定积分的元素法　定积分在几何学上的应用

高等数学 I-信息、统计外招

Weiwen Wang(王伟文)

暨南大学

2025 年秋季学期

课程网页

定积分元素法

一般地，如果某一实际问题中所求量 U 符合下列条件

(1) U 是与一个变量 x 的变化区间 $[a,b]$ 有关的量;

(2) U 对于区间 $[a,b]$ 具有可加性, 即如果把区间 $[a,b]$ 分成许多部分区间, 则 U 相应地分成许多部分量, 而 U 等于所有部分量之和;

(3) 部分量 ΔU_i 的近似值可表示为 $f(\xi_i)\Delta x_i$, 则可考虑使用定积分来表达这个量 U.

定积分元素法

一般地，如果某一实际问题中所求量 U 符合下列条件

(1) U 是与一个变量 x 的变化区间 $[a,b]$ 有关的量;

(2) U 对于区间 $[a,b]$ 具有可加性, 即如果把区间 $[a,b]$ 分成许多部分区间, 则 U 相应地分成许多部分量, 而 U 等于所有部分量之和;

(3) 部分量 ΔU_i 的近似值可表示为 $f(\xi_i)\Delta x_i$, 则可考虑使用定积分来表达这个量 U.

定积分元素法

一般地，如果某一实际问题中所求量 U 符合下列条件

(1) U 是与一个变量 x 的变化区间 $[a,b]$ 有关的量;

(2) U 对于区间 $[a,b]$ 具有可加性, 即如果把区间 $[a,b]$ 分成许多部分区间, 则 U 相应地分成许多部分量, 而 U 等于所有部分量之和;

(3) 部分量 ΔU_i 的近似值可表示为 $f(\xi_i)\Delta x_i$, 则可考虑使用定积分来表达这个量 U.

定积分元素法

对所求量 U 写出积分表达式的步骤:

(1) **根据问题的具体情况，选取一个变量例如 x 为积分变量，并确定它的变化区间 $[a,b]$;**

(2) 设想把区间 $[a,b]$ 分成 n 个小区间，取其中任一小区间并记作 $[x,x+\mathrm{d}x]$，求出相应于这个小区间的部分量 ΔU 的近似值. 如果 ΔU 能近似地表示为 $[a,b]$ 的一个连续函数在 x 处的值 $f(x)$ 与 $\mathrm{d}x$ 的乘积，就把 $f(x)\mathrm{d}x$ 称为量 U 的元素且记作 $\mathrm{d}U$，即

$$\mathrm{d}U = f(x)\mathrm{d}x;$$

定积分元素法

对所求量 U 写出积分表达式的步骤:

(1) 根据问题的具体情况，选取一个变量例如 x 为积分变量，并确定它的变化区间 $[a,b]$;

(2) 设想把区间 $[a,b]$ 分成 n 个小区间，取其中任一小区间并记作 $[x,x+\mathrm{d}x]$，求出相应于这个小区间的部分量 ΔU 的近似值. 如果 ΔU 能近似地表示为 $[a,b]$ 的一个连续函数在 x 处的值 $f(x)$ 与 $\mathrm{d}x$ 的乘积，就把 $f(x)\mathrm{d}x$ 称为量 U 的元素且记作 $\mathrm{d}U$，即

$$\mathrm{d}U = f(x)\mathrm{d}x;$$

定积分元素法

(3) 以所求量 U 的元素 $f(x)\mathrm{d}x$ 为被积表达式, 在区间 $[a,b]$ 上作定积分, 得

$$U=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

定积分元素法

(3) 以所求量 U 的元素 $f(x)\mathrm{d}x$ 为被积表达式，在区间 $[a,b]$ 上作定积分，得

$$U = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

上述公式即所求量 U 的积分表达式.

平面图形的面积

由曲线 $y=f(x)$ $(f(x)\geq 0)$ 及直线 $x=a$, $x=b$ $(a<b)$ 与 x 轴所围成的曲边梯形的面积 A 是定积分

$$A=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

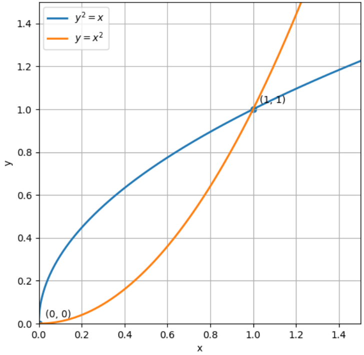
其中被积表达式 $f(x)\mathrm{d}x$ 就是直角坐标下的面积元素，它表示高为 $f(x)$，底为 $\mathrm{d}x$ 的一个矩形面积.

