产生式系统的搜索(1)

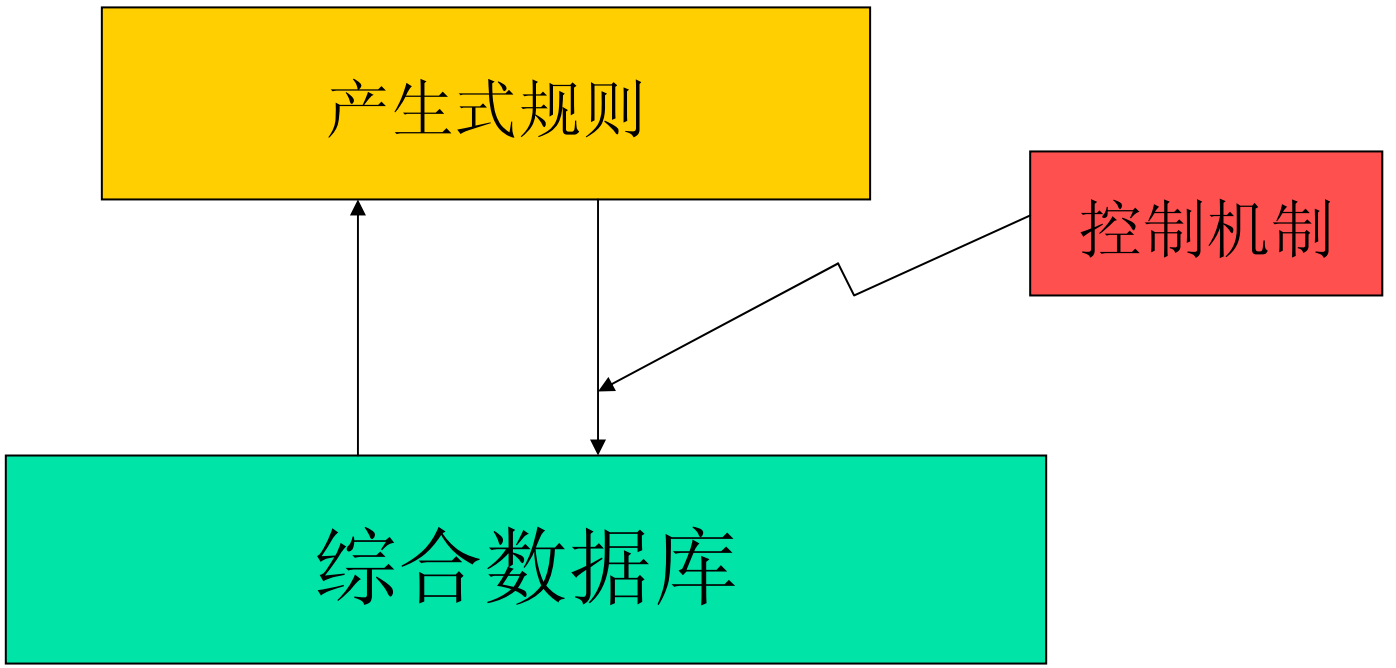
张文生

中国科学院自动化研究所

内容

- 回溯策略
- 图搜索
- 无信息搜索
- 启发式搜索**(A*)**
- **A***算法的可采纳性

回顾



- 控制机制
  - 控制策略
    - 激励---点燃
  - 两类
    - 不可撤回的控制策略：
    - 试探性控制策略
      - 回溯型
      - 图搜索
  - 具体手段
    - 冲突删除策略

状态

- 任一时刻, 综合数据库的情况;

2	3	7
	5	1
4	8	6

{A，B，C，D}

（c, a, b, 0, 0）

状态空间

- 状态空间
  - 所有可能的状态的全体.

2	3	7
	5	1
4	8	6

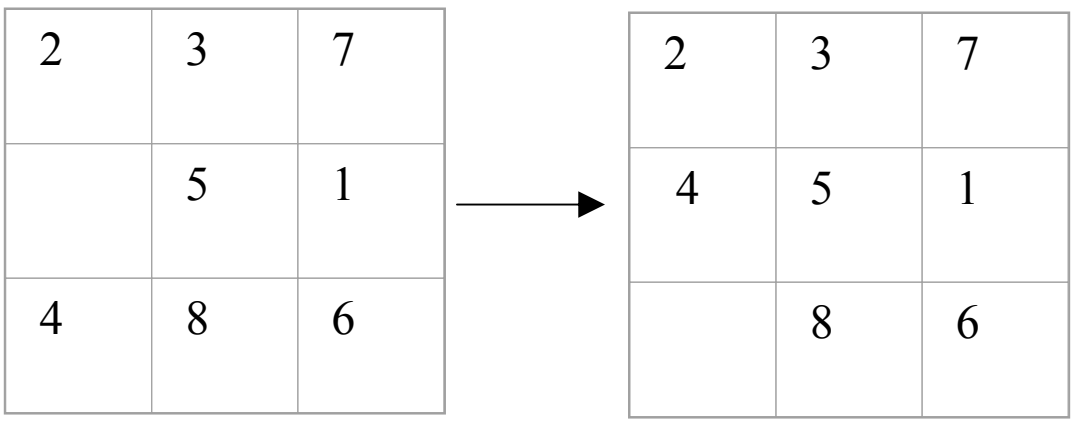
5	8	6
	1	2
7	4	3

……

1	2	4
	6	5
7	8	3

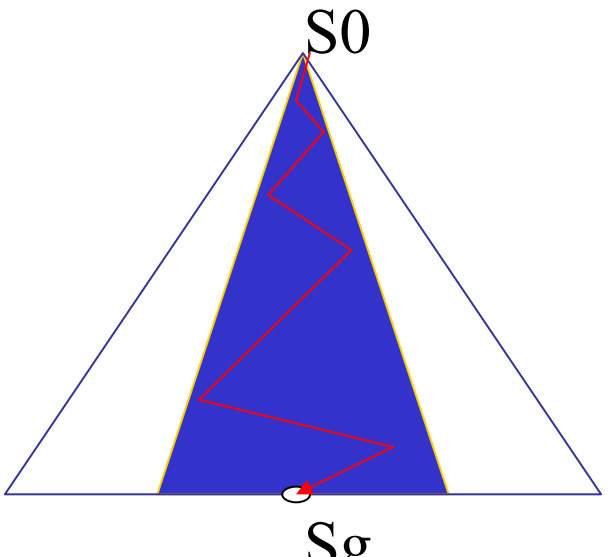
状态转移

- 初始状态
- 目标状态
- 状态转移
  - 规则



搜索(search)

- 路径
  - 状态序列
- 搜索
  - 寻找从初始状态到目标状态的路径;



搜索的必要性

- **AI**为什么要研究**search?**
  - 问题没有直接的解法;
    - 解方程组;
    - 定理证明;
  - 需要探索地求解;

搜索与检索的区别

- 状态是否动态生成;
  - 检索: 静态;
    - 在数据库中检索某人的纪录;
  - 搜索: 动态生成;
    - 下棋

几个问题

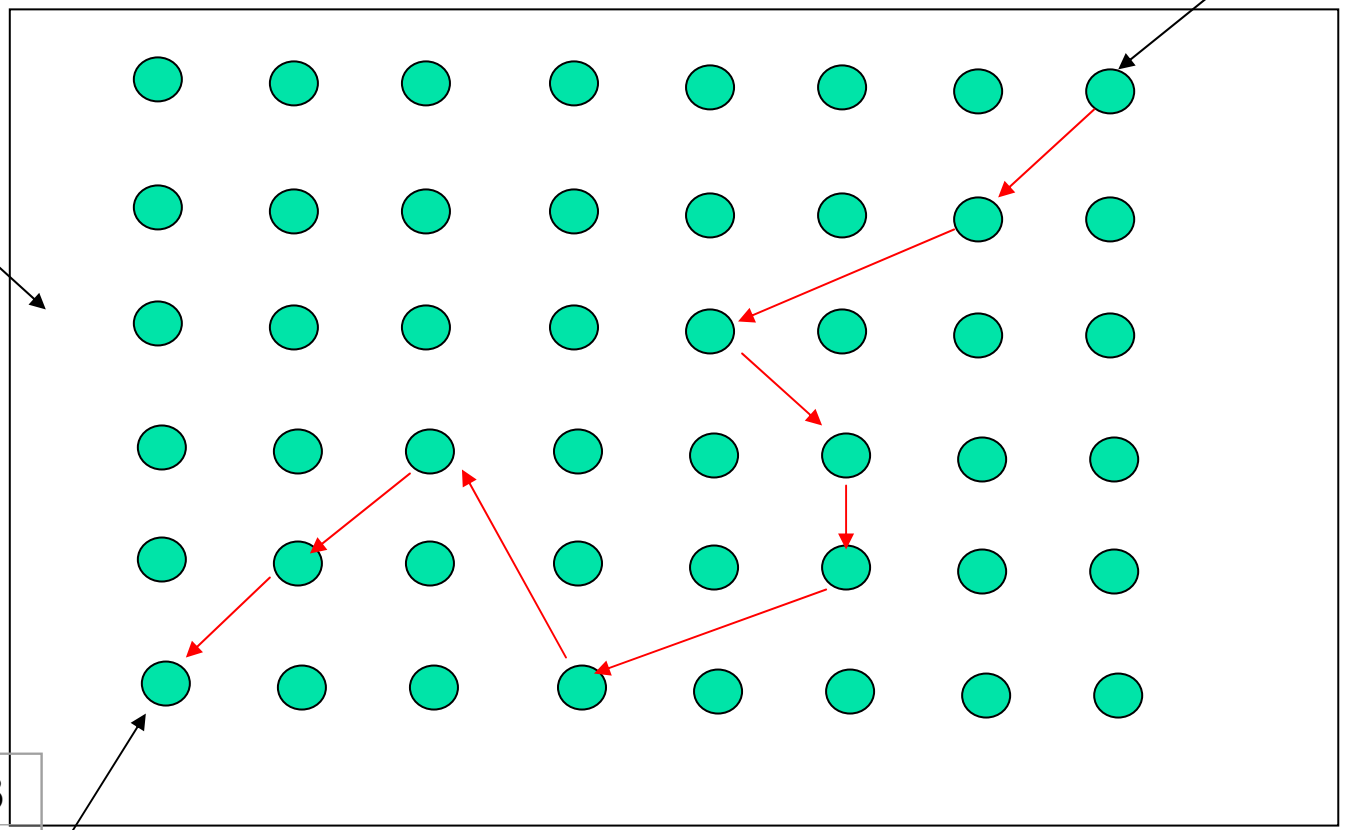
- 目标状态是否确定?
  - 确定: 定理证明, **eight-puzzle**
  - 不确定: 求积分, 下棋;
    - 确定目标的性质;
- 问题的解: 路径(解路径)/目标状态;
  - 需要路径:下棋
  - 不需要路径:电路设计
  - 需要/不需要: 诊病
- 约束条件
  - 目标状态不确定时, 用来约束目标状态的性质;
  - **X+Y=4:** 非整数解/整数解

- 多解性;
  - **X+Y=4:**整数解
- 最优解
  - 评价标准/判断准则;
  - **min(x*y)**
  - 北京->上海: 时间最短/费用最少
- 最优解是否唯一?
  - 下棋

