中国科学院自动化研究所
INSTITUTE OF AUTOMATION
CHINESE ACADEMY OF SCIENCES

Herbrand定理

张文生 研究员

中国科学院自动化研究所

讲课内容

一. Skolem范式

二. Herbrand域

三. 语义树

四. Herbrand定理

五. Davis的工作

讲课内容

一. Skolem范式

二. Herbrand域

三. 语义树

四. Herbrand定理

五. Davis的工作

化公式为Skolem范式的步骤

- 公式化为前束范式
- 母式化为合取范式
- 在不影响公式的不相容性的前提下，使用**Skolem**函数，将前束中的存在量词消去

Skolem函数

- 消去存在量词;
- 令公式H是一个前束范式，并且母式M是合取范式
  $(Q_1x_1)\ldots(Q_nx_n)(M)$
  对前缀从左到右遇到的第一个存在量词$Q_r(1\le r\le n)$, 存在两种情况:

(1) 如果Q_r的左边(前边)没有全称量词, 则M中的x_r用常数a代替;

(2) 如果Q_r的左边(前边)有全称量词$x_{s1},\ldots, x_{sk}$, 且$1\le s_1<\ldots<s_k<r$, 则M中的x_r用函数$f(x_{s1},\ldots, x_{sk})$代替;

从前缀中删除$(Q_r\, x_r)$;

例子(Skolem函数)

- $(\exists x)(\forall y)(\forall z)(\exists u)(\forall v)(\exists w)P(x,y,z,u,v,w)$

$\Rightarrow(\forall y)(\forall z)(\exists u)(\forall v)(\exists w)P(a,y,z,u,v,w)$

$\Rightarrow(\forall y)(\forall z)(\forall v)(\exists w)P(a,y,z,f(y,z),v,w)$

$\Rightarrow(\forall y)(\forall z)(\forall v)P(a,y,z,f(y,z),v,g(y,z,v))$

Skolem函数的意义

- 化公式为**Skolem**范式与原来公式在不相容意义下保持等价(=)

- 定理: 令G是一个前束合取范式，$G=(Q_1x_1)\ldots(Q_nx_n)M[x_1,\ldots,x_n]$，

  Q_r为G中从左向右遇到的第一个存在量词。令

  $G_1=(Q_1x_1)\ldots(Q_{r-1}x_{r-1})(Q_{r+1}x_{r+1})(Q_nx_n)$

  $M[x_1,\ldots,x_{r-1}, f(x_1,\ldots,x_{r-1}),x_{r+1},\ldots,x_n]$

  其中：$f(x_1,\ldots,x_{r-1})$是x_r的Skolem函数.

  则有： G不相容⇔ G_1不相容

- 显然，如果公式前缀中有多个存在量词，
  则用归纳法证明。

子句集

- **Skolem**化以后, 将公式表示为子句集合.
  - $(\forall x)(\forall y)((P(x)\vee Q(y)) \wedge (Q(x)\vee \sim S(f(y))))$
  - $\{P(x)\vee Q(y),\ Q(x)\vee \sim S(f(y))\}$
- 定义(子句, **clause**):
  - 一个包含若干文字的析取式称为子句。例如:
    - $P \vee \sim S \vee R$
    - $P(x) \vee Q(y, z) \vee \sim R(y, y)$

  说明: 一个子句中没有文字则称空子句(, **nil**, 永假);
  一个子句中有**n**个文字则称**n**文字子句。
- 定义（子句集合）:
  - 子句内部的关系是析取;
  - 子句间的关系是合取;
  - 所有子句受全程量词约束;

化子句集的方法（9个步骤）

例：$(\exists z)(\forall x)(\exists y)\{[(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow R(y)] \vee U(z)\}$

1. 消蕴涵符

理论根据：$a \rightarrow b = \sim a \vee b$

$(\exists z)(\forall x)(\exists y)\{[\sim(P(x) \vee Q(x)) \vee R(y)] \vee U(z)\}$

