

Лабораторная работа №8

Целочисленная арифметика многократной точности

Студент: Ван Яо

Группа: НФИмд-01-25

РУДН, 2025

Цель работы

1. Изучение теоретических основ арифметических операций с целыми числами многократной точности.
2. Реализация алгоритмов сложения, вычитания, умножения и деления больших целых чисел.
3. Проведение тестирования алгоритмов на различных примерах и анализ их эффективности.

Основные понятия

- **Большие целые числа:** числа, превышающие стандартные типы данных компьютера
- **b-ичная система счисления:** представление числа в виде $u = u_1 u_2 \dots u_n$ по основанию $b \geq 2$
- **Многократная точность:** арифметические операции с числами произвольной длины
- **Алгоритмы:** детерминированные процедуры для выполнения арифметических операций

Алгоритм 1: Сложение

Вход: $u = u_1 u_2 \dots u_n$, $v = v_1 v_2 \dots v_n$, основание b **Выход:** $w = w_0 w_1 \dots w_n$ (с переносом)

Псевдокод: 1. $j := n$, $k := 0$ 2. $w_j := (u_j + v_j + k) \bmod b$ 3. $k := \lfloor (u_j + v_j + k)/b \rfloor$ 4. $j := j - 1$, если $j > 0 \rightarrow$ шаг 2 5. $w_0 := k$

Пример: $999 + 1 = 1000$ (десятичная система)

Алгоритм 2: Вычитание

Вход: $u = u_1 u_2 \dots u_n$, $v = v_1 v_2 \dots v_n$, основание b **Выход:**

$$w = w_1 w_2 \dots w_n = u - v$$

Псевдокод: 1. $j := n$, $k := 0$ (к — заём) 2. $w_j := (u_j - v_j + k) \bmod b$ 3. $k := \lfloor (u_j - v_j + k)/b \rfloor$ 4. $j := j - 1$, если $j > 0 \rightarrow$ шаг 2
5. $w_0 := k$

Пример: $1000 - 1 = 999$ (десятичная система)

Алгоритм 3: Умножение столбиком

Вход: $u = u_1 u_2 \dots u_n$, $v = v_1 v_2 \dots v_n$, основание b **Выход:**

$w = w_1 w_2 \dots w_{m+n}$

Особенности: - Классический метод “школьного” умножения -

Сложность: $O(n \cdot m)$ - Использует вложенные циклы для обработки разрядов

Пример: $123 \times 456 = 56088$

Алгоритм 4 Умножение столбиком

Вход: $u = u_1 u_2 \dots u_n$, $v = v_1 v_2 \dots v_n$, основание b **Выход:**

$$w = w_1 w_2 \dots w_{m+n}$$

Особенности: - Суммирование произведений для каждого $s = i + j$ - Более эффективная организация вычислений -
Снижение количества промежуточных операций

Формула: $w_{m+n-s} = \sum_{i+j=s} u_{n-i} \cdot v_{m-s+i} \bmod b$

Алгоритм 5: Деление

Вход: $u = u_n \dots u_1 u_0$, $v = v_t \dots v_1 v_0$, $n \geq t \geq 1$, $v_t \neq 0$ **Выход:**

Частное $q = q_{n-t} \dots q_0$, остаток $r = r_t \dots r_0$

Ключевые шаги: - Нормализация чисел - Поразрядное деление с коррекцией частного - Проверка и исправление отрицательных остатков - Формирование окончательного результата

Анализ и сравнение

Алгоритм	Сложность	Применение	Особенности
Сложение	$O(n)$	Базовая операция	Линейная зависимость
Вычитание	$O(n)$	Базовая операция	Требует $u \geq v$
Умножение	$O(n \cdot m)$	Стандартное умножение	Про-

Заключение

1. Теоретические знания: Изучены алгоритмы арифметических операций с числами многоократной точности.
2. Практические навыки: Реализованы все пять алгоритмов на языке Python с поддержкой различных систем счисления.
3. Результаты тестирования: Все алгоритмы прошли тестирование и показали корректную работу на различных примерах.
4. Значимость работы: Полученные навыки являются фундаментальными для криптографии, компьютерной алгебры и научных вычислений.

Спасибо за внимание!