PA = LU factorization

相当于高斯消去法的列主元形式.

Example

$$A=\begin{bmatrix}2&1&5\\4&4&-4\\1&3&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2&1&5\\4&4&-4\\1&3&1\end{bmatrix}\xrightarrow[P_1]{\begin{bmatrix}&1&\\1&&\\&&1\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}4&4&-4\\2&1&5\\1&3&1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}4&4&-4\\\frac{1}{2}&1&5\\\frac{1}{4}&3&1\end{bmatrix}\xrightarrow[P_2]{\begin{bmatrix}1&&\\&&1\\&1&\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}4&4&-4\\\frac{1}{4}&3&1\\\frac{1}{2}&1&5\end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{bmatrix}4&4&-4\\\frac{1}{4}&2&2\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&5\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}4&4&4\\\frac{1}{4}&2&2\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&8\end{bmatrix}.$$

令 $P = P_2P_1\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}&1&\\&&1\\1&&\end{bmatrix}.$

有

$$\underbrace{\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}}_{P}\underbrace{\begin{bmatrix}2&1&5\\4&4&-4\\1&3&1\end{bmatrix}}_{A}=\underbrace{\begin{bmatrix}1&&\\\frac{1}{4}&1&\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&1\end{bmatrix}}_{L}\underbrace{\begin{bmatrix}4&4&-4\\&2&2\\&&8\end{bmatrix}}_{U.}$$

对于 $Ax=b$

$\rightarrow\quad PAx=Pb$

$\rightarrow\quad LUx=Pb$

令 $y=Ux$.

$Ly=Pb \xrightarrow{\text{解下三角}} y$

$Ux=y \xrightarrow{\text{解上三角}} x$

在算每一层之前进行列主元形式下的行交换.

$$
\begin{array}{cccccc|l}
u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & u_{15} & \cdots & \text{第一层} \\
l_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} & u_{25} & \cdots & \text{第二层} \\
l_{31} & l_{32} & u_{33} & u_{34} & u_{35} & \cdots & \text{第三层.} \\
l_{41} & l_{42} & l_{43} & u_{44} & u_{45} & \cdots & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & &
\end{array}
$$