搜索问题

2	3	7
	5	1
4	8	6

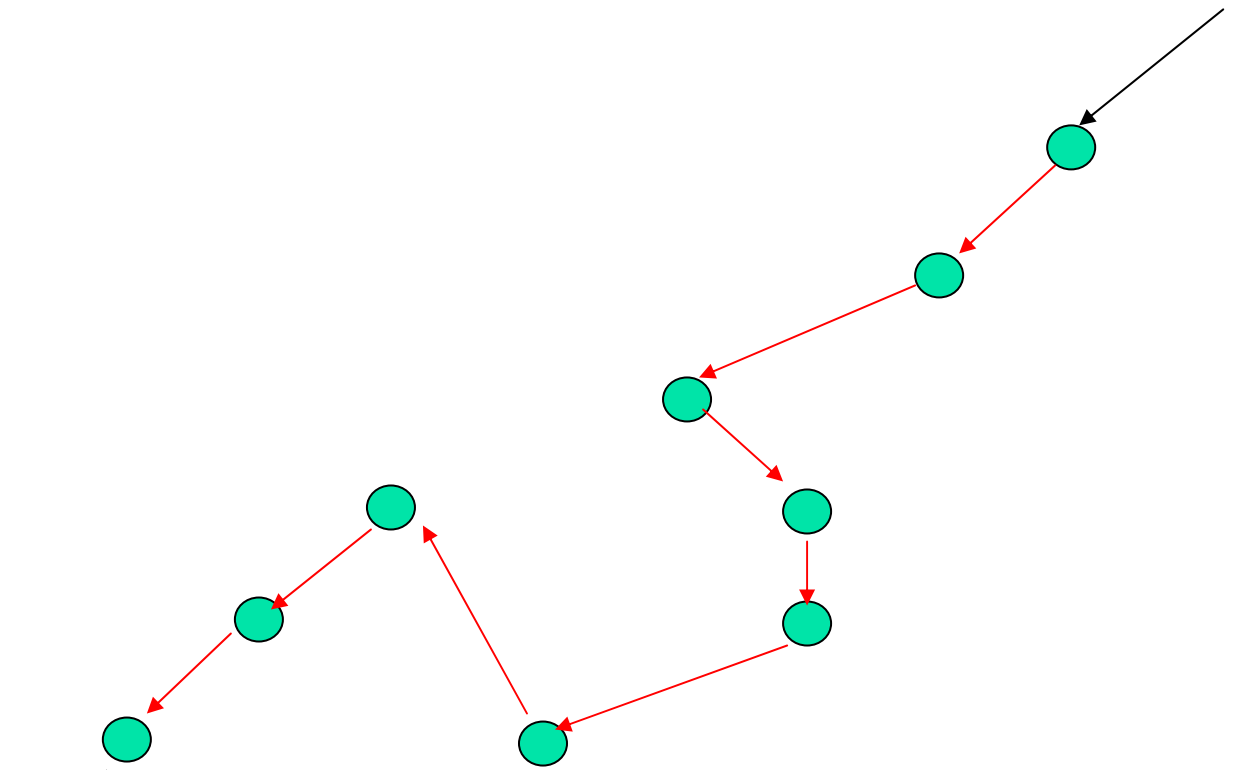
状态空间



1	2	3
8		4
7	6	5

搜索不是检索

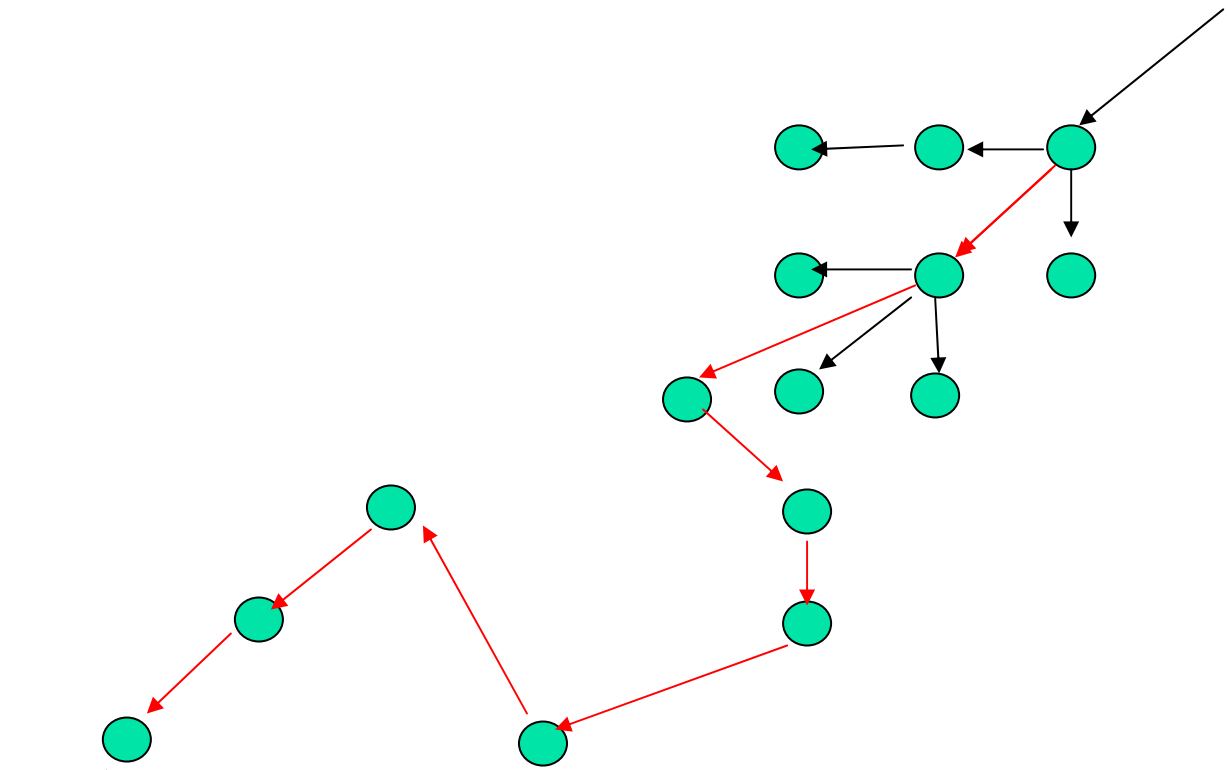
2	3	7
	5	1
4	8	6



1	2	3
8		4
7	6	5

难点

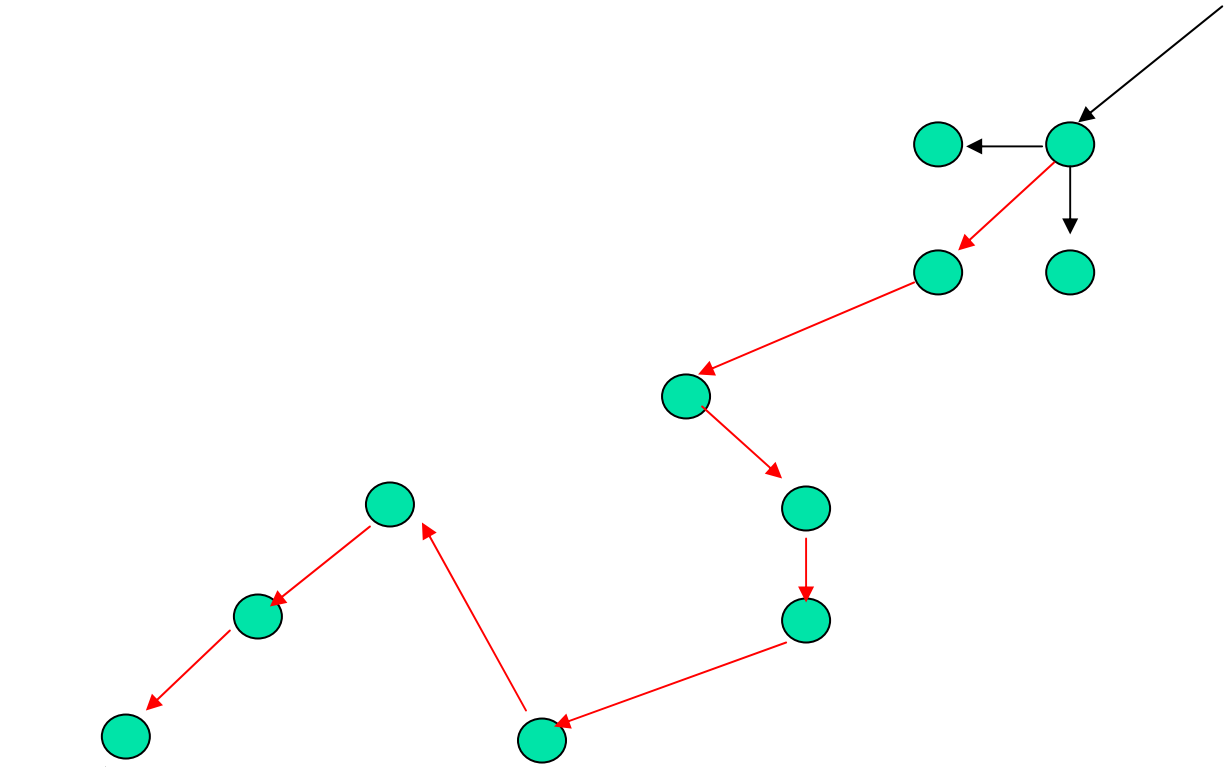
2	3	7
	5	1
4	8	6



1	2	3
8		4
7	6	5

启发式方法

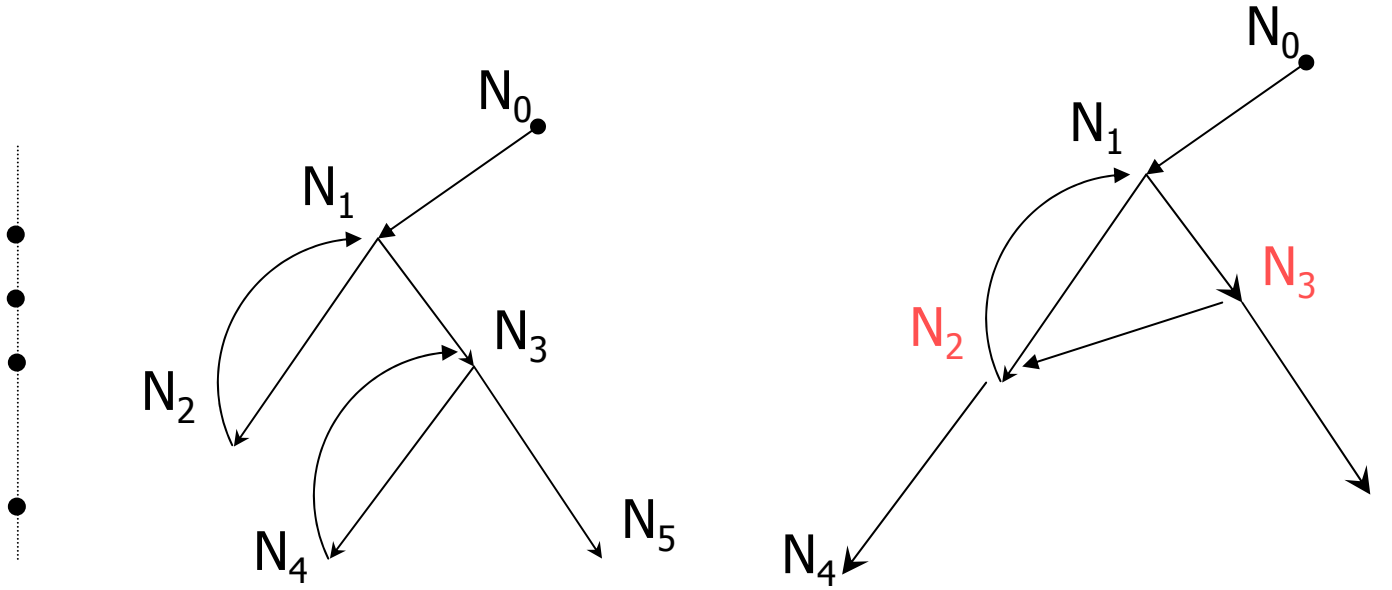
2	3	7
	5	1
4	8	6



1	2	3
8		4
7	6	5

控制策略

- 不可撤回的控制策略;
- 试探性控制策略
  - 回溯型
  - 图搜索



不可撤回的控制策略

- 例子: **eight-puzzle**
  - 评价函数:**f**

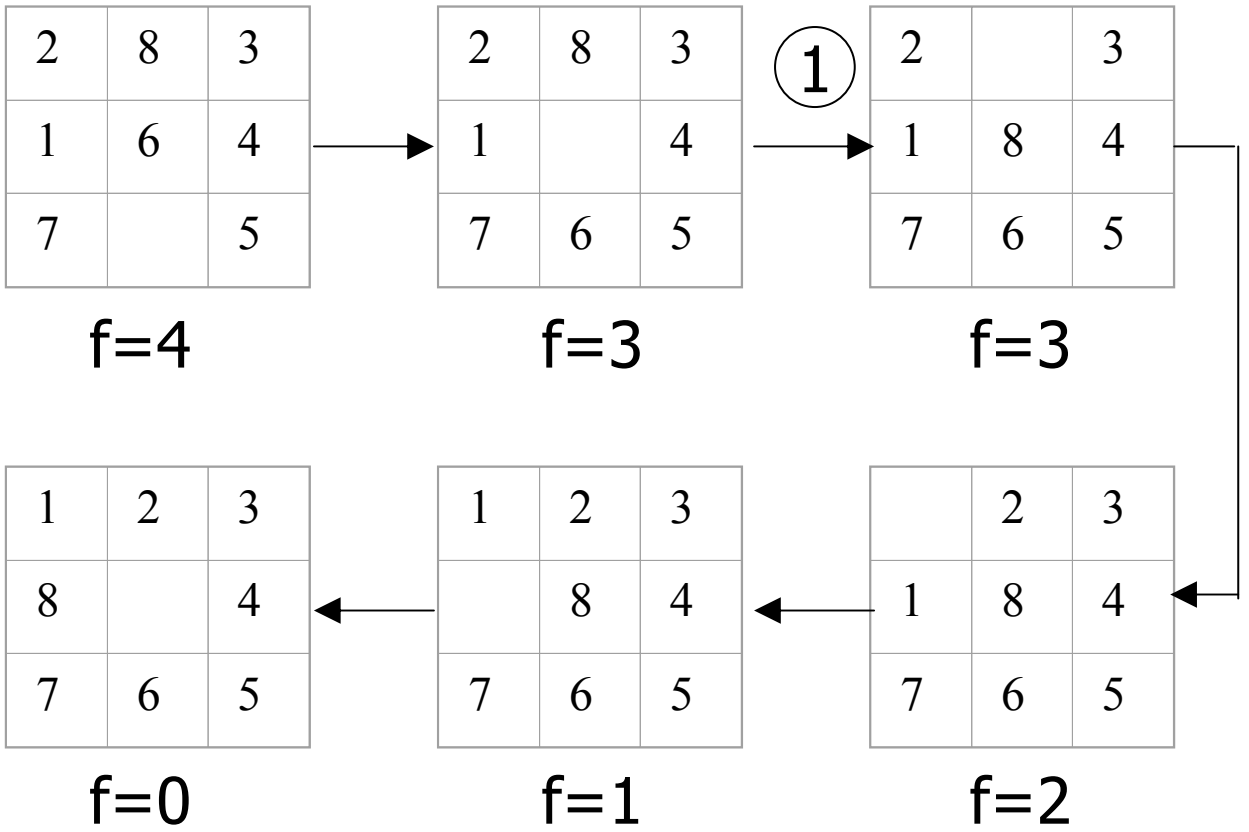
2	8	3
1	6	4
7		5

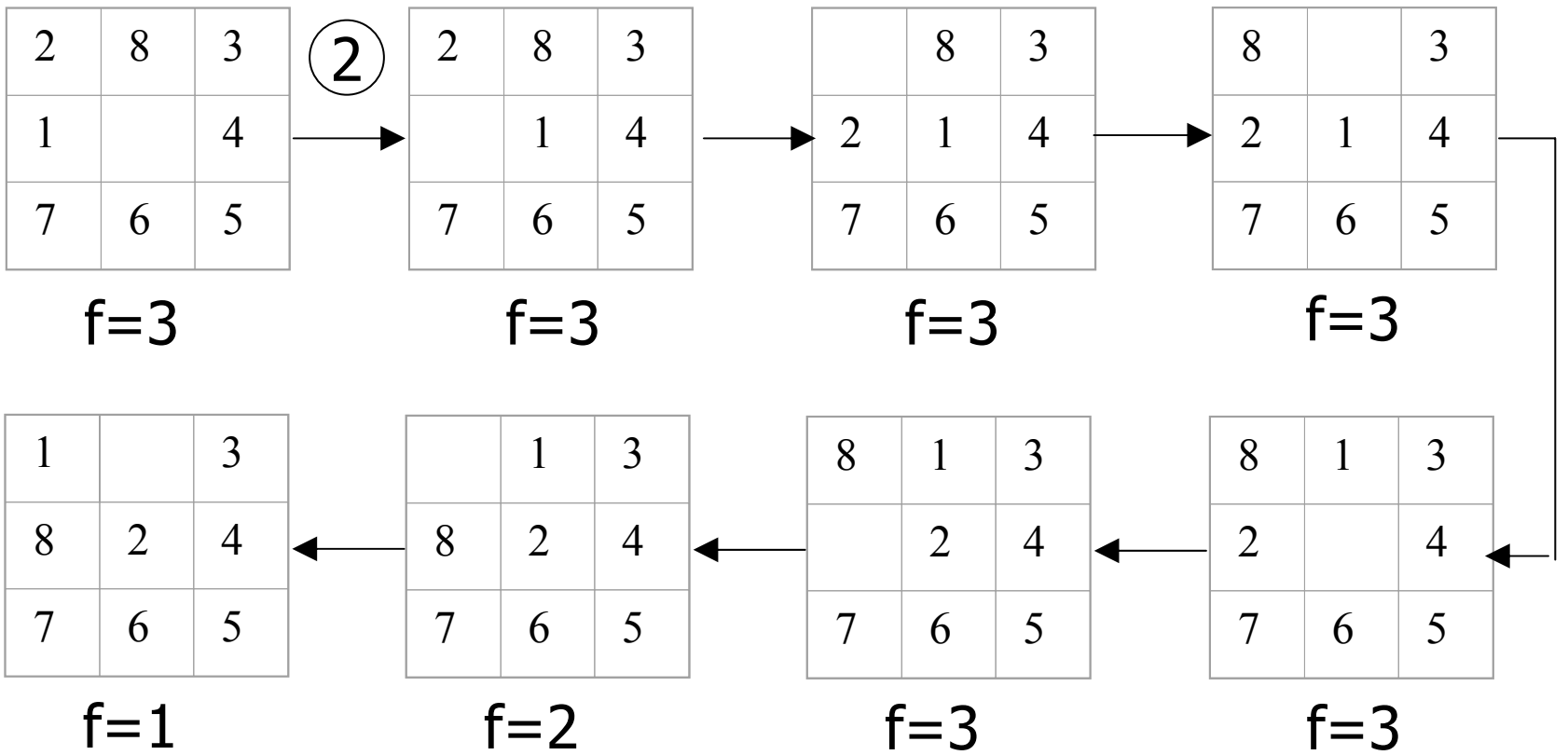
与

1	2	3
8		4
7	6	5

的差异为**4**

规定: 评价函数非增;


2 8 3
1 6 4
7 5
f=4
2 8 3
1 4
7 6 5
f=3
1
2 3
1 8 4
7 6 5
f=3
2 3
1 8 4
7 6 5
f=2
1 2 3
8 4
7 6 5
f=0
1 2 3
8 4
7 6 5
f=1


2 8 3
1 4
7 6 5
f=3
2
2 8 3
1 4
7 6 5
f=3
8 3
2 1 4
7 6 5
f=3
8 3
2 1 4
7 6 5
f=3
8 1 3
2 4
7 6 5
f=3
8 1 3
2 4
7 6 5
f=3
1 3
8 2 4
7 6 5
f=2
1 3
8 2 4
7 6 5
f=1

可能无解

1	2	5
	8	4
7	6	3

f=2

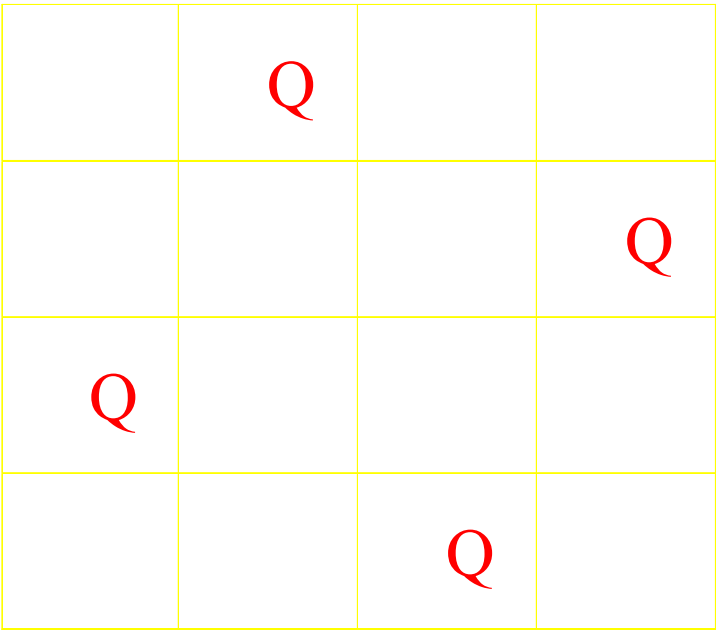
1	2	3
	8	4
7	6	5

目标

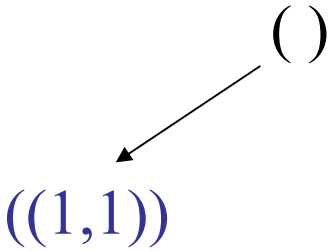
- 回溯策略
- 图搜索
- 无信息搜索
- 启发式搜索
- A*算法的可采纳性