2. 移动否定符

理论根据：$\sim(a \vee b) = \sim a \wedge \sim b$

$\sim(a \wedge b) = \sim a \vee \sim b$

$\sim(\exists x)P(x) = (\forall x)\sim P(x)$

$\sim(\forall x)P(x) = (\exists x)\sim P(x)$

$(\exists z)(\forall x)(\exists y)\{[(\sim P(x) \wedge \sim Q(x)) \vee R(y)] \vee U(z)\}$

3. 变量标准化

即：对于不同的约束，对应于不同的变量

$(\exists x)A(x) \wedge (\exists x)B(x) = (\exists x)A(x) \wedge (\exists y)B(y)$

4. 量词左移

$(\exists x)A(x) \wedge (\exists y)B(y) = (\exists x)(\exists y)\{A(x) \wedge B(y)\}$

5. 消存在量词 (**skolem**化）

$(\exists z)(\forall x)(\exists y)\{[(\sim P(x) \wedge \sim Q(x)) \vee R(y)] \vee U(z)\}$

$=> (\forall x)\{[(\sim P(x) \wedge \sim Q(x)) \vee R(f(x))] \vee U(a)\}$

6. 化为合取范式

即$(a \vee b) \wedge (c \vee d) \wedge (e \vee f)$的形式

$(\forall x)\{[(\sim P(x) \wedge \sim Q(x)) \vee R(f(x))] \vee U(a)\}$

$\Rightarrow (\forall x)\{(\sim P(x) \vee R(f(x)) \vee U(a)) \wedge$

$(\sim Q(x) \vee R(f(x)) \vee U(a))\}$

7. 隐去全程量词

$\{(\sim P(x) \vee R(f(x)) \vee U(a)) \wedge (\sim Q(x) \vee R(f(x)) \vee U(a))\}$

8. 表示为子句集

$\{\sim P(x) \vee R(f(x)) \vee U(a), \sim Q(x) \vee R(f(x)) \vee U(a)\}$

9. 变量标准化（变量换名）

$\{\sim P(x_1) \vee R(f(x_1)) \vee U(a), \sim Q(x_2) \vee R(f(x_2)) \vee U(a)\}$

结论

- 定理（公式不相容基本定理）
  - 设S是公式G的子句集，

    G不相容 $\Leftrightarrow$ S不相容

- 说明：

  S不相容：对任一个解释，S中至少有一个子句为假；

  S相容：存在一个解释，使S中所有子句为真；

- 推论：
  - 如果$G=G_1\wedge\ldots\wedge G_n$, S_i是G_i的子句集, $i=1,\ldots,n$. 令$S'=S_1\cup\ldots\cup S_n$.

    G不相容 $\Leftrightarrow$ S'不相容

讲课内容

一. Skolem范式

二. Herbrand域

三. 语义树

四. Herbrand定理

五. Davis的工作

Herbrand域

- 令H_0是子句集S中出现的常量的集合。若S中没有常量出现, 则H_0由单个常量a组成(即H_0={a});

- 对于i=1,2,…

  $H_i=H_{i-1}\cup$\{所有形如$f(t_1,\ldots,t_n)$的项的集合\}

  其中：$f(t_1,\ldots,t_n)$是出现于S中的任一函数符号$t_1,\ldots,t_n\in H_{i-1}$。

- 规定H_∞为S的Herbrand域（Herbrand universe of S, 简称H域）。

中国科学院自动化研究所
INSTITUTE OF AUTOMATION
CHINESE ACADEMY OF SCIENCES

例1 $S=\{P(z), P(x)\vee Q(y)\}$

- $H_0=\{a\}$
  $H_1= H_0$
  $H_2= H_1$
  …
  $H_\infty=\{a\}$

例2 $S=\{P(a), P(x) \vee P(f(x))\}$

- $H_0=\{a\}$
  $H_1=\{a\} \cup \{f(a)\} = \{a, f(a)\}$
  $H_2=H_1 \cup \{f(a), f(f(a))\} = \{a, f(a), f(f(a))\}$
  …
  $H_\infty=\{a, f(a), f(f(a)),\ldots\}$

例3 S={P(f(x)，a，g(y)，b)}

- H_0={a，b}
  H_1={a，b，f(a)，g(a)，f(b)，g(b)}
  H_2={a，b，f(a)，g(a)，f(b)，g(b)，
  f(f(a))，f(g(a))，f(f(b))，f(g(b))，
  g(f(a))，g(g(a))，g(f(b))，g(g(b))}
  …