例 1

计算由两条抛物线:$y^2 = x$, $y = x^2$ 所围成的图形的面积.

例 1

计算由两条抛物线:$y^2 = x,\ y = x^2$ 所围成的图形的面积.



解:　先计算两条曲线的交点

$$\begin{cases} y^2 = x, \\ y = x^2. \end{cases}$$

得到两个解

$$x = 0,\ y = 0 \quad \text{及} \quad x = 1,\ y = 1.$$

因此函数图像在直线 $x = 0$ 及 $x = 1$ 之间.

解: 先计算两条曲线的交点

$$\begin{cases} y^2 = x, \\ y = x^2. \end{cases}$$

得到两个解

$$x = 0,\ y = 0 \quad 及 \quad x = 1,\ y = 1.$$

因此函数图像在直线 $x = 0$ 及 $x = 1$ 之间.
取横坐标 x 为积分变量, 其变化范围为 $[0,1]$, 取其中任一小区间 $[x, x + \mathrm{d}x]$, 所求图形在此区间内的面积近似高为 $\sqrt{x} - x^2$, 底为 $\mathrm{d}x$ 的矩形面积, 因此面积元素为

$$\mathrm{d}A = \left(\sqrt{x} - x^2\right) \mathrm{d}x.$$

于是所求面积为定积分

$$A=\int_0^1\left(\sqrt{x}-x^2\right)\mathrm{d}x=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

例 2

计算抛物线 $y^2=2x$ 与直线 $y=x-4$ 所围成的面积.

例 2

计算抛物线 $y^2 = 2x$ 与直线 $y = x - 4$ 所围成的面积.

解:　抛物线与直线的交点满足

$$\begin{cases} y^2 = 2x, \\ y = x - 4. \end{cases}$$

因此交点为 $(8,4)$ 和 $(2,-2)$, 图形在直线 $y = -2$ 和 $y = 4$ 之间.

取 y 为积分变量, 变化区间为 $[-2,4]$, 任取一小区间 $[y, y+\mathrm{d}y]$,

取 y 为积分变量, 变化区间为 $[-2,4]$, 任取一小区间 $[y,y+\mathrm{d}y]$, 图形在此小区间的面积近似于长为 $y+4-\frac{y^2}{2}$, 高为 $\mathrm{d}y$ 的矩形面积,

取 y 为积分变量, 变化区间为 $[-2,4]$, 任取一小区间 $[y,y+\mathrm{d}y]$, 图形在此小区间的面积近似于长为 $y+4-\frac{y^2}{2}$, 高为 $\mathrm{d}y$ 的矩形面积, 因此面积元素为

$$\Delta A=\left(y+4-\frac{y^2}{2}\right)\mathrm{d}y$$

取 y 为积分变量，变化区间为 $[-2,4]$，任取一小区间 $[y, y+\mathrm{d}y]$，图形在此小区间的面积近似于长为 $y+4-\frac{y^2}{2}$，高为 $\mathrm{d}y$ 的矩形面积，因此面积元素为

$$\Delta A = \left(y+4-\frac{y^2}{2}\right)\mathrm{d}y$$

于是所求面积为定积分

$$A = \int_{-2}^{4}\left(y+4-\frac{y^2}{2}\right)\mathrm{d}y = \left[\frac{y^2}{2}+4y-\frac{1}{6}y^3\right]_{-2}^{4} = 18$$

例 3

求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 所围成的图形的面积 $(a>0, b>0)$.

例 3

求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 所围成的图形的面积 $(a>0,b>0)$.

解: 由对称性, 只需求椭圆在第一象限所围成的面积.

例 3

求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 所围成的图形的面积 $(a>0,b>0)$.

解: 由对称性, 只需求椭圆在第一象限所围成的面积.

取 x 为积分变量, x 的变化范围为 $[0,a]$. 任取其一小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$, 此区间的面积近似于高为 y, 底为 $\mathrm{d}x$ 的矩形面积, 故面积元素为

$$\mathrm{d}A=y\mathrm{d}x,$$

例 3

求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 所围成的图形的面积 $(a>0,b>0)$.

解: 由对称性, 只需求椭圆在第一象限所围成的面积.

