矩阵引论

概要复习已知的矩阵相关知识，说明矩阵分析及应用不是从零开始，而是在有关已有知识基础上的深化。

矩阵是什么？

论矩阵的含义和矩阵运算背后的数学理论

矩阵的代数性质

1.矩阵是线性映射的表示:

线性映射的相加表示为矩阵的相加

线性映射的复合表示为矩阵的相乘

2.矩阵是一种语言，它是表示复杂系统的有力工具。

学习矩阵理论的重要用途之一就是学会用矩阵表示复杂系统的关系，培养根据矩阵推演公式的能力是学习矩阵论的目的之一。

定义一个矩阵有几种方式:

1.可以通过定义矩阵的每一个元素来定义一个矩阵;

2. 可以通过矩阵具有的性质来定义一个矩阵。
如：对称矩阵可以定义为：$a_{ij}=a_{ji}$

可以定义为: (x, Ay)=(Ax,y), 其中(x, y)表示向量内积;

可以定义为： $Ax=\nabla f(x)$, 其中$f(x)=x^T Ax/2$,即它对向量x的作用相当于函数f(x)在x处的梯度。

2. 矩阵与图像

1.矩阵可表示为图像

矩阵元素可以表示为图像的像素。

2.数字图像一般表示为矩阵

反之，一幅灰度图像本身就是矩阵。图像压缩就是矩阵的表示问题.这时矩阵相邻元素间有局部连续性，既相邻的元素的值大都差别不大。

3. 矩阵与图像的差异

矩阵的元素间的取值可以完全独立，但是有意义的图像的像素间有约束关系.

3. 矩阵是二维的(几何性质)

- 矩阵能够在二维的纸张和屏幕等平面媒体上表示，而人类的视觉也是直观上也是二维的，而且视觉是人类接受外界信息的最主要器官，这就使得用矩阵表示的问题显得简单清楚，直观，易于理解和交流。

- 很多二元关系很直观的就表示为矩阵，如关系数据库中的项目和属性，随机马尔科夫链的状态转移概率矩阵，图论中的有向图或无向图的邻接矩阵表示等(如：代数图论就基于矩阵的性质)。 矩阵的推广就是张量,类似地，可以有<<张量分析及应用>>，但本课程中不涉及。

相关概念及定义

- 矩阵(Matrix)
  - 矩阵是数域F上的$m \times n$个数构成的数表：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为F上m行、n列的矩阵，记为A

$$a_{ij} \in F \qquad i = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, n$$

称为A的第i行、第j列元素，记为$(A)_{ij}$

$$(A)_{ij} = a_{ij}$$

相关概念及定义（continue）

- 数域F上的一切m行、n列的矩阵的集合，记为：

$$F^{m\times n}$$

- 若 $A\in F^{m\times n}$ ， $B\in F^{m\times n}$ ，则称矩阵A与B同型

- 数域（Field）
  - 若数集F含有数1且对四则运算封闭，则称F为数域

相关概念及定义（continue）

在矩阵的定义的基础上，可定义矩阵相等、负矩阵、零矩阵、方阵、单位阵、对角阵、逆矩阵等

- 矩阵相等

设$A \in F^{m\times n}$，$B \in F^{m\times n}$，若$(A)_{ij} = (B)_{ij}$，$i = 1, \ldots, m$，$j = 1, \ldots, n$

则称矩阵A与B相等，记为$A = B$

- 负矩阵

对 $A = (a_{ij}) \in F^{m\times n}$

称 $-A \triangleq (-a_{ij}) \in F^{m\times n}$ 为A的负矩阵

- 零矩阵

元素全为零的矩阵，称为零矩阵，记为0

相关概念及定义（continue）

- 方阵（Square matrix）

  行数和列数相同的矩阵称为方阵，行数为n的方阵称为n阶方阵。

  对于方阵，又定义了主对角线元素、副对角线元素等概念：

  称 $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ 为主对角线元素

  称 $a_{1n}, a_{2,n-1}, \cdots, a_{1n}$ 为副对角线元素

- 对角阵（diagonal matrix）

  除了主对角线元素以外，其余元素均为0的方阵，称之为对角阵。

- 单位阵（Identity matrix）

  主对角线元素全为1的对角阵，称之为单位阵。简记为I或 E 。

  N阶单位阵记为I_n 或 E_n

矩阵运算

- 矩阵加法:

