

无穷小与无穷大、无穷小的比较

高等数学 I-信息、统计外招

Weiwen Wang(王伟文)

暨南大学

2025 年秋季学期



课程网页

无穷小与无穷大

定义 (无穷小)

如果函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的极限为零, 那么称函数 $f(x)$ 为当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 的**无穷小**

无穷小与无穷大

定义 (无穷小)

如果函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的极限为零, 那么称函数 $f(x)$ 为当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 的无穷小

- $\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = 0$, 所以函数 $x - 1$ 为 $x \rightarrow 1$ 时的无穷小
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}$, 所以函数 $\frac{1}{x}$ 为 $x \rightarrow \infty$ 时的无穷小

无穷小与无穷大

定义 (无穷小)

如果函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的极限为零, 那么称函数 $f(x)$ 为当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 的**无穷小**

- $\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = 0$, 所以函数 $x - 1$ 为 $x \rightarrow 1$ 时的无穷小
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}$, 所以函数 $\frac{1}{x}$ 为 $x \rightarrow \infty$ 时的无穷小
- 无穷小量并不是一个很小的数, 它是指当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$), 这个函数 $f(x)$ 的绝对值能小于任意给定的正数 ϵ .
- 零是无穷小中唯一的常数.

定理 2 (无穷小与函数极限的关系)

在自变量的同一变化过程 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 中, 函数 $f(x)$ 具有极限 A 的充分必要条件是 $f(x) = A + \alpha$, 其中 α 为无穷小.

定理 2 (无穷小与函数极限的关系)

在自变量的同一变化过程 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 中, 函数 $f(x)$ 具有极限 A 的充分必要条件是 $f(x) = A + \alpha$, 其中 α 为无穷小.

- 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 记 $\alpha = f(x) - A$, 用 $\epsilon - \delta$ 语言证明 $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha = 0$;

定理 2 (无穷小与函数极限的关系)

在自变量的同一变化过程 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 中, 函数 $f(x)$ 具有极限 A 的充分必要条件是 $f(x) = A + \alpha$, 其中 α 为无穷小.

- 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 记 $\alpha = f(x) - A$, 用 $\epsilon - \delta$ 语言证明 $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha = 0$;
- 设 $f(x) = A + \alpha$ 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha = 0$, 用 $\epsilon - \delta$ 语言证明 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

定义 (无穷大)

设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有定义 (或 $|x|$ 大于某一正数时有定义). 如果对于任意给定的正数 M , 总存在正数 δ (或正数 X), 只有 x 适合不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$ (或 $|x| > X$), 对应的函数值 $f(x)$ 总满足不等式

$$|f(x)| > M,$$

那么称函数 $f(x)$ 是当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的**无穷大**.



- 简而言之, 当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时, 函数 $f(x)$ 的绝对值 $|f(x)|$ 可以大于任意给定的正数;

- 简而言之, 当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时, 函数 $f(x)$ 的绝对值 $|f(x)|$ 可以大于任意给定的正数;



GPT-5 生成

- 按照函数极限的定义, 当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的无穷大的函数 $f(x)$ 的极限是不存在的, 但为了叙述的方便性, 我们也说“函数的极限是无穷大”, 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \quad (\text{或 } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty).$$

- 按照函数极限的定义, 当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的无穷大的函数 $f(x)$ 的极限是不存在的, 但为了叙述的方便性, 我们也说“函数的极限是无穷大”, 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \quad (\text{或 } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty).$$

- “ $|f(x)| > M$ ”换成“ $f(x) > M$ ”(或“ $f(x) < -M$ ”), 就记作

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x) = +\infty \quad (\text{或 } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x) = -\infty)$$

例 2

证明 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = \infty$.

证明.

只需证明 $\forall M > 0$, $\exists \delta > 0$, 使得当 $0 < |x - 1| < \delta$ 时, $\left| \frac{1}{x-1} \right| > M$.

证明.