基本概念

- 定义（基础，**ground**）:
  - 没有变量的项，称为基础项**(ground term).**
    - **f(a,b)**
  - 没有变量的原子，称为基础原子**(ground atom).**
    - **P(a,f(b))**
  - 没有变量的文字，称为基础文字**(ground literal).**
    - **P(a,f(b)), ~P(a,f(b))**
  - 没有变量的子句，称为基础子句**(ground clause).**
    - **P(b,f(b)) ∨ ~Q(f(f(b)))**

原子集

- 定义：令S是一个子句集合，形如$P(t_1,\ldots,t_n)$的基础原子集合，称为S的原子集，或Herbrand基，记为A。

其中：$P(t_1,\ldots,t_n)$是出现在S中的任一谓词符号, 而$t_1,\ldots,t_n$是S的H域的任意元素。

例子

- $S=\{P(z), P(x)\vee Q(y)\}$
  - $H_\infty=\{a\}$
  - $A=\{P(a), Q(a)\}$

- $S=\{P(a), P(x)\vee P(f(x))\}$
  - $H_\infty=\{a, f(a), f(f(a)),\ldots\}$
  - $A=\{P(a), P(f(a)), P(f(f(a))),\ldots, \quad P(a)\vee P(f(a)), \quad \ldots\}$

- $S=\{P(f(x), a, g(y), b)\}$
  - $H_\infty=\{a, b, f(a), g(a), f(b), g(b),\ldots\}$
  - $A=\{P(a,a,a,a), P(a,a,a,b), P(a,a,b,b),\ldots\}$

基础实例

- 定义： 当**S**中的某子句**C**中所有变量符号均以**S**的**H**域的元素代入时，所得的基子句**C'**称作**C**的一个基础实例(基例，**a ground instance of a clause C)**。

- 例 **S={P(x), Q(f(y))∨R(y), Z(f(y))}**
  - **H={a,f(a),f(f(a)),...}**
  - **P(a), P(f(a))**都称作子句**C=P(x)**的基例。
  - 同样, **Q(f(a))∨R(a), Q(f(f(a)))∨R(f(a))**都是**Q(f(y))∨R(y)**的基例。
  - 对于任一**b**∈**D**,子句**P(b), Q(f(b))∨R(b)**都叫基子句。
  - 但是，**Q(a)∨R(a)**不是**Q(f(y))∨R(y)**的基础实例。

H解释

- 起因
  - 由子句集**S**建立**H**域，进而容易得到原子集**A**;
  - 一般论域**D**上对**S**的解释**I** ⇒ **H**域上的解释**I***;
  - **S**在**D**上为真 ⇒ **S**在**H**上为真;
  - **S**在**D**上不可满足 ⇒ **S**在**H**上不可满足。

- 定义

给定子句集S，H是S上的Herbrand全域，I是H上S的一个解释，如果满足：

- I 映射所有S中的常数到自身；
- 令f 是一个n-元函词，$h_1,\ldots h_n$ 是H中的元， 在I,上f 被指派一个$(h_1,\ldots h_n)$ 到$f\,(h_1,\ldots h_n)$的映射，其中 $(h_1,\ldots h_n)$ 属于H^n；

则I 称为一个S的H-解释。

例： $S=\{P(x), Q(f(y)) \vee R(a), Z(f(y))\}$

- I:
  - $H=\{a, f(a), f(f(a))\ldots\}$
  - $I=\{a，a; a，f(a); a，f(f(a)); \ldots\}$

H解释的表示

- 令$A=\{A_1,\ldots,A_n,\ldots\}$是S的原子集, 一个H解释可被表示为:

$$I=\{m_1,\ldots,m_n,\ldots\}$$

其中：m_j或者是A_j，或者是$\sim A_j$。

如果m_j是A_j, 则A_j为真, 否则, A_j为假。

例1 $S=\{P(x) \vee Q(x), R(f(y))\}$

- $H=\{a, f(a), f(f(a)), \ldots\}$
- $A=\{P(a),Q(a),R(a),P(f(a)),Q(f(a)),R(f(a)),\ldots\}$
- 凡对A中各元素真假值的一个具体设定，都是S的一个H解释。