设 $A=(a_{ij})\in F^{mxn}$, $B=(b_{ij})\in F^{mxn}$

称 $A+B\underline{\underline{\Delta}}(a_{ij}+b_{ij})\in F^{mxn}$ 为矩阵A与B之和。

矩阵加法是 $F^{mxn}\times F^{mxn}\rightarrow F^{mxn}$ 的代数运算，性质：

交换律：$A + B = B + A$

结合律：$(A + B) + C = A + (B + C)$

$$A + 0 = 0 + A = A$$

$$A+ (-A) = (-A) + A = 0$$

- 矩阵减法:

设 $A\in F^{mxn}$, $B\in F^{mxn}$

称 $A-B\underline{\underline{\Delta}}=A+(-B)\in F^{mxn}$ 为矩阵A与B之差。

矩阵运算（Continue）

- 数乘矩阵：

  设 $\lambda \in F$ ，$A=(a_{ij})\in F^{mxn}$

  称 $\lambda A \underline{\underline{\Delta}} (\lambda a_{ij}) \in F^{mxn}$ 为 λ 与之积。

  推论 $-A=(-1)A$:

  数乘矩阵是 $F \times F^{mxn} \to F^{mxn}$ 的一个代数运算，性质：

  1。 $1A=A$

  2。 $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$ 分配律

  3。 $(\lambda_1+\lambda_2)A=\lambda_1 A+\lambda_2 A$ 分配律

  4。 $\lambda_1(\lambda_2 A)=\lambda_2(\lambda_1 A)=(\lambda_1\lambda_2 A)$ 结合律

- 矩阵乘法：

  设 $A=(a_{ij})\in F^{mxn}$， $B=(b_{ij})\in F^{nxp}$

  令 $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \in F$

  $i=1,\cdots,m, \quad j=1,\cdots,p.$

矩阵运算（Continue）

称 $AB \triangleq (c_{ij}) \in F^{mxp}$

为A与B之**积**

(1) A的列数 = B的行数;

(2) AB的行数为A的行数, 列数为B的列数;

(3) AB的$\boldsymbol{i}$行$\boldsymbol{j}$列元素为A的$\boldsymbol{i}$行元素与B的$\boldsymbol{j}$列对应元素之积之和

举例:

$$A = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad AB = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} -4 \end{pmatrix}$$

矩阵运算（Continue）

AB≠BA：矩阵乘法不满足交换律

$$B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{pmatrix}\qquad A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 6 & 3\end{pmatrix}\qquad AB=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 6 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=0$$

$A\neq 0$； $B\neq 0$，但$AB=0$。

矩阵乘法是 $F^{mxn}\times F^{nxp}\rightarrow F^{mxp}$ 的一个代数运算，它有以下性质：

1° $(AB)C=A(BC)$ 结合律

2° $(A+B)C=AC+BC$ 分配律

$A(B+C)=AB+AC$ 分配律

3° $(\lambda A)B=A(\lambda B)=\lambda(AB)$ $\lambda\in F$结合律

4° A是方阵：$AI=IA=A$

矩阵运算(Continue)

- 方阵的幂（Power）

设 $A \in F^{nxn}$,　　$k \in N$

称

$$A^k \underline{\underline{\Delta}} \overbrace{AA\cdots A}^{k个}$$

为A的k次幂，并定义 $A^0 \underline{\underline{\Delta}} I$

因为矩阵乘法满足结合律，所以

$$A^{k_1}A^{k_2}=A^{k_1+k_2},(A^{k_1})^{k_2}=A^{k_1k_2}$$

又因矩阵乘法不满足交换律，一般地：

$$(AB)^k \neq A^k B^k$$

$$(A+B)(A-B)=A^2-AB+BA-B^2 \neq A^2-B^2$$

转置矩阵和分块矩阵

- 转置矩阵（Transposed matrix）

可将对矩阵行与列的研究，转化为对其中之一的研究

设 $A=(a_{ij})\in F^{mxn}$

称

$$A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\in F^{n\times m}$$

为A的转置矩阵，有的教科书上记为 A'

易见: $(A^T)_{ij}=(A)_{ji}$ $\qquad (A^T)^T=A$

转置矩阵具有以下性质:

$(\lambda A)^T=\lambda A^T \qquad (A\pm B)^T=A^T+B^T \qquad \lambda\in F$

$(AB)^T=B^TA^T$ 可用数学归纳法推广至多个矩阵的情形

转置矩阵和分块矩阵

- 分块矩阵

  用水平线或垂直线将矩阵 $A \in F^{mxn}$ 分成若干个小矩阵，并将A视为以这些小矩阵为元素组成的矩阵，称之为A的分块矩阵，其中的每个小矩阵称为A的子矩阵。

