洛必达法则

高等数学 I-信息、统计外招

Weiwen Wang(王伟文)

暨南大学

2025 年秋季学期

课程网页

如果当 $x \to a$(或 $x \to \infty$) 时，两个函数 $f(x)$ 与 $F(x)$ 都趋于零或都趋于无穷大，那么极限 $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ (x \to \infty)}} \frac{f(x)}{F(x)}$ 可能存在、也可能不存在. 通常把这种极限叫做未定式，分别简记为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$.

- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} (n > 0)$.

定理 1

设

(1) 当 $x \to a$, 函数 $f(x)$ 及 $F(x)$ 都趋于零;

(2) 在点 a 的某个去心邻域内, $f'(x)$ 及 $F'(x)$ 都存在且 $F'(x) \neq 0$;

(3) $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在 (或为无穷大),

则

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{F'(x)}$$

$x \to a$ 时, 未定式 $\frac{\infty}{\infty}$ 同样适用洛必达法则.

例 1

求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}(b\neq 0)$

例 1

求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}(b\neq 0)$

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\lim_{x\to 0}\frac{a\cos ax}{b\cos bx}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}(a\cos ax)}{\lim\limits_{x\to 0}(b\cos bx)}=\frac{a}{b}.$$

例 3

求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$

例 3

求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}$$

定理 2

设

(1) 当 $x\to\infty$, 函数 $f(x)$ 及 $F(x)$ 都趋于零;

(2) 存在正数 X, 当 $|x|>X$ 时, $f'(x)$ 及 $F'(x)$ 都存在且 $F'(x)\neq 0$;

(3) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在 (或为无穷大),

则

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{F'(x)}$$

- $x\to\infty$ **时, 未定式 $\frac{\infty}{\infty}$ 同样适用洛必达法则.**

例 5

求 $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} (n > 0)$

例 5

求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n}(n>0)$

解

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{nx^{n-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{nx^n}=0.$$

其他未定式转换为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$

- $0\cdot\infty$: $0\cdot\frac{1}{0}$ 或 $\frac{1}{\infty}\cdot\infty$
- $\infty-\infty$: $\frac{1}{0}-\frac{1}{0}=\frac{0-0}{0}$
- 0^0: $\ln 0^0 \to 0\cdot\infty$
- ∞^0: $\ln \infty^0 \to 0\cdot\infty$
- 1^∞: $\ln 1^\infty \to \infty\cdot 0$

例 7

求 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n \ln x \ (n>0)$

例 7

求 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n \ln x \ (n>0)$

解　此极限为 $0\cdot\infty$ 型未定式, 转化为 $\frac{\infty}{\infty}$ 型

$$\lim_{x\to 0^+} x^n \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^n}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-nx^{-n-1}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{-nx^{-n}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^n}{-n} = 0.$$

例 9

求 $\lim_{x\to 0^+} x^x$.

例 9

求 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$.

解　这是 0^0 型未定式, 用对数变换转换为 $0\cdot\infty$ 型.

例 9

求 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$.

解　这是 0^0 型未定式, 用对数变换转换为 $0\cdot\infty$ 型.

因为 $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$, 故

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln x^x} = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x} = e^0 = 1.$$

随堂练习

1. 使用洛必达法则求极限

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\ln x}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$

2. 验证极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}$ 存在，但不能用洛必达法则得出.

随堂练习

1. 使用洛必达法则求极限

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\ln x} \quad = 2$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x} \quad = 1$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right) \quad = \frac{1}{2}$

2. 验证极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}$ 存在，但不能用洛必达法则得出.

解　因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$，故

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}1+\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=1+0=1.$$

2. 验证极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}$ 存在，但不能用洛必达法则得出.

解　因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$，故

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}1+\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=1+0=1.$$

若使用洛必达法则

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim_{x\to\infty}(1+\cos x)$$

2. 验证极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}$ 存在，但不能用洛必达法则得出.

解　因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$，故

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}1+\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=1+0=1.$$

若使用洛必达法则

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim_{x\to\infty}(1+\cos x)$$

因为极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$ 不存在，故极限 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\cos x)$ 不存在，从而不满足洛必达法则使用条件 (3).

作业

- 教材习题 3-2: 1(1)(5)(6)(12)(13)(15); 3.