。
2. 假如不是空树，任何一个结点的左子树与右子树都是平衡二叉树，并且高度之差的绝对值不超过 1。

平衡之意，如天平，即两边的分量大约相同。

例如图 2.1 不是平衡二叉树，因为结点 60 的左子树不是平衡二叉树。

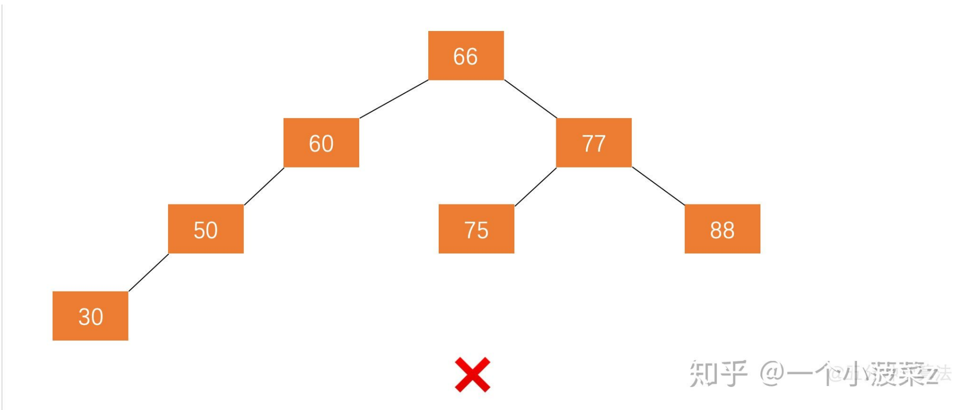


图 2.2 也不是平衡二叉树，因为虽然任何一个结点的左子树与右子树都是平衡二叉树，但高度之差已经超过 1 。

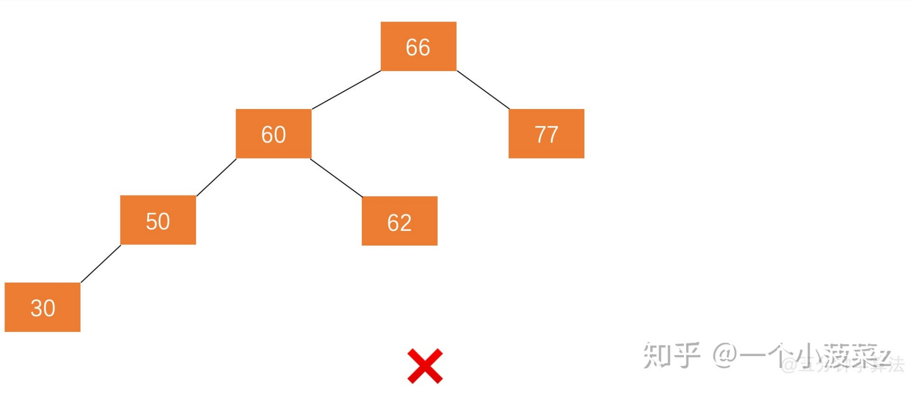
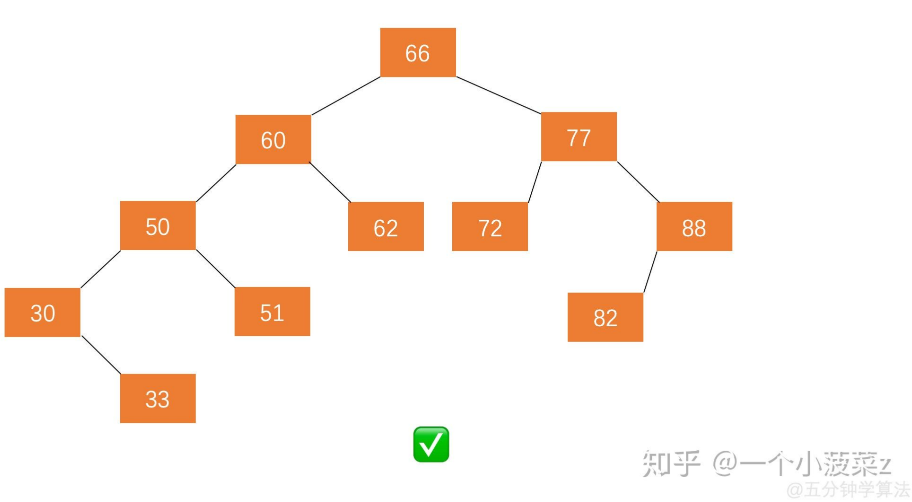
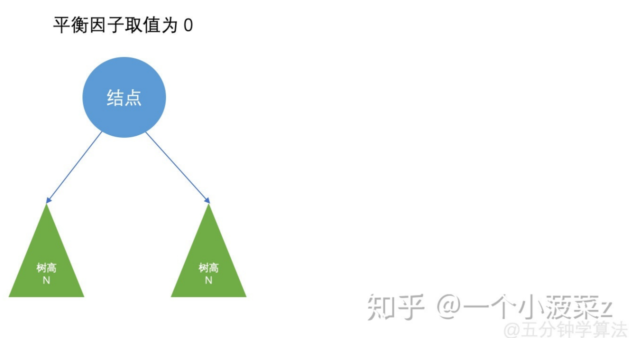