$I_1^*=\{P(a),Q(a),R(a),P(f(a)),Q(f(a)),R(f(a)),\ldots\}$

$I_2^*=\{\sim P(a),\sim Q(a),\sim R(a),\sim P(f(a)),Q(f(a)),R(f(a)),\ldots\}$

$I_3^*=\{P(a),\sim Q(a),\sim R(a),\sim P(f(a)),Q(f(a)),\sim R(f(a)),\ldots\}$

$S|I_1^*=T$, $S|I_2^*=F$, $S|I_3^*=F$

对应于I的H-解释I*

- 定义：

  假定在域**D**上的一个解释**I**，一个对应于**I**的**H**解释***I****是指满足下列条件的**H**解释：

  令$h_1,\ldots,h_n$是H的元素，每一个h_i被映射到**D**域中的一些d_m，如果$P(h_1,\ldots h_n)$被解释**I**指派为$T(F)$，则$P(h_1,\ldots h_n)$也被I^*指派为$T(F)$。

H解释的性质

- 引理
  - 如果在论域D上的一个解释I满足S，则任一个对应于I的H解释I*，也满足S。

- 定理
  - 子句集S是不可满足的，当且仅当S的所有的H解释使S为假。

结论：

- 如果S为不满足的，则存在一个特殊域，当S被证明在这个域上的所有解释为F