取 x 为积分变量, x 的变化范围为 $[0,a]$. 任取其一小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$, 此区间的面积近似于高为 y, 底为 $\mathrm{d}x$ 的矩形面积, 故面积元素为

$$\mathrm{d}A=y\mathrm{d}x,$$

于是椭圆的第一象限的面积为

$$A=\int_0^a y\mathrm{d}x.$$

由椭圆参数方程, $x = a\cos t,\ y = b\sin t,\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

由椭圆参数方程, $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

$\mathrm{d}x = \mathrm{d}(a\cos t) = -a\sin t\mathrm{d}t$. 当 $x = 0$ 时, $t = \frac{\pi}{2}$; 当 $x = a$ 时, $t = 0$.

由椭圆参数方程, $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

$\mathrm{d}x = \mathrm{d}(a\cos t) = -a\sin t\mathrm{d}t$. 当 $x = 0$ 时, $t = \frac{\pi}{2}$; 当 $x = a$ 时, $t = 0$.

故

$$A = \int_0^a y\mathrm{d}x = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 ab\sin^2 t\mathrm{d}t$$

$$= ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\mathrm{d}t$$

由椭圆参数方程, $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

$dx = d(a\cos t) = -a\sin t dt$. 当 $x = 0$ 时, $t = \frac{\pi}{2}$; 当 $x = a$ 时, $t = 0$.

故

$$\begin{aligned} A = \int_0^a y dx &= -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 ab\sin^2 t dt \\ &= ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt \\ &= ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2t}{2} dt = ab\frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

由椭圆参数方程, $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

$\mathrm{d}x = \mathrm{d}(a\cos t) = -a\sin t\mathrm{d}t$. 当 $x = 0$ 时, $t = \frac{\pi}{2}$; 当 $x = a$ 时, $t = 0$.

故

$$\begin{aligned} A = \int_0^a y\mathrm{d}x &= -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 ab\sin^2 t\mathrm{d}t \\ &= ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\mathrm{d}t \\ &= ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2t}{2}\mathrm{d}t = ab\frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

所求椭圆所围成的面积为 $4 \cdot \frac{\pi}{4}ab = \pi ab$.

设由曲线 $\rho = \rho(\theta)$ 及射线 $\theta = \alpha, \theta = \beta$ 围成一图形 (称曲边扇形), $\rho(\theta)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续, 且 $\rho(\theta) \geq 0$, $0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$.

设由曲线 $\rho=\rho(\theta)$ 及射线 $\theta=\alpha,\theta=\beta$ 围成一图形 (称曲边扇形), $\rho(\theta)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续, 且 $\rho(\theta)\ge 0$, $0\le\beta-\alpha\le 2\pi$.

取极角 θ 为积分变量, 其变化范围为 $[\alpha,\beta]$,

设由曲线 $\rho = \rho(\theta)$ 及射线 $\theta = \alpha, \theta = \beta$ 围成一图形 (称曲边扇形), $\rho(\theta)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续, 且 $\rho(\theta) \geq 0$, $0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$.

取极角 θ 为积分变量, 其变化范围为 $[\alpha, \beta]$, 在其任一小区间 $[\theta, \theta + \mathrm{d}\theta]$, 此区间对应的面积近似于中心角为 $\mathrm{d}\theta$, 半角为 $\rho(\theta)$ 的扇形面积, 于是面积元素为

$$\mathrm{d}A = \frac{1}{2}[\rho(\theta)]^2 \mathrm{d}\theta$$

设由曲线 $\rho=\rho(\theta)$ 及射线 $\theta=\alpha,\theta=\beta$ 围成一图形 (称曲边扇形), $\rho(\theta)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续, 且 $\rho(\theta)\geq 0$, $0\leq\beta-\alpha\leq 2\pi$.
取极角 θ 为积分变量, 其变化范围为 $[\alpha,\beta]$, 在其任一小区间 $[\theta,\theta+\mathrm{d}\theta]$, 此区间对应的面积近似于中心角为 $\mathrm{d}\theta$, 半角为 $\rho(\theta)$ 的扇形面积, 于是面积元素为

$$\mathrm{d}A=\frac{1}{2}[\rho(\theta)]^2\mathrm{d}\theta$$

所求面积由定积分得到,

$$A=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{2}[\rho(\theta)]^2\mathrm{d}\theta.$$

例 4

计算阿基米德螺线

$$\rho(\theta) = a\theta \quad (a > 0)$$

上相应于 θ 从 0 到 2π 的一段弧与极轴所围成的图形的面积.

