

有理函数的积分

高等数学 I-信息、统计外招

Weiwen Wang(王伟文)

暨南大学

2025 年秋季学期



课程网页

定义 1

有理分式 两个多项式的商 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 称为有理函数, 由称有理分式. 这里假定分子多项式 $P(x)$ 与分母多项式 $Q(x)$ 没有公因式. 当分子多项式 $P(x)$ 的次数小于分母多项式的次数时, 称这有理函数为真分式, 否则称为假分式.

定义 1

有理分式 两个多项式的商 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 称为有理函数, 由称有理分式. 这里假定分子多项式 $P(x)$ 与分母多项式 $Q(x)$ 没有公因式. 当分子多项式 $P(x)$ 的次数小于分母多项式的次数时, 称这有理函数为真分式, 否则称为假分式.

- 真分式: $\frac{x+1}{x^2+2}$.
- 假分式: $\frac{x^3+1}{2x^2+1}$
- 假分式总可以分解为一个多项式与一个真分式之和的形式.

$$\frac{2x^4 + x^2 + 3}{x^2 + 1} = 2x^2 - 1 + \frac{4}{x^2 + 1} \quad \frac{x^3 + 1}{2x^2 + 1} = \frac{1}{2}x - \frac{x-2}{4x^2 + 2}$$

部分分式之和

对于真分式 $\frac{P(x)}{Q(x)}$, 如果分母可分解为两个多项式的乘积,

$$Q(x) = Q_1(x)Q_2(x)$$

且 $Q_1(x)$ 与 $Q_2(x)$ 没有公因式, 则此真分式可以拆分为两个真分式之和

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}.$$

如果 $Q_1(x)$ 或 $Q_2(x)$ 还能分解成两个没有公因式的多项式的乘积, 上述拆分过程可以进一步对 $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ 或 $\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$ 使用.

例

将真分式 $\frac{x+1}{x^2-5x+6}$ 拆分为两个真分式之和.

例

将真分式 $\frac{x+1}{x^2-5x+6}$ 拆分为两个真分式之和.

解 因为分母可以表示为 $(x-2)(x-3)$, 故

$$\frac{x+1}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$$

其中 A, B 为待定系数.

例

将真分式 $\frac{x+1}{x^2-5x+6}$ 拆分为两个真分式之和.

解 因为分母可以表示为 $(x-2)(x-3)$, 故

$$\frac{x+1}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$$

其中 A, B 为待定系数.

上式右端通分后可改写为

$$\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3) + B(x-2)}{x^2-5x+6} = \frac{x(A+B) - (3A+2B)}{x^2-5x+6}$$

例

将真分式 $\frac{x+1}{x^2-5x+6}$ 拆分为两个真分式之和.

解 因为分母可以表示为 $(x-2)(x-3)$, 故

$$\frac{x+1}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$$

其中 A, B 为待定系数.

上式右端通分后可改写为

$$\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3) + B(x-2)}{x^2-5x+6} = \frac{x(A+B) - (3A+2B)}{x^2-5x+6}$$

故

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -3A-2B=1 \end{cases} \Rightarrow A=-3, B=4.$$

例 1

求 $\int \frac{x+1}{x^2-5x+6} dx$

例 1

求 $\int \frac{x+1}{x^2-5x+6} dx$

解

$$\int \frac{x+1}{x^2-5x+6} dx = \int \left(\frac{4}{x-3} - \frac{3}{x-2} \right) dx$$

例 1

求 $\int \frac{x+1}{x^2-5x+6} dx$

解

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{x^2-5x+6} dx &= \int \left(\frac{4}{x-3} - \frac{3}{x-2} \right) dx \\ &= 4 \int \frac{1}{x-3} d(x-3) - 3 \int \frac{1}{x-2} d(x-2) \\ &= 4 \ln |x-3| - 3 \ln |x-2| + C.\end{aligned}$$

例 2

求 $\int \frac{x+2}{(2x+1)(x^2+x+1)} dx$

例 2

求 $\int \frac{x+2}{(2x+1)(x^2+x+1)} dx$

解 首先将被积有理函数拆分为真分式之和. 设

$$\frac{x+2}{(2x+1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{2x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

例 2

求 $\int \frac{x+2}{(2x+1)(x^2+x+1)} dx$

解 首先将被积有理函数拆分为真分式之和. 设

$$\frac{x+2}{(2x+1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{2x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

右端通分得到

$$\frac{A(x^2+x+1) + (Bx+C)(2x+1)}{(2x+1)(x^2+x+1)} = \frac{x^2(A+2B) + (A+B+2C)x + (A+C)}{(2x+1)(x^2+x+1)}$$

故

$$\begin{cases} A + 2B = 0 \\ A + B + 2C = 1 \implies A = 2, B = -1, C = 0. \\ A + C = 2 \end{cases}$$

故

$$\begin{cases} A + 2B = 0 \\ A + B + 2C = 1 \implies A = 2, B = -1, C = 0. \\ A + C = 2 \end{cases}$$

因此

$$\begin{aligned} \int \frac{x+2}{(2x+1)(x^2+x+1)} dx &= \int \left(\frac{2}{2x+1} - \frac{x}{x^2+x+1} \right) dx \\ &= \int \left(\frac{2}{2x+1} - \frac{x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{x^2+x+1} \right) dx \end{aligned}$$

故

$$\begin{cases} A + 2B = 0 \\ A + B + 2C = 1 \implies A = 2, B = -1, C = 0. \\ A + C = 2 \end{cases}$$

因此

$$\begin{aligned} \int \frac{x+2}{(2x+1)(x^2+x+1)} dx &= \int \left(\frac{2}{2x+1} - \frac{x}{x^2+x+1} \right) dx \\ &= \int \left(\frac{2}{2x+1} - \frac{x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{x^2+x+1} \right) dx \\ &= \int \frac{1}{2x+1} d(2x+1) - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+x+1} d(x^2+x+1) + \frac{1}{2} \int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} dx \\ &= \ln|2x+1| - \frac{1}{2} \ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C \end{aligned}$$

例 3

求 $\int \frac{x-3}{(x-1)(x^2-1)} dx$

例 3

求 $\int \frac{x-3}{(x-1)(x^2-1)} dx$

解 分母可以分解为两个没有公因式的多项式的乘积
 $(x-1)^2(x+1)$. 设

$$\frac{x-3}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{Ax+B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1}$$

其中 A, B, C 为待定系数.