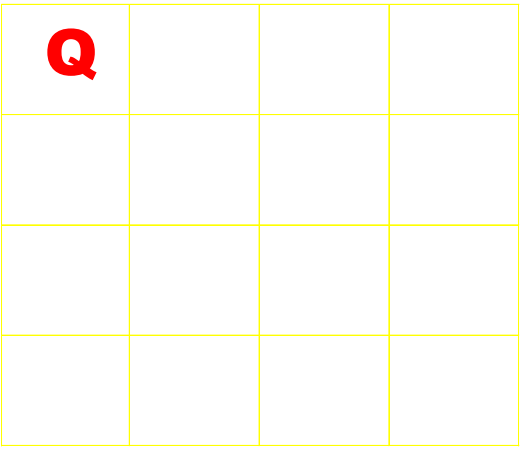
回溯策略

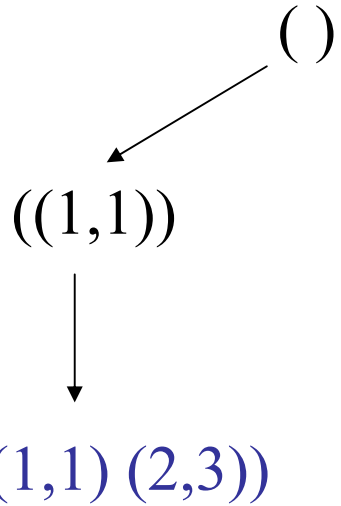
- 例：四皇后问题

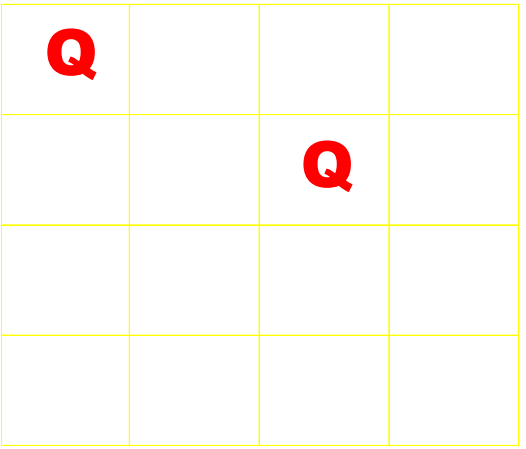


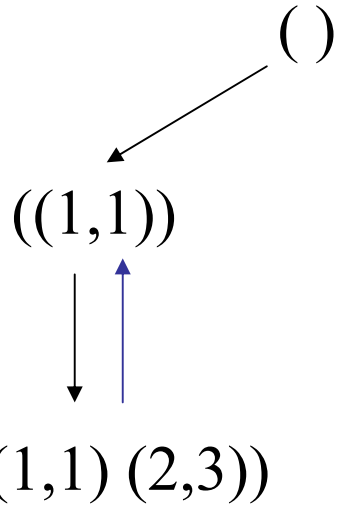
( )

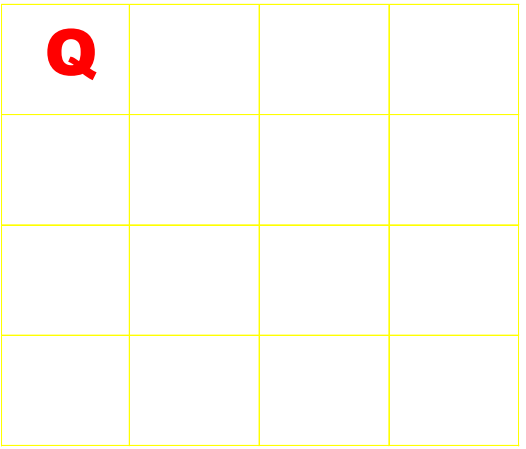

( )
((1,1))

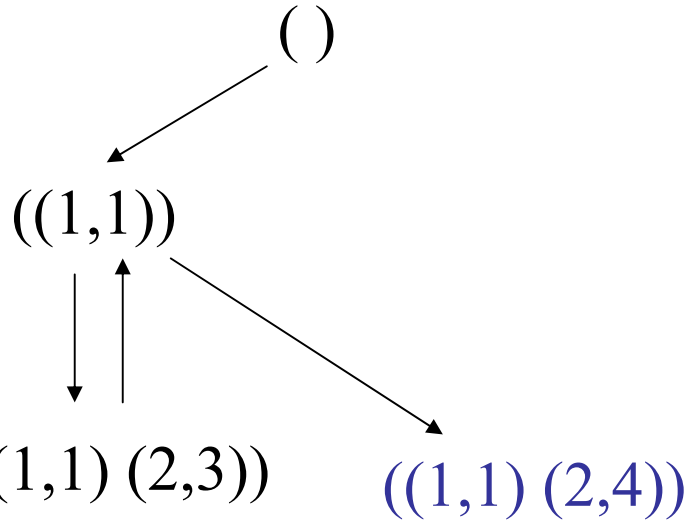

Q

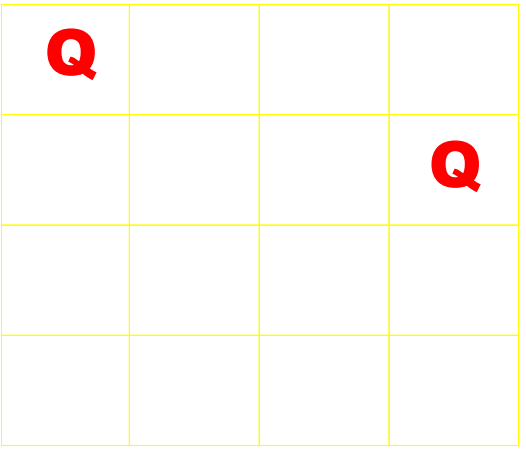

( )
((1,1))
(1,1) (2,3))

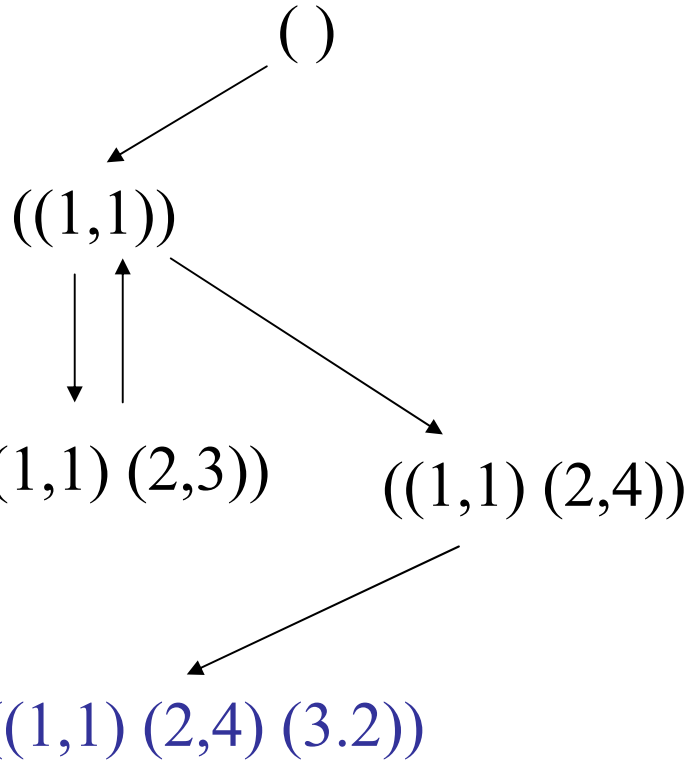

Q
Q


( )
((1,1))
(1,1) (2,3))

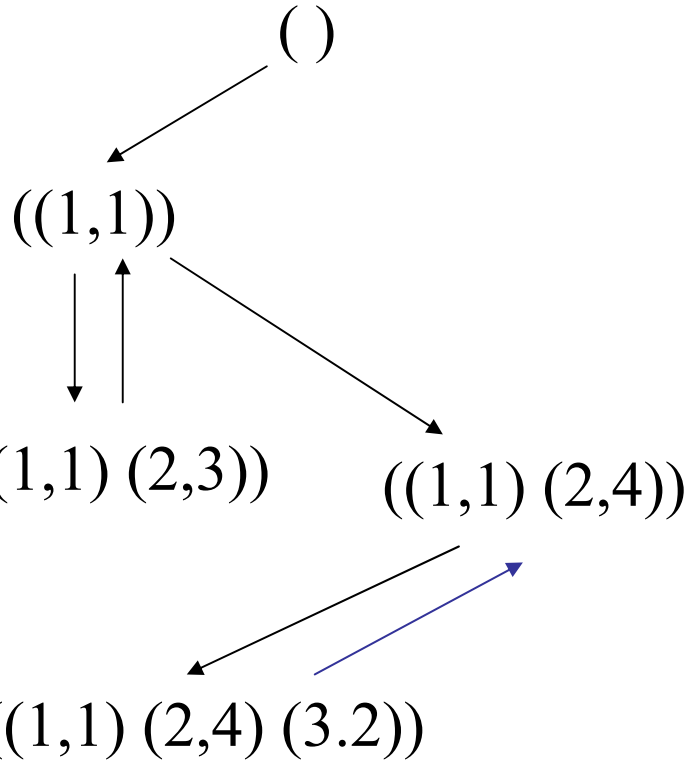

Q


( )
((1,1))
(1,1) (2,3))
((1,1) (2,4))

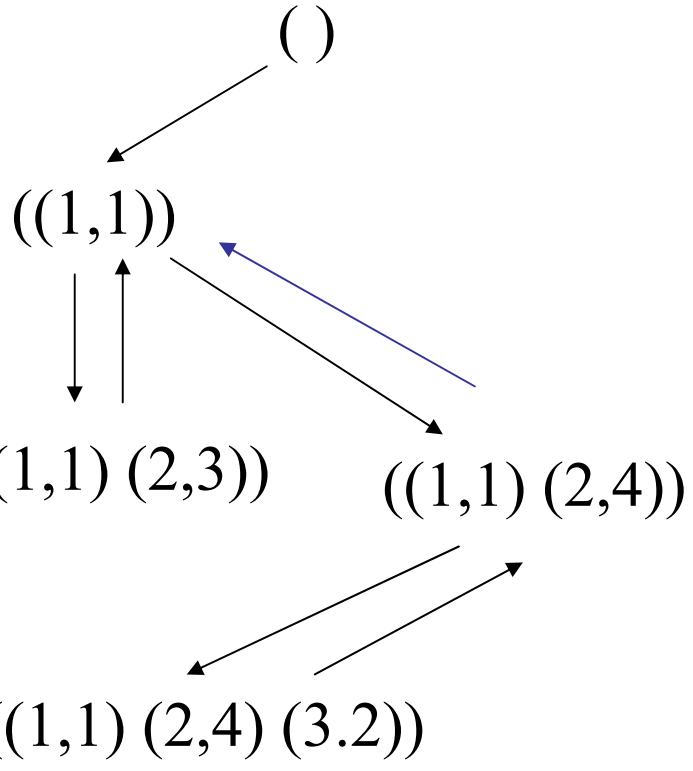

Q
Q

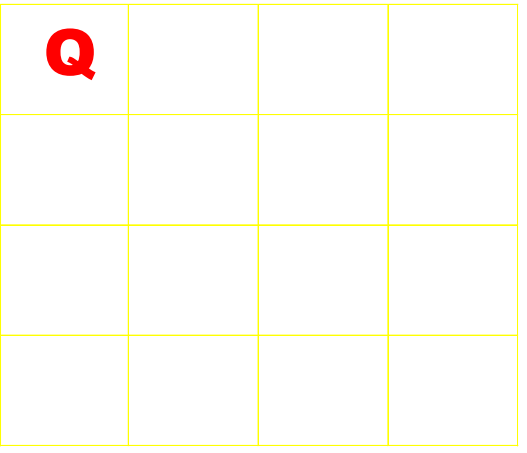


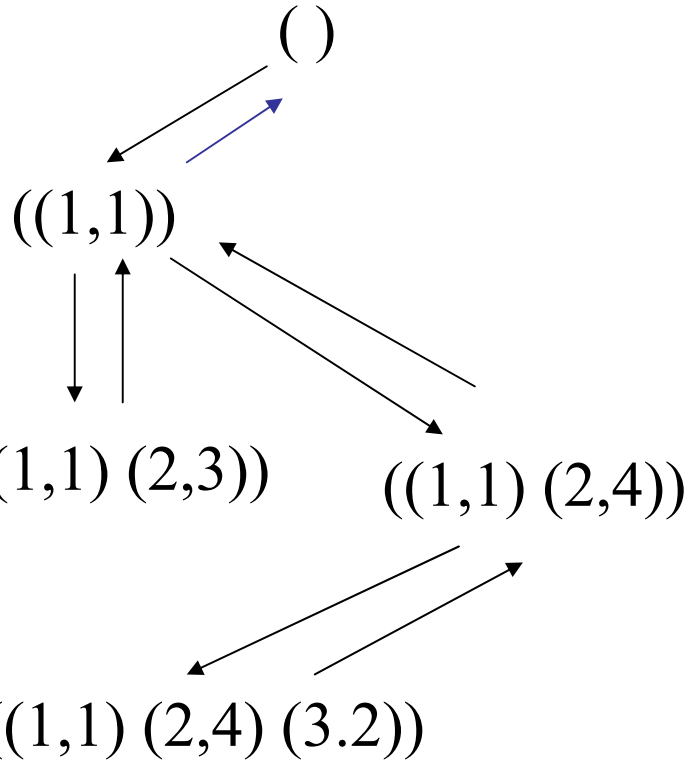
Q			
			Q
	Q		

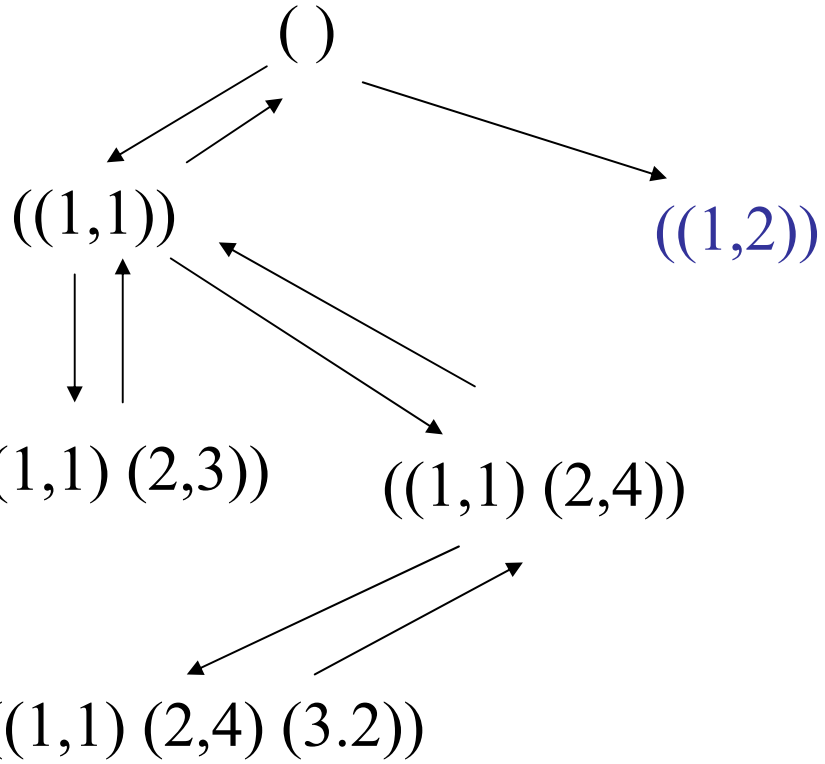


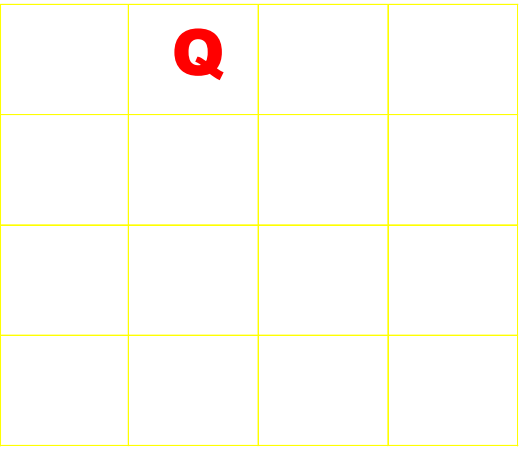
Q			
			Q

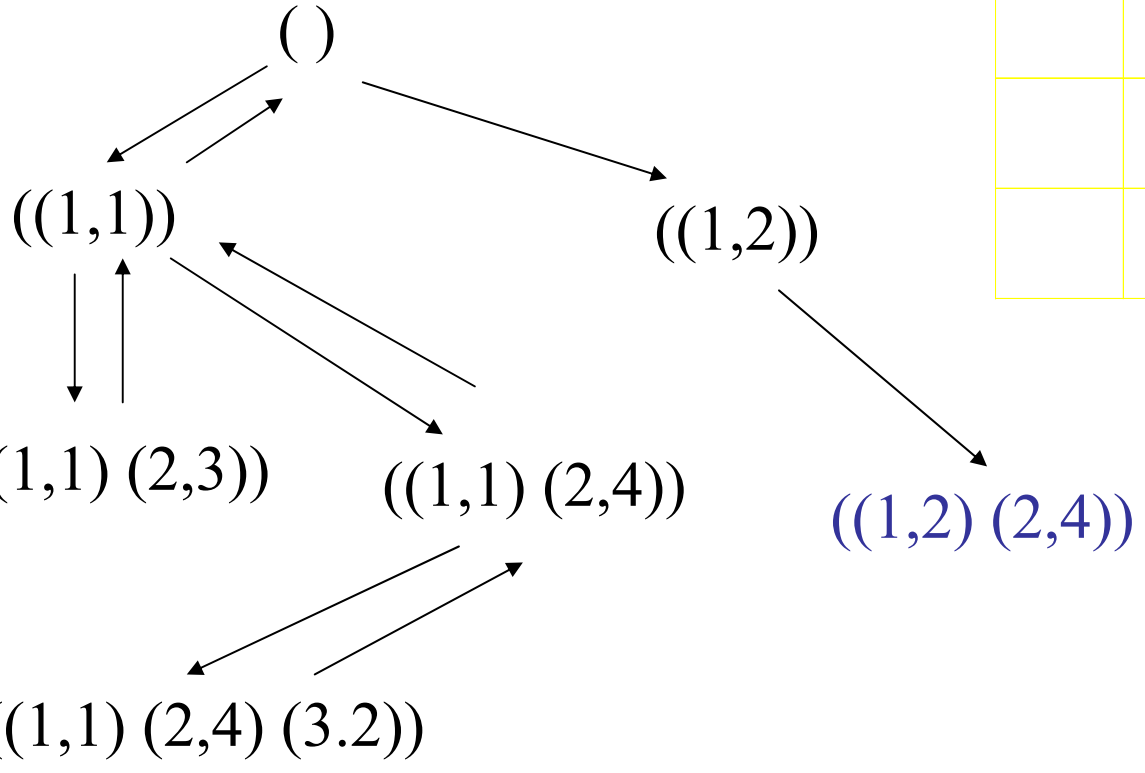

( )
((1,1))
(1,1) (2,3))
((1,1) (2,4))
(1,1) (2,4) (3.2))