- 即证明了对所有域上的所有解释为F，也就证明了S为不相容的

讲课内容

一. Skolem范式

二. Herbrand域

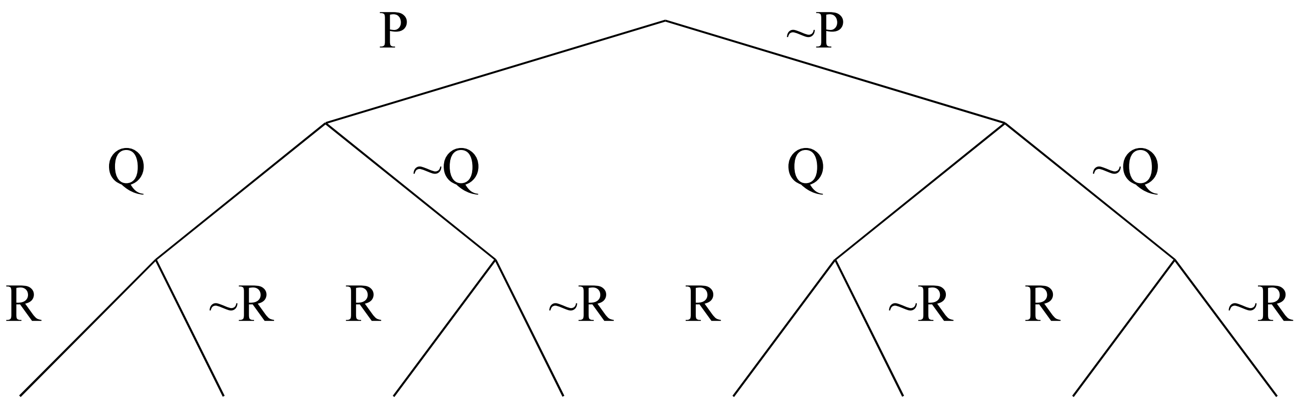
三. 语义树

四. Herbrand定理

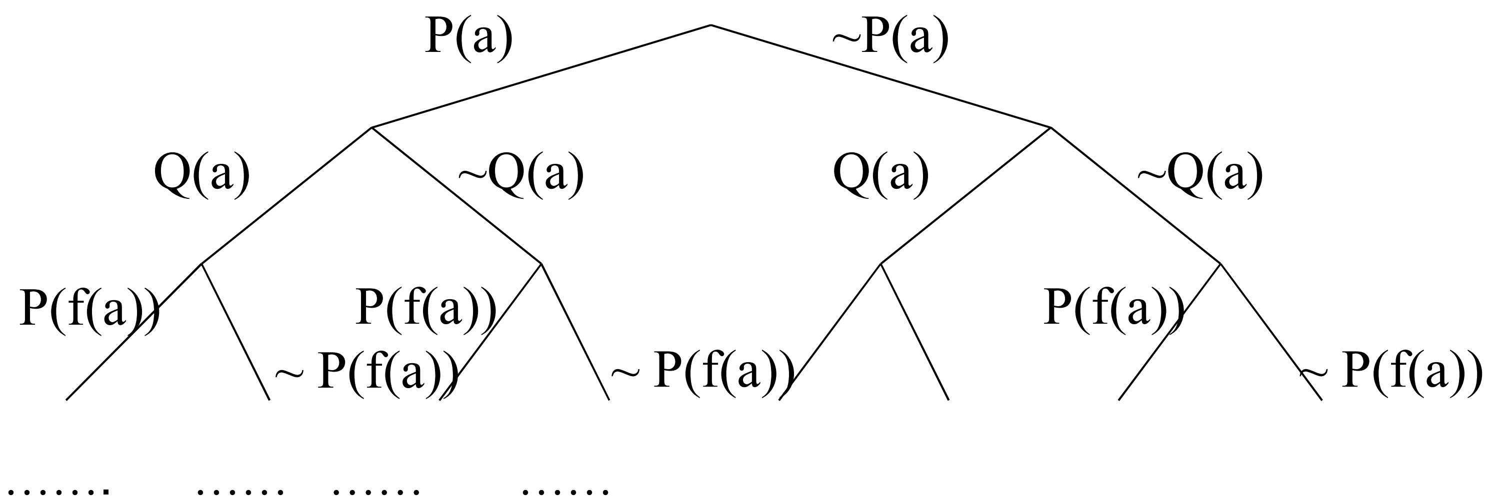
五. Davis的工作

语义树

- 例1
  - $G = P \wedge Q \wedge R$
  - $S = \{P, Q, R\}$
  - $A = \{P, Q, R\}$



- 例2
  - $S=\{\sim P(x)\vee Q(x), P(f(y)), \sim Q(f(y))\}$
  - $H=\{a, f(a), f(f(a)), \ldots\}$
  - $A=\{P(a), Q(a), P(f(a)), Q(f(a)), \ldots\}$



- 定义(互补对)
  - 如果*A* 是一个原子，则两个文字*A* 和~*A* 被称为彼此互对，且 {*A*, ~*A*}称为互补对。
- 如果一个字句包含一个互补对，则称该子句是冗余/重言。
  - $P \vee Q \vee \sim Q$

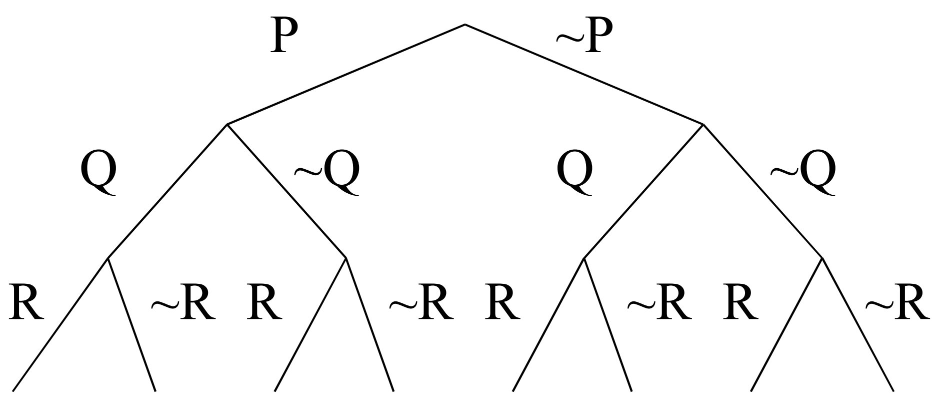
定义(语义树)