只需证明 $\forall M > 0$, $\exists \delta > 0$, 使得当 $0 < |x - 1| < \delta$ 时, $\left| \frac{1}{x-1} \right| > M$.

因为

$$\left| \frac{1}{x-1} \right| > M \iff |x-1| < \frac{1}{M} \quad (x \neq 1)$$

证明.

只需证明 $\forall M > 0$, $\exists \delta > 0$, 使得当 $0 < |x - 1| < \delta$ 时, $\left| \frac{1}{x-1} \right| > M$.

因为

$$\left| \frac{1}{x-1} \right| > M \iff |x-1| < \frac{1}{M} \quad (x \neq 1)$$

故取 $\delta = \frac{1}{M}$, 则 $\forall M > 0$, 取 $\delta = \frac{1}{M}$, 当 $0 < |x - 1| < \delta$ 时,

$$\left| \frac{1}{x-1} \right| > M.$$

□

例 2

证明 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = \infty$.

- 直线 $x = 1$ 是函数 $y = \frac{1}{x-1}$ 的图形的铅直渐近线;

例 2

证明 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = \infty$.

- 直线 $x = 1$ 是函数 $y = \frac{1}{x-1}$ 的图形的铅直渐近线;
- 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, 则称直线 $x = x_0$ 是函数 $y = f(x)$ 的图形的铅直渐近线.

例 2

证明 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = \infty$.

- 直线 $x = 1$ 是函数 $y = \frac{1}{x-1}$ 的图形的铅直渐近线;
- 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, 则称直线 $x = x_0$ 是函数 $y = f(x)$ 的图形的铅直渐近线.
- Q: Recall 水平渐近线.

定理

在自变量的同一变化过程中, 如果 $f(x)$ 为无穷大, 那么 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷小; 反之, 如果 $f(x)$ 为无穷小, 且 $f(x) \neq 0$, 那么 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

定理

在自变量的同一变化过程中, 如果 $f(x)$ 为无穷大, 那么 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷小; 反之, 如果 $f(x)$ 为无穷小, 且 $f(x) \neq 0$, 那么 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

- $\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = 0 \iff \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = \infty$

随堂练习

请判断函数 $f(x)$ 在指定自变量变化过程中是无穷大还是无穷小，
抑或两者都不是。

(1) $f(x) = x \quad (x \rightarrow 0)$

(2) $f(x) = \frac{1}{x} \quad (x \rightarrow 0)$

(3) $f(x) = e^x \quad (x \rightarrow 0)$

(4) $f(x) = e^x - 1 \quad (x \rightarrow 0)$

(5) $f(x) = \ln x \quad (x \rightarrow 0^+)$

(6) $f(x) = e^x \quad (x \rightarrow +\infty)$

(7) $f(x) = \frac{1}{x} \quad (x \rightarrow \infty)$

(8) $f(x) = \sqrt{x} + 0.001 \quad (x \rightarrow 0^+)$

随堂练习

(1) $f(x) = x \quad (x \rightarrow 0)$

无穷小

(2) $f(x) = \frac{1}{x} \quad (x \rightarrow 0)$

无穷大

(3) $f(x) = e^x \quad (x \rightarrow 0)$

两者都不是

(4) $f(x) = e^x - 1 \quad (x \rightarrow 0)$

无穷小

(5) $f(x) = \ln x \quad (x \rightarrow 0^+)$

无穷大

(6) $f(x) = e^x \quad (x \rightarrow +\infty)$

无穷大

(6) $f(x) = \frac{1}{x} \quad (x \rightarrow \infty)$

无穷小

(8) $f(x) = \sqrt{x} + 0.001 \quad (x \rightarrow 0^+)$

两者都不是

无穷小的阶的比较

当 $x \rightarrow 0$ 时, $x^2, 3x, x$ 都是无穷小,

无穷小的阶的比较

当 $x \rightarrow 0$ 时, $x^2, 3x, x$ 都是无穷小,

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{3} = 0$

无穷小的阶的比较

当 $x \rightarrow 0$ 时, $x^2, 3x, x$ 都是无穷小,

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{3} = 0$

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$

无穷小的阶的比较

当 $x \rightarrow 0$ 时, $x^2, 3x, x$ 都是无穷小,

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{3} = 0$

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}$

无穷小的阶的比较

当 $x \rightarrow 0$ 时, $x^2, 3x, x$ 都是无穷小,

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{3} = 0$ x^2 趋于零的速度比 $3x$ “快”.
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$

