数值积分——复化 Simpson 求积公式

湘潭大学, 数学与计算科学学院

一、复化 Simpson 求积公式

Simpson 公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right).$$

把积分区间 $[a,b]$ 进行 $2m$（偶）等分，记 $n=2m$, 其中 $n+1$ 是节点总数，m 是积分子区间的总数.

步长 $h=\frac{b-a}{n}$，节点 $x_k=a+kh, (k=0,1,2,\cdots,n)$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{m-1}\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)\mathrm{d}x$$

在 $[x_{2i}, x_{2i+2}]$ 上用 Simpson 公式

$$\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{h}{3}[f(x_{2i})+4f(x_{2i+1})+f(x_{2i+2})]$$

累加得复化 Simpson 求积公式

$$S_n(f) \approx \frac{h}{3}\left[f(a)+4\sum_{i=0}^{m-1} f(x_{2i+1})+2\sum_{i=1}^{m-1} f(x_{2i})+f(b)\right]$$

二、算法

♡ 复化 Simpson 积分： `S = 复化Simpson_v1(a,b,n,f)`

1. 输入
   - $[a,b]$
   - n : 将 [a,b] n 等分，要求 n 为偶数
   - f : 已经定义好的函数，支持向量运算
2. 实现过程
   - 判断 n 是否是偶数，若不是，$+1$ 变为偶数
   - m = n/2;
   - 计算出 $[a,b]n$ 等分后得到的 $n+1$ 个节点，构成向量 x0
   - y0 = f(x0)

$$sumy1 = \sum_{i=0}^{m-1} f(x_{2i+1})$$

$$sumy2 = \sum_{i=1}^{m-1} f(x_{2i})$$

$$S = \frac{h}{3}\left[f(a) + 4 * sumy1 + 2 * sumy2 + f(b)\right]$$

3. 输出 S

三、北太天元源程序

```
function S = 复化Simpson_v1(a,b,n,f)
% [a,b]
% n : 小区间的个数, 要求是偶数
% f: 定义好的函数
   if mod(n,2) != 0 % 判断n是否为偶数, 如果不是, 使其变为偶数
       n = n+1;
   end
   h = (b-a)/n;
   k = 0:1:n;
   xi = a + k * h;
   yi = f(xi);
   m = n/2;
   i1 = 0:1:m-1;
      sumy1 = sum(yi(2*i1+1 +1)); % f(x_{2i+1})求和
   i2 = 1:1:m-1;
      sumy2 = sum(yi(2*i2 +1)); % f(x_{2i})求和
   S = (yi(1) + 4*sumy1 + 2*sumy2 + yi(n+1)) * h/3;
end
```

将上述代码保存为 复化Simpson_v1.m 文件。

四、数值算例

例 1 用数值积分法近似计算

$$\pi = 4\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

编写复化 *Simpson* 公式的实现程序，分别取剖分段数 $n = 10, 20, 40, 80, 160$, 计算积分值与 π 的误差并作图；

例子

```
% 复化Simpson求积例子
clc;clear all;format long;
f = @(x) 4./(1+x.^2);

N = [10 20 40 80 160];
delta = zeros(1,5);
k = 1;
for n = N
    S = 复化Simpson_v1(0,1,n,f);
    delta(k) = abs(pi - S);
    k++;
end
     plot(N,delta,'b');
disp(delta);
```

将上述代码保存为 `复化Simpson例子.m`

运行后得到 积分值与 π 的误差

```
 列 1 -- 3
  0.000000039650578    0.000000000620008    0.000000000009688
 列 3 -- 5
  0.000000000000151    0.000000000000002
```