- 给定一个子句集合*S*，A是一个S的原子集合，一个对S来说的语义树是一个向下的树结构，在它的每一条联线上均附加了一个有限的在A中的原子或原子非的集合，如此：
  - 对每一个节点N，仅有有限个直接联线 L_1，…，L_n，令Q_i是附加在L_i (i=1,…,n) 上的所有文字的合取，则 $Q_1 \vee \ldots \vee Q_n$ 是一个永真的命题公式（基础）.
  - 对每个节点*N*, 令*I(N)* 是从根节点到节点N的一个分支上所有附加在各个联线上文字集合的并集（包含N)，则 *I(N)* 不包含任何互补节对。

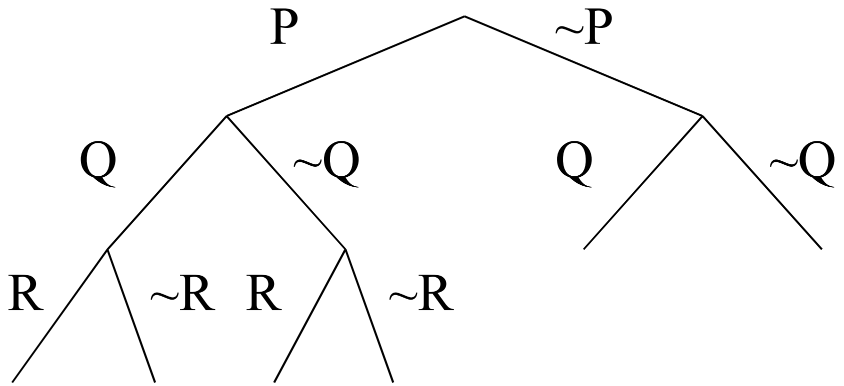
完备语义树

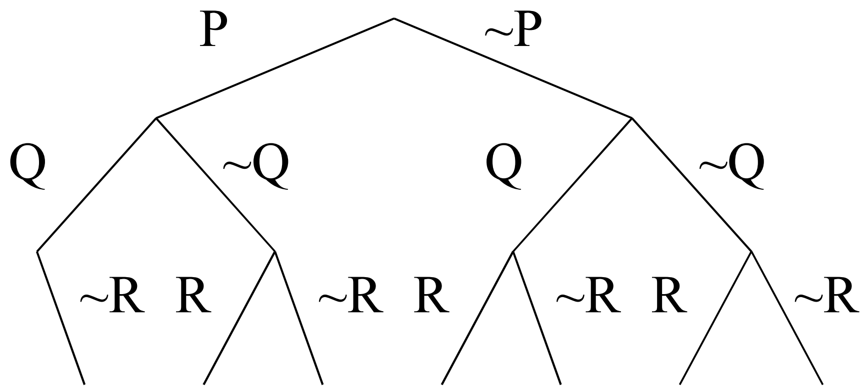
- 定义(完备语义树)：
  - 令**$A=\{A_1, A_2, \ldots, A_k,\ldots\}$** 是原子集合，一个对于**S**来说的语义树是完备的，**iff** 对于这个语义树的每一个端节点**N**（没有从这节点出发联线的节点） ***I(N)***包括 **A_i**或 **$\sim A_i$**，对于**i=1,2,....**成立。