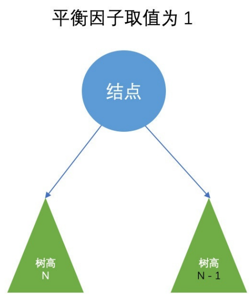
图 2.3 **不是**平衡二叉树。

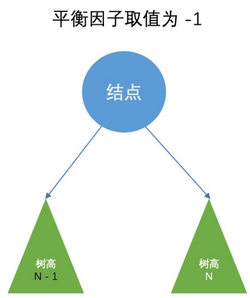


3. 平衡因子

定义：某节点的左子树与右子树的高度(深度)差即为该节点的平衡因子（BF,Balance Factor），平衡二叉树中不存在平衡因子大于 1 的节点。在一棵平衡二叉树中，节点的平衡因子只能取 0 、1 或者 -1 ，分别对应着左右子树等高，左子树比较高，右子树比较高。







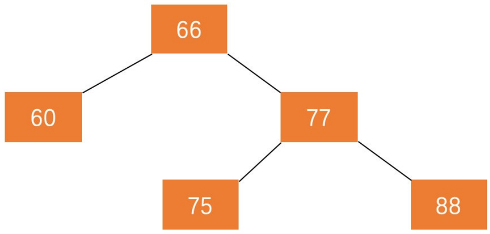
4. 节点结构

定义平衡二叉树的节点结构：

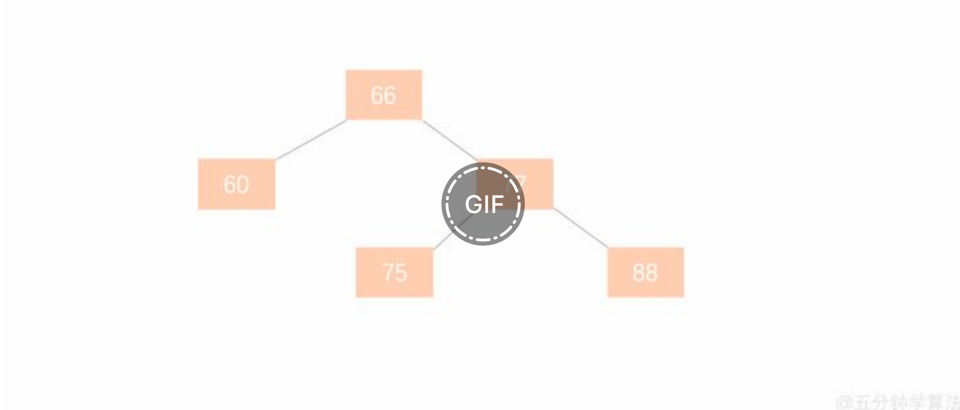
```
typedef struct AVLNode *Tree;

typedef int ElementType;

struct AVLNode{

    int depth; //深度，这里计算每个结点的深度，通过深度的比较可得出是否平衡

    Tree parent; //该结点的父节点

    ElementType val; //结点值

    Tree lchild;

    Tree rchild;

    AVLNode(int val=0) {
        parent = NULL;
        depth = 0;
        lchild = rchild = NULL;
        this->val=val;
    }
};
```