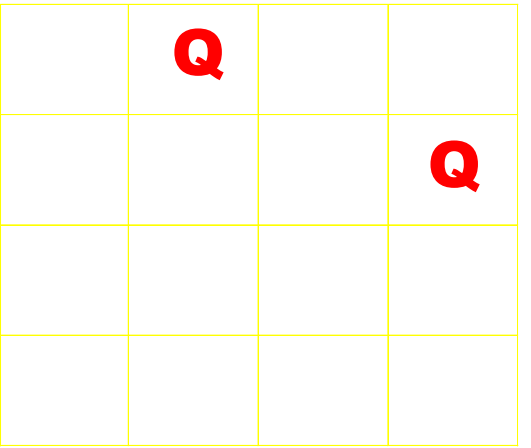

Q

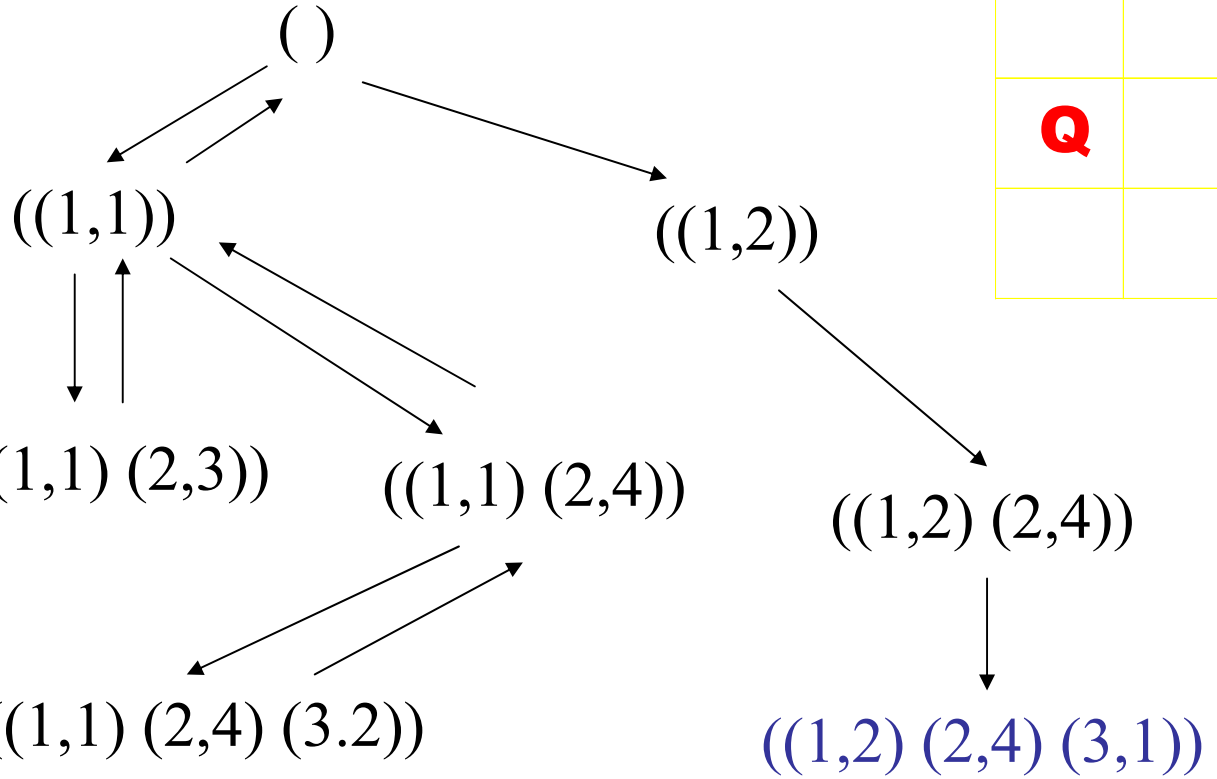

( )
((1,1))
(1,1) (2,3))
((1,1) (2,4))
(1,1) (2,4) (3.2))

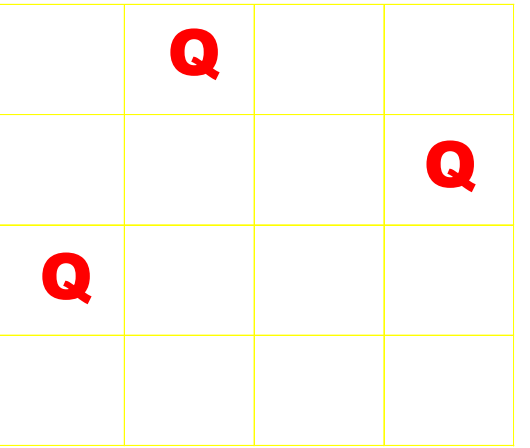

( )
((1,1))
((1,2))
(1,1) (2,3))
((1,1) (2,4))
(1,1) (2,4) (3.2))

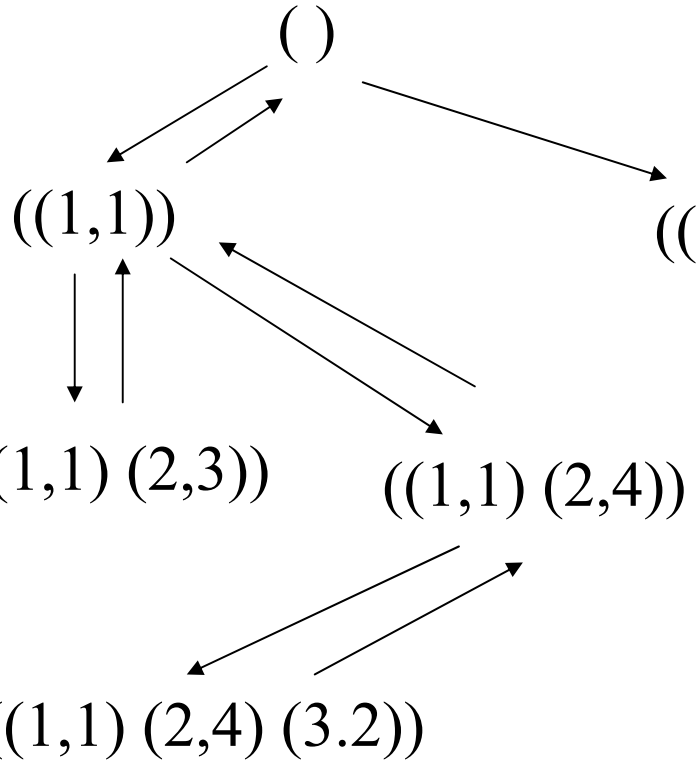

Q

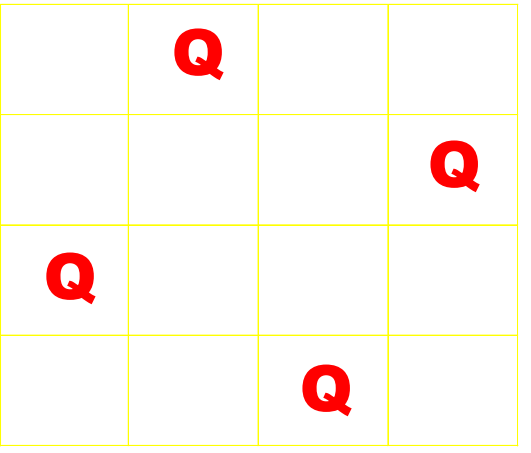

( )
((1,1))
((1,2))
(1,1) (2,3))
((1,1) (2,4))
((1,2) (2,4))
(1,1) (2,4) (3.2))


Q
Q


( )
((1,1))
((1,2))
(1,1) (2,3))
((1,1) (2,4))
((1,2) (2,4))
(1,1) (2,4) (3.2))
((1,2) (2,4) (3,1))


Q
Q
Q


( )
((1,1))
((1,2))
(1,1) (2,3))
((1,1) (2,4))
((1,2) (2,4))
(1,1) (2,4) (3.2))
((1,2) (2,4) (3,1))
((1,2) (2,4) (3,1) (4,3))


Q
Q
Q
Q

回溯搜索算法

BACKTRACK（DATA）

DATA：当前状态。

返回值：从当前状态到目标状态的路径
（以规则表的形式表示）
或**FAIL** 。

回溯搜索算法

```
    BACKTRACK(DATA)
1       IF Term(DATA)      RETURN NIL;
2       IF Deadend(DATA) RETURN FAIL;
3       Rules:=Apprules(DATA);
4  LOOP: IF Null(Rules) RETURN FAIL;
5       R:=First(Rules);
6       Rules:=Tail(Rules);
7       Rdata:=Gen(R, DATA);
8       Path:=BACKTRACK(Rdata);
9       IF Path =FAIL GO LOOP;
10      Else RETURN Cons(R, Path);
```

分析节点的情况

- 失败节点：返回**FAIL**
  - 步骤**2:** 领域相关条件判断
  - 步骤**4:** 无规则可用时
- 成功节点
  - 步骤**1:** 叶节点, 返回**NIL**
  - 步骤**10:**中间节点, 返回包含**R**的路径
- 如果成功，返回一条包含**R**的路径,（$R_{i1}, R_{i2},\ldots\ldots R_{in}$）

存在问题及解决办法

- 问题和解决方法：
  - 深度问题
    - 对搜索深度加以限制
  - 死循环问题
    - 状态重复: **A→B，B→C, C→A**
    - 记录从初始状态到当前状态的路径

修正的回溯搜索算法1

BACKTRACK1（DATALIST）

DATALIST：从初始到当前的状态表（逆向）

返回值：从当前状态到目标状态的路径
（以规则表的形式表示）
或**FAIL**。

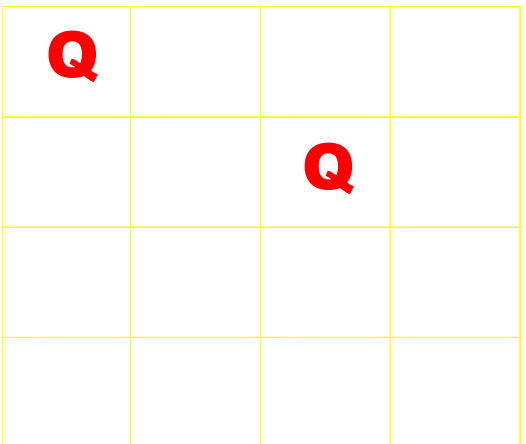
修正的回溯搜索算法1

```
1     DATA:=FIRST(DATALIST)
2     IF MEMBER(DATA, TAIL(DATALIST))
      RETURN FAIL;
3     IF Term(DATA) RETURN NIL;
4     IF Deadend(DATA) RETURN FAIL;
5     IF Length(DATALIST)>BOUND
      RETURN FAIL;
6     RULES:=Apprules(DATA);
7   LOOP: IF NULL(RULES) RETURN FAIL;
8     R:=FIRST(RULES);
```

```
9     RULES:=Tail(RULES);
10    RDATA:=Gen(R, DATA);
11    RDATALIST:=Cons(RDATA, DATALIST);
12    PATH:=BACKTRCK1(RDATALIST)
13    IF PATH=FAIL GO LOOP;
14    RETURN Cons(R, PATH);
```

一些问题

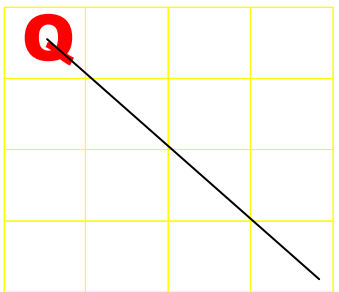
- 失败原因分析、多步回溯



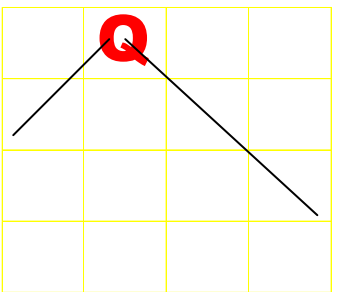
- 回溯搜索中知识的利用

  基本思想：

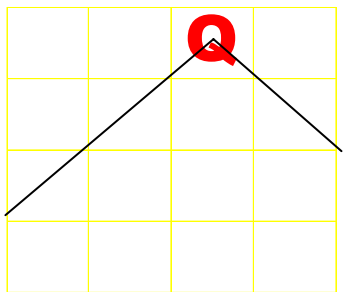
  尽可能选取划去对角线上位置数最少的。



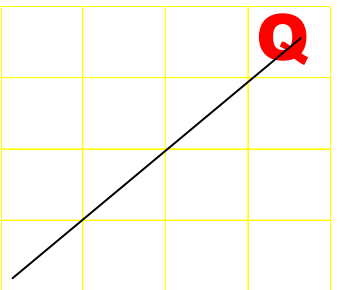
4



3



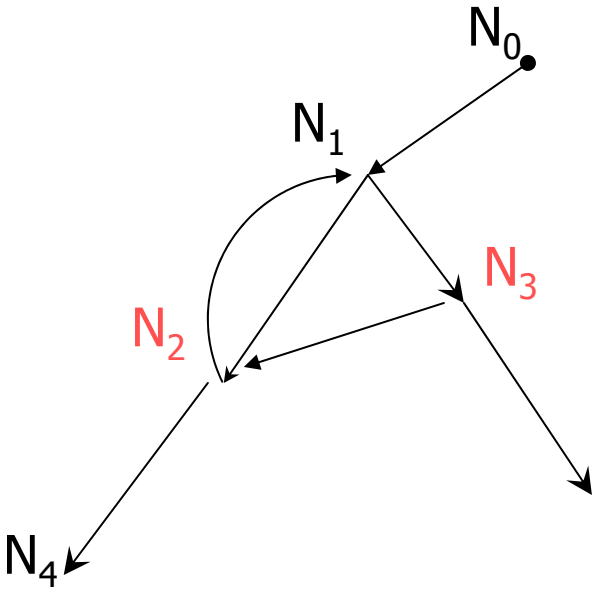
3



4

- 回溯策略
- 图搜索
- 无信息搜索
- 启发式搜索
- A*算法的可采纳性

图搜索策略



- 问题的引出
  - 八皇后问题 / 找最短路径
- 回溯与图搜索的区别
  - 回溯: 放弃的状态永远放弃;
  - 图搜索: 放弃的状态以后还可能再用;
- 算法:
  - 回溯搜索：只保留从初始状态到当前状态的一条路径。
  - 图搜索：保留所有已经搜索过的路径。

一些基本概念

- 图：一个节点的集合，节点由弧连接起来。
- 有向图：弧是一个节点指向另一个节点的图，称为有向图。
-
- 后继/父亲：如果有一条弧从n_i指向m_j，则m_j称为n_i的后继，n_i称为m_j的父亲。

- 路径：如果存在一个节点序列（n_{i0}，n_{i1}，……，n_{ik}），n_{ij}是n_{ij-1}是的后继，$j=1$，……，k，则称这个序列是从节点n_{i0}到节点n_{ik}的一条路径，长度为k。

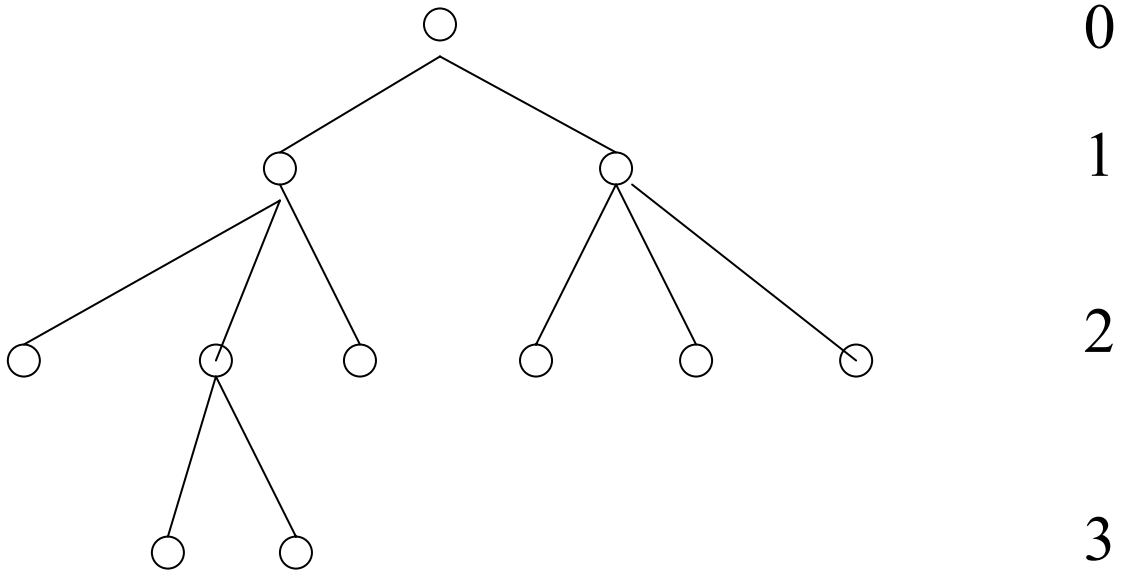
- 祖先/后裔：如果存在一条从n_i到m_j的路径，则称m_j是n_i的后裔，n_i称为m_j的祖先。

