
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ»

Факультет физико-математических и естественных наук

Кафедра теории вероятностей и кибербезопасности

Лабораторная работа № 4

Вычисление наибольшего общего делителя

Студент:	Ван Яо
Группа:	НФИМд-01-25

МОСКВА

2025 г.

Цель работы

1. Изучить математические понятия и свойства наибольшего общего делителя (НОД)
2. Реализовать четыре алгоритма вычисления НОД:
 - Классический алгоритм Евклида
 - Бинарный алгоритм Евклида
 - Расширенный алгоритм Евклида
 - Расширенный бинарный алгоритм Евклида
3. Провести сравнительный анализ производительности алгоритмов

Теоретическая часть

Определение НОД

Наибольший общий делитель целых чисел a_1, a_2, \dots, a_k обозначается $\text{НОД}(a_1, a_2, \dots, a_k)$ и удовлетворяет условиям:

1. Каждое из чисел a_1, a_2, \dots, a_k делится на d
2. Если $d_1 \neq 0$ — другой общий делитель, то d делится на d_1

Основные свойства

- $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(b, a)$
- $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(a, b \bmod a)$
- $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(a, b - ka)$ для любого $k \in \mathbb{Z}$

Алгоритмы реализации

1. Классический алгоритм Евклида

Алгоритм: - Вход: a, b (где $0 < b \leq a$) - Выход: $d = \text{НОД}(a, b)$

1. Пока $b \neq 0$, выполнять:
 $a, b = b, a \bmod b$
2. Вернуть $|a|$

Этот алгоритм основан на свойстве:

$$\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(b, a \bmod b)$$

2. Бинарный алгоритм Евклида

Использует битовые операции вместо деления с остатком. Основан на следующих свойствах:

- Если оба числа чётные:
 $\text{НОД}(a, b) = 2 \cdot \text{НОД}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$
- Если a нечётное, b чётное:
 $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}\left(a, \frac{b}{2}\right)$
- Если оба нечётные:
 $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(|a - b|, \min(a, b))$

Алгоритм эффективен благодаря замене деления побитовыми сдвигами.

3. Расширенный алгоритм Евклида

Находит не только $\text{НОД}(a, b)$, но и целые коэффициенты x, y , такие что:

$$ax + by = \text{НОД}(a, b)$$

Используется в криптографии (например, для вычисления обратных по модулю).

4. Расширенный бинарный алгоритм Евклида

Сочетает преимущества бинарного метода и расширенного алгоритма. Позволяет находить коэффициенты x, y с использованием побитовых операций, что ускоряет работу на больших числах. 1. **Основное тождество Безу с учётом бинарных преобразований:**

$$\gcd(a, b) = \gcd\left(\frac{a}{2}, b\right) \quad \text{при чётном } a \text{ и нечётном } b$$

Это позволяет заменить деление с остатком на побитовый сдвиг ($a \gg 1$), что значительно ускоряет выполнение.

2. Обновление коэффициентов при рекурсивном возврате:

Если на шаге рекурсии получено решение:

$$\gcd(a, b) = a \cdot x' + b \cdot y'$$

и был применён сдвиг $a \rightarrow a/2$, то при возврате коэффициенты обновляются как:

$$x = 2x', \quad y = y'$$

(с коррекцией знака в зависимости от чётности и соотношения a и b).

Эти формулы лежат в основе эффективной реализации расширенного бинарного алгоритма, сочетающего скорость бинарного метода и функциональность расширенного алгоритма. ## Практическая реализация

Пример кода

```
def gcd_euclidean(a,b):  
    a,b=abs(a),abs(b)  
  
    while b != 0:  
        a,b = b,a%b  
  
    return a
```

Рис. 1: Классический алгоритм Евклида

```
def gcd_binary(a,b):
    if a == 0:
        return abs(b)
    if b == 0:
        return abs(a)

    g = 0
    while ((a|b) & 1) == 0:
        a >>= 1
        b >>= 1
        g += 1

    while (a & 1) == 0:
        a >>= 1

    while b != 0:
        while (b & 1) == 0:
            b >>= 1
        if a > b:
            a,b = b,a
        b = b-a
    return a << g
```

```
def extended_gcd(a,b):
    a,b=abs(a),abs(b)

    x1,y1 = 1,0
    x2,y2 = 0,1

    while b != 0:
        q =a // b
        r = a % b
        a,b = b,r

        x1,x2 = x2,x1-q*x2
        y1,y2 = y2,y1-q*y2
    return a, x1,y1
```

Функциональное тестирование

Тестовый пример	Ожидаемый результат	Фактический результат	Статус
НОД(12345, 24690)	12345	12345	√
НОД(12345, 54321)	3	3	√

Тестовый пример	Ожидаемый результат	Фактический результат	Статус
НОД(12345, 12541)	1	1	√
НОД(91, 105, 154)	7	7	√

Выводы

1. Теоретические знания:

Углублено изучены математические основы НОД, включая его определение, свойства и связь с линейными комбинациями.

2. Практические навыки:

Реализованы и протестированы четыре алгоритма вычисления НОД. Выявлены ошибки в расширенной версии, связанные с нормализацией коэффициентов.

3. Аналитические способности:

Проведён детальный сравнительный анализ по времени выполнения. Бинарные алгоритмы показали преимущество на больших числах.

4. Профессиональные компетенции:

Улучшены навыки отладки, тестирования и оптимизации алгоритмов, особенно важные в криптографии и системном программировании.

5. Рекомендации:

Для высокопроизводительных систем рекомендуется использовать **бинарный алгоритм Евклида** или его расширенную версию. При необходимости нахождения коэффициентов — использовать корректно реализованный **расширенный алгоритм с нормализацией знаков**.