- 例
  - $G = P \wedge Q \wedge R$
  - $S = \{P, Q, R\}$
  - $A = \{P, Q, R\}$

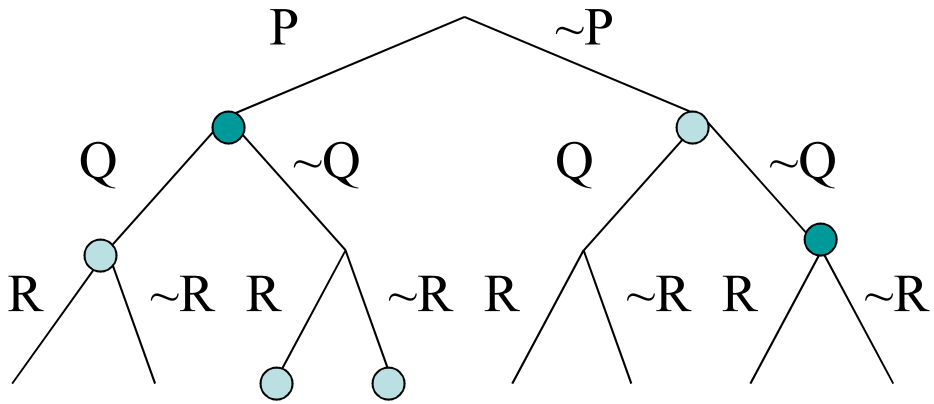


反例

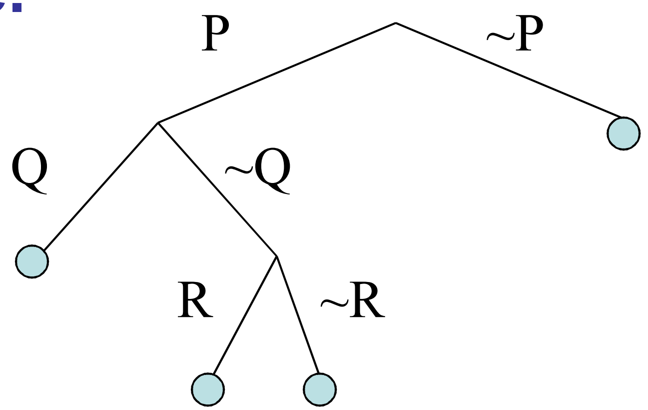




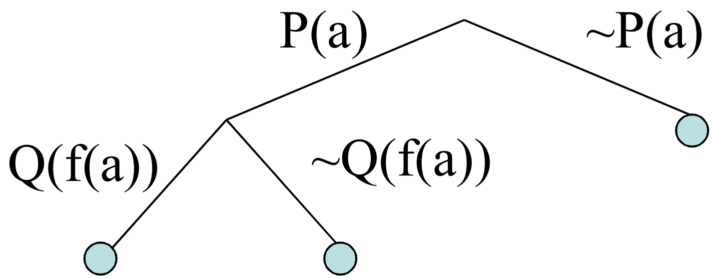
- 例
  - $S=\{P, Q\vee R, \sim P\vee\sim Q, \sim P\vee\sim R\}$



- 定义(封闭语义树):
  - A semantic tree T is said to be closed if and only if every branch of T terminates at a failure node.

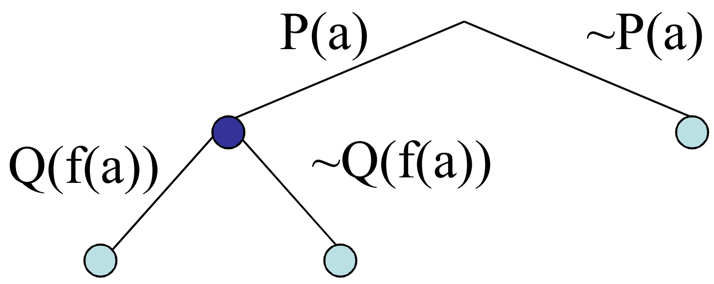


- 例
  - $S=\{P(x), \sim P(x) \vee Q(f(x)), \sim Q(f(a))\}$
  - $A=\{P(a), Q(a), P(f(a)), Q(f(a)), \ldots\}$



推理节点

- 定义(推理节点)
  - A node *N* of a closed semantic tree is called an inference node if all the immediate descendant nodes of N are failure nodes.



讲课内容

一. Skolem范式

二. Herbrand域

三. 语义树

四. Herbrand定理

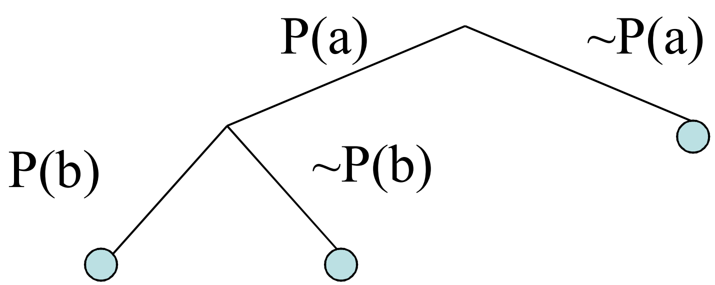
五. Davis的工作

- **Herbrand定理(Version 1)**

子句集**S**是不可满足的，当且仅当对应于**S**的任一棵完备语义树，都存在一棵有限的封闭语义树。

- **Herbrand定理(Version 2)**
  - 子句集S是不可满足的，当且仅当存在一个有限不可满足的S的基础实例集合S’。

- 例子:
  - **S={P(x), ~P(a)∨~P(b), Q(f(x))}**
  - **H={a, b, f(a), f(b), f(f(a)), f(f(b))…}**
  - **A={P(a), P(b), Q(a), Q(b),…}**
  - **S’={P(a), P(b), ~P(a)∨~P(b)}**