无穷小的阶的比较

当 $x \rightarrow 0$ 时, $x^2, 3x, x$ 都是无穷小,

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{3} = 0$ x^2 趋于零的速度比 $3x$ “快”.
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$ x 趋于零的速度比 x^2 “慢”.
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}$

无穷小的阶的比较

当 $x \rightarrow 0$ 时, $x^2, 3x, x$ 都是无穷小,

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{3} = 0$ x^2 趋于零的速度比 $3x$ “快”.
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$ x 趋于零的速度比 x^2 “慢”.
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}$ x 趋于零的速度和 $3x$ “差不多”.

无穷小的阶的比较

当 $x \rightarrow 0$ 时, $x^2, 3x, x$ 都是无穷小,

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{3} = 0$ x^2 趋于零的速度比 $3x$ “快”.
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$ x 趋于零的速度比 x^2 “慢”.
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}$ x 趋于零的速度和 $3x$ “差不多”.

在自变量同一变化过程中, 无穷小趋于 0 的“快慢” 差异导致不同的结果.

假设 α 和 β 为在同一个自变量变化过程中的无穷小. 为方便起见
“ \lim ”省略自变量的变化过程.

假设 α 和 β 为在同一个自变量变化过程中的无穷小. 为方便起见
“ \lim ”省略自变量的变化过程.

定义 (无穷小的比较)

- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$, 则称 β 是比 α 高阶的无穷小, 记作 $\beta = o(\alpha)$;

假设 α 和 β 为在同一个自变量变化过程中的无穷小. 为方便起见
“ \lim ”省略自变量的变化过程.

定义 (无穷小的比较)

- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$, 则称 β 是比 α 高阶的无穷小, 记作 $\beta = o(\alpha)$;
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$, 则称 β 是比 α 低阶的无穷小;

假设 α 和 β 为在同一个自变量变化过程中的无穷小. 为方便起见
“ \lim ”省略自变量的变化过程.

定义 (无穷小的比较)

- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$, 则称 β 是比 α 高阶的无穷小, 记作 $\beta = o(\alpha)$;
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$, 则称 β 是比 α 低阶的无穷小;
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c (c \neq 0)$, 则称 β 与 α 是同阶无穷小;

假设 α 和 β 为在同一个自变量变化过程中的无穷小. 为方便起见
“ \lim ”省略自变量的变化过程.

定义 (无穷小的比较)

- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$, 则称 β 是比 α 高阶的无穷小, 记作 $\beta = o(\alpha)$;
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$, 则称 β 是比 α 低阶的无穷小;
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c(c \neq 0)$, 则称 β 与 α 是同阶无穷小;
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = c(c \neq 0), k > 0$, 则称 β 是关于 α 的 k 阶无穷小;

假设 α 和 β 为在同一个自变量变化过程中的无穷小. 为方便起见
“ \lim ”省略自变量的变化过程.

定义 (无穷小的比较)

- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$, 则称 β 是比 α 高阶的无穷小, 记作 $\beta = o(\alpha)$;
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$, 则称 β 是比 α 低阶的无穷小;
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c(c \neq 0)$, 则称 β 与 α 是同阶无穷小;
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = c(c \neq 0), k > 0$, 则称 β 是关于 α 的 k 阶无穷小;
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$, 则称 β 与 α 是等价无穷小, 记 $\alpha \sim \beta$.

