

# 洛必达法则

高等数学 I-信息、统计外招

Weiwen Wang(王伟文)

暨南大学

2025 年秋季学期



课程网页

如果当  $x \rightarrow a$  (或  $x \rightarrow \infty$ ) 时, 两个函数  $f(x)$  与  $F(x)$  都趋于零或都趋于无穷大, 那么极限  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f(x)}{F(x)}$  可能存在、也可能不存在. 通常把这种极限叫做未定式, 分别简记为  $\frac{0}{0}$  或  $\frac{\infty}{\infty}$ .

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ .
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} (n > 0)$ .

## 定理 1

设

- (1) 当  $x \rightarrow a$ , 函数  $f(x)$  及  $F(x)$  都趋于零;
- (2) 在点  $a$  的某个去心邻域内,  $f'(x)$  及  $F'(x)$  都存在且  $F'(x) \neq 0$ ;
- (3)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{F'(x)}$  存在 (或为无穷大),

则

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{F'(x)}$$

$x \rightarrow a$  时, 未定式  $\frac{\infty}{\infty}$  同样适用洛必达法则.

### 例 1

求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} (b \neq 0)$

### 例 1

求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} (b \neq 0)$

解

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \cos ax}{b \cos bx} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} (a \cos ax)}{\lim_{x \rightarrow 0} (b \cos bx)} = \frac{a}{b}.$$

### 例 3

求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$

### 例 3

求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$

解

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}$$

## 定理 2

设

- (1) 当  $x \rightarrow \infty$ , 函数  $f(x)$  及  $F(x)$  都趋于零;
- (2) 存在正数  $X$ , 当  $|x| > X$  时,  $f'(x)$  及  $F'(x)$  都存在且  $F'(x) \neq 0$ ;
- (3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{F'(x)}$  存在 (或为无穷大),

则

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{F'(x)}$$

- $x \rightarrow \infty$  时, 未定式  $\frac{\infty}{\infty}$  同样适用洛必达法则.



### 例 5

求  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} (n > 0)$

### 例 5

求  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} (n > 0)$

解

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{nx^{n-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{nx^n} = 0.$$

其他未定式转换为  $\frac{0}{0}$  或  $\frac{\infty}{\infty}$

- $0 \cdot \infty$ :  $0 \cdot \frac{1}{0}$  或  $\frac{1}{\infty} \cdot \infty$
- $\infty - \infty$ :  $\frac{1}{0} - \frac{1}{0} = \frac{0-0}{0}$
- $0^0$ :  $\ln 0^0 \rightarrow 0 \cdot \infty$
- $\infty^0$ :  $\ln \infty^0 \rightarrow 0 \cdot \infty$
- $1^\infty$ :  $\ln 1^\infty \rightarrow \infty \cdot 0$

### 例 7

求  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x \ (n > 0)$

### 例 7

求  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x \ (n > 0)$

解 此极限为  $0 \cdot \infty$  型未定式, 转化为  $\frac{\infty}{\infty}$  型

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^n}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-nx^{-n-1}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{-nx^{-n}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^n}{-n} = 0.$$

### 例 9

求  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$ .

### 例 9

求  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$ .

解 这是  $0^0$  型未定式, 用对数变换转换为  $0 \cdot \infty$  型.

### 例 9

求  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$ .

解 这是  $0^0$  型未定式, 用对数变换转换为  $0 \cdot \infty$  型.

因为  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$ , 故

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln x^x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x} = e^0 = 1.$$



## 随堂练习

### 1. 使用洛必达法则求极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\ln x}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$$

2. 验证极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x}$  存在, 但不能用洛必达法则得出.

## 随堂练习

### 1. 使用洛必达法则求极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\ln x} = 2$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = 1$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) = \frac{1}{2}$$

2. 验证极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x}$  存在, 但不能用洛必达法则得出.

解 因为  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ , 故

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{\sin x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 1 + 0 = 1.$$

2. 验证极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x}$  存在, 但不能用洛必达法则得出.

解 因为  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ , 故

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{\sin x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 1 + 0 = 1.$$

若使用洛必达法则

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \cos x)$$

2. 验证极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x}$  存在, 但不能用洛必达法则得出.

解 因为  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ , 故

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{\sin x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 1 + 0 = 1.$$

若使用洛必达法则

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \cos x)$$

因为极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} \cos x$  不存在, 故极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \cos x)$  不存在, 从而不满足洛必达法则使用条件 (3).

# 作业

- 教材习题 3-2:  $1(1)(5)(6)(12)(13)(15)$ ; 3.