一阶谓词逻辑

张文生 研究员

中国科学院自动化研究所

2019年09月12日

内容简介

- 命题逻辑局限性
- 基本概念
- 合适公式
- 公式的解释
- 前束范式

- 例子:
  – 每个人都是要死的. 孔子是人, 他是要死的.
- 写成命题形式:
  – P: 每个人都是要死的.
  – Q: 孔子是人.
  – R: 孔子是要死的.
- R是P, Q的逻辑结论?

内容简介

- 命题逻辑局限性
- 基本概念
- 合适公式
- 公式的解释
- 前束范式

- 定义(谓词):
  - 设D是非空个体名称集合，定义在D^n上,取值于{T, F}上的n元函数，称为n元谓词
  - D^n表示集合D上的n次笛卡儿乘积
- 例子:
  - Man(x)
  - Greater(x, y)

函数

- 函数(函词)
  - 是一个映射:

    f: D → D

  - 例子:
    - father(x, y)

符号

- 常数: 3, 20.5, John, Confucius
- 变量: x, y, z
- 函数: g, f, h, father, plus
- 谓词: Q, P, GREATER

项

- **定义(项)**：
  - 常数是项
  - 变量是项
  - 如果f是一个n元函数符号，且t_1，t_2，…，t_n是项，则f(t_1，t_2，…，t_n)也是项
  - 所有项均是应用上述规则产生

- 谓词不能是项

内容简介

- 命题逻辑局限性
- 基本概念
- 合适公式
- 公式的解释
- 前束范式

- ∀: 全称量词
  - ∀x: 所有x, 每个x;
- ∃: 存在量词
  - ∃x: 存在一个x;

- 例子:
  - 每个有理数是实数;
  - 存在一个数, 它是素数;
  - 对每个数x, 存在一个数y, 使得x<y;
- 令:
  - Q(x): x是有理数;　P(x): x是素数;
  - R(x): x是实数;　LESS(x, y): x<y;
- 例子:
  - $(\forall x)(Q(x) \rightarrow R(x))$
  - $(\exists x)P(x)$
  - $(\forall x)(\exists y)LESS(x, y)$

约束与自由

- 变量的出现是约束的, 当且仅当变量出现在使用它的量词范围之内; 变量的出现是自由的, 当且仅当它的出现不是约束的;
  - $(\exists x)(P(x, y) \rightarrow Q(x, z)) \vee R(x)$
- 变量是约束的, 如果至少一次它的出现是约束的; 变量是自由的,如果至少一次它的出现是自由的;
  - 一个变量可以既是约束变量又是自由变量;
  - $(\exists x)(P(x, y) \rightarrow Q(x, z)) \vee R(x)$

- 变量改名:
  - $(\forall x)G(x) = (\forall y)G(y)$
  - $(\exists x)G(x) = (\exists y)G(y)$
  - $(\forall x)(P(x, y) \vee Q(x)) \neq (\forall z)(P(z, y) \vee Q(x))$
  - $(\forall x)P(x, y) \neq (\forall y)P(y, y)$
- $(\exists x)(P(x, y) \rightarrow Q(x, z)) \vee R(x)$
  - $(\exists x)(P(x, y) \rightarrow Q(x, z)) \vee R(u)$

原子

- 定义(原子):
  - 如果P是n元谓词，t_1，t_2，...，t_n是项，则P（t_1，t_2，...，t_n）是一个原子。

合适公式

- 定义(合适公式)
  - 原子是公式;
  - 如果G,H是公式, 则~G, $(G \wedge H)$, $(G \vee H)$, $(G \to H)$, $(G \leftrightarrow H)$是公式
  - 如果G是公式, 且x是G中的自由变量, 则$(\forall x)G$和$(\exists x)G$是公式
  - 所有公式均是由上述规则产生

- 例子:
  - 每个人都是要死的. $(\forall x)(MAN(x) \rightarrow MORTAL(x))$
  - 孔子是人. $MAN(Confucius)$
  - 孔子是要死的. $MORTAL(Confucius)$

- 例子: (自然数公理)
  - 对每个数, 存在一个且仅仅一个直接后继
  - 没有一个数, 它的直接后继是0
  - 对每个大于0的数, 存在一个且仅仅一个直接前续
- 令f(x), g(x)表示x的后继与前续; E(x, y): x=y
- 逻辑表示
  - $(\forall x)(\exists y)(E(f(x), y) \wedge (\forall z)(E(z, f(x)) \rightarrow E(y, z)))$
  - $\sim((\exists x)E(f(x), 0))$
  - $(\forall x)(\sim E(x, 0) \rightarrow ((\exists y)(E(y, g(x)) \wedge (\forall z)(E(z, g(x)) \rightarrow E(y, z))))$

内容简介

- 命题逻辑局限性
- 基本概念
- 合适公式
- 公式的解释
- 前束范式

- 定义(公式的解释)
  - 公式的解释是由一个非空域D, 以及下列对G中常量符号, 函数符号, 及谓词符号的指派组成, 并且它的指派遵守下述规则:
    - 对每个常量, 指派一个D中的元作为它的值
    - 对每个n元函数符号, 指派一个从D^n到D的映射
    - 对每个n元谓词符号, 指派一个从D^n到{T,F}的映射