5. AVL树插入时的失衡与调整

图 5.1 是一颗平衡二叉树



在此平衡二叉树插入节点 99 ，树结构变为：



在动图 5.2 中，节点 66 的左子树高度为 1，右子树高度为 3，此时平衡因子为 -2，树失去平衡。

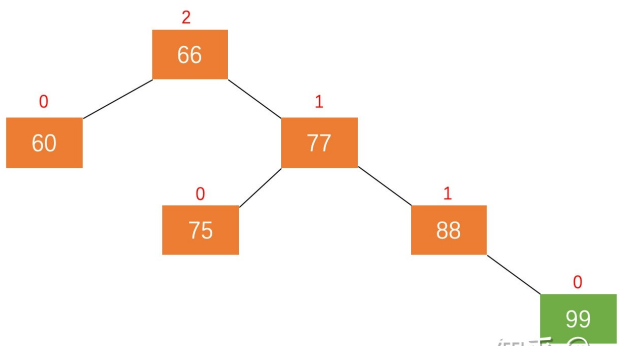
在动图 5.2 中，以节点 66 为父节点的那颗树就称为 **最小失衡子树**。

最小失衡子树：在新插入的结点向上查找，以第一个平衡因子的**绝对值**超过 1 的结点为根的子树称为最小不平衡子树。也就是说，一棵失衡的树，是有可能有多棵子树同时失衡的。而这个时候，我们只要调整最小的不平衡子树，就能够将不平衡的树调整为平衡的树。