例 3

求 $\int \frac{x-3}{(x-1)(x^2-1)} dx$

解 分母可以分解为两个没有公因式的多项式的乘积
 $(x-1)^2(x+1)$. 设

$$\frac{x-3}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{Ax+B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1}$$

其中 A, B, C 为待定系数.

右端通分得到

$$\frac{Ax+B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1} = \frac{(A+C)x^2 + (A+B-2C)x + B+C}{(x-1)^2(x+1)}$$

故

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ A + B - 2C = 1 \\ B + C = -3 \end{cases} \implies A = 1, B = -2, C = -1.$$

故

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ A + B - 2C = 1 \\ B + C = -3 \end{cases} \implies A = 1, B = -2, C = -1.$$

$$\int \frac{x-3}{(x-1)(x^2-1)} dx = \int \left(\frac{x-2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x+1} \right) dx$$

故

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ A + B - 2C = 1 \\ B + C = -3 \end{cases} \implies A = 1, B = -2, C = -1.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x-3}{(x-1)(x^2-1)} dx &= \int \left(\frac{x-2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x+1} \right) dx \\ &= \int \frac{x-2}{(x-1)^2} dx - \int \frac{1}{x+1} dx \\ &= \int \frac{x-1-1}{(x-1)^2} dx - \int \frac{1}{x+1} dx \end{aligned}$$

故

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ A + B - 2C = 1 \\ B + C = -3 \end{cases} \implies A = 1, B = -2, C = -1.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x-3}{(x-1)(x^2-1)} dx &= \int \left(\frac{x-2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x+1} \right) dx \\ &= \int \frac{x-2}{(x-1)^2} dx - \int \frac{1}{x+1} dx \\ &= \int \frac{x-1-1}{(x-1)^2} dx - \int \frac{1}{x+1} dx \\ &= \int \frac{1}{x-1} dx - \frac{1}{(x-1)^2} d(x-1) - \int \frac{1}{x+1} dx \\ &= \ln|x-1| + \frac{1}{x-1} - \ln|x+1| + C \end{aligned}$$

例 5

求 $\int \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx$

例 5

求 $\int \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx$

解 令 $\sqrt{x-1}=u$, 则 $x=u^2+1$, $dx=2u du$. 代入所求积分

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx &= \int \frac{u}{u^2+1} 2u du = \int \frac{2u^2}{u^2+1} du \\ &= \int \frac{2u^2+2-2}{u^2+1} du\end{aligned}$$

例 5

求 $\int \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx$

解 令 $\sqrt{x-1}=u$, 则 $x=u^2+1$, $dx=2u du$. 代入所求积分

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx &= \int \frac{u}{u^2+1} 2u du = \int \frac{2u^2}{u^2+1} du \\&= \int \frac{2u^2+2-2}{u^2+1} du \\&= \int 2 du - 2 \int \frac{1}{u^2+1} du \\&= 2u - 2 \arctan u + C\end{aligned}$$

例 5

求 $\int \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx$

解 令 $\sqrt{x-1}=u$, 则 $x=u^2+1$, $dx=2u du$. 代入所求积分

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx &= \int \frac{u}{u^2+1} 2u du = \int \frac{2u^2}{u^2+1} du \\&= \int \frac{2u^2+2-2}{u^2+1} du \\&= \int 2 du - 2 \int \frac{1}{u^2+1} du \\&= 2u - 2 \arctan u + C \\&= 2\sqrt{x-1} - 2 \arctan \sqrt{x-1} + C.\end{aligned}$$

例 7

求 $\int \frac{1}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}} dx$

例 7

求 $\int \frac{1}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}} dx$

解 要同时去掉 $\sqrt[3]{x}$ 和 \sqrt{x} 需要找到 3 和 2 的最小公倍数, 故令 $x = u^6$, $dx = u^6 = 6u^5 du$.

代入所求不定积分

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}} dx &= \int \frac{6u^5}{u^3 + u^5} du (u \neq 0) \\&= 6 \int \frac{u^2}{1+u^2} du \\&= 6 \int \frac{u^2 + 1 - 1}{1+u^2} du = 6 \int du - 6 \int \frac{1}{u^2 + 1} du \\&= 6u - 6 \arctan u + C = 6\sqrt[6]{x} - 6 \arctan \sqrt[6]{x} + C.\end{aligned}$$

随堂练习

1. 求 $\int \frac{1}{1+\sqrt[3]{x+1}} dx$

2. 求 $\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{1+x}{x}} dx$

随堂练习

1. 求 $\int \frac{1}{1+\sqrt[3]{x+1}} dx = \frac{3}{2} \sqrt[3]{(x+1)^2} - 3\sqrt[3]{x+1} + 3\ln|1+\sqrt[3]{x+1}| + C$

2. 求 $\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{1+x}{x}} dx = -2\sqrt{\frac{1+x}{x}} + 2\ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{x}} + 1\right) + \ln|x| + C$

作业

- 教材习题 4-4: 2, 6, 11, 19, 20, 21, 22.