例 4

计算阿基米德螺线

$$\rho(\theta)=a\theta \quad (a>0)$$

上相应于 θ 从 0 到 2π 的一段弧与极轴所围成的图形的面积.

解: θ 相应于指定弧的变化范围为 $[0,2\pi]$, 面积元素

$$\mathrm{d}A=\frac{1}{2}(a\theta)^2\mathrm{d}\theta$$

例 4

计算阿基米德螺线

$$\rho(\theta) = a\theta \quad (a > 0)$$

上相应于 θ 从 0 到 2π 的一段弧与极轴所围成的图形的面积.

解: θ 相应于指定弧的变化范围为 $[0, 2\pi]$, 面积元素

$$\mathrm{d}A = \frac{1}{2}(a\theta)^2 \mathrm{d}\theta$$

所求面积由定积分给出:

$$A = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(a\theta)^2 \mathrm{d}\theta = \frac{4a^2\pi^3}{3}.$$

例 5

计算心形线

$$\rho = a(1+\cos\theta) \quad (a>0)$$

所围成的图形的面积.

例 5

计算心形线

$$\rho = a(1+\cos\theta) \quad (a>0)$$

所围成的图形的面积.

解: 心形线关于极轴对称, 只需要求出极轴上方的心形线与极轴所围成的面积.

例 5

计算心形线

$$\rho = a(1+\cos\theta) \quad (a>0)$$

所围成的图形的面积.

解: 心形线关于极轴对称, 只需要求出极轴上方的心形线与极轴所围成的面积. 此时, θ 的变化范围为 $[0,\pi]$, 面积元素为

$$\mathrm{d}A = \frac{1}{2}a^2(1+\cos\theta)^2\mathrm{d}\theta$$

例 5

计算心形线

$$\rho = a(1+\cos\theta) \quad (a>0)$$

所围成的图形的面积.

解: 心形线关于极轴对称, 只需要求出极轴上方的心形线与极轴所围成的面积. 此时, θ 的变化范围为 $[0,\pi]$, 面积元素为

$$\mathrm{d}A = \frac{1}{2}a^2(1+\cos\theta)^2\mathrm{d}\theta$$

心形线在极轴上方的所围成的面积由定积分给出:

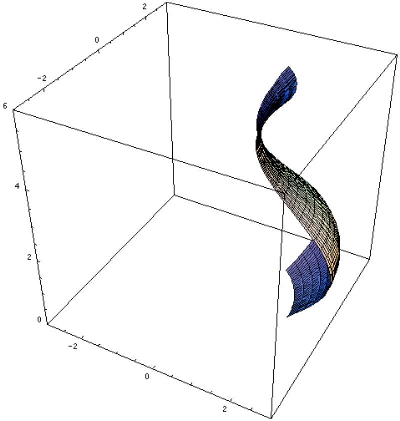
$$A = \int_0^{\pi} \frac{1}{2}a^2(1+\cos\theta)^2\mathrm{d}\theta$$

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^{\pi} \frac{1}{2} a^2 (1+\cos\theta)^2 \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{a^2}{2} \int_0^{\pi} (1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta) \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{a^2}{2} \int_0^{\pi} \left(\frac{3}{2} + 2\cos\theta + \frac{\cos 2\theta}{2} \right) \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{a^2}{2} \left[\frac{3\theta}{2} + 2\sin\theta + \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_0^{\pi} \\
&= \frac{3a^2\pi}{4}.
\end{aligned}
$$

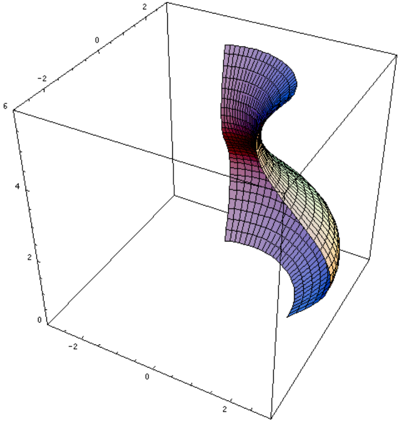
$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^{\pi} \frac{1}{2} a^2 (1+\cos\theta)^2 \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{a^2}{2} \int_0^{\pi} (1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta) \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{a^2}{2} \int_0^{\pi} \left(\frac{3}{2} + 2\cos\theta + \frac{\cos 2\theta}{2} \right) \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{a^2}{2} \left[\frac{3\theta}{2} + 2\sin\theta + \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_0^{\pi} \\
&= \frac{3a^2\pi}{4}.
\end{aligned}
$$

所求面积为 $2A = \frac{3a^2\pi}{2}$.