  一般用 $(A_{ij})_{r\times s}$ 表示r行s列的分块矩阵，A_{ij}为其第i行第j列上的子矩阵 $i=1, \ldots, r$, $j=1, \ldots, s$

- 分块矩阵的相等

  – 若两个分块矩阵恢复成普通矩阵是相等，则称此两分块矩阵相等

- 对 $A \in F^{mxn}$、$B \in F^{mxn}$ 用相同的划分法分为分块矩阵，则矩阵加法、减法和数乘矩阵的法则可推广到分块矩阵上

分块矩阵的加法、减法、数乘

$$
\begin{array}{ccccc}
 & n_1 & n_2 & \cdots & n_s & \\
A = & \left(\begin{array}{cccc} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{array}\right) & \begin{array}{c} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_r \end{array}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccc}
 & n_1 & n_2 & \cdots & n_s & \\
B = & \left(\begin{array}{cccc} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1s} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{r1} & B_{r2} & \cdots & B_{rs} \end{array}\right) & \begin{array}{c} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_r \end{array}
\end{array}
$$

其中 $m_1 + m_2 + \cdots m_r = m$ ， $n_1 + n_2 + \cdots n_s = n$ 则

1。 $A \pm B = (A_{ij} \pm B_{ij})_{r\times s}$

2。 $\lambda A = (\lambda A_{ij})_{r\times s} \quad \lambda \in F$

将 $A \in F^{mxn}$ 的列，$B \in F^{mxn}$ 的行用相同的划分法划分为分块矩阵，则矩阵乘法可推广到分块矩阵上。

分块矩阵的乘法和转置

$$
\begin{array}{ccccc}
 & n_1 & n_2 & \cdots & n_s & \\
A = & \multicolumn{4}{c}{\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix}} & \begin{matrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_r \end{matrix}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccc}
 & p_1 & p_2 & \cdots & p_t & \\
B = & \multicolumn{4}{c}{\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1t} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{s1} & B_{s2} & \cdots & B_{st} \end{pmatrix}} & \begin{matrix} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_s \end{matrix}
\end{array}
$$

令 $C_{ij} = \sum_{q=1}^{s} A_{iq}B_{qj} \in F^{m_i \times p_j}$

其中 $i = 1, \ldots, r,\ \ j = 1, \ldots, s$ ，则

$$AB = (C_{ij})_{r \times t}$$

- 分块矩阵的转置
  - 欲求分块矩阵的转置，只要将其对应行列互换，然后将其中的每个子矩阵转置即可

分块矩阵的乘法和转置

$$A=\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} n_1 & n_2 & \cdots & n_s \end{array} \\ \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_r \end{array} \quad \in F^{m\times n}$$

则其转置矩阵为

$$A^T=\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} m_1 & m_2 & \cdots & m_r \end{array} \\ \begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{12} & \cdots & A_{r1}^t \\ A_{12}^T & A_{22} & \cdots & A_{r2}^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1s}^T & A_{2s}^T & \cdots & A_{rs}^T \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_s \end{array} \quad \in F^{n\times m}$$

$$m_1+m_2+\cdots m_r=m \qquad n_1+n_2+\cdots n_s=n$$

矩阵的秩

- 矩阵的秩
  - 矩阵A的k阶子式

    设 $A\in F^{mxn}$ ，在A中任取k行、k列 $(1\le k\le \min(m,n))$

    位于这些行列相交处的元素构成的k阶行列式称为矩阵A的一个k阶子式
  - 若 $A\neq 0$ ，A中非零子式的最高阶数r称为A的秩，记为：

$$r=\operatorname{rank} A$$

  - 若 $A=0\in F^{m\times n}$ ，则定义 $\operatorname{rank} A \underline{\underline{\Delta}} 0$
  - F上所有m行n列且秩为$\boldsymbol{r}$的矩阵的集合记为：$F_r^{m\times n}$
  - 若 $A\in F_m^{m\times n}$ ，称A是行满秩的；否则称A是行降秩的，即$r<m$
  - 若 $A\in F_n^{m\times n}$ ，称A是列满秩的；否则称A是列降秩的，即$r<n$
- 方阵与其行列式的关系：
  - $\det A\neq 0$ ：rankA = n，称方阵满秩、非奇异
  - $\det A=0$ ：rankA < n，称方阵降秩、奇异

矩阵的秩(Continue)