- 树：每个节点最多只有一个父辈。没有父辈的节点称为根节点，没有后继的节点称为叶节点。

- 节点深度：

  根节点深度=0

  其它节点深度=父节点深度+1



- 扩展一个节点
  - 生成出该节点的所有后继节点。
- 弧的费用
  - 有一条弧连接n_i和n_j两个节点，用$C(n_i, n_j)$表示使用规则从n_i到n_j的费用(或耗散值)。
    - 玉泉路 → 天安门
- 路径的耗散值
  - 一条路径的耗散值等于连接这条路径各节点间所有耗散值的总和。用$C(n_i, n_j)$表示从n_i到n_j的路径的耗散值。

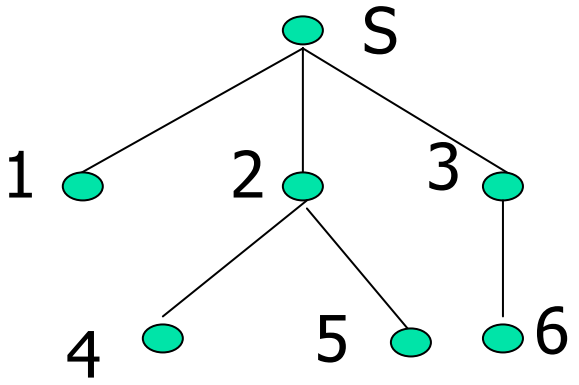
GRAPHSEARCH的思路

- **OPEN**表
  - 已经生成但未扩展节点
- **CLOSED**表
  - 已扩展节点
- 扩展节点**i**生成节点**j**
- 指针
- 调整指针

GRAPHSEARCH(simple version)

1. 建立一个只有起始节点**S**组成的图**G,** 把**S**放到**OPEN**表中；
2. 建立一个**CLOSED**表，置为空；
3. **While(!NULL (OPEN))**
   - **a)** 从**OPEN**表中取出（并删除）第一个节点**n**放入**CLOSED**表。
   - **b)** 如果**n**是目标节点，成功结束；
   - **c)** 扩展节点**n**，把**n**的后继加入**G**中；
   - **d)** 把**n**的后继加入**OPEN**表中,并建立它们到**n**的指针；
   - **e)** 对**OPEN**表中的节点排序；
4. 返回**FAIL**；

例子

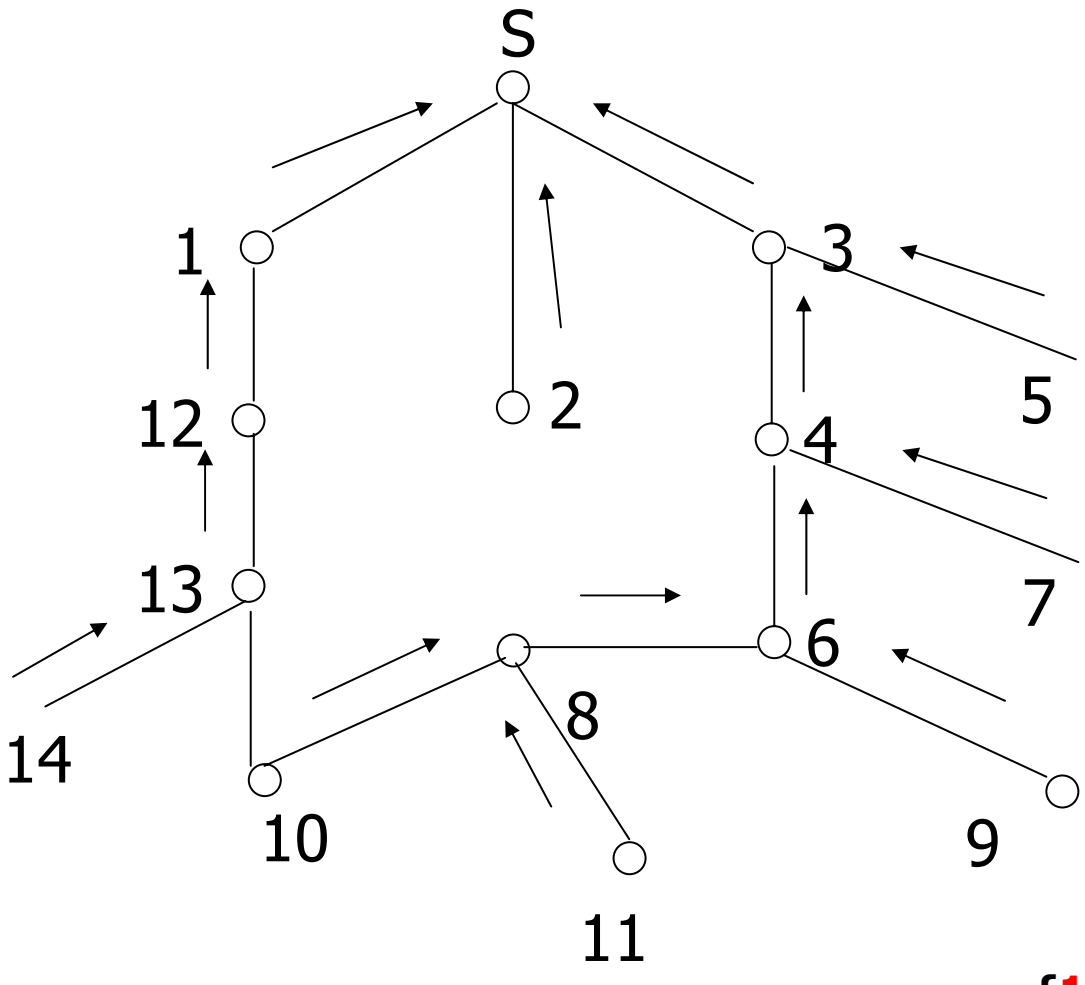


OPEN	CLOSE
{S}	{}
{}	{S}
{1,2,3}	{S}
{2,1,3}	{S}
{1,3}	{S,2}
{1,3,4,5}	{S,2}
{3,1,4,5}	{S,2}
{1,4,5}	{S,2,3}
{1,4,5,6}	{S,2,3}

GRAPHSEARCH

1. 建立一个只有起始节点**S**组成的图**G,** 把**S**放到**OPEN**表中；
2. 建立一个**CLOSED**表，置为空；

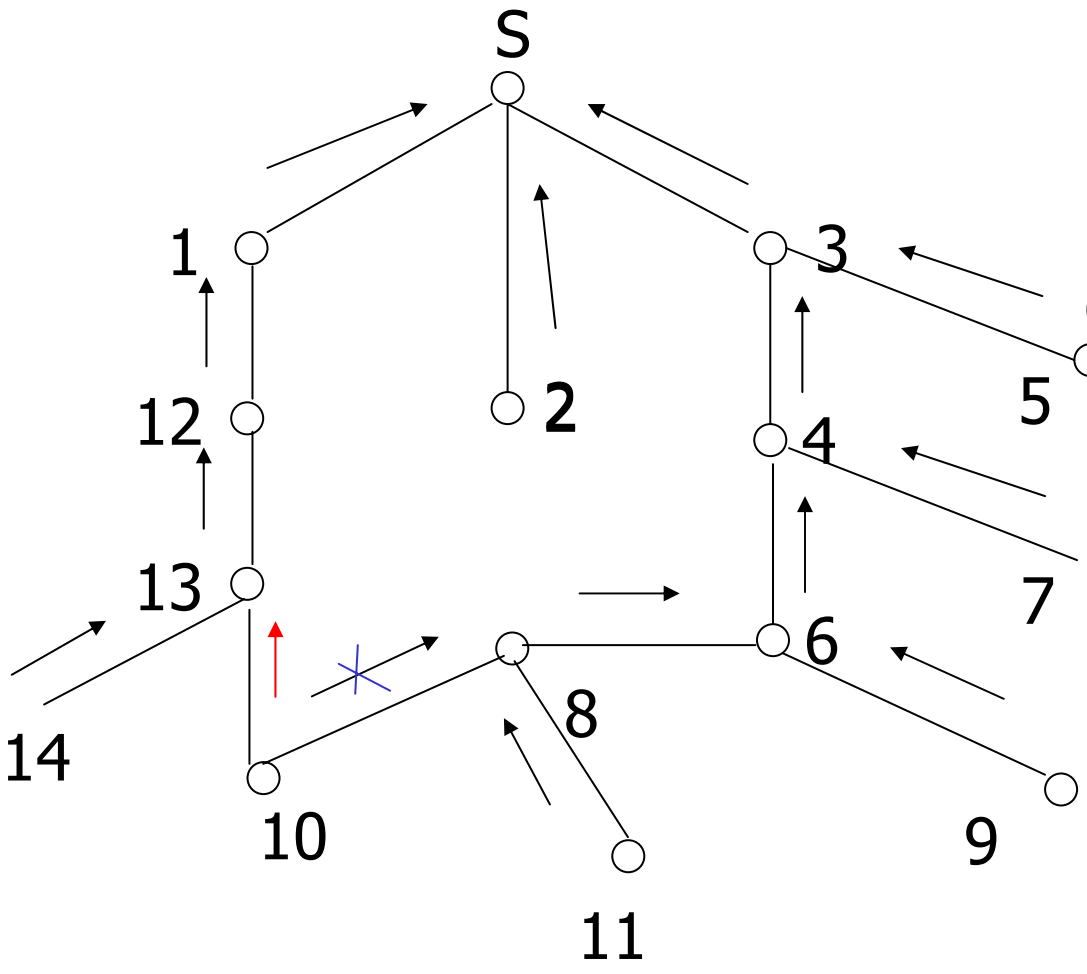
3. **While(!NULL (OPEN))**
   - **a)** 从**OPEN**表中取出（并删除）第一个节点**n**放入**CLOSED**表;
   - **b)** 如果**n**是目标节点，成功结束；
   - **c)** 扩展节点**n**，产生节点**n**的不是**n**的祖先的后继节点集合 **M**，把**M**中的这些成员作为**n**的后继加入**G**中；
   - **d)** 对**M**的那些既不在**OPEN**表中又不在**CLOSED**表中的成员，加入到**OPEN**表中，并建立它们到**n**的指针；对那些在**OPEN**表中的成员，决定是否调整它们的指针；对那些在**CLOSED**表中的成员，决定是否调整它们的指针，并决定是否调整它们在**G**中的后裔的指针；
   - **e)** 对**OPEN**表中的节点排序；
4. 返回**FAIL**；



OPEN	CLOSE
{S}	{}
{1,2,3}	{S}
{3,1,2}	{S}
{4,5,1,2}	{S,3}
{6,7,5,1,2}	{S,3,4}
{8,9,7,5,1,2}	{S,3,4,6}
{10,11,9,7,5,1,2}	{S,3,4,6,8}

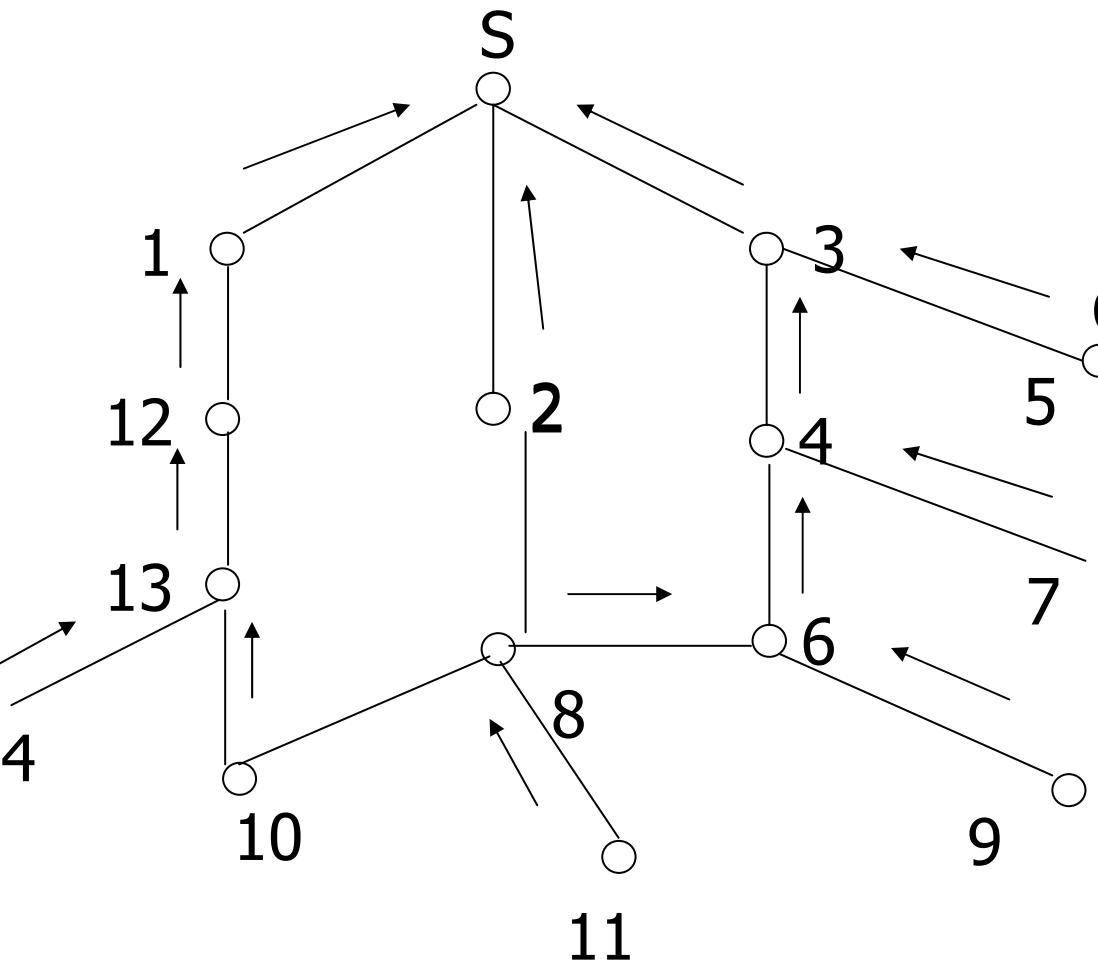
{13,10,11,9,7,5,2} **{S,3,4,6,8,1,12**

{14,10,11,9,7,5,2} **{S,3,4,6,8,1,12,13**

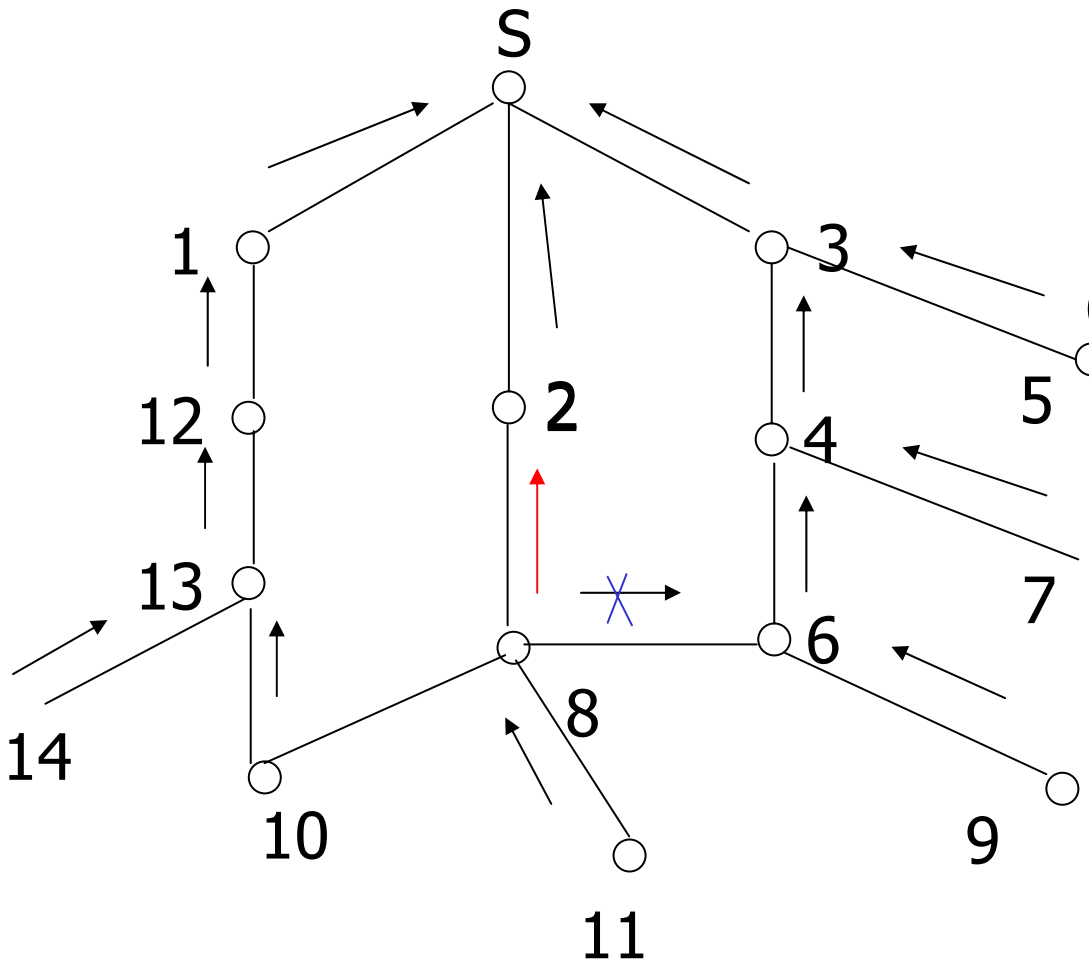


OPEN	CLOSE
{S}	{}
{1,2,3}	{S}
{3,1,2}	{S}
{4,5,1,2}	{S,3}
{6,7,5,1,2}	{S,3,4}
{8,9,7,5,1,2}	{S,3,4,6}
{10,11,9,7,5,1,2}	{S,3,4,6,8}
{13,10,11,9,7,5,2}	{S,3,4,6,8,1,12}

