数值积分——Newton-Cotes 求积公式

湘潭大学, 数学与计算科学学院

一、Newton-Cotes 求积公式

对 $[a,b]$ 的 n 等分点 $x_k = a + kh, h = \frac{b-a}{n}, k = 0, 1, 2, \cdots, n$

n 阶 Newton-Cotes 公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx (b-a)\sum_{k=0}^{n} c_k^{(n)} f(x_k)$$

Cotes 系数，令 $x = a + th$

$$C_k^{(n)} = \frac{1}{n}\int_0^n \left(\prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n} \frac{t-i}{k-i}\right)\mathrm{d}t = \frac{(-1)^{n-k}}{nk!(n-k)!}\int_0^n \prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n}(t-i)\mathrm{d}t$$

表 1　Cotes 系数

n	$C_k^{(n)}$								
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$							
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$						
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$					
4	$\frac{7}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{2}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{7}{90}$				
5	$\frac{19}{228}$	$\frac{75}{228}$	$\frac{50}{228}$	$\frac{50}{228}$	$\frac{75}{228}$	$\frac{19}{228}$			
6	$\frac{41}{840}$	$\frac{216}{840}$	$\frac{27}{840}$	$\frac{272}{840}$	$\frac{27}{840}$	$\frac{216}{840}$	$\frac{41}{840}$		
7	$\frac{751}{17280}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{1323}{17280}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{1323}{17280}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{751}{17280}$	
8	$\frac{989}{28350}$	$\frac{5888}{28350}$	$-\frac{928}{28350}$	$\frac{10496}{28350}$	$-\frac{4540}{28350}$	$\frac{10496}{28350}$	$-\frac{928}{28350}$	$\frac{5888}{28350}$	$\frac{989}{28350}$
$\cdots$	$\cdots$								

n=1 时，代入 Cotes 系数得到梯形公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)).$$

n=2 时, 代入 Cotes 系数得到 Simpson 公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right).$$

n=4 时, 代入 Cotes 系数得到四阶 Newton-Cotes 公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{90}(7f(x_0)+32f(x_1)+12f(x_2)+32f(x_3)+7f(x_4)).$$

二、算法

♡ Newton-Cotes 求积公式: `[NC] = NC求积(a,b,n,f)`

1. 输入
   - $[a,b]$
   - n : 将 [a,b] n 等分
   - f : 已经定义好的函数，支持向量运算
2. 实现步骤
   - 通过 [a,b]n 等分获得 n+1 个横坐标构成的 x0 向量
   - y0 = f(x0);
   - n 确定 Newton-Cotes 求积公式的阶数，和所要用到的 Cotes 系数
   - 代入
   $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx (b-a)\sum_{k=0}^{n} c_k^{(n)} f(x_k) = NC$$
3. 输出
   - NC：通过 Newton-Cotes 公式得到的积分近似值

三、北太天元源程序

```
function [NC] = NC求积(a,b,n,f)
% Newton-Cotes 求积公式
% [a,b] 的 n 等分
% f: 提前定义好的函数,要求支持向量运算
% n 不超过 8

%linspace可以把[a,b]等分成n个点, n-1个区间
x0 = linspace(a,b,n+1); % 故此处是n+1
y0 = f(x0);
Cotes = cell(1,8); % 创建一个空的元胞数组
Cotes{1} = [1/2 1/2];
Cotes{2} = [1/6 4/6 1/6];
Cotes{3} = [1/8 3/8 3/8 1/8];
Cotes{4} = [7/90 32/90 2/90 32/90 7/90];
Cotes{5} = [19/228 75/228 50/228 50/228 75/228 19/228];
Cotes{6} = [41/840 216/840 27/840 272/840 27/840 216/840 41/840];
```

```
Cotes{7} = [751/17280 3577/17280 1323/17280 2989/17280 2989/17280 1323/17280 3588/17280
    751/17280];
Cotes{8} = [989/28350 5888/28350 -928/28350 10496/28350 -4540/28350 10496/28350 -928/28350
    5888/28350 989/28350];

sum_yc = sum(Cotes{n} .* y0);
NC = (b-a) * sum_yc;
end
```

将上述代码保存为 NC求积.m 文件。

四、数值算例

例 1 用 *Newton-Cotes* 公式计算

$$\int_{-4}^{4}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=2\arctan(4)\approx 2.6516$$

