命题逻辑
（The propositional logic）

张文生　研究员

中国科学院自动化所

2019年09月12日

讲课内容

- 基本概念
- 公式的解释
- 永真与永假
- 范式
- 逻辑结论

讲课内容

- 基本概念
- 公式的解释
- 永真与永假
- 范式
- 逻辑结论

- 定义(命题, proposition)
  - 命题是一个陈述句。它只能取真或假，而不能是两者。
  - 例子:
    - 北京是中国的首都(真).
    - 长春是中国最大的城市(假).
    - 1+101=110(上下文).
    - 今年的中秋节有雨.
  - 命题是一句有真假意义的话。
    - “关门!” (命令)
    - “你是谁?” (问话)

- 命题的值(真值, 真假值, truth value):
  - 真(T, 1)
  - 假(F, 0)
- Use an uppercase symbol to denote a proposition.
  - P: 北京是中国的首都.
  - Q: 长春是中国最大的城市.
- 定义(原子公式,原子, atomic formula, atom)
  - 表示命题的符号称为原子公式.

logical connectives

- 连接符：
  - ~（读做“非”）(名称:否定符号)
  - ∧ （与, 并且）(合取符号)
  - ∨ （或, 或者）(析取符号)
  - → （蕴涵，隐含）(蕴涵符号)
  - ↔ （充要, 等价）(等值符号)

- ~G: 北京不是中国的首都;
  - G:北京是中国的首都;
- H∧G: 张三是科学家, 并且李四是文学家;(合取式)
  - H: 张三是科学家;
  - G:李四是文学家;
- H∨G: 2是偶数或者2是奇数; (析取式)
  - H: 2是偶数;
  - G: 2是奇数;

合适公式 (well-formed formula)

- **合适公式**：
  - 用连接符将多个原子公式组合以构成比较复杂的逻辑公式。
  - 递归定义(合适公式, 公式)
    - 原子是公式;
    - 如果G是公式, 则~G也是公式;
    - 如果G,H是公式, 则$(G \wedge H)$, $(G \vee H)$, $(G \rightarrow H)$, $(G \leftrightarrow H)$是公式;
    - 所有公式均是由上述规则产生;
  - $(\sim(G \wedge H)) \vee (P \rightarrow Q)$

合适公式的值

$$\sim G = \begin{cases} T & 如果 G = F \\ F & 如果 G = T \end{cases}$$

$$\mathrm{G} \wedge \mathrm{H} = \begin{cases} T & 如果 G = T 且 H = T \\ F & 否则 \end{cases}$$

$$\mathrm{G} \vee \mathrm{H} = \begin{cases} T & 如果 G, H 中至少有一个为 T \\ F & 否则 \end{cases}$$

$$\mathrm{G} \rightarrow \mathrm{H} = \begin{cases} F & \text{如果} G = T \text{并且} H = F \\ T & \text{否则} \end{cases}$$

$$\mathrm{G} \leftrightarrow \mathrm{H} = \begin{cases} T & \text{如果} G = H \\ F & \text{否则} \end{cases}$$

真值表(truth table)

G	~G
1	0
0	1

合适公式真值表

G	H	G∨H	G∧H	G→H	~G	G↔H
T	T	T	T	T	F	T
F	T	T	F	T	T	F
T	F	T	F	F	F	F
F	F	F	F	T	T	T

讲课内容

- 基本概念
- 公式的解释
- 永真与永假
- 范式
- 逻辑结论

- 定义(公式的解释)
  - 给定命题公式G, 令$A_i(1 \le i \le n)$是在G中的原子, G的一个解释是一个对A_i的赋值(只能赋T或F, 而不能是两者).
  - 例子:
    - $G = P \wedge Q \wedge S$
    - {T, F, T}
    - {F, T, F}
  - 一个公式有n个原子, 则共有2^n个解释.

- 公式的值是公式G在一个解释下的值;

$$G = \begin{cases} T & \text{iff } G\text{在这个解释下被计算为}T \\ F & \text{否则} \end{cases}$$

•标记: P为真; ~P为假;

G=P∧Q∧S

•{T, F, T}

{P, ~Q, S}

If a formula *F* is true under an interpretation *I*, then we say that *I* satisfies *F*, or *F* is satisfied by *I*. (*I* 满足*F*)

讲课内容

- 基本概念
- 公式的解释
- 永真与永假
- 范式
- 逻辑结论

- 一个公式有n个原子，则共有2^n个解释.
  - $P \wedge Q$
  - $((P \rightarrow Q) \wedge P) \rightarrow Q$

- 定义(永真式):
  - 一个公式称为永真式, 当且仅当对所有解释, 公式的值均为真 (重言式)
  - 一个公式称为非永真式, 当且仅当它不是永真式; (invalid)
- 定义(永假式):
  - 一个公式称为永假式, 当且仅当对所有解释, 公式的值均为假 (不相容式, 不可满足)
  - 一个公式称为非永假式,当且仅当它不是永假式.