OPEN表中的节点修改指针

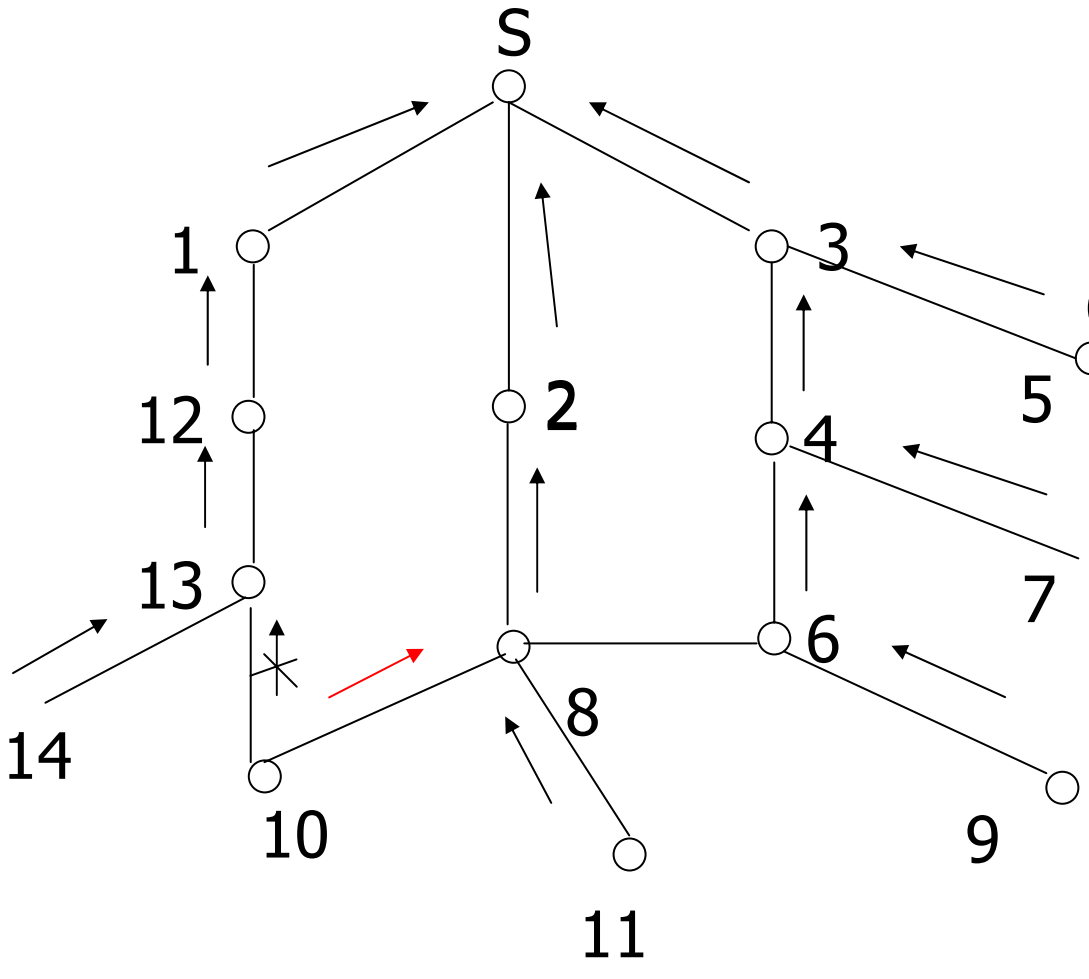


OPEN	CLOSE
{S}	{}
{1,2,3}	{S}
{3,1,2}	{S}
{4,5,1,2}	{S,3}
{6,7,5,1,2}	{S,3,4}
{8,9,7,5,1,2}	**{S,3,4,6}**
{10,11,9,7,5,1,2}	**{S,3,4,6,8}**
{13,10,11,9,7,5,2}	**{S,3,4,6,8,1,12**
{13,10,11,9,7,5}	**{S,3,4,6,8,1,12,2}**



OPEN	CLOSE
{S}	{}
{1,2,3}	{S}
{3,1,2}	{S}
{4,5,1,2}	{S,3}
{6,7,5,1,2}	{S,3,4}
{8,9,7,5,1,2}	{S,3,4,6}
{10,11,9,7,5,1,2}	{S,3,4,6,8}
{13,10,11,9,7,5,2}	**{S,3,4,6,8,1,12**
{13,10,11,9,7,5}	**{S,3,4,6,8,1,12,2}**

CLOSE表中的节点修改指针



OPEN	CLOSE
{S}	{}
{1,2,3}	{S}
{3,1,2}	{S}
{4,5,1,2}	{S,3}
{6,7,5,1,2}	{S,3,4}
{8,9,7,5,1,2}	{S,3,4,6}
{10,11,9,7,5,1,2}	**{S,3,4,6,8}**
{13,10,11,9,7,5,2}	**{S,3,4,6,8,1,12}**
{13,10,11,9,7,5}	**{S,3,4,6,8,1,12,2}**

CLOSE表中的节点**(8)**的后裔(10)修改指针

GRAPHSEARCH说明

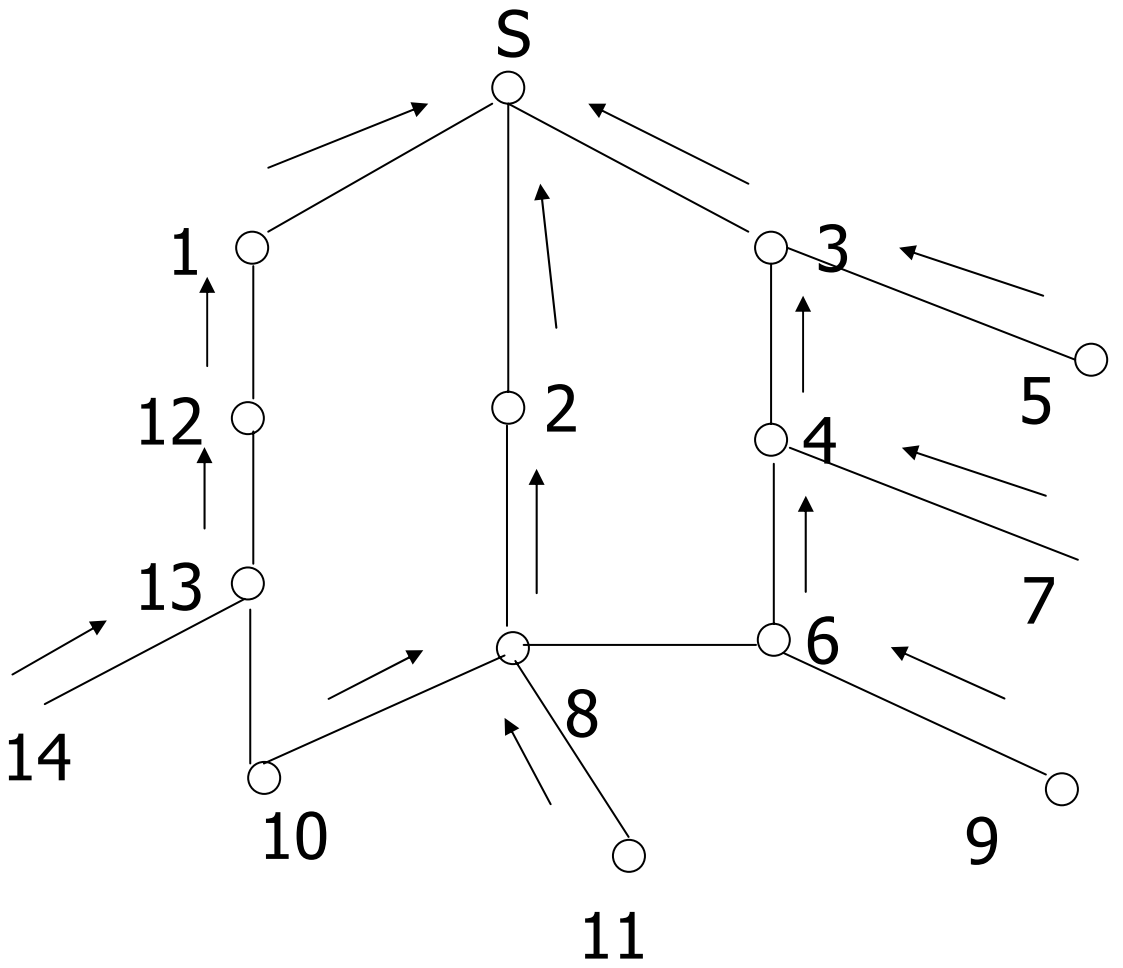
- **OPEN**表 —— **CLOSED**表;
- 目标节点即将被扩展时, 算法成功结束;
- 检查新产生的节点以前是否产生过，计算量较大。

- 算法结束后，将生成一个图**G**，称为搜索图。同时由于每个节点都有一个指针指向父节点，这些指针指向的节点构成**G**的一个支撑树，称为搜索树。

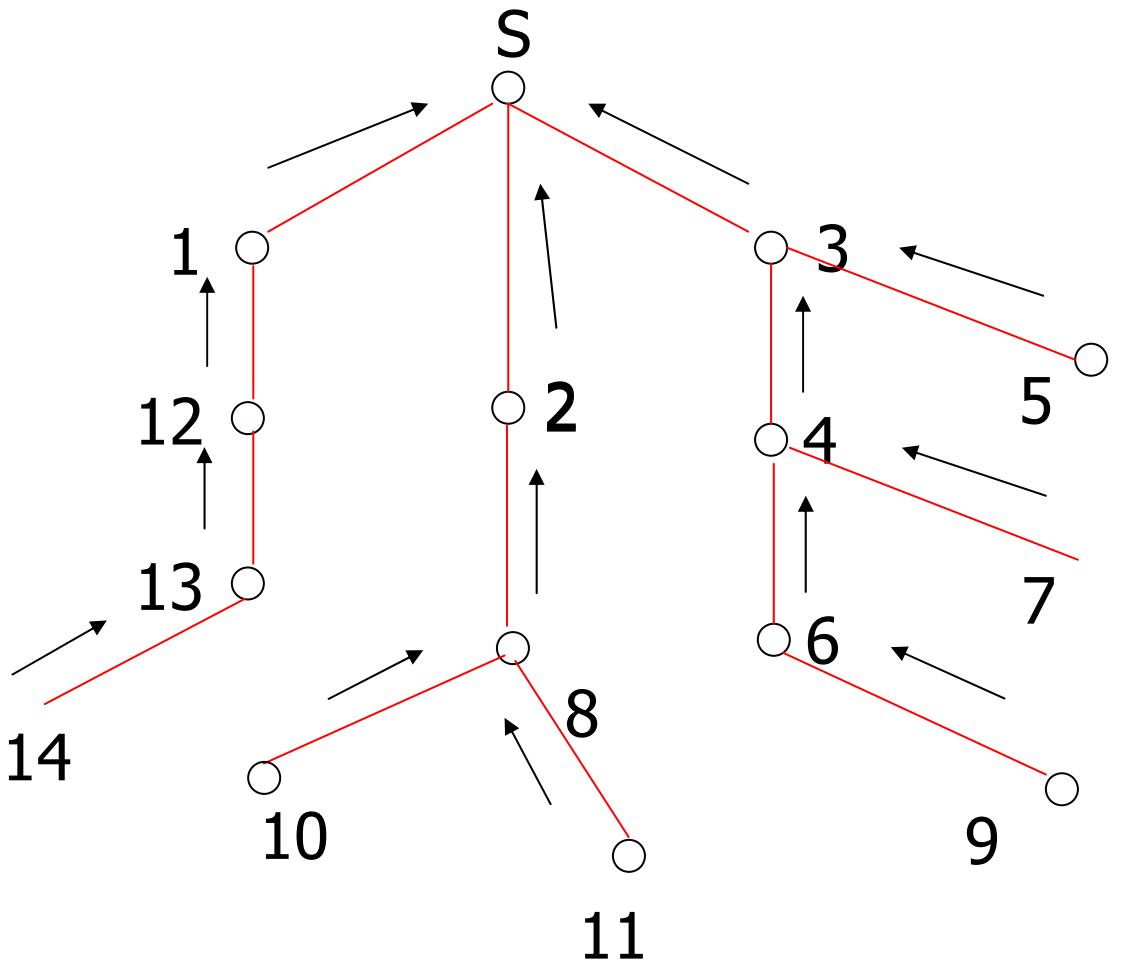
- 从目标节点开始，将指针指向的状态回串起来，即找到一条解路径。

- 树/不修改指针， 图/修改指针。
- 修改指针：找最优解

搜索图



搜索树



图搜索与回溯算法的区别

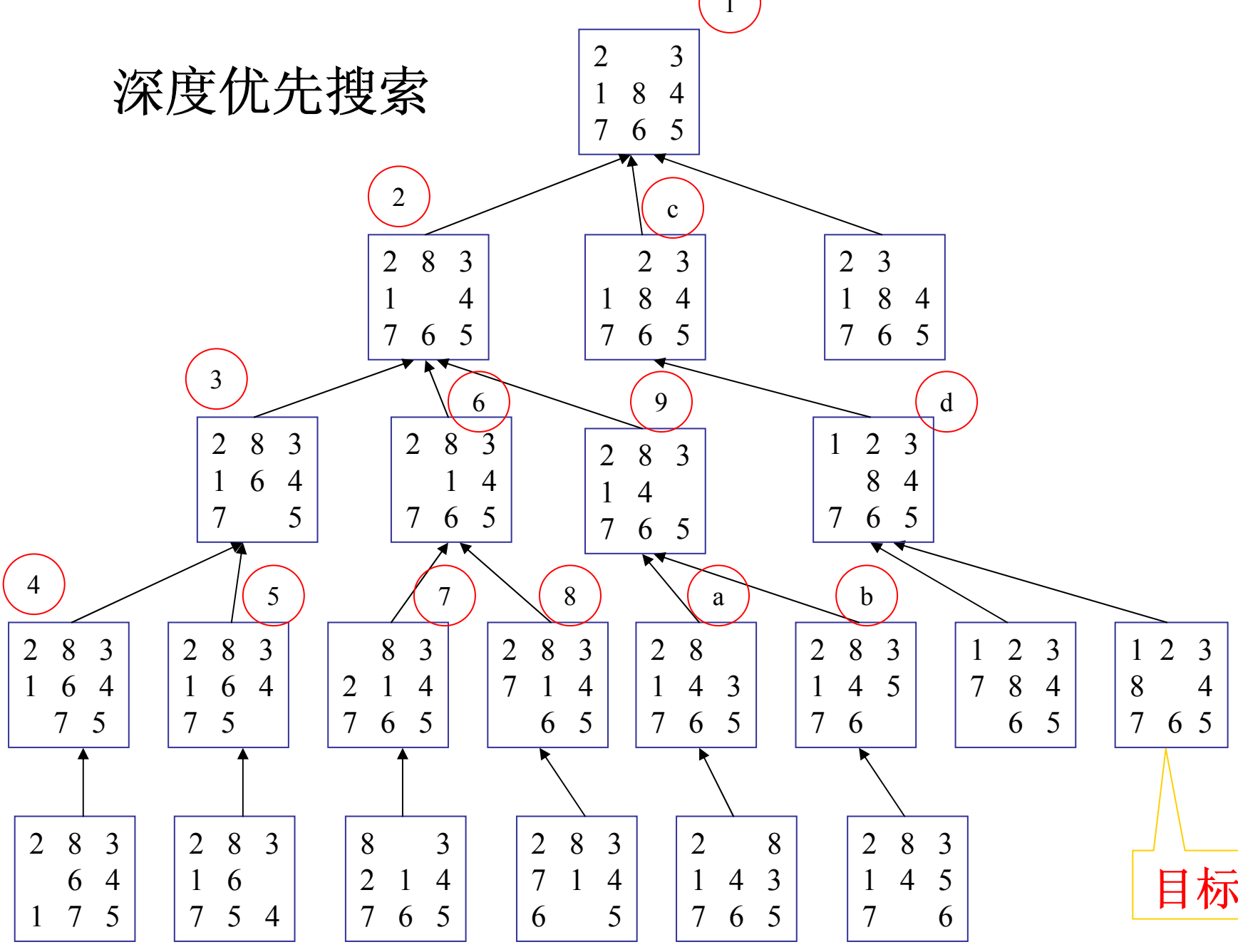
- 扩展节点:
  - 回溯算法: 生成一个儿子节点.
  - 图搜索:　扩展节点, 生成所有儿子节点.
- 候选节点:
  - 回溯算法: 一个.
  - 图搜索:　多个.
- 回溯:
  - 回溯算法: 返回父亲节点.
  - 图搜索:　不一定返回父亲节点.

