

泰勒公式

高等数学 I-信息、统计外招

Weiwen Wang(王伟文)

暨南大学

2025 年秋季学期



课程网页

设 $f(x)$ 在 x_0 处具有 n 阶导数, 能否找到一个关于 $(x-x_0)$ 的 n 次多项式

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n$$

来近似表达 $f(x)$, 使得 $f(x) - p_n(x)$ 是当 $x \rightarrow x_0$ 时比 $(x-x_0)^n$ 的高阶无穷小.

设 $f(x)$ 在 x_0 处具有 n 阶导数, 能否找到一个关于 $(x-x_0)$ 的 n 次多项式

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n$$

来近似表达 $f(x)$, 使得 $f(x) - p_n(x)$ 是当 $x \rightarrow x_0$ 时比 $(x-x_0)^n$ 的高阶无穷小.

A: 能找到! 且多项式的系数 $a_k (k=0, 1, 2, \dots, n)$ 由 $f(x)$ 在 x_0 处的 k -阶导数确定!

定理 (泰勒 (Taylor) 中值定理 1)

如果函数 $f(x)$ 在 x_0 处具有 n 阶导数, 那么存在 x_0 的一个邻域, 对于该邻域内的任一 x , 有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x)$$

其中

$$R_n(x) = o((x-x_0)^n).$$

定理 (泰勒 (Taylor) 中值定理 1)

如果函数 $f(x)$ 在 x_0 处具有 n 阶导数, 那么存在 x_0 的一个邻域, 对于该邻域内的任一 x , 有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x)$$

其中

$$R_n(x) = o((x-x_0)^n).$$

- $$p_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

定理 (泰勒 (Taylor) 中值定理 1)

如果函数 $f(x)$ 在 x_0 处具有 n 阶导数, 那么存在 x_0 的一个邻域, 对于该邻域内的任一 x , 有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x)$$

其中

$$R_n(x) = o((x-x_0)^n).$$

- $p_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$
- $p_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0), k = 0, 1, 2, \dots, n.$

定理 (泰勒 (Taylor) 中值定理 1)

如果函数 $f(x)$ 在 x_0 处具有 n 阶导数, 那么存在 x_0 的一个邻域, 对于该邻域内的任一 x , 有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x)$$

其中

$$R_n(x) = o((x-x_0)^n).$$

- $p_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$
- $p_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0), k = 0, 1, 2, \dots, n.$
- $R_n(x) = o((x-x_0)^n)$ 称为皮亚诺余项.

定理 (泰勒 (Taylor) 中值定理 2)

如果函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域 $U(x_0)$ 内具有 $(n+1)$ 导数, 那么对任一 $x \in U(x_0)$, 有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x)$$

其中

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!(x-x_0)^{n+1}},$$

这里 ξ 是 x_0 与 x 之间的某个值.

- $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!(x-x_0)^{n+1}}$ 称为拉格朗日余项.

在泰勒公式中, 取 $x_0 = 0$

- 带皮亚诺余项的麦克劳林公式

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

- 带拉格朗日余项的麦克劳林公式

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad \exists \theta \in (0, 1).$$

例 1

写出函数 $f(x) = e^x$ 的带有拉格朗日余项的 n 麦克劳林公式.

例 1

写出函数 $f(x) = e^x$ 的带有拉格朗日余项的 n 麦克劳林公式.

解因为 $f^{(k)}(x) = e^x, n = 0, 1, 2, \dots, n+1$. 故

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = f^{(3)}(0) = \dots = f^{(n)}(0) = e^0 = 1.$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} \quad \exists \theta \in (0, 1)$$

例 1

写出函数 $f(x) = e^x$ 的带有拉格朗日余项的 n 麦克劳林公式.

解因为 $f^{(k)}(x) = e^x, n = 0, 1, 2, \dots, n+1$. 故

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = f^{(3)}(0) = \dots = f^{(n)}(0) = e^0 = 1.$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} \quad \exists \theta \in (0, 1)$$

根据 Taylor 中值定理 2, 所求麦克劳林公式为

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} \quad \exists \theta \in (0, 1)$$

拉格朗日余项满足

$$|R_n(x)| = \left| \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} \right| < \frac{e^{|x|}}{(n+1)!} |x|^{n+1}.$$

作业

- 教材习题 3-3: 4.