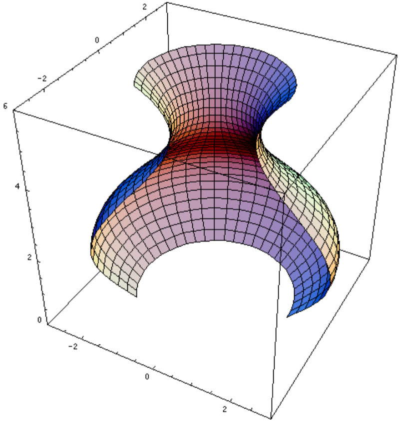
旋转体



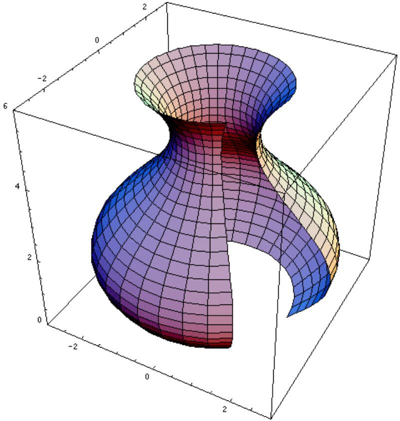
旋转体



旋转体



旋转体



设旋转体由连续曲线 $y = f(x)$, 直线 $x = a$, $x = b$ 及 x 轴所围成的曲边梯形绕 x 旋转一周而成的立体.

设旋转体由连续曲线 $y=f(x)$, 直线 $x=a$, $x=b$ 及 x 轴所围成的曲边梯形绕 x 旋转一周而成的立体.

取横坐标 x 为积分变量, 积分区间为 $[a,b]$. 相应于 $[a,b]$ 上任一小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 的窄曲边梯形绕 x 轴旋转而成的薄片的体积近似于以 $f(x)$ 为底半径, $\mathrm{d}x$ 为高的扁圆柱体的体积, 即体积元素

$$\mathrm{d}V=\pi[f(x)]^2\mathrm{d}x.$$

设旋转体由连续曲线 $y=f(x)$，直线 $x=a$，$x=b$ 及 x 轴所围成的曲边梯形绕 x 旋转一周而成的立体.

取横坐标 x 为积分变量，积分区间为 $[a,b]$. 相应于 $[a,b]$ 上任一小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 的窄曲边梯形绕 x 轴旋转而成的薄片的体积近似于以 $f(x)$ 为底半径，$\mathrm{d}x$ 为高的扁圆柱体的体积，即体积元素

$$\mathrm{d}V=\pi[f(x)]^2\mathrm{d}x.$$

以 $\pi[f(x)]^2\mathrm{d}x$ 为被积表达式，在闭区间 $[a,b]$ 上作定积分，所求旋转体体积为

$$V=\int_a^b \pi[f(x)]^2\mathrm{d}x.$$

例 7

计算由椭圆

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0)$$

所围成的图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积.

例 7

计算由椭圆

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>0,b>0)$$

所围成的图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积.

解: 所求旋转体可看作半个椭圆

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \quad (-a\le x\le a)$$

及 x 轴围成的图形绕 x 轴旋转一周而成的立体.

取 x 为积分变量, 其变化区间为 $[-a,a]$, 任取其一小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$, 旋转体相应于此小区间的薄片的体积近似于底半径为 y, 高为 $\mathrm{d}x$ 的圆柱体体积, 即体积元素为

$$\mathrm{d}V=\pi y^2\mathrm{d}x=\frac{\pi b^2}{a^2}(a^2-x^2)$$

取 x 为积分变量, 其变化区间为 $[-a,a]$, 任取其一小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$, 旋转体相应于此小区间的薄片的体积近似于底半径为 y, 高为 $\mathrm{d}x$ 的圆柱体体积, 即体积元素为

$$\mathrm{d}V=\pi y^2\mathrm{d}x=\frac{\pi b^2}{a^2}(a^2-x^2)$$

于是所求圆柱体的体积为

$$\int_{-a}^{a}\frac{\pi b^2}{a^2}(a^2-x^2)\mathrm{d}x=\frac{\pi b^2}{a^2}\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)\mathrm{d}x$$