平衡二叉树的失衡调整主要是通过旋转最小失衡子树来实现的。根据旋转的方向有两种处理方式，**左旋** 与 **右旋** 。

旋转的目的就是减少高度，通过降低整棵树的高度来平衡。哪边的树高，就把那边的树向上旋转。

5.1 左旋

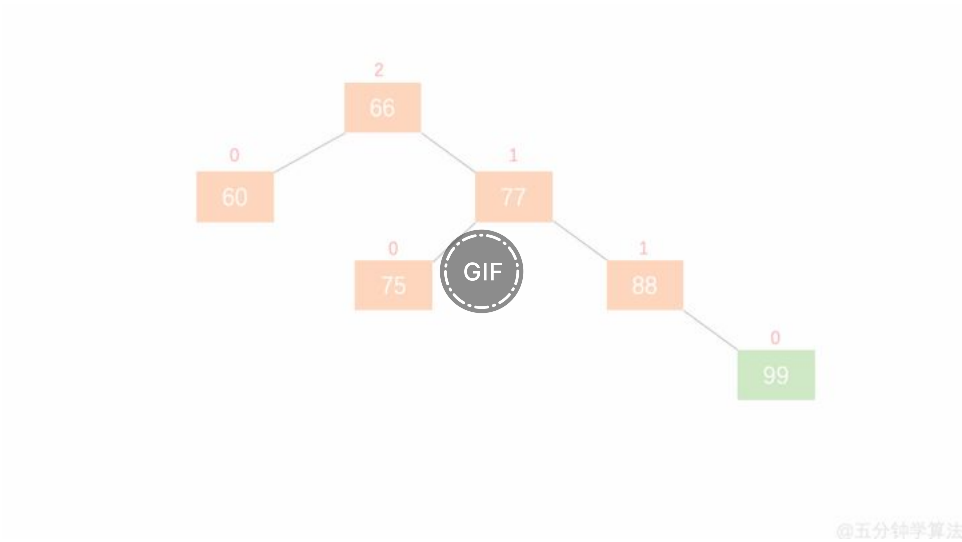


以图 5.1.1 为例，加入新节点 99 后， 节点 66 的左子树高度为 1，右子树高度为 3，此时平衡因子

左旋操作，流程如下：

（1）节点的右孩子替代此节点位置 （2）右孩子的左子树变为该节点的右子树 （3）节点本身变为右孩子的左子树

整个操作流程如动图 5.1.2 所示。

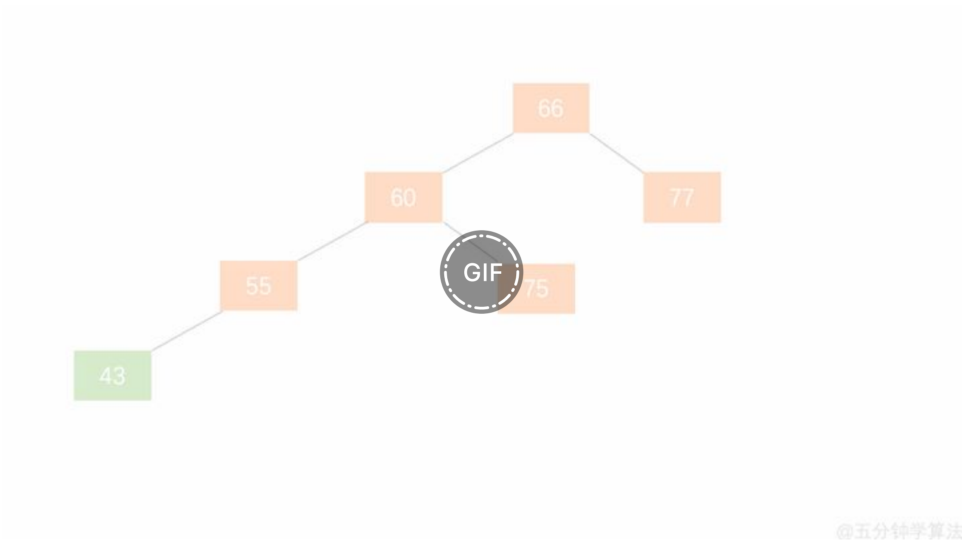


- 节点的右孩子替代此节点位置 —— 节点 66 的右孩子是节点 77 ，将节点 77 代替节点 66 的位置
- 右孩子的左子树变为该节点的右子树 —— 节点 77 的左子树为节点 75，将节点 75 挪到节点 66 的右子树位置
- 节点本身变为右孩子的左子树 —— 节点 66 变为了节点 77 的左子树

5.2 右旋

右旋操作与左旋类似，操作流程为：

（1）节点的左孩子代表此节点 （2）节点的左孩子的右子树变为节点的左子树 （3）将此节点作为左孩子节点的右子树。



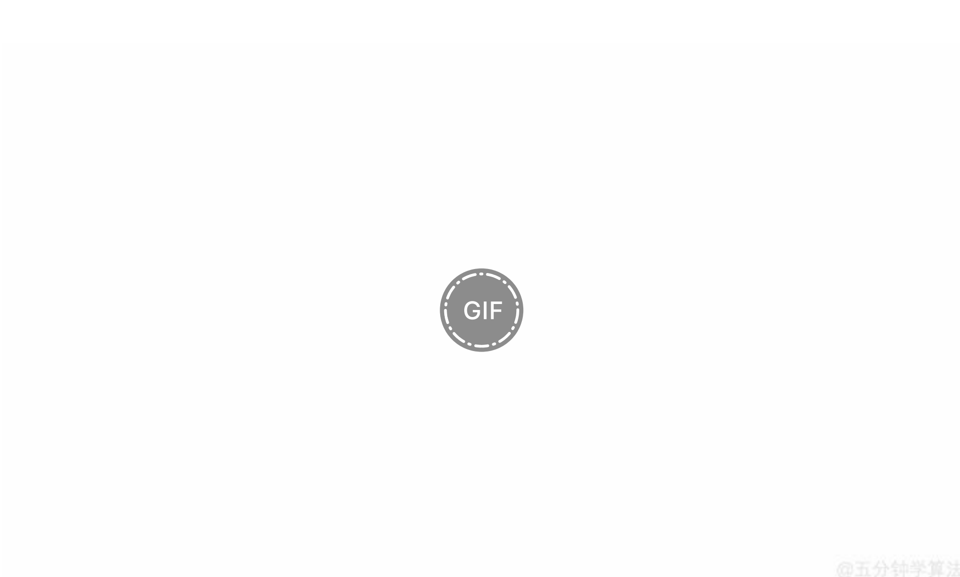
6. AVL树的四种插入节点方式

| 插入方式 | 描述 | 旋转方式 | | -------- | -- | ------------ | | LL | 在 A 的**左子树**根节点的**左子树**上插入节点而破坏平衡 | 右旋转 | | RR | 在 A 的**右子树**根节点的**右子树**上插入节点而破坏平衡 | 左旋转 | | LR | 在A的**左子树**根节点的**右子树**上插入节点而破坏平衡 | 先左旋后右旋 | | RL | 在 A 的**右子树**根节点的**左子树**上插入节点而破坏平衡 | 先右旋后左旋 |