- 回溯策略
- 图搜索
- 无信息搜索
- 启发式搜索
- **A***算法的可采纳性

无信息图搜索过程

- 无信息图搜索
  - 如果在**GRAPHSEARCH**中，对节点的排序不使用与问题相关的信息，则称为无信息图搜索。
- 深度优先搜索
  - 不同的节点，深度越大，在**OPEN**表中越靠前；
  - 深度相同，任意排序；
- 宽度优先搜索
  - 不同的节点，深度越小，在**OPEN**表中越靠前；

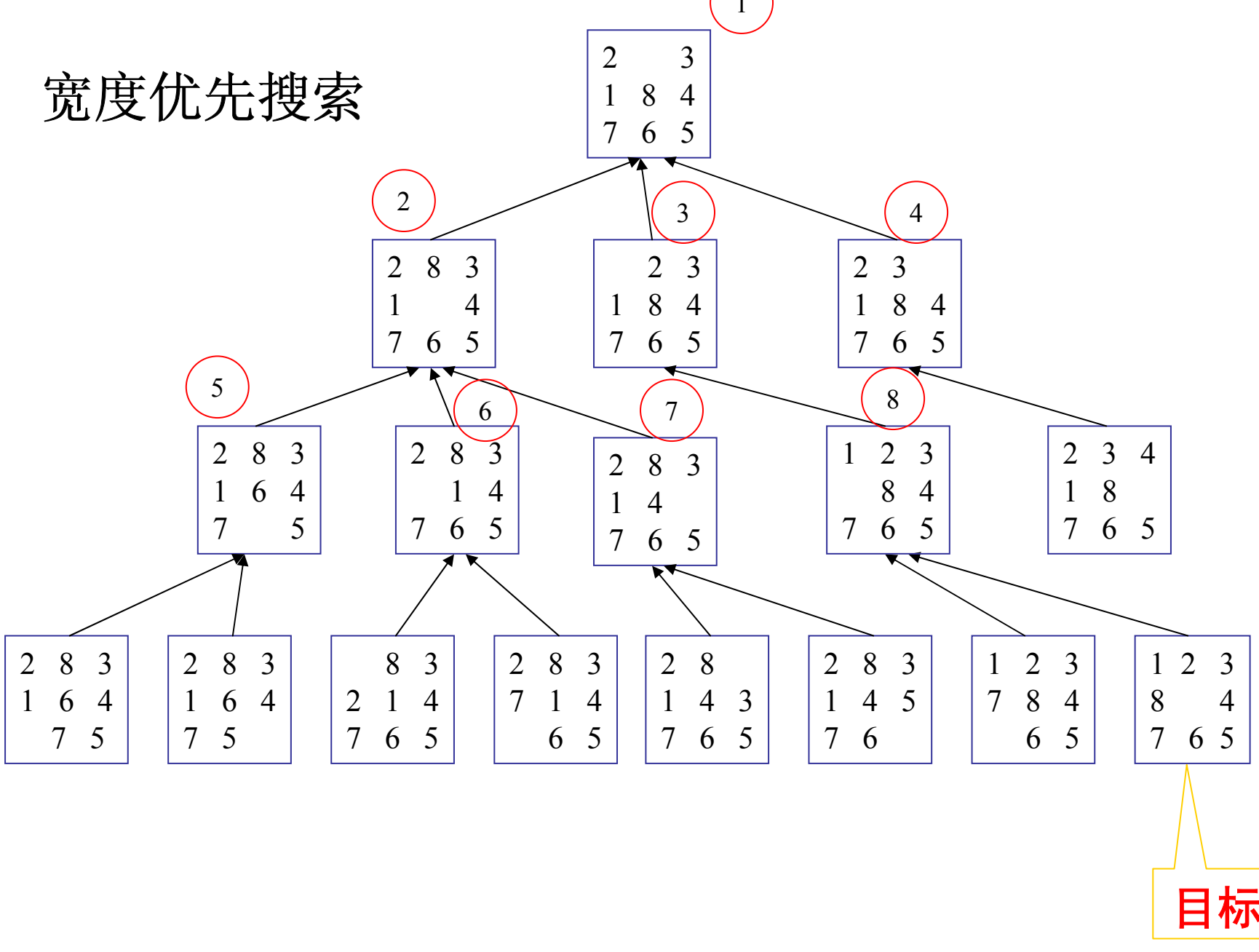
深度优先搜索



深度优先搜索的性质

- 一般设置深度限制；当深度限制不合理时，可能找不到解；可以将算法改为可变深度限制。
- 最坏情况时，搜索空间趋于穷举
- 与回溯法的差别：图搜索
- 是一个通用的与问题无关的方法

宽度优先搜索


1
2 3
1 8 4
7 6 5
2
3
4
2 8 3
1 4
7 6 5
2 3
1 8 4
7 6 5
2 3
1 8 4
7 6 5
5
6
7
8
2 8 3
1 6 4
7 5
2 8 3
1 4
7 6 5
2 8 3
1 4
7 6 5
1 2 3
8 4
7 6 5
2 3 4
1 8
7 6 5
2 8 3
1 6 4
7 5
2 8 3
1 6 4
7 5
8 3
2 1 4
7 6 5
2 8 3
7 1 4
6 5
2 8
1 4 3
7 6 5
2 8 3
1 4 5
7 6
1 2 3
7 8 4
6 5
1 2 3
8 4
7 6 5
目标

宽度优先搜索的性质

- 当问题有解时，一定能找到解。
- 当问题为单位耗散值，且问题有解时，一定能找到最优解。

- 回溯策略
- 图搜索
- 无信息搜索
- 启发式搜索
- **A***算法的可采纳性

启发式搜索(heuristic search)

- 无信息搜索一般需要产生大量的节点，因而效率较低。

- 启发式信息
  - 为提高效率，可以使用一些问题相关的信息，以减小搜索量，这些信息就称为启发式信息。

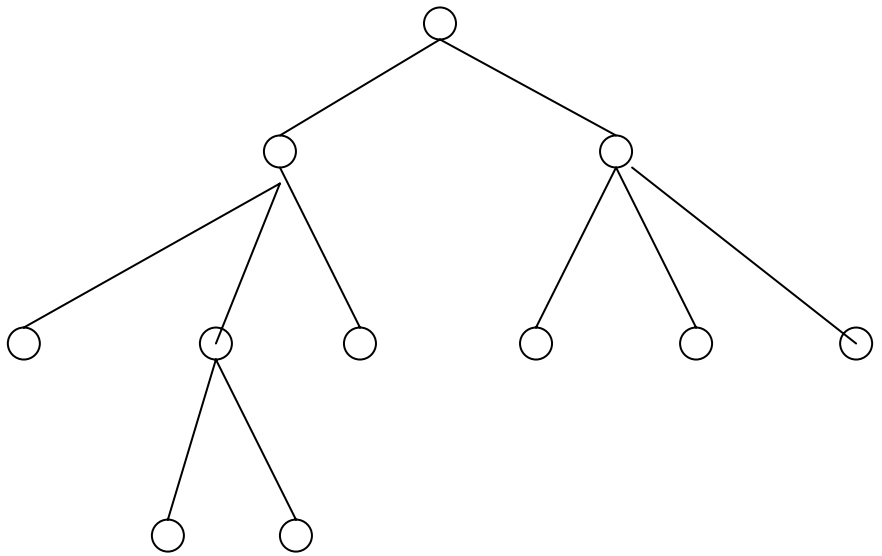
- 启发式搜索
  - 使用启发式信息指导的搜索过程称为启发式搜索.
  - 启发式图搜索: 对节点排序.

- 例子:
  - 无息路 → 无安门

- 启发信息的强度
  - 强：降低搜索工作量，但可能导致找不到最优解。
  - 弱：一般导致工作量加大，极限情况下变为盲目搜索，
    但可能可以找到最优解。

基本思想

- 定义一个评价函数**f(n)**，对当前的搜索状态进行评估，找出一个最有希望的节点来扩展。



例子: eight-puzzle

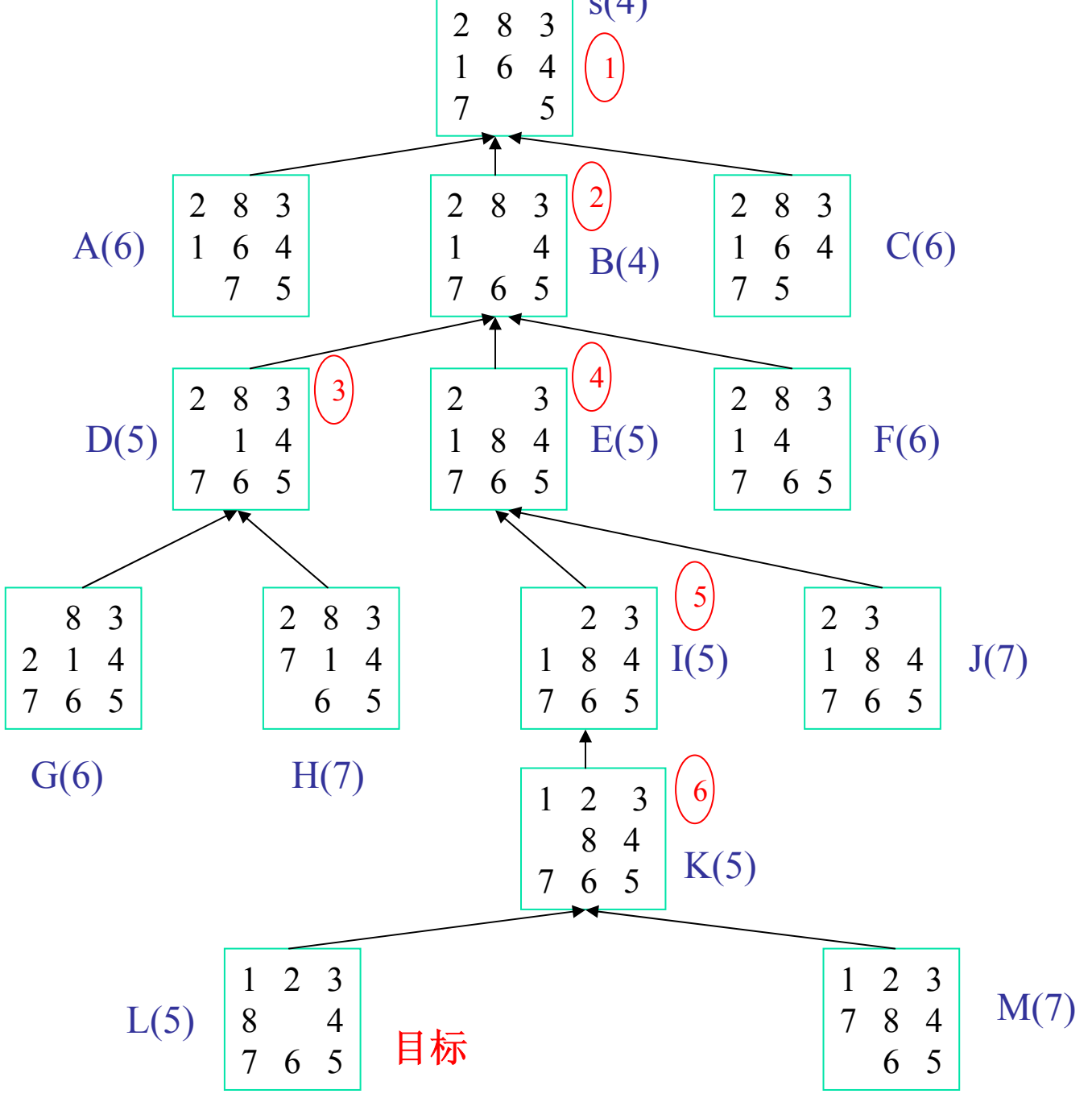
- 评价函数
  - **f(n) = d(n) + W(n)**
  - **d(n):** 节点**n**的深度;
  - **W(n):**与目标相比, 错位的数字数目;

2	8	3
1	6	4
7		5

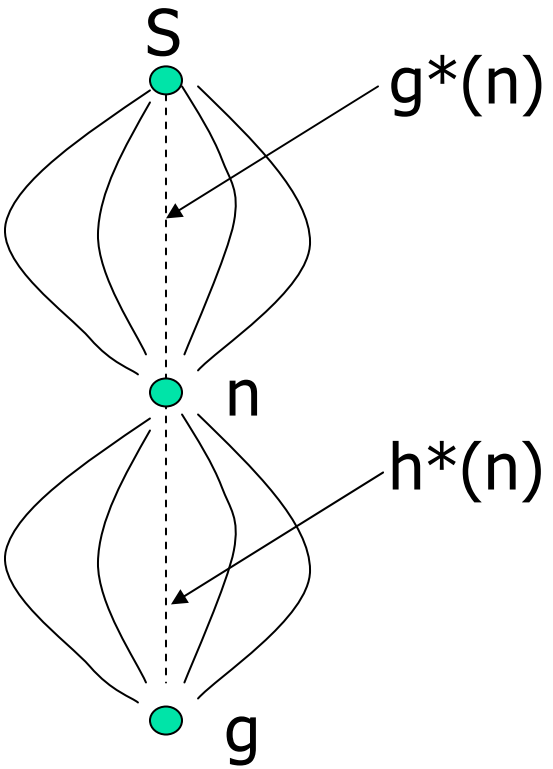
初始状态

1	2	3
8		4
7	6	5

目标状态


s(4)
1
A(6)
2
B(4)
C(6)
3
D(5)
4
E(5)
F(6)
5
I(5)
J(7)
G(6)
H(7)
6
K(5)
L(5)
目标
M(7)

- 启发式就是要猜测：
  - 从节点**n**开始，找到最优解的可能性有多大？
  - 从起始节点开始，经过节点**n**，到达目标节点的最佳路径的费用是多少？
    - **g**
    - **h**


S
g*(n)
n
h*(n)
g

符号的意义

- **g*(n)**：从**s**到**n**的最短路径的耗散值
- **h*(n)**：从**n**到**g**的最短路径的耗散值

- **f*(n)=g*(n)+h*(n)**：从**s**经过**n**到**g**的最短路径的耗散值

- **g(n)**、**h(n)**、**f(n)**分别是**g*(n)**、**h*(n)**、**f*(n)**的估计值

- **h(n):** 启发函数

几个性质

- **f*(S)**
  - **f*(S) = g*(S)+h*(S) = h*(S)**
  - 从**S**无约束地到达目标的最佳路经上的耗散值
- **g(n)**
  - 一般取实际走过的路径的费用和
  - **g(n) ≥ g*(n)**
  - 最佳路经上的节点**n**， 满足**g(n) = g*(n)**。
  - 随着算法的执行，由于指针的变动，**g(n)**会下降。
- **h≡0**
  - 没有启发式信息

A算法

- **f(n) = g(n) + h(n)**
- **g(n)**取实际走过的路径的费用和
- 每一条弧上的费用大于一个小正数 ε
- 节点排序是按照**f(n)**从小到大排