对D域内计算公式的规则

- 如果公式或G, H的真值已被计算, 则

  ~H, (G∧H), (G∨H), (G→H), (G↔H)

  的真值可按命题的计算定义来求出

$$(\forall x)G = \begin{cases} T & \text{对所有的d} \in D\text{,满足}G = T \\ F & \text{否则} \end{cases}$$

$$(\exists x)G = \begin{cases} T & \text{存在d} \in D\text{, 满足}G = T \\ F & \text{否则} \end{cases}$$

- 例1:
  - $G=(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(f(x),a))$
  - 一个解释I:
    - 域: D={1, 2}
    - 对常数指派: a:1
    - 对函数指派: f(1)=2, f(2)=1
    - 对谓词指派: P(1)=F, P(2)=T, Q(1,1)=T, Q(1,2)=T, Q(2,1)=F, Q(2,2)=T
    - G?

- x=1:
  - $P(x) \rightarrow Q(f(x),a)$

  $=P(1) \rightarrow Q(f(1), 1)$

  $=P(1) \rightarrow Q(2, 1)$

  $=F \rightarrow F$

  $=T$
- x=2:
  - $P(x) \rightarrow Q(f(x),a)$

  $=P(2) \rightarrow Q(f(2), 1)$

  $=P(2) \rightarrow Q(1, 1)$

  $=T \rightarrow T$

  $=T$
- 公式G在解释I下为真;

- 例2:
  - (a) $G=(\exists x)(P(f(x)) \wedge Q(x, f(a)))$
  - (b) $G=(\exists x)(P(x) \wedge Q(x, a))$
  - (c) $G=(\forall x)(\exists y)(P(x) \wedge Q(x, y))$
  - 解释同例1.

- (a) $G=(\exists x)(P(f(x)) \wedge Q(x, f(a)))$
  - $x=1$

$$P(f(1)) \wedge Q(1, f(1))$$
$$=P(2) \wedge Q(1, 2)$$
$$=T \wedge T$$
$$=T$$

  - G在解释I下为真

- (b) $G=(\exists x)(P(x) \wedge Q(x, a))$
  - $x=1$

    $P(1) \wedge Q(1, 1)$

    $=F \wedge T$

    $=F$
  - $x=2$

    $P(2) \wedge Q(2, 1)$

    $=T \wedge F$

    $=F$

  - G在解释I下为假

- (c) $G=(\forall x)(\exists y)(P(x) \wedge Q(x, y))$
  - $x=1, y=1$

    $P(x) \wedge Q(x, y)$

    $= P(1) \wedge Q(1, 1)$

    $= F \wedge T$

    $= F$
  - $x=1, y=2$

    $P(x) \wedge Q(x, y)$

    $= P(1) \wedge Q(1, 2)$

    $= F \wedge T$

    $= F$
  - G在解释I下为假;

重要的定义

- 一个公式G是相容的(满足的), 当且仅当存在一个解释I, 使公式G在解释I下为真. 称I是G的一个模型且I满足G
- 一个公式G是不相容的(不满足), 当且仅当不存在解释满足G
- 一个公式G是永真的, 当且仅当每一个解释都满足G
- 一个公式G是公式F_1, F_2,… F_n的逻辑结论, 当且仅当对任一个解释I, 如果F_1, F_2,… F_n在I下为真, 则G在I下也为真

例1

- 证明$H=(\forall x)(P(x)) \wedge (\exists y)(\sim P(y))$不相容

- 证明:
  - 如果任一个$a \in D$使得$P(a)=T$
    - 则$\sim P(a)=F$. $(\exists y)(\sim P(y))$为假
  - 如果存在一个$a \in D$使得$P(a)=F$
    - 则$(\forall x)(P(x))$为假
  - 所以H不相容

例2

- 证明Q(a)是F_1, F_2的逻辑结论.
  - $F_1 = (\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$
  - $F_2 = P(a)$
- 证明:
  - 假设F_1, F_2为真, Q(a)为假;
  - 则$\sim P(a) \vee Q(a)$为假;
  - $P(a) \rightarrow Q(a)$为假;
  - $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$为假;

内容简介

- 命题逻辑局限性
- 基本概念
- 合适公式
- 公式的解释
- 前束范式

- 定义(前束范式):
  - 一个公式H称为前束范式, 当且仅当公式H有如下形式:

    $(Q_1x_1)\ldots(Q_nx_n)(M)$

    其中Q_i或是∀或是∃， i=1,…,n. M是不含量词的公式.