  (相容式, 可满足)

性质

- G为永真式, 则~G为永假式;
- G为永假式, 则~G为永真式;

- 三个公式:
  - P∧~P是永假式;
  - P∨~P是永真式;
  - P→~P是非永真式也是非永假式;

讲课内容

- 基本概念
- 公式的解释
- 永真与永假
- 范式
- 逻辑结论

- 定义(等价):
  - 两个公式等价(F=G), 当且仅当对任一个解释, F和G的值都相同.
- 定义(文字):
  - 文字是一个原子或一个原子的非;
- 定义(合取范式):
  - 公式G是合取范式,当且仅当G有

    $G_1 \wedge G_2 \wedge \ldots \wedge G_n$, n>1

    的形式, 其中G_i文字的析取式.
  - 例子: $(A \vee B) \wedge (C \vee D) \wedge (F \vee G)$
- 析取范式

变换公式

- $F \leftrightarrow G = (F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F)$
- $F \rightarrow G = \sim F \vee G$

- $F \vee G = G \vee F$, $F \wedge G = G \wedge F$ (交换律)
- $(F \vee G) \vee H = F \vee (G \vee H)$ (结合律)

  $(F \wedge G) \wedge H = F \wedge (G \wedge H)$

- $F \vee (G \wedge H) = (F \vee G) \wedge (F \vee H)$ (分配律)

  $F \wedge (G \vee H) = (F \wedge G) \vee (F \wedge H)$

- $\sim(\sim F) = F$ (否定之否定)
- $\sim(F \vee G) = \sim F \wedge \sim G$ (狄摩根定律)

  $\sim(F \wedge G) = \sim F \vee \sim G$

- $F \vee \quad = F,\ F \wedge \quad = F$

  $F \vee \quad = \quad ,\ F \wedge \quad =$

化公式为范式

- 消去→和↔
  - $F \leftrightarrow G = (F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F)$
  - $F \rightarrow G = \sim F \vee G$
- 将~代入每个原子前面
  - $\sim(\sim F) = F$
  - $\sim(F \vee G) = \sim F \wedge \sim G$
  - $\sim(F \wedge G) = \sim F \vee \sim G$
- 使用:
  - $F \vee (G \wedge H) = (F \vee G) \wedge (F \wedge H)$
  - $F \wedge (G \vee H) = (F \wedge G) \vee (F \wedge H)$

讲课内容

- 基本概念
- 公式的解释
- 永真与永假
- 范式
- 逻辑结论

- 定义(逻辑结论)
  - 给定公式F_1, F_2,… F_n和G, G是公式F_1, F_2,… F_n的逻辑结论, 当且仅当使F_1, F_2,… F_n为真的任一个解释, 使G为真. 公式F_1, F_2,… F_n称为G的公理.

- 定理1
  - 给定公式$F_1, F_2, \ldots F_n$和G, G是公式$F_1, F_2, \ldots F_n$的逻辑结论, 当且仅当公式

$$(F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n) \rightarrow G$$

为永真式;

- 证明:

$(F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n) \rightarrow G$

$= \sim(F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n) \vee G$

$= \sim F_1 \vee \sim F_2 \vee \ldots \vee \sim F_n \vee G$

- $(F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n) \rightarrow G$
  $= \sim F_1 \vee \sim F_2 \vee \ldots \vee \sim F_n \vee G$
- 设G是公式F_1, F_2,… F_n的逻辑结论;
  - 要证: $(\sim F_1 \vee \sim F_2 \vee \ldots \vee \sim F_n \vee G)$是永真式;
  - $F_1, F_2, \ldots, F_n$均为真
  - $F_1, F_2, \ldots, F_n$中至少有一个为假.
- 设公式$(F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n) \rightarrow G$为永真式;
  - 要证: G是公式F_1, F_2,… F_n的逻辑结论;
  - 要证: 当$F_1, F_2, \ldots, F_n$为真, G为真;
  - $(\sim F_1 \vee \sim F_2 \vee \ldots \vee \sim F_n \vee G)$是永真式;

- 定理2
  - 给定公式$F_1, F_2, \ldots F_n$和G, G是公式$F_1, F_2, \ldots F_n$的逻辑结论, 当且仅当公式 $F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n \wedge \sim G$ 不相容 (是永假式)。

- 证明:
  - (定理1)给定公式$F_1, F_2, \ldots F_n$和G, G是公式$F_1, F_2, \ldots F_n$的逻辑结论, 当且仅当公式

    $(F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n) \rightarrow G$ 为永真式;
  - $\sim((F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n) \rightarrow G)$为永假式;
  - $F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n \wedge \sim G$

- 定义(定理)
  - 如果G是公式F_1, F_2,… F_n的逻辑结论, 则公式

    $$(F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n) \rightarrow G$$

    称为定理.

    G称为定理的结论.

参考文献

- Symbolic Logic and Mechanical Theorem Proving
  - Chang, C.L., Lee, R.C.
  - Academic Press, New York and London, 1973
- 基于归结方法的自动推理
  - 刘叙华
  - 科学出版社, 1994
- 定理机器证明
  - 刘叙华, 姜云飞
  - 科学出版社, 1987
- 自动定理证明
  - 石纯一
  - 气象出版社, 1989

感谢同学们听课

欢迎讨论与交流