取 x 为积分变量, 其变化区间为 $[-a,a]$, 任取其一小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$,
旋转体相应于此小区间的薄片的体积近似于底半径为 y, 高为 $\mathrm{d}x$
的圆柱体体积, 即体积元素为

$$\mathrm{d}V=\pi y^2\mathrm{d}x=\frac{\pi b^2}{a^2}(a^2-x^2)$$

于是所求圆柱体的体积为

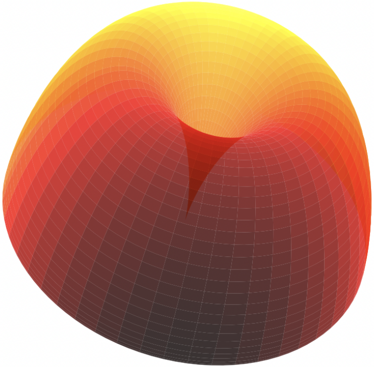
$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a}\frac{\pi b^2}{a^2}(a^2-x^2)\mathrm{d}x&=\frac{\pi b^2}{a^2}\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)\mathrm{d}x\\&=\frac{2\pi b^2}{a^2}\int_{0}^{a}(a^2-x^2)\mathrm{d}x\\&=\frac{2\pi b^2}{a^2}\left[a^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^a=\frac{4\pi}{3}ab^2.\end{aligned}$$

例 8

计算由摆线 $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ 相应于 $0 \le t \le 2\pi$ 的一拱与直线 $y = 0$ 所围成的图形分别绕 x 轴, y 轴旋转而成的旋转体的体积 $(a > 0)$.

例 8

计算由摆线 $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ 相应于 $0 \le t \le 2\pi$ 的一拱与直线 $y = 0$ 所围成的图形分别绕 x 轴, y 轴旋转而成的旋转体的体积 $(a > 0)$.



例 8

计算由摆线 $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ 相应于 $0 \le t \le 2\pi$ 的一拱与直线 $y = 0$ 所围成的图形分别绕 x 轴, y 轴旋转而成的旋转体的体积 $(a > 0)$.

例 8

计算由摆线 $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ 相应于 $0 \le t \le 2\pi$ 的一拱与直线 $y = 0$ 所围成的图形分别绕 x 轴, y 轴旋转而成的旋转体的体积 $(a > 0)$.

解: 由旋转体的体积公式, 绕 x 轴旋转而成的旋转体体积为

$$V_x = \int_0^{2\pi a} \pi y^2 \mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \pi a^2 (1 - \cos t)^2 \mathrm{d}(a(t - \sin t))$$

例 8

计算由摆线 $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ 相应于 $0 \le t \le 2\pi$ 的一拱与直线 $y = 0$ 所围成的图形分别绕 x 轴, y 轴旋转而成的旋转体的体积 $(a > 0)$.

解: 由旋转体的体积公式, 绕 x 轴旋转而成的旋转体体积为

$$\begin{aligned}
V_x = \int_0^{2\pi a} \pi y^2 \mathrm{d}x &= \int_0^{2\pi} \pi a^2 (1 - \cos t)^2 \mathrm{d}(a(t - \sin t)) \\
&= \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \left(1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t\right) \mathrm{d}t \\
&= 5\pi^2 a^3.
\end{aligned}$$

解: 绕 y 轴所得的旋转体的体积看看作两个旋转体的体积, 即

$$V_y = \int_0^{2a} \pi x_1^2(y)\mathrm{d}y - \int_0^{2a} \pi x_2^2(y)\mathrm{d}y$$

解: 绕 y 轴所得的旋转体的体积看看作两个旋转体的体积, 即

$$V_y = \int_0^{2a} \pi x_1^2(y)\mathrm{d}y - \int_0^{2a} \pi x_2^2(y)\mathrm{d}y$$

$$= \int_{2\pi}^{\pi} \pi a^2 (t-\sin t)^2 \mathrm{d}(a(1-\cos t)) - \int_0^{\pi} \pi a^2 (t-\sin t)^2 \mathrm{d}(a(1-\cos t))$$

$$= \pi a^3 \int_{2\pi}^{\pi} (t-\sin t)^2 \sin t \mathrm{d}t - \pi a^3 \int_0^{\pi} (t-\sin t)^2 \sin t \mathrm{d}t$$

