

## 一阶谓词逻辑

### 张文生 研究员

中国科学院自动化研究所

2019年09月12日



## 内容简介

- 命题逻辑局限性
- 基本概念
- 合适公式
- 公式的解释
- 前束范式



- 例子:
  - 每个人都是要死的. 孔子是人, 他是要死的.
- 写成命题形式:
  - P: 每个人都是要死的.
  - Q: 孔子是人.
  - R: 孔子是要死的.
- R是P, Q的逻辑结论?



## 内容简介

- 命题逻辑局限性
- 基本概念
- 合适公式
- 公式的解释
- 前束范式



### · 定义(谓词):

- 设D是非空个体名称集合, 定义在D<sup>n</sup>上,取值于{T, F}上的n元函数, 称为n元谓词
- Dn表示集合D上的n次笛卡儿乘积
- 例子:
  - Man(x)
  - Greater(x, y)

## 函数



- 函数(函词)
  - 是一个映射:

 $f: D \rightarrow D$ 

- 例子:
  - father(x, y)

## 符号



• 常数: 3, 20.5, John, Confucius

• 变量: x, y, z

• 函数: g, f, h, father, plus

• 谓词: Q, P, GREATER

### 项



### ・定义(项):

- 常数是项
- 变量是项
- 如果f是一个n元函数符号,且t<sub>1</sub>, t<sub>2</sub>, ..., t<sub>n</sub>是项,则f(t<sub>1</sub>, t<sub>2</sub>, ..., t<sub>n</sub>)也是项
- 所有项均是应用上述规则产生
- 谓词不能是项



## 内容简介

- 命题逻辑局限性
- 基本概念
- 合适公式
- 公式的解释
- 前束范式



・ ∀: 全称量词

- ∀x: 所有x, 每个x;

• 3: 存在量词

-∃x: 存在一个x;



#### • 例子:

- 每个有理数是实数;
- 存在一个数, 它是素数;
- 对每个数x,存在一个数y,使得x<y;

#### 令:

- Q(x): x是有理数; P(x): x是素数;
- R(x): x是实数; LESS(x, y): x<y;

#### • 例子:

- $(\forall x)(Q(x) \rightarrow R(x))$
- $-(\exists x)P(x)$
- $(\forall x)(\exists y)LESS(x, y)$



## 约束与自由

- 变量的出现是约束的,当且仅当变量出现在使用它的量词范围之内;变量的出现是自由的,当且仅当它的出现不是约束的;
  - $(\exists x)(P(x, y) \rightarrow Q(x, z)) \vee R(x)$
- 变量是约束的,如果至少一次它的出现是约束的;变量是自由的,如果至少一次它的出现是自由的;
  - 一个变量可以既是约束变量又是自由变量;
  - $(\exists x)(P(x, y) \rightarrow Q(x, z)) \vee R(x)$



#### • 变量改名:

- $-(\forall x)G(x) = (\forall y)G(y)$
- $-(\exists x)G(x) = (\exists y)G(y)$
- $-(\forall x)(P(x, y) \vee Q(x)) \neq (\forall z)(P(z, y) \vee Q(x))$
- $-(\forall x)P(x, y) \neq (\forall y)P(y, y)$
- $(\exists x)(P(x, y) \rightarrow Q(x, z)) \lor R(x)$ 
  - $-(\exists x)(P(x, y) \rightarrow Q(x, z)) \vee R(u)$



- 原子 定义(原子):
  - 如果P是n元谓词, $t_1$ ,  $t_2$ , ...,  $t_n$ 是项,则  $P(t_1, t_2, ..., t_n)$  是一个原子。

## 合适公式



- 定义(合适公式)
  - 原子是公式;
  - 如果G,H是公式, 则~G, (G∧H), (G∨H), (G→H), (G↔H)是公式
  - -如果G是公式,且x是G中的自由变量,则(∀x)G和(∃x)G是公式
  - 所有公式均是由上述规则产生



### • 例子:

- 每个人都是要死的. (∀x)(MAN(x)→MORTAL(x))
- 孔子是人. MAN(Confucius)
- -孔子是要死的. MORTAL(Confucius)



#### • 例子: (自然数公理)

- 对每个数,存在一个且仅仅一个直接后继
- 没有一个数,它的直接后继是0
- 对每个大于0的数,存在一个且仅仅一个直接前续
- 令f(x), g(x)表示x的后继与前续; E(x, y): x=y

#### • 逻辑表示

- $-(\forall x)(\exists y)(E(f(x), y) \land (\forall z)(E(z, f(x)) \rightarrow E(y, z)))$
- $-\sim((\exists x)E(f(x),0))$
- $(\forall x)(^{\sim}E(x, 0) \rightarrow ((\exists y)(E(y, g(x)) \land (\forall z)(E(z, g(x)) \rightarrow E(y, z))))$