具体分析如下：

6.1 A的左孩子的左子树插入节点(LL)

只需要执行一次右旋即可。



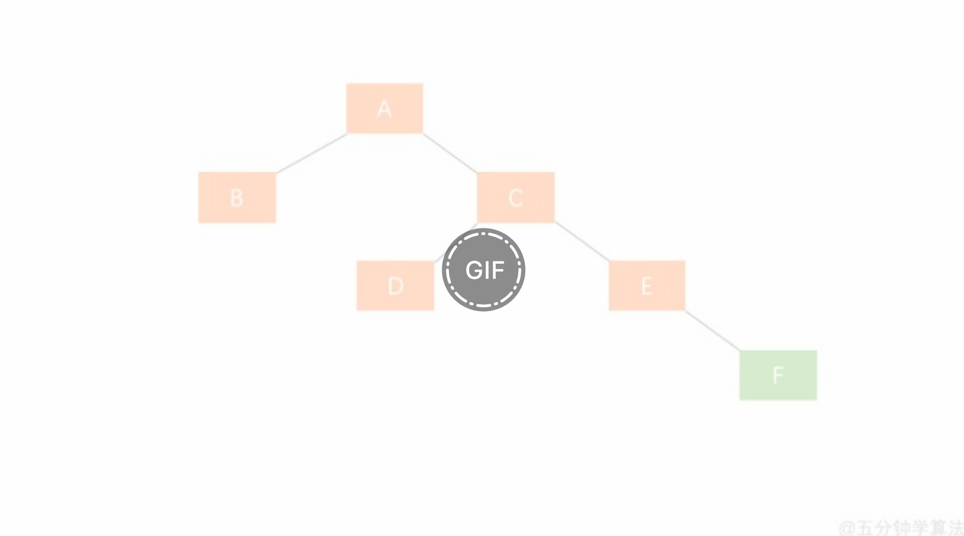
实现代码如下：

```
//LL型调整函数
//返回:新父节点
Tree LL_rotate(Tree node){
    //node为离操作结点最近的失衡的结点
    Tree parent=NULL,son;
    //获取失衡结点的父节点
    parent=node->parent;
    //获取失衡结点的左孩子
    son=node->lchild;
    //设置son结点右孩子的父指针
    if (son->rchild!=NULL)  son->rchild->parent=node;
    //失衡结点的左孩子变更为son的右孩子
    node->lchild=son->rchild;
    //更新失衡结点的高度信息
    update_depth(node);
    //失衡结点变成son的右孩子
    son->rchild=node;
    //设置son的父结点为原失衡结点的父结点
    son->parent=parent;
    //如果失衡结点不是根结点，则开始更新父节点
    if (parent!=NULL){
        //如果父节点的左孩子是失衡结点，指向现在更新后的新孩子son
        if (parent->lchild==node){
            parent->lchild=son;
        }else{
             //父节点的右孩子是失衡结点
              parent->rchild=son;
        }
```

```
    node->parent=son;
    //更新son结点的高度信息
    update_depth(son);
    return son;
}
```

6.2 A的右孩子的右子树插入节点(RR)

只需要执行一次左旋即可。



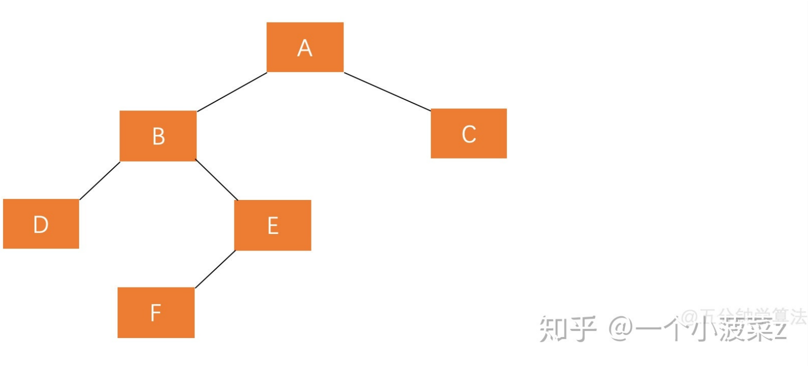
实现代码如下：

```
//RR型调整函数
//返回新父节点
Tree RR_rotate(Tree node){
    //node为离操作结点最近的失衡的结点
    Tree parent=NULL,son;
    //获取失衡结点的父节点
    parent=node->parent;
    //获取失衡结点的右孩子
    son=node->rchild;
    //设置son结点左孩子的父指针
    if (son->lchild!=NULL){
          son->lchild->parent=node;
    }
    //失衡结点的右孩子变更为son的左孩子
    node->rchild=son->lchild;
    //更新失衡结点的高度信息
    update_depth(node);
    //失衡结点变成son的左孩子
    son->lchild=node;
    //设置son的父结点为原失衡结点的父结点
    son->parent=parent;
    //如果失衡结点不是根结点，则开始更新父节点
    if (parent!=NULL){
        //如果父节点的左孩子是失衡结点，指向现在更新后的新孩子son
        if (parent->lchild==node){
            parent->lchild=son;
        }else{
            //父节点的右孩子是失衡结点
            parent->rchild=son;
        }
```