分别取 $n=1,2,3,\ldots,8$, 计算出对应的积分近似值，并观察随 n 增加它与 2.6516 的误差变化

```
% NC求积例子
clc,clear all,format long;
f1 = @(x)1./(1+x.^2);
a = -4; b = 4;

zhenshi = 2.6516; % 真实值取4位小数的值
Nc = zeros(1,8);
delta = zeros(1,8);
for n =1:1:8
   Nc(n) = NC求积(a,b,n,f1);
   delta(n) = abs(Nc(n)-zhenshi);
end
n =1:8;
figure(1);
plot(n,Nc,'-*b');
figure(2);
plot(n,delta,'-*r');
disp(Nc);
```

将上述代码保存为 NC求积例子.m

运行后得到

```
1x8 double
列 1 -- 3
```

```
 0.470588235294118    5.490196078431372    2.277647058823530
列 4 -- 6
 1.388758169934641    2.996500104777917    3.328798127470166
列 7 -- 8
 2.800256544272789    1.941094304388422
```

对比复化 Simpson 和 NC 下的误差可以发现使用 Newton-Cotes 公式求这个例子时，数值求积的过程是发散的.

随着 n 的增加，Cotes 系数中的分母也在增大，这会引起有效数字的损失.

在实际应用时，常常只采用几种低阶 ($n \leqslant 7$) 的求积公式，如梯形公式、Simpson 公式和四阶 Newton-Cotes 公式——特别称作 Cotes 公式.

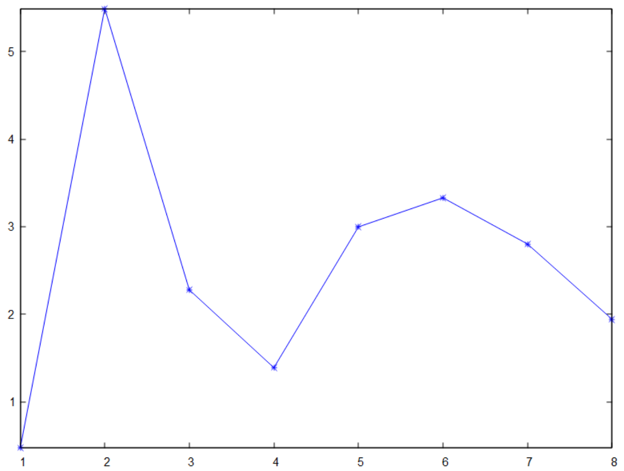

图 **1**　通过 **NC** 得到的近似值

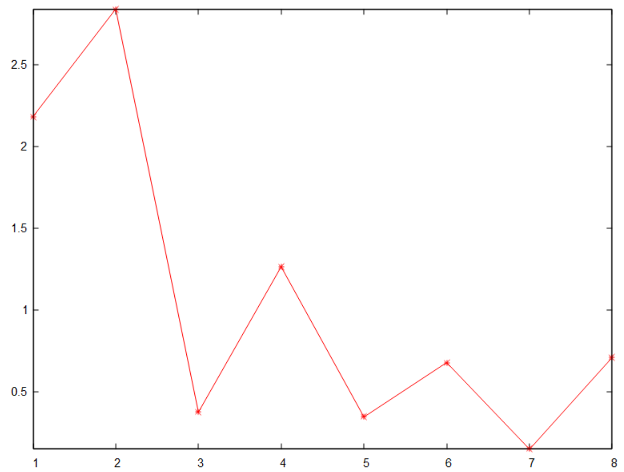

图 **2**　**NC** 下的误差

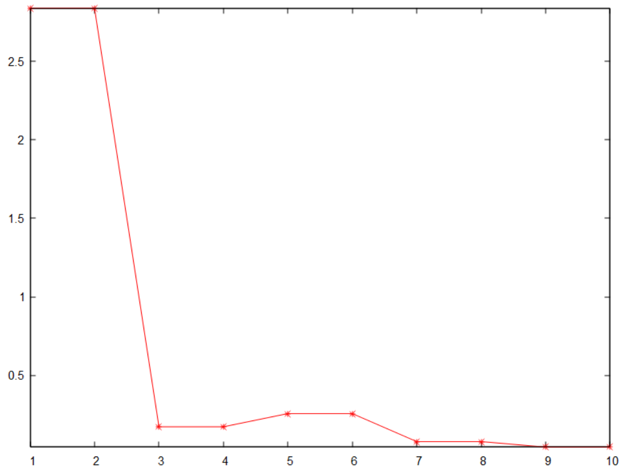

图 **3**　复化 **Simpson** 下的误差