解:　 绕 y 轴所得的旋转体的体积看看作两个旋转体的体积, 即

$$
\begin{aligned}
V_y &= \int_0^{2a} \pi x_1^2(y)\mathrm{d}y - \int_0^{2a} \pi x_2^2(y)\mathrm{d}y \\
&= \int_{2\pi}^{\pi} \pi a^2 (t-\sin t)^2 \mathrm{d}(a(1-\cos t)) - \int_0^{\pi} \pi a^2 (t-\sin t)^2 \mathrm{d}(a(1-\cos t)) \\
&= \pi a^3 \int_{2\pi}^{\pi} (t-\sin t)^2 \sin t \mathrm{d}t - \pi a^3 \int_0^{\pi} (t-\sin t)^2 \sin t \mathrm{d}t \\
&= -\pi a^3 \int_0^{2\pi} (t-\sin t)^2 \sin t \mathrm{d}t \\
&= 6\pi^2 a^3.
\end{aligned}
$$

通过计算旋转体体积的定积分元素法，如知道立体沿着某一方向、在每一处的截面积，则可计算出该立体的体积.

通过计算旋转体体积的定积分元素法，如知道立体沿着某一方向、在每一处的截面积，则可计算出该立体的体积.

设 x 轴垂直于立体的截面，并且该立体在过点 $x=a$，$x=b$ 且垂直于 x 轴的两个平面之间. 以 $A(x)$ 表示过 x 点且垂直于 x 轴的截面面积. 假定 $A(x)$ 为已知的 x 的连续函数. 取 x 为积分变量，其变化区间为 $[a,b]$，任取一小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$，立体相应于此区间的体积近似于底面积为 $A(x)$，高为 $\mathrm{d}x$ 的几何体的体积，即体积元素

$$\mathrm{d}V = A(x)\mathrm{d}x.$$

所求立体体积为

$$V = \int_a^b A(x)\mathrm{d}x.$$

例 9

一平面经过半径为 R 的圆柱体的底圆中心, 并与底面交成角 α $(0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$, 计算这平面截圆柱体所得立体的体积.

例 9

一平面经过半径为 R 的圆柱体的底圆中心, 并与底面交成角 α $(0<\alpha<\frac{\pi}{2})$, 计算这平面截圆柱体所得立体的体积.

解: 设平面通过 x 轴. 以底圆中心为原点, 截圆柱体在 x 处的截面为底是 $\sqrt{R^2-x^2}$, 高为 $\tan\alpha\cdot\sqrt{R^2-x^2}$ 的三角形, 对应的截面积为

$$A(x)=\frac{\tan\alpha}{2}(R^2-x^2),$$

其中 x 的变化范围为 $[-R,R]$.

因此，所求立体的体积为

$$
\begin{aligned}
V &= \int_{-R}^{R} \frac{\tan\alpha}{2}(R^2 - x^2)\mathrm{d}x \\
&= \tan\alpha \int_{0}^{R} (R^2 - x^2)\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

因此, 所求立体的体积为

$$
\begin{aligned}
V &= \int_{-R}^{R} \frac{\tan\alpha}{2}(R^2 - x^2)\mathrm{d}x \\
&= \tan\alpha \int_0^R (R^2 - x^2)\mathrm{d}x \\
&= \tan\alpha \left[R^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^R \\
&= \frac{2R^3\tan\alpha}{3}.
\end{aligned}
$$

平面曲线的弧长

设有参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases} \quad (\alpha \le t \le \beta)$$

在任一小区间 $[x, x + \mathrm{d}x]$ 的弧段长度近似于 $\sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}$，于是长度元素为

$$\sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2} = \sqrt{\varphi'^2(t)(\mathrm{d}t)^2 + \psi'^2(t)(\mathrm{d}t)^2}$$

平面曲线的弧长

设有参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases} \quad (\alpha \le t \le \beta)$$

在任一小区间 $[x, x + \mathrm{d}x]$ 的弧段长度近似于 $\sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}$，于是长度元素为

$$\sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2} = \sqrt{\varphi'^2(t)(\mathrm{d}t)^2 + \psi'^2(t)(\mathrm{d}t)^2} = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\mathrm{d}t$$