讲课内容

一. Skolem范式

二. Herbrand域

三. 语义树

四. Herbrand定理

五. Davis的工作

Davis-Putnam的工作

- **Gilmore**的方法是指数复杂性的
- **Davis-Putnam:** 提高效率

- 四条规则:
  – 其应用不改变子句集的不相容性;

规则一

- 重言式规则
  - S中的重言式子句，不会为S的不可满足提供任何信息，应该删除。
  - S={P∨~P，Q，R∨P}
    S的逻辑含义是（P∨~P）∧Q∧(R∨P)= Q∧(R∨P)，从而删去重言式P∨~P，不影响S的真值。
    - S'={Q，R∨P}
  - **Delete all the ground clauses from *S* that are tautologies. The remaining set *S'* is unsatisfiable if and only if *S* is.**

规则二

- 单文字规则
  - 单文字: 在S中存在只有一个文字的基础子句L.
  - 例子: S={L，L∨P，~L∨Q，S∨~R}
  - 如果在S中存在只有一个文字的基础子句L, 消去在S中带有这个文字L的所有子句得到S’, 如果S’为空, 则S是相容的; 否则, 从S’中删去~L, 得到S’’. S’’不可满足当且仅当S不可满足.
    - S’ = {~L∨Q，S∨~R}
    - S’’= {Q，S∨~R}
  - S不可满足, 则在所有解释下S都为假;
    - L=0;
    - L=1;
      - ~L=0.

规则 三

- 纯文字规则
  - 纯文字: 如果文字L出现于S中，而~L不出现于S中，L称为S的纯文字.
  - 例子: S={A∨B, A∨~B, ~B, B}
  - L是S的纯文字. 从S中删除含L的子句得S'，如果S'为空集，那么S是可满足的。否则, S'不可满足当且仅当S不可满足.
    - S'= {~B, B};
  - S不可满足, 在A为真下不可满足;
    - A=1: A∨B=1, A∨~B=1;
    - S'不可满足, 当然S不可满足;

规则四

- 分裂规则(splitting rule)
  - $S=(L \vee A_1)\wedge\ldots\wedge(L \vee A_m)\wedge$
    $(\sim L\vee B_1)\wedge\ldots\wedge(\sim L\vee B_n)\wedge R$
    A_i, B_i, R中不含L和~L。
    令$S' =\{A_1\wedge\ldots\wedge A_m\wedge R\}$，
    $S''=\{B_1\wedge\ldots\wedge B_n\wedge R\}$
    则S不可满足当且仅当S'和S''同时是不可满足的。
  - L=1(S'')
  - L=0(S')

举例1

- **$S=\{P \vee Q \vee \sim R,\ P \vee \sim Q,\ \sim P,\ R,\ U\}$**
  - 对**U**使用纯文字: **$\{P \vee Q \vee \sim R,\ P \vee \sim Q,\ \sim P,\ R\}$**
  - 对**~P**使用单文字: **$\{Q \vee \sim R,\ \sim Q,\ R\}$**
  - 对**~Q**使用单文字: **$\{\sim R,\ R\}$**
  - 对**R**使用单文字: **$\{\square\}$**
  - **S**不可满足;

举例2

- $S=\{P \vee Q, \sim Q, \sim P \vee Q \vee \sim R\}$
  - 对~Q使用单文字: $\{P, \sim P \vee \sim R\}$
  - 对P使用单文字: $\{\sim R\}$
  - 对~R使用纯文字: $\{\}$
  - S可满足;

非常感谢同学们的光临

欢迎交流提问