## 内容简介

- 命题逻辑局限性
- 基本概念
- 合适公式
- 公式的解释
- 前束范式



#### • 定义(公式的解释)

- 公式的解释是由一个非空域D,以及下列对G中常量符号,函数符号,及谓词符号的指派组成,并且它的指派遵守下述规则:
  - · 对每个常量, 指派一个D中的元作为它的值
  - ·对每个n元函数符号,指派一个从Dn到D的映射
  - •对每个n元谓词符号,指派一个从Dn到{T,F}的映射

# 对D域内计算公式的规则

· 如果公式或G, H的真值已被计算,则

 $^{\sim}$ H, (G $^{\wedge}$ H), (G $^{\vee}$ H), (G $^{\rightarrow}$ H), (G $^{\leftrightarrow}$ H)

的真值可按命题的计算定义来求出

$$(\forall x)G = \begin{cases} T & \text{对所有的d} \in D, 满足G = T \\ F & \text{否则} \end{cases}$$



#### • 例1:

$$- G=(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(f(x),a))$$

#### - **一**个解释I:

- 域: D={1, 2}
- 对常数指派: a:1
- 对函数指派: f(1)=2, f(2)=1
- 对谓词指派: P(1)=F, P(2)=T, Q(1,1)=T, Q(1,2)=T, Q(2,1)=F, Q(2,2)=T
- G?



#### • x=1:

$$- P(x) \rightarrow Q(f(x),a)$$

$$=P(1) \rightarrow Q(f(1), 1)$$

$$=P(1) \rightarrow Q(2, 1)$$

$$=F \rightarrow F$$

#### • x=2:

$$- P(x) \rightarrow Q(f(x),a)$$

$$=P(2) \rightarrow Q(f(2), 1)$$

$$=P(2) \rightarrow Q(1, 1)$$

$$=T \rightarrow T$$

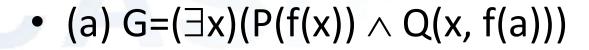
· 公式G在解释I下为真;



### • 例2:

- (a) G=(∃x)(P(f(x)) ∧ Q(x, f(a)))
- (b)  $G=(\exists x)(P(x) \land Q(x, a))$
- (c)  $G=(\forall x)(\exists y)(P(x) \land Q(x, y))$
- -解释同例1.





$$-x=1$$

$$P(f(1)) \wedge Q(1, f(1))$$

$$=P(2) \wedge Q(1, 2)$$

$$=T \wedge T$$

=1

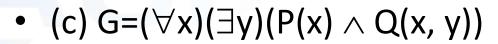
- G在解释I下为真



- G在解释I下为假

=F





$$- x=1, y=1$$

$$P(x) \wedge Q(x, y)$$

$$= P(1) \wedge Q(1, 1)$$

$$= F \wedge T$$

= F

$$- x=1, y=2$$

$$P(x) \wedge Q(x, y)$$

$$= P(1) \wedge Q(1, 2)$$

$$= F \wedge T$$

#### - G在解释I下为假;



### 重要的定义

- 一个公式G是相容的(满足的), 当且仅当存在一个解释I, 使公式G在解释I下为真. 称I是G的一个模型且I满足G
- 一个公式G是不相容的(不满足), 当且仅当不存在解 释满足G
- 一个公式G是永真的, 当且仅当每一个解释都满足G
- 一个公式G是公式F<sub>1</sub>, F<sub>2</sub>,... F<sub>n</sub>的逻辑结论, 当且仅当对任一个解释I, 如果F<sub>1</sub>, F<sub>2</sub>,... F<sub>n</sub>在I下为真,则G在I下也为真

### 例1

- 证明H=(∀x)(P(x)) ∧ (∃y)(~P(y))不相容
- 证明:
  - 如果任一个a∈D使得P(a)=T
    - ■则~P(a)=F. (∃y)(~P(y))为假
  - ■如果存在一个a∈D使得P(a)=F
    - ■则(∀x)(P(x))为假
  - 所以H不相容

## 例2



- 证明Q(a)是F<sub>1</sub>, F<sub>2</sub>的逻辑结论.
  - $F_1 = (\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$
  - $-F_2 = P(a)$
- 证明:
  - 假设F<sub>1</sub>, F<sub>2</sub>为真, Q(a)为假;
  - ■则~P(a)∨Q(a)为假;
  - P(a)→Q(a)为假;
  - (∀x)(P(x) → Q(x))为假;



## 内容简介

- 命题逻辑局限性
- 基本概念
- 合适公式
- 公式的解释
- 前束范式



#### • 定义(前束范式):

- 一个公式H称为前束范式, 当且仅当公式H有如下形式:

$$(Q_1x_1)...(Q_nx_n)(M)$$

其中Q<sub>i</sub>或是∀或是∃,i=1,...,n. M是不含量词的公式.