同阶能比值，
高阶快归零，
低阶撑场面，
一比就分明。
—GPT-5 生成

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{3} = 0$ x^2 是比 $3x$ 高阶的无穷小, $x^2 = o(3x)$;
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$ x 是比 x^2 低阶的无穷小;
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}$ x 是 $3x$ 的同阶无穷小;
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{(3x)^2} = \frac{1}{9}$ x^2 是关于 $3x$ 的 2 阶无穷小;
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ $\sin x$ 与 x 是等价无穷小.

随堂练习

下列无穷小在给定的自变量变化过程中与 x 相比是什么阶的无穷小

- (1) $x \cdot \cos x$ ($x \rightarrow 0$)
- (2) $1000x$ ($x \rightarrow 0$)
- (3) $\frac{1}{1000}x$ ($x \rightarrow 0$)
- (4) $2x^2$ ($x \rightarrow 0$)
- (5) $\sqrt{x} \sim (x \rightarrow 0^+)$

随堂练习

(1) $x \cdot \cos x$ ($x \rightarrow 0$) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ (等价无穷小)

(2) $1000x$ ($x \rightarrow 0$) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1000x}{x} = 1000$ (同阶无穷小)

(3) $\frac{1}{1000}x$ ($x \rightarrow 0$) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1000x} = \frac{1}{1000}$ (同阶无穷小)

(4) $2x^2$ ($x \rightarrow 0$) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0$ (高阶无穷小)

(5) $\sqrt{x} \sim (x \rightarrow 0^+)$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ (低阶无穷小)

常见等价无穷小

当 $x \rightarrow 0$

- $\sin x \sim x$
- $\tan x \sim x$
- $\arcsin x \sim x$
- $\ln(1+x) \sim x$

- $e^x - 1 \sim x$
- $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$
- $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x (\alpha \neq 0)$

定理

β 与 α 是等价无穷小的充分必要条件为

$$\beta = \alpha + \underbrace{o(\alpha)}_{\text{比 } \alpha \text{ 高阶的无穷小}}$$

定理

β 与 α 是等价无穷小的充分必要条件为

$$\beta = \alpha + \underbrace{o(\alpha)}_{\text{比 } \alpha \text{ 高阶的无穷小}}$$

- $1 - \cos x = \frac{1}{2}x^2 + o(\frac{1}{2}x^2) = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2);$
- $\ln(1 + x) = x + o(x);$
- $\sin x = x + o(x).$

定理 (等价无穷小替换)

设 $\alpha \sim \tilde{\alpha}$, $\beta \sim \tilde{\beta}$, 且 $\lim \frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}}$ 存在, 则

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}}.$$

- 涉及的自变量变化过程一致.

定理 (等价无穷小替换)

设 $\alpha \sim \tilde{\alpha}$, $\beta \sim \tilde{\beta}$, 且 $\lim \frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}}$ 存在, 则

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}}.$$

- 涉及的自变量变化过程一致.

-

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\beta}{\tilde{\alpha}} = \lim \frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}}.$$

例 3

求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sin 5x}$

例 3

求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sin 5x}$

证明.

因为当 $x \rightarrow 0$ 时, $\tan 2x \sim 2x$, $\sin 5x \sim 5x$,

例 3

求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sin 5x}$

证明.

因为当 $x \rightarrow 0$ 时, $\tan 2x \sim 2x$, $\sin 5x \sim 5x$, 故

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sin 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{5x} = \frac{2}{5}.$$

□

随堂练习

利用等价无穷小替换计算以下极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{\sin x}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}} - 1}{1-\cos x}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\tan x}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{\sin x}$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\sin 3x}$$

随堂练习

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{\sin x} = 1$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}} - 1}{1-\cos x} = 1$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\tan x} = 1$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{\sin x} = 2$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\sin 3x} = \frac{2}{3}$$

作业

- 教材习题 1-4: 1; 5(完成表格第 2 行 $x \rightarrow x_0$ 和第 6 行 $x \rightarrow \infty$);
8.
- 教材习题 1-7: 1; 2; 3; 5(1)(2)(3).