    其中$(Q_1x_1)\ldots(Q_nx_n)$称为前缀, M称为母式;
  - $(\forall x)(\forall y)(P(x, y))$,　　$(\exists x)(\forall y)(P(x, y)\wedge Q(y))$ 是
  - $(\forall x)(P(x, y))\wedge(\forall y)(Q(y))$ 不是

化公式为前束范式

- 等价公式
  - H=G: H和G的值对所有域的所有解释都相同;
- 设H(x)是仅含有自由变量x的公式, G是不含变量x的公式.
  - $(\forall x)H(x) \vee G = (\forall x)(H(x) \vee G)$
  - $(\exists x)H(x) \vee G = (\exists x)(H(x) \vee G)$
  - $(\forall x)H(x) \wedge G = (\forall x)(H(x) \wedge G)$
  - $(\exists x)H(x) \wedge G = (\exists x)(H(x) \wedge G)$

- $\sim((\forall x)H(x)) = (\exists x)(\sim H(x))$
- $\sim((\exists x)H(x)) = (\forall x)(\sim H(x))$

- 设H(x), G(x)是仅含有自由变量x的公式,
  - $(\forall x)G(x) \wedge (\forall x)H(x) = (\forall x)(G(x) \wedge H(x))$
  - $(\exists x)G(x) \vee (\exists x)H(x) = (\exists x)(G(x) \vee H(x))$
  - $(\forall x)G(x) \vee (\forall x)H(x) = (\forall x)(\forall y)(G(x) \vee H(y))$
  - $(\exists x)G(x) \wedge (\exists x)H(x) = (\exists x)(\exists y)(G(x) \wedge H(y))$
  - $(\forall x)G(x) \vee (\exists x)H(x) = (\forall x)(\exists y)(G(x) \vee H(y))$

- 关于→
  - $((\exists x)A(x)) \to B = (\forall x)(A(x) \to B)$
  - $((\forall x)A(x)) \to B = (\exists x)(A(x) \to B)$
  - $B \to ((\exists x)A(x)) = (\exists x)(B \to A(x))$
  - $(\forall x)A(x) \to (\exists x)B(x) = (\exists x)(A(x) \to B(x))$

- 证明$\sim((\forall x)H(x)) = (\exists x)(\sim H(x))$.
  - 证明:
    - 设$\sim((\forall x)H(x))$=T.
      - $(\forall x)H(x)$=F.
      - 存在$e\in D$, $H(e)$=F. $\sim H(e)$=T.
    - 设$\sim((\forall x)H(x))$=F.
      - $(\forall x)H(x)$=T.
      - 对任一个$e\in D$, $H(e)$=T. $\sim H(e)$=F.

- 证明$(\forall x)G(x) \wedge (\forall x)H(x) = (\forall x)(G(x) \wedge H(x))$
  - 证明:
    - 设$(\forall x)G(x) \wedge (\forall x)H(x)=T$
      - $(\forall x)G(x)=T$, $(\forall x)H(x)=T$
      - 对任一个$e \in D$, $G(x)=T$并且$H(x)=T$
      - 对任一个$e \in D$, $G(x)=T \wedge H(x)=T$
    - 设$(\forall x)G(x) \wedge (\forall x)H(x)=F$
      - 对任一解释, $(\forall x)G(x)=F$或者$(\forall x)H(x)=F$
      - 设$(\forall x)G(x)=F$
      - 存在$e \in D$, $G(e)=F$
      - $G(e) \wedge H(e)=F$

化合适公式为前束范式

- 消去→和↔
  - $F \leftrightarrow G = (F \to G) \land (G \to F)$
  - $F \to G = \sim F \lor G$
- 将~代入每个原子前面
  - $\sim(\sim F) = F$
  - $\sim(F \lor G) = \sim F \land \sim G$
  - $\sim(F \land G) = \sim F \lor \sim G$
  - $\sim((\forall x)H(x)) = (\exists x)(\sim H(x))$
  - $\sim((\exists x)H(x)) = (\forall x)(\sim H(x))$

- 如果必要的话, 将约束变量改名
  - $(\forall x)G(x) \vee (\forall x)H(x) = (\forall x)(\forall y)(G(x) \vee H(y))$
- 利用等价公式将量词移到公式的最左边

- 例1: 化$(\forall x)P(x) \rightarrow (\exists x)Q(x)$为前束范式

$$(\forall x)P(x) \rightarrow (\exists x)Q(x)$$

$$= \sim(\forall x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)$$

$$= (\exists x)\sim P(x) \vee (\exists x)Q(x)$$

$$= (\exists x)(\sim P(x) \vee Q(x))$$

- 例2: 化下式为前束范式

$(\forall x)(\forall y)((\exists z)(P(x,z) \wedge P(y,z)) \rightarrow (\exists u)Q(x,y,u))$

$=(\forall x)(\forall y)(\sim(\exists z)(P(x,z) \wedge P(y,z)) \vee (\exists u)Q(x,y,u))$

$=(\forall x)(\forall y)((\forall z)(\sim P(x,z) \vee \sim P(y,z)) \vee (\exists u)Q(x,y,u))$

$=(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\exists u)(\sim P(x,z) \vee \sim P(y,z) \vee Q(x,y,u))$

中国科学院
自动化研究所
INSTITUTE OF AUTOMATION
CHINESE ACADEMY OF SCIENCES

感谢同学们听课

欢迎讨论与交流