其中 $(Q_1x_1)...(Q_nx_n)$ 称为前缀, M称为母式;

- (∀x)(∀y)(P(x, y)), (∃x)(∀y)(P(x, y)∧Q(y)) 是
- (∀x)(P(x,y))∧(∀y)(Q(y)) 不是



## 化公式为前束范式

- 等价公式
  - H=G: H和G的值对所有域的所有解释都相同;
- 设H(x)是仅含有自由变量x的公式,G是不含变量x的公式。
  - $(\forall x) H(x) \vee G = (\forall x) (H(x) \vee G)$
  - $(\exists x) H(x) \vee G = (\exists x) (H(x) \vee G)$
  - $(\forall x) H(x) \wedge G = (\forall x) (H(x) \wedge G)$
  - $(\exists x) H(x) \land G = (\exists x) (H(x) \land G)$



$$- \sim ((\forall x) H(x)) = (\exists x) (\sim H(x))$$

$$- \sim ((\exists x) H(x)) = (\forall x) (\sim H(x))$$

- 设H(x), G(x)是仅含有自由变量x的公式,
  - $-(\forall x)G(x) \wedge (\forall x)H(x) = (\forall x)(G(x) \wedge H(x))$
  - $-(\exists x)G(x)\vee(\exists x)H(x)=(\exists x)(G(x)\vee H(x))$
  - $-(\forall x)G(x)\vee(\forall x)H(x)=(\forall x)(\forall y)(G(x)\vee H(y))$
  - $-(\exists x)G(x) \wedge (\exists x)H(x) = (\exists x)(\exists y)(G(x) \wedge H(y))$
  - $-(\forall x)G(x)\vee(\exists x)H(x)=(\forall x)(\exists y)(G(x)\vee H(y))$



### 关于→

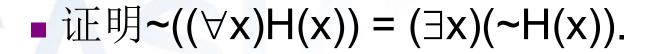
$$-((\exists x)A(x)) \rightarrow B = (\forall x)(A(x) \rightarrow B)$$

$$-((\forall x)A(x)) \rightarrow B = (\exists x)(A(x) \rightarrow B)$$

$$-B \rightarrow ((\exists x)A(x)) = (\exists x)(B \rightarrow A(x))$$

$$-(\forall x)A(x) \rightarrow (\exists x)B(x) = (\exists x)(A(x) \rightarrow B(x))$$





• 证明:

- 设~((∀x)H(x))=T.
  - $(\forall x)H(x)=F$ .
  - 存在e∈D, H(e)=F. ~H(e)=T.
- -设~((∀x)H(x))=F.
  - $(\forall x)H(x)=T$ .
  - 对任<del>一</del>个e∈D, H(e)=T. ~H(e)=F.

### ■ 证明( $\forall$ x)G(x) $\land$ ( $\forall$ x)H(x) = ( $\forall$ x)(G(x) $\land$ H(x)) □ 回科学院 自动化研究所 □ 回答( $\forall$ x) □ 回科学院 □ 回答( $\forall$ x) □ 回》( $\forall$ x) □ $\forall$ x) □

- 证明:
  - 设(∀x)G(x) ∧ (∀x)H(x)=T
    - $(\forall x)G(x)=T$ ,  $(\forall x)H(x)=T$
    - 对任一个e∈D, G(x)=T并且H(x)=T
    - 对任<del>一</del>个e∈D, G(x)=T∧ H(x)=T
  - 设(∀x)G(x) ∧ (∀x)H(x)=F
    - 对任一解释, (∀x)G(x)=F或者(∀x)H(x)=F
    - 设(∀x)G(x)=F
    - 存在e∈D, G(e)=F
    - G(e) ∧ H(e)=F

# 化合适公式为前束范式



■ 
$$F \leftrightarrow G = (F \rightarrow G) \land (G \rightarrow F)$$

• 
$$F \rightarrow G = {}^{\sim}F \vee G$$

- 将~代入每个原子前面
  - ~(~F) = F
  - ~(F∨G) = ~F∧~G
  - ~(F∧G) = ~F∨~G
  - $((\forall x)H(x)) = (\exists x)(^{\sim}H(x))$
  - $((\exists x)H(x)) = (\forall x)(^{\sim}H(x))$





 $- (\forall x)G(x) \vee (\forall x)H(x) = (\forall x)(\forall y)(G(x) \vee H(y))$ 

• 利用等价公式将量词移到公式的最左边



• 例1: 化(∀x)P(x) → (∃x)Q(x)为前束范式

$$(\forall x)P(x) \rightarrow (\exists x)Q(x)$$

$$= \sim (\forall x) P(x) \vee (\exists x) Q(x)$$

$$= (\exists x) \sim P(x) \vee (\exists x)Q(x)$$

$$= (\exists x)(\sim P(x) \vee Q(x))$$



例2: 化下式为前束范式
 (∀x)(∀y)((∃z)(P(x,z) ∧ P(y,z)) → (∃u)Q(x,y,u))

 $= (\forall x)(\forall y)(\sim (\exists z)(P(x,z) \land P(y,z)) \lor (\exists u)Q(x,y,u))$ 

 $= (\forall x)(\forall y)((\forall z)(\sim P(x,z) \vee \sim P(y,z)) \vee (\exists u)Q(x,y,u))$ 

 $= (\forall x)(\forall y)(\forall z)(\exists u)(\sim P(x,z) \vee \sim P(y,z) \vee Q(x,y,u))$ 



# 感谢同学们听课

欢迎讨论与交流