故曲线弧长为

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\mathrm{d}t$$

当曲线弧由直角坐标方程

$$y = f(x) \quad (a \le x \le b)$$

给出, 其中 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有一阶连续导数, 这时曲弧有参数方程

$$\begin{cases} x = x, \\ y = f(x). \end{cases} \quad (a \le x \le b)$$

当曲线弧由直角坐标方程

$$y = f(x) \quad (a \le x \le b)$$

给出, 其中 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上具有一阶连续导数, 这时曲弧有参数方程

$$\begin{cases} x = x, \\ y = f(x). \end{cases} \quad (a \le x \le b)$$

从而所求弧长为

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\mathrm{d}x.$$

当曲线弧由极坐标方程

$$\rho = \rho(\theta) \quad (\alpha \le \theta \le \beta)$$

给出, 其中 $\rho(\theta)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上具有连续导数,

当曲线弧由极坐标方程

$$\rho = \rho(\theta) \quad (\alpha \le \theta \le \beta)$$

给出, 其中 $\rho(\theta)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上具有连续导数, 则由直角与极坐标的关系可得

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta = \rho(\theta)\cos\theta, \\ y = \rho\sin\theta = \rho(\theta)\sin\theta. \end{cases} \quad (\alpha \le \theta \le \beta)$$

从而曲线弧长为

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$$

例 11

计算曲线 $y = \frac{2}{3}x^{3/2}$ 上相应于 $a \le x \le b$ 的一段弧的长度.

例 11

计算曲线 $y=\frac{2}{3}x^{3/2}$ 上相应于 $a \le x \le b$ 的一段弧的长度.

解: 由弧长计算公式, 所求弧长为

$$
\begin{aligned}
s = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x = \int_a^b \sqrt{1+x}\mathrm{d}x &= \frac{2}{3}\left[(1+x)^{\frac{3}{2}}\right]_a^b \\
&= \frac{2}{3}\left[(1+b)^{3/2}-(1+a)^{3/2}\right]
\end{aligned}
$$

例 12

计算摆线

$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta), \\ y = a(1 - \cos\theta) \end{cases} \quad (a > 0)$$

一拱 $(0 \le x \le 2\pi)$ 的长度.

例 12

计算摆线

$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta), \\ y = a(1 - \cos\theta) \end{cases} \quad (a > 0)$$

一拱 $(0 \le x \le 2\pi)$ 的长度.

解: 由弧长公式

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta \\ &= a\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos\theta}\mathrm{d}\theta \\ &= 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

例 12

计算摆线

$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta), \\ y = a(1 - \cos\theta) \end{cases} \quad (a > 0)$$

一拱 $(0 \le x \le 2\pi)$ 的长度.

解: 由弧长公式

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta \\ &= a\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta \\ &= 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta = 4a\left[-\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = 8a \end{aligned}$$

例 13

求阿基米德螺线 $\rho = a\theta$ $(a > 0)$ 相应于 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ 一段的弧长.

例 13

求阿基米德螺线 $\rho = a\theta \ (a > 0)$ 相应于 $0 \le \theta \le 2\pi$ 一段的弧长.

解: 由弧长计算公式

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + a^2\theta^2} \mathrm{d}\theta \\ &= a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \theta^2} \mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

例 13

求阿基米德螺线 $\rho = a\theta\ (a > 0)$ 相应于 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ 一段的弧长.

解: 由弧长计算公式

$$
\begin{aligned}
s &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + a^2\theta^2}\mathrm{d}\theta \\
&= a\int_0^{2\pi} \sqrt{1+\theta^2}\mathrm{d}\theta \quad (\text{分部积分法 或 换元法})
\end{aligned}
$$

例 13

求阿基米德螺线 $\rho = a\theta \ (a > 0)$ 相应于 $0 \le \theta \le 2\pi$ 一段的弧长.

解: 由弧长计算公式

$$
\begin{aligned}
s &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + a^2\theta^2}\mathrm{d}\theta \\
&= a\int_0^{2\pi} \sqrt{1+\theta^2}\mathrm{d}\theta \quad (\text{分部积分法 \quad 或 \quad 换元法}) \\
&= \frac{a}{2}\left[x\sqrt{1+x^2} + \ln(x+\sqrt{1+x^2})\right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{a}{2}\left[2\pi\sqrt{1+4\pi^2} + \ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})\right]
\end{aligned}
$$

作业

- 教材习题 6-2: 2(2), 5(1), 6, 12, 14, 25, 28, 30.