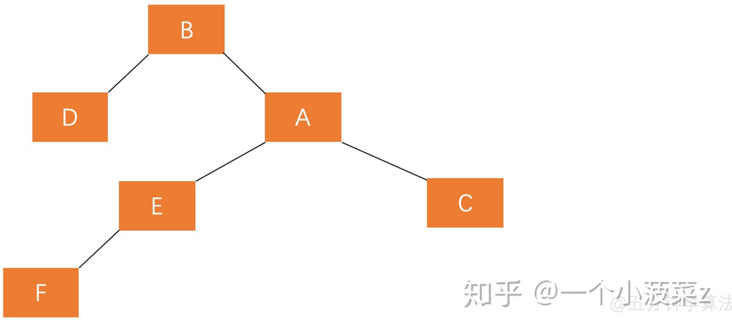
```
        //设置失衡结点的父亲
        node->parent=son;
        //更新son结点的高度信息
        update_depth(son);
        return son;
    }
```

6.3 A的左孩子的右子树插入节点(LR)

若 A 的左孩子节点 B 的右子树 E 插入节点 F，导致节点 A 失衡，如图：



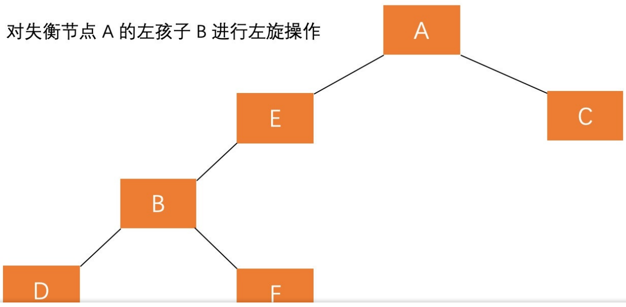
A 的平衡因子为 2，若仍按照右旋调整，则变化后的图形为这样：

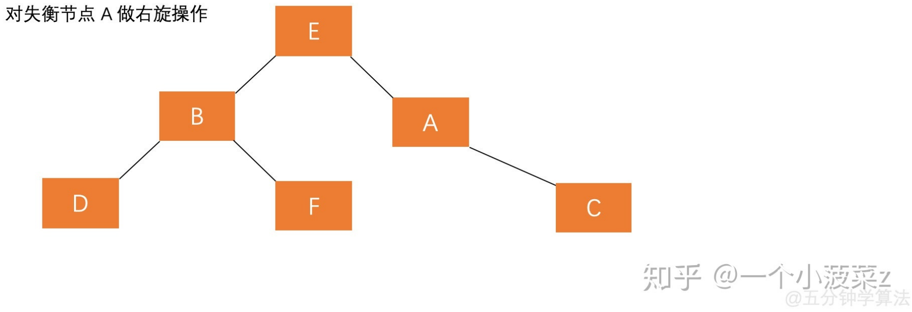


经过右旋调整发现，调整后树仍然失衡，说明这种情况单纯的进行右旋操作不能使树重新平衡。那么这种插入方式需要执行两步操作，使得旋转之后为 **原来根结点的左孩子的右孩子作为新的根节点** 。