从图像可知，复化 Simpson 收敛速度更快

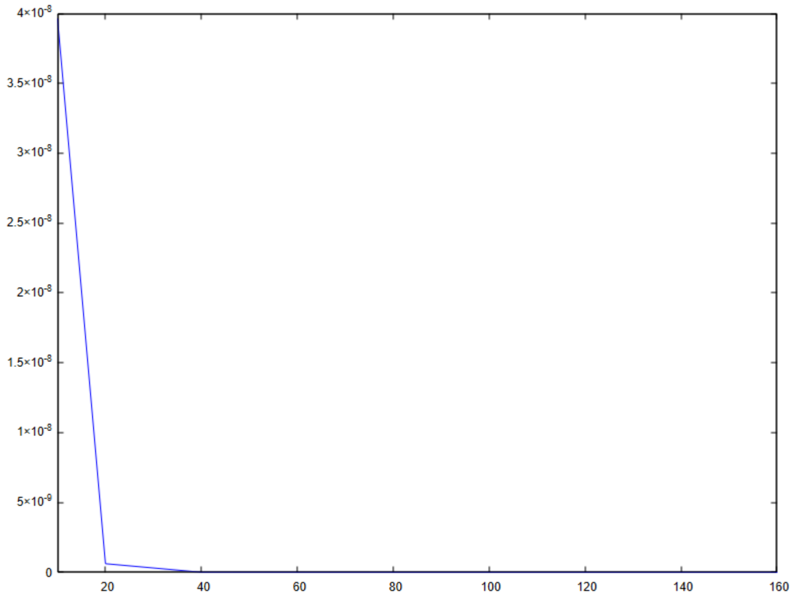

图 **1**　复化 **Simpson** 求积公式下积分值与 π 的误差随 **n** 的变化

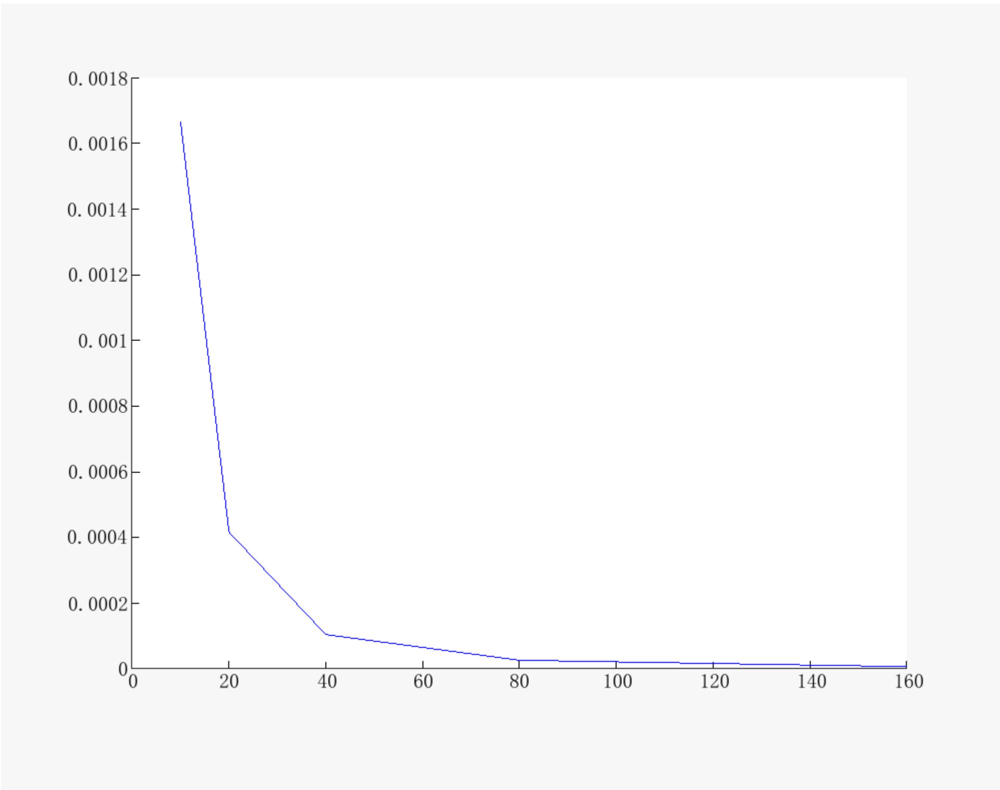

图 **2**　复化梯形求积公式下积分值与 π 的误差随 **n** 的变化

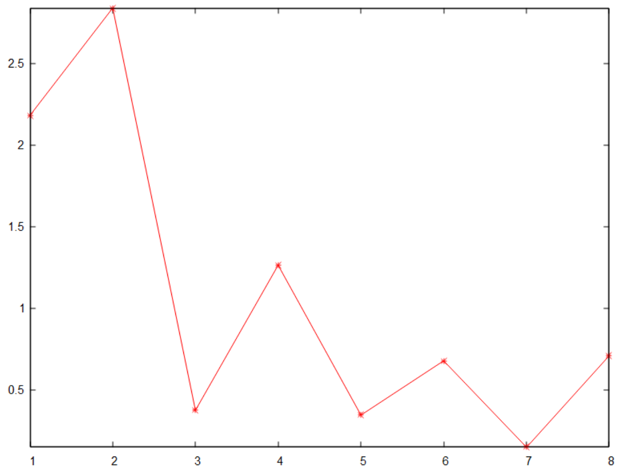

图 **3　Newton—Cotes** 公式下的一个图像参照