- 矩阵的秩的性质
  - 矩阵与其转置矩阵的秩相等：$\operatorname{rank} A^T = \operatorname{rank} A$
  - 初等变换不改变矩阵的秩
  - $A, B \in F_n^{n\times n}$，则 $AB \in F_n^{n\times n}$ ：满秩方阵的乘积仍满秩

    $\operatorname{rank}(AB) \le \min(\operatorname{rank} A, \operatorname{rank} B)$
  - $A = (a_{ij}) \in F_r^{m\times n}$ 可经有限次初等变换化为

$$T = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{m\times n}$$

    且A可表示为 $A = P_s \cdots P_2 P_1 T Q_1 Q_2 \cdots Q_t$

    其中，P_s、Q_t, $i = 1, \ldots, r, j = 1, \ldots, t$是$F$上的初等阵
  - 推论：数域F上的满秩阵可被分解为F上的初等阵之积

$$T \to I_n$$

  - $A \in F_n^{n\times n}$ 可经初等行（列）变换化为单位阵，而单位阵在同样的行（列）变换下化为 A^{-1} ，即：

$$(A, I) \to (I, A^{-1})$$

逆矩阵和矩阵的逆

- **方阵的逆(Inverse)**

对 $A \in F^{n\times n}$，若存在同阶方阵B，使得

$$AB = BA = I$$

则称A可逆，并称B为A的逆矩阵，简称为A的逆，记为 A^{-1}

- **伴随矩阵(Adjacent matrix)**

对 $A \in F^{n\times n}$， $\bar{a}_{ij}$ 为det$A$中元素a_{ij}的代数余子式，则称

$$A^* \triangleq \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{21} & \cdots & \bar{a}_{n1} \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} & \cdots & \bar{a}_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_{1n} & \bar{a}_{2n} & \cdots & \bar{a}_{nn} \end{pmatrix} \in F^{n\times n} \qquad \mathrm{adj}\boldsymbol{A}$$

为A的伴随矩阵， det$A$为**方阵A的行列式（determinate）**

– 伴随矩阵的性质：

若 $A \in F^{n\times n}$，则 $AA^* = A^*A = (\det A)I$

逆矩阵和矩阵的逆(Continue)

- **逆存在的条件:**

方阵 $A \in F^{n\times n}$ 有逆的充分必要条件为:

$$\det A \neq 0$$

且满足此条件时，A有唯一的逆:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^{*} \in F_n^{n\times n}$$

– 若 $\det A \neq 0$ ，则称**A是满秩的**（或称**A是非奇异的**），否则，称**A是降秩的**（或称A是奇异的）

- 逆的性质

– 若 $A \in F^{n\times n}$ ，$B \in F^{n\times n}$ ，则: $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$

$$(A^{T})^{-1} = (A^{-1})^{T} \qquad (A^{*})^{-1} = (A^{-1})^{*} = \frac{1}{\det A} A \qquad (\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$$

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ：可推广至有限个满秩方阵相乘的情形

线性方程组解的结构

- ## 齐次方程组解的结构

  - 解集的几何特征

设W是F上齐次线性方程组

$$AX = 0$$

所有解的集合，则

1. W是 F^n（ R^n或 C^n ）的子空间
2. $\dim W = n - r$ ；
3. 若A由初等行变换和某些列对换

化为分块矩阵

$$\left[\begin{array}{c|c} I_r & C_{r\times(n-r)} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \in F^{n\times n}$$

其中$r < n$

线性方程组解的结构（Continue）

那么矩阵

$$\begin{bmatrix} -C_{r\times(n-r)} \\ I_{n-r} \end{bmatrix} \in F^{n\times(n-r)}$$

的$n-r$ 个列向量 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$ 是W的基

- 称W为齐次线性方程组$AX=0$的解空间
- 解空间W的基称为$AX=0$的基础解系
- F上齐次线性方程组$AX=0$的解 X_0是其任一基础解系

$$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$$

的线性组合

$$X_0 = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r} = \begin{pmatrix} \xi_1 & \cdots & \xi_{n-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_{n-r} \end{pmatrix}$$

X_0 通常称为齐次线性方程组$AX=0$的通解或一般解

线性方程组解的结构（Continue）

- 非齐次线性方程组解的结构
  - 非齐次线性方程组的一个确定的解称为它的特解
  - F上非齐次线性方程组

$$AX = B \quad A \in F_r^{m\times n}, B \in F^{m\times 1}$$

的解X，等于它的任一特解 X_1 与其对应非齐次线性方程组$AX = 0$的通解 X_0 之和

$$X = X_1 + X_0$$

  - X通常称为非齐次线性方程组AX = B的通解或一般解