（1）对失衡节点 A 的左孩子 B 进行左旋操作，即上述 RR 情形操作。（2）对失衡节点 A 做右旋操作，即上述 LL 情形操作。

调整过程如下：





也就是说，经过这两步操作，使得 **原来根节点的左孩子的右孩子 E 节点成为了新的根节点**。

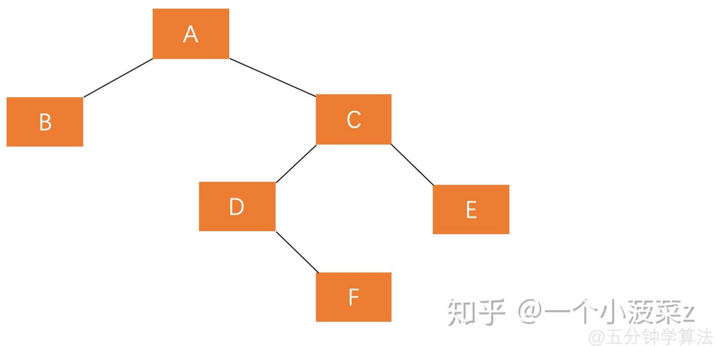
代码实现：

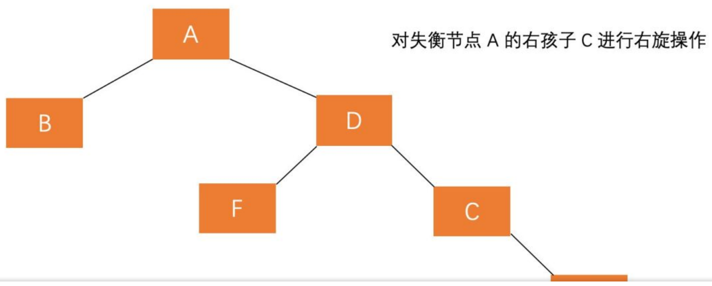
```
//LR型，先左旋转，再右旋转
//返回：新父节点
Tree LR_rotate(Tree node){
    RR_rotate(node->lchild);
    return LL_rotate(node);
}
```

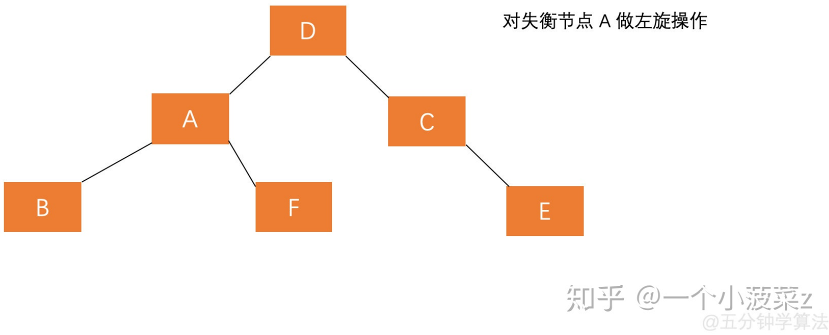
6.4 A的右孩子的左子树插入节点(RL)

右孩子插入左节点的过程与左孩子插入右节点过程类似，也是需要执行两步操作，使得旋转之后为 **原来根结点的右孩子的左孩子作为新的根节点** 。

（1）对失衡节点 A 的右孩子 C 进行右旋操作，即上述 LL 情形操作。 （2）对失衡节点 A 做左旋操作，即上述 RR 情形操作。







也就是说，经过这两步操作，使得 **原来根节点的右孩子的左孩子 D 节点成为了新的根节点。**

代码实现：

```
//RL型，先右旋转，再左旋转
//返回:新父节点
Tree RL_rotate(Tree node){
    LL_rotate(node->rchild);
    return RR_rotate(node);
}
```

补充：

上述四种插入方式的代码实现的辅助代码如下：

```
//更新当前深度
void update_depth(Tree node){
    if (node==NULL){
        return;
    }else{
        int depth_Lchild=get_balance(node->lchild); //左孩子深度
        int depth_Rchild=get_balance(node->rchild); //右孩子深度
        node->depth=max(depth_Lchild,depth_Rchild)+1;
    }
}

//获取当前结点的深度
int get_balance(Tree node){
    if (node==NULL){
         return 0;
    }
    return node->depth;
}

//返回当前平衡因子
int is_balance(Tree node){
    if (node==NULL){
         return 0;
    }else{
         return get_balance(node->lchild)-get_balance(node->rchild);
    }
}
```