算法A*

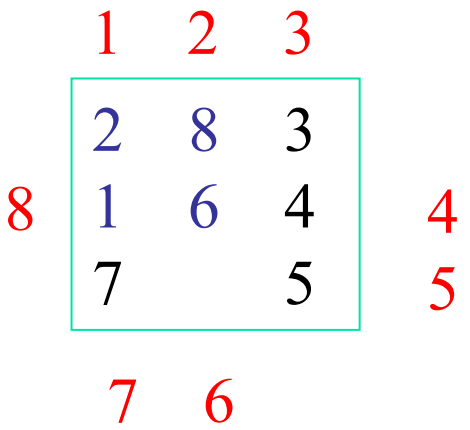
- 在A算法中，如果满足条件：

  $0 \leqslant h(n) \leqslant h^*(n)$

  则A算法称为A*算法。

A*算法的说明

- **8**数码问题
  - **h(n) =** “不在位”的将牌个数
  - **h(n) =** 将牌“不在位”的距离和



将牌1：1
将牌2：1
将牌6：1
将牌8：2

- 对于宽度优先算法，当问题为单位耗散值，且问题有解时，一定能找到最优解。

  - **f(n) = g(n) + h(n)**
  - **g(n)**
  - **h(n) = 0 ⩽ h*(n)**

- 回溯策略
- 图搜索
- 无信息搜索
- 启发式搜索
- **A*算法的可采纳性**

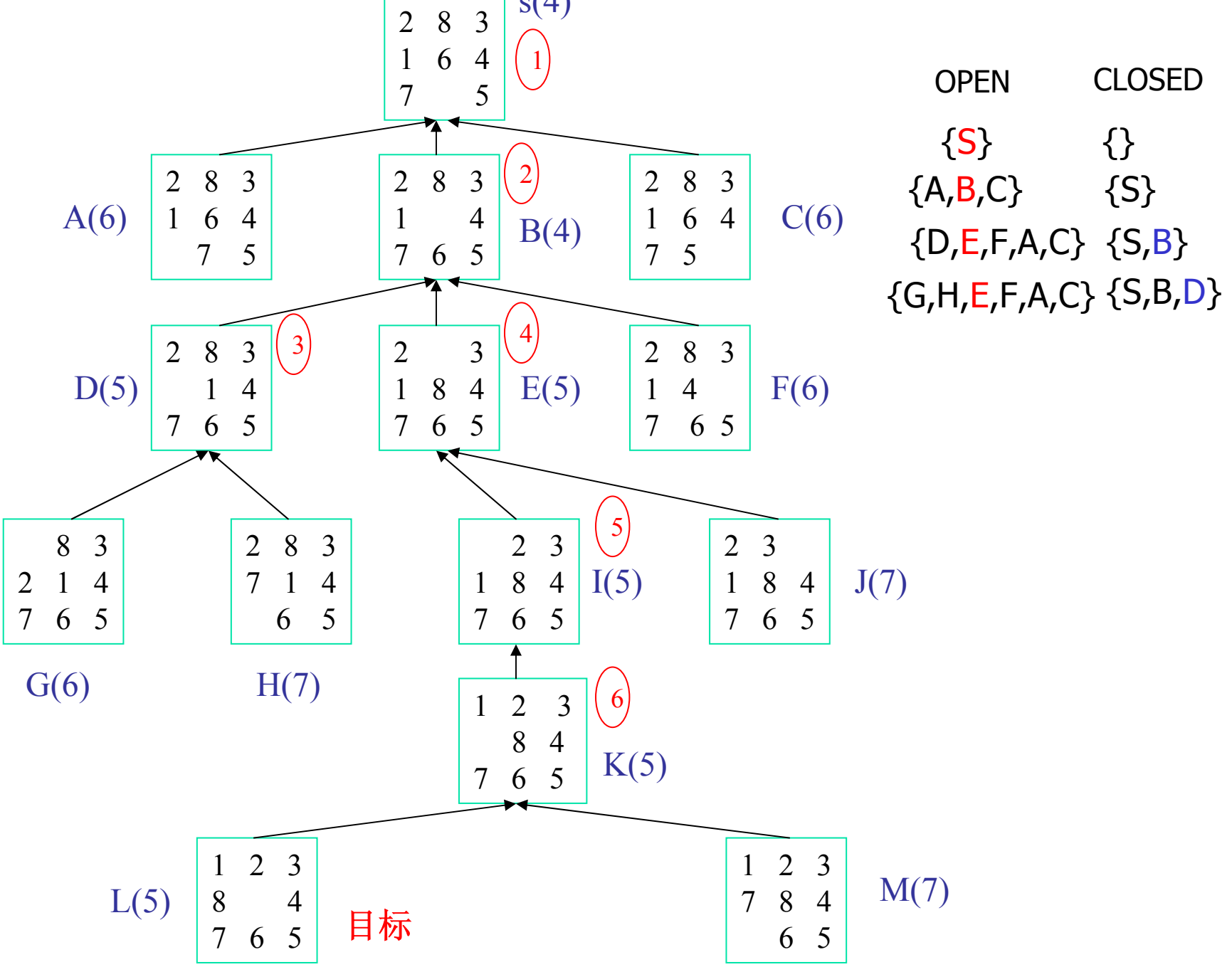
可采纳性

- 可采纳性：
  - 对任一个图，存在从**S**到目标的路径，如果一个搜索算法总是结束在一条从**S**到目标的最佳路径上，则称此算法是可采纳的。
  - 一条: 多条

A*算法的性质

- 性质一：
  - **GRAPHSEARCH**算法对有限图终止。
    - 算法当**OPEN**表为空时结束。
    - 图中的任何一个节点都只进入**OPEN**表一次，并且图中节点是有限的，所以**OPEN**表一定会被取空，导致算法结束。

- 性质二：
  - 在**A***算法结束前的任意时刻，**OPEN**表中都至少有一个节点**n**,节点**n**在从初始节点**S**到目标的最佳路径上, 并且**A***算法已经发现了这条路径, 并且节点**n**满足**f(n) ≤f*(S)**。


s(4)
2 8 3
1 6 4
7 5
1
A(6)
2 8 3
1 6 4
7 5
2 8 3
1 4
7 6 5
2
B(4)
2 8 3
1 6 4
7 5
C(6)
D(5)
2 8 3
1 4
7 6 5
3
2 3
1 8 4
7 6 5
4
E(5)
2 8 3
1 4
7 6 5
F(6)
8 3
2 1 4
7 6 5
G(6)
2 8 3
7 1 4
6 5
H(7)
2 3
1 8 4
7 6 5
5
I(5)
2 3
1 8 4
7 6 5
J(7)
1 2 3
8 4
7 6 5
6
K(5)
L(5)
1 2 3
8 4
7 6 5
目标
1 2 3
7 8 4
6 5
M(7)
OPEN
CLOSED
{S}
{}
{A,B,C}
{S}
{D,E,F,A,C}
{S,B}
{G,H,E,F,A,C}
{S,B,D}

- $f(n) = g(n) + h(n)$

  $= g^*(n) + h(n)$

  $\leqslant g^*(n) + h^*(n) = f^*(S)$

- 性质三：
  - 如果存在从**S**到目标节点的路径，则**A***扩展的节点**n**，一定满足：

$$f(n) \leqslant f^*(S)$$

    - 根据性质二，在**A***算法结束前的任意时刻，**OPEN**表中都至少有一个最佳路径上的节点**n**, 且满足$f(n) \leqslant f^*(S)$，
    - 如果扩展的节点是节点**n**，则性质成立;
    - 如果扩展的节点不是节点**n**，则因为**A***排序是由小到大排，所以选择扩展的节点n_1一定满足

$$f(n_1) \leqslant f(n) \leqslant f^*(S)$$

      性质成立。

- 性质四：
  - 如果存在从**S**到目标节点的路径，则**A***对无限图结束。
    - 如果**A***不结束，设**n**为当前扩展节点，则
      f（**n**）= **g**（**n**）+ **h**（**n**）≥ **g***（**n**）+ **h**（**n**）≥ **g***（**n**）
      g*（**n**）为从起始节点**S**到当前节点**n**的最佳路径的费用。
    - 因为每一条弧上的费用大于一个小正数 ε；所以
      g*（**n**）≥ **d***（**n**）* ε；
      其中，**d***（**n**）为**S**到**n**的最佳路径的弧的数目。
    - **A***不结束 ⇒ **d***（**n**）→∞ ⇒ **g***（**n**）→∞ ⇒ **f**（**n**）→∞
    - 根据性质三，**A***扩展的节点**n**，一定满足**f**（**n**）≤ **f***（**S**），所以矛盾。
    - 所以**A***对无限图结束。

- 性质五：
  - **A***是可采纳的。
    - 如果一个图，存在从**S**到目标的路径，**A***一定终止在解路径上。
    - **A***一定终止在最佳路径上。

- 如果一个图，存在从**S**到目标的路径，**A***一定终止在解路径上。
  - 不明显.
  - **A***对有限图或无限图都终止
  - 但并不说明一定终止在解路径上。即算法可能因为**OPEN**表为空而终止，而并不是因为找到解路径而终止。
  - **OPEN**表为空而终止?

- 设算法因为**OPEN**表为空而终止，在**A***算法结束前的任意时刻，**OPEN**表中都至少有一个最佳路径上的节点（性质二）

- 则这个节点一定被扩展过，而它的在最佳路径上的后继会被放到**OPEN**表中，并且同样被扩展过,……，

- 由此可以推出最佳路径上的最后一个节点一定被扩展过，

- 因为它是目标节点，一定在算法循环内结束，与**OPEN**表为空而结束矛盾，所以一定终止在解路径上。

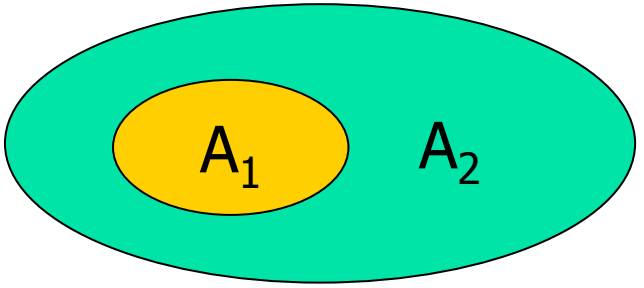
- **A***一定终止在最佳路径上。
  - 不明显.
  - 次优路径?
  - 设没有终止在最佳路径上，而最后扩展的目标节点为G_1，

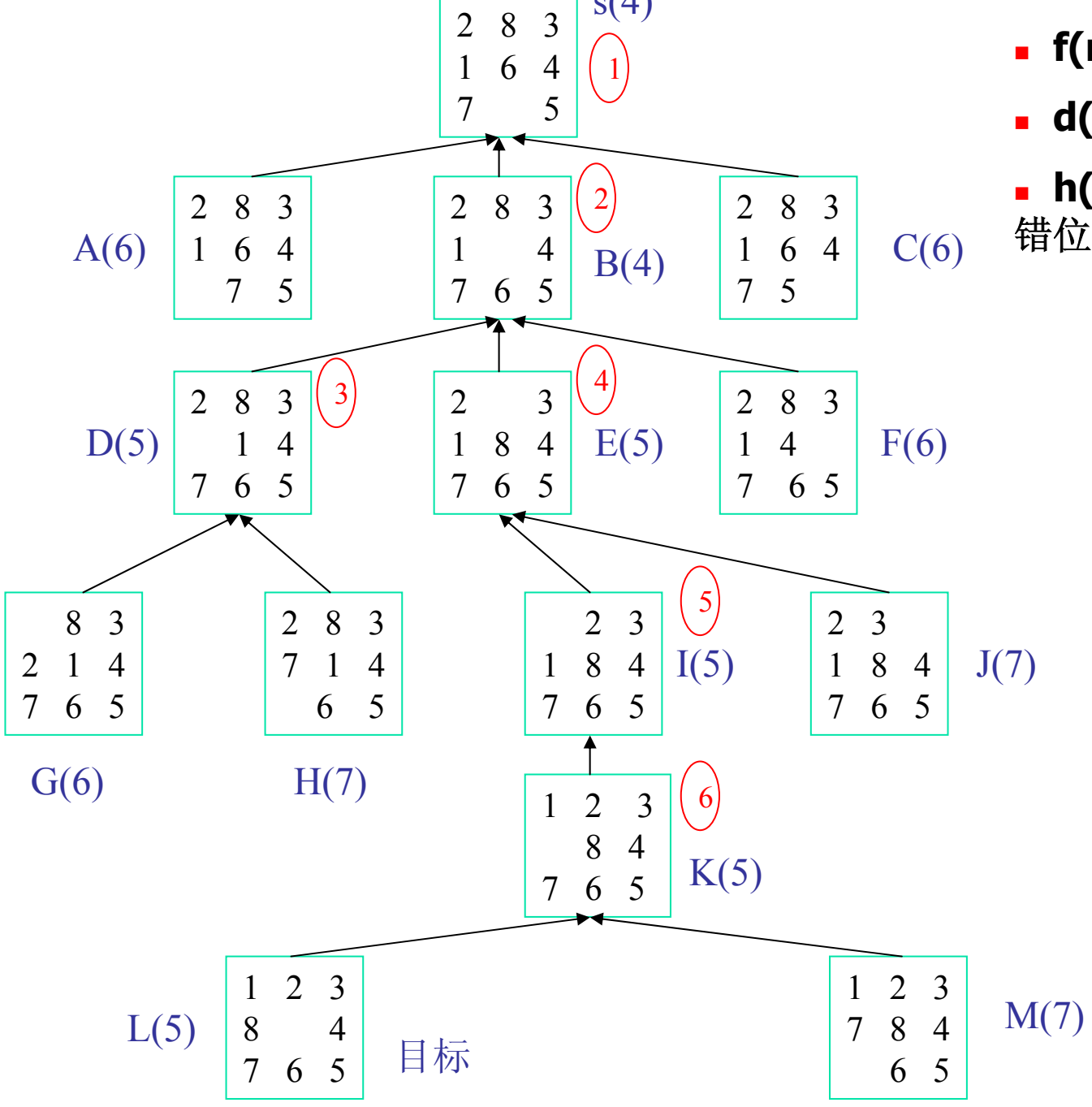
    $$f(G_1) = g(G_1) + h(G_1) \geqslant g(G_1)$$

    因为并非最佳路径，所以有

    $$f(G_1) \geqslant g(G_1) > f^*(S)$$
  - 而根据性质四，$f(G_1) \leqslant f^*(S)$，矛盾。

- 性质六：
  - **A_1**与**A_2**是具有不同启发函数的**A***算法，假设**$h_1 > h_2$**，则**A_1**具有更多的启发式信息，由**A_1**扩展的节点必然被**A_2**扩展。





- **f(n) = d(n) + h(n)**
- **d(n):** 节点**n**的深度;
- **h(n):**与目标相比,错位的数字数目;

- 对A_1终止时搜索树的深度用归纳法证明。
  - 对深度为0的节点，即起始节点，A_1和A_2都扩展，所以成立；
  - 设对深度小于等于k的所有节点，A_1扩展的都被A_2扩展。
    - 对深度为k+1的节点n, 根据归纳法，n的祖先如果被A_1扩展，则一定被A_2扩展.
    - 因此对A_2来说，从n开始用指针回溯的路径的费用一定小于或等于A_1 中从n开始用指针回溯的路径的费用。即，

      $$g_2(n) \leqslant g_1(n)$$
    - 又, $h_1(n) > h_2(n)$
    - 所以, $f_1(n) = g_1(n) + h_1(n)$

      $$> g_2(n) + h_2(n) = f_2(n)$$

- (反证法) n在A_1和A_2的OPEN表中, 设A_1扩展n，而A_2没有扩展n,
- 只要推出 f_1（n）≤ f_2（n）即矛盾;
- f_1（n）≤ f*（s）≤ f_2（n）
- A_1扩展n， f_1（n）≤f*（s）(性质三)
- A_2是A*算法，所以A_2一定终止在目标节点G上并找到最优解，即，最后一个扩展的节点是目标节点G。
- f_2（G）=g_2（G）+h_2（G）= g_2*（G）+h_2（G）
- 因为0≤h≤h*，而h_2*（G）=0，所以h_2（G）=0
- f_2（G）= g_2*（G）= f*（s）
- n和G都在OPEN表中，而A_2扩展了G没有扩展n，所以一定有：f_2（G）≤f_2（n）
- f*（s）≤f_2（n）

关于A*和启发式信息

- **h（n）≤ h*（n），**一定可以找到最优解。

- 满足以上条件，**h（n）**越大，搜索的节点数越少。当**h（n）= h*（n）**时，搜索的节点数最少。
  - 效率是另一个问题;

- 不满足**h（n）≤ h*（n）**，则可能找不到最优解；但搜索效率可能提高；

  - 例子**: eight-puzzle**
  - **h（n）= p（n）+ 3S（n）**，

    其中：**p（n）**是每一个数字离目标位置的距离和，**S（n）**是一个序列分，如下得到：对非中心的外圈上的数字按顺时针方向走一圈，如果它的后继不是目标状态下的后继，则记为**2**；否则，记为**0**，对中心位置，有数字，记为**1**；否则记为**0**。把这些分都加起来，就得到序列分**S（n）**。

2		6
7	1	8
5	4	3

p（n）=2+1+2+2+2+3+1+2=15
S（n）=2+2+2+2+0+0+2+1=11
h（n）=p（n）+3*S（n）=48

2	1	6
	4	8
7	5	3

p（n_1）=1+1+2+1+1+3+0+2=11
S（n_1）=2+2+2+2+2+2+2+1=15
h（n_1）=p（n_1）+3*S（n_1）=56

- **g（n）≡0**
  - 如果目的仅仅是找到一个解，对解的好坏没有要求，则可设**g（n）≡0.**
  - 这时从起始节点到当前节点的路径的费用对搜索没有影响，而只关心从当前节点到目标节点所需要的搜索量，即只与**h**有关.
  - 对**h**要求很大.

- **f = g + w*h**
  - **w**是一个正数，
  - 利用**w**控制**g**和**h**在搜索中起的作用。
  - 经验表明，让**w**与搜索深度成相反方向变化时，效果较好。
  - 即，深度越小时，**w**越大，强调启发式知识的作用；深度越大时，**w**越小，越来越接近于宽度优先，以便保证找到解。