1. 在所有的不平衡情况中，都是按照先 **寻找最小不平衡树**，然后 **寻找所属的不平衡类别**，再 **根据 4 种类别进行固定化程序的操作**。
2. LL , LR ， RR ，RL其实已经为我们提供了最后哪个结点作为新的根指明了方向。如 LR 型最后的根结点为原来的根的左孩子的右孩子，RL 型最后的根结点为原来的根的右孩子的左孩子。只要记住这四种情况，可以很快地推导出所有的情况。
3. 维护平衡二叉树，最麻烦的地方在于平衡因子的维护。建议读者们根据小吴提供的图片和动图，自己动手画一遍，这样可以更加感性的理解操作。

7. AVL树的四种删除节点方式

AVL 树和二叉查找树的删除操作情况一致，都分为四种情况：

（1）删除叶子节点 （2）删除的节点只有左子树 （3）删除的节点只有右子树 （4）删除的节点既有左子树又有右子树

只不过 AVL 树在删除节点后需要重新检查平衡性并修正，同时，删除操作与插入操作后的平衡修正区别在于，插入操作后只需要对插入栈中的弹出的第一个非平衡节点进行修正，而删除操作需要修正栈中的所有非平衡节点。

删除操作的大致步骤如下：

- 以前三种情况为基础尝试删除节点，并将访问节点入栈。
- 如果尝试删除成功，则依次检查栈顶节点的平衡状态，遇到非平衡节点，即进行旋转平衡，直到栈空。
- 如果尝试删除失败，证明是第四种情况。这时先找到被删除节点的右子树最小节点并删除它，将访问节点继续入栈。
- 再依次检查栈顶节点的平衡状态和修正直到栈空。

对于删除操作造成的非平衡状态的修正，可以这样理解：对左或者右子树的删除操作相当于对右或者左子树的插入操作，然后再对应上插入的四种情况选择相应的旋转就好了。

总结

AVL 的旋转问题看似复杂，但实际上如果你亲自用笔纸操作一下还是很好理解的。

编辑于 2019-01-31

程序员 算法与数据结构 数据结构

文章被以下专栏收录

和程序员小吴一起学算法
欢迎关注公众号：「五分钟学算法」，一起去学习算法。
进入专栏

Python程序员
公众号：Python爱好者社区（python_shequ）欢迎投稿！
进入专栏

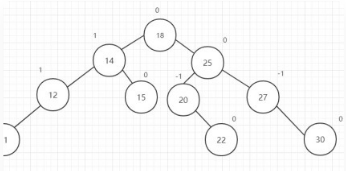
推荐阅读

二叉树的概念及其实现

超爱学习　发表于数据结构入...

一篇搞懂AVL平衡二叉树

Uno W...　发表于如何快速高...



【数据结构】AVL树（平衡二叉树）画法 速成教学

敲基

满二叉树、完全索树、平衡二叉

“存在即合理”为树，本文不再冗余多性质，就说重点（Binary Tree）主树、完全二叉树、衡二叉树性质太多

小明

47 条评论　切换为时间排序

写下你的评论...

月落haha　2020-06-07
卧槽，树上看半天没看懂你这图一眼就明白了[赞同]
赞

啊泡　2020-06-17
如果树的节点数是 n，如何分析树高在 O(h) 呢?
赞

合san　2020-06-23
感觉有问题
赞

合san　2020-06-23
果然这种几分钟学什么，快速学什么的都是半罐水
赞

知乎用户　2020-06-26
右旋就错了, 五分钟学算法还是不够细心
1

原来爱么 回复 知乎用户　2020-11-19
看了半天，还以为就自己觉得错了呢认[思考]
赞

我从黑夜里来丶　2020-08-10
插入新节点的时候要怎么判断属于哪一种情况呢?
赞

▲ 赞同 207　▼　47 条评论　分享　喜欢　收藏　···

异常详细，值得学习，先赞为敬

赞

月梦琉璃 2020-11-22

讲的太好了

赞

小酒馆 2020-12-09

形象

赞

无知者毕 2020-12-10

下次ctrl+c v的时候用点心，6.0那里的markdown表格没粘好

赞

古河汐 2020-12-23

+1+1+1

赞

那时我还小 01-08

大佬问一下,为什么旋转的是最小不平衡子树? 您知道这个是怎么推理出来的么

赞

下雨了 01-22

为啥有错的还这么多赞, 也不修正

赞

知乎用户 02-05

入门还可以，但是确实存在好几个需要校对的地方

赞

上一页 1 2

1 条评论被折叠（为什么？）

王小楼 2020-09-23

666

赞

赞同 207 ▾ 47 条评论 分享 喜欢 收藏 ···