函数的连续性与间断点

高等数学 I-信息、统计外招

Weiwen Wang(王伟文)

暨南大学

2025 年秋季学期

课程网页

定义 (函数增量)

假设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一个邻域内有定义，当自变量 x 在这邻域内从 x_0 变到 $x_0+\Delta x$ 时，函数值或因变量 $f(x)$ 相应地从 $f(x_0)$ 变到 $f(x_0+\Delta x)$，此时函数值或因变量 $f(x)$ 的对应的增量为

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0),$$

习惯上称 Δy 为**函数的增量**.

- 保持 x_0 固定，Δy 随着 Δx 的变化而变化.

定义 (函数在 x_0 处连续)

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义, 如果

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\left[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\right]=0,$$

那么就称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 连续.

令 $x = x_0 + \Delta x$, 则 $\Delta x \to 0$ 等价于 $x \to x_0$.

令 $x=x_0+\Delta x$, 则 $\Delta x\to 0$ 等价于 $x\to x_0$. 又因为

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f(x)-f(x_0),$$

即

$$f(x)=f(x_0)+\Delta y.$$

令 $x=x_0+\Delta x$, 则 $\Delta x\to 0$ 等价于 $x\to x_0$. 又因为

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f(x)-f(x_0),$$

即

$$f(x)=f(x_0)+\Delta y.$$

当 $x\to x_0$ 时, Δy 为无穷小

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

定义 (函数在 x_0 处连续)

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义, 如果

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0),$$

那么就称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 连续.

定义 (函数在 x_0 处连续)

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义, 如果

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0),$$

那么就称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 连续.

- “$\epsilon-\delta$" 语言：$\forall\epsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)-f(x_0)|<\epsilon$.

定义 (函数左连续与右连续)

- 如果 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0^-)$ 存在且 $f(x_0^-)=f(x_0)$, 则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处左连续;
- 如果 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0^+)$ 存在且 $f(x_0^+)=f(x_0)$, 则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处右连续.

定义 (函数左连续与右连续)

- 如果 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0^-)$ 存在且 $f(x_0^-) = f(x_0)$, 则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处左连续;
- 如果 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0^+)$ 存在且 $f(x_0^+) = f(x_0)$, 则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处右连续.

- 在区间上每一点都连续的函数, 叫做该区间上的连续函数, 或者说函数在该区间上连续.
- 函数在区间左端点上的连续是指右连续; 在区间右端点上的连续是指左连续.
- 连续函数的图像是一条连续而不间断的曲线.

例

证明函数 $y = \sin x$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内是连续的.

证明.

设 x 为 $(-\infty,+\infty)$ 内的任意一点，当 x 有增量 Δx 时，对应的函数增量为

$$\Delta y = \underbrace{\sin(x+\Delta x)-\sin x = 2\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}_{\text{和差化积公式}\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

证明.

设 x 为 $(-\infty,+\infty)$ 内的任意一点，当 x 有增量 Δx 时，对应的函数增量为

$$\Delta y = \underbrace{\sin(x+\Delta x)-\sin x = 2\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}_{\text{和差化积公式} \sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

又因为 $|\sin\alpha| \le |\alpha|$, $\left|\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right| \le 1$，故

$$0 \le |\Delta y| \le \left|2\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\right| \le 2\cdot\left|\frac{\Delta x}{2}\right| \le |\Delta x|.$$

证明.

设 x 为 $(-\infty,+\infty)$ 内的任意一点，当 x 有增量 Δx 时，对应的函数增量为

$$\Delta y = \underbrace{\sin(x+\Delta x)-\sin x = 2\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}_{\text{和差化积公式}\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

又因为 $|\sin\alpha|\le|\alpha|$，$\left|\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right|\le 1$，故

$$0\le|\Delta y|\le\left|2\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\right|\le 2\cdot\left|\frac{\Delta x}{2}\right|\le|\Delta x|.$$

由夹逼准则知，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}|\Delta y|=0$，因而 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$，故 $y=\sin x$ 在任意一点 $x\in(-\infty,+\infty)$ 连续. □

推论 (函数分段点处连续性判断准则)

设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一邻域内有定义，函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续，当且仅当 $f(x_0^-)=f(x_0^+)=f(x_0)$，即函数在 x_0 处既是左连续也是右连续.

随堂练习

判断函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处是否连续

(1) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & x<0\\ e^{x}, & x\ge 0\end{cases}$

(2) $f(x)=\begin{cases}x^{2}, & x<0\\ x, & x\ge 0\end{cases}$

随堂练习

判断函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处是否连续

(1) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & x<0\\ e^x, & x\geq 0\end{cases}$

$f(0^-)=\frac{1}{2}$, $f(0^+)=1$, $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续

(2) $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0\\ x, & x\geq 0\end{cases}$

$f(0^-)=0$, $f(0^+)=0$, $f(0^-)=f(0^+)=f(0)=0$, $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的去心邻域内有定义，如果函数 $f(x)$ 有以下三种情形之一

(1) 在 $x=x_0$ 处无定义;

(2) 虽然在 $x=x_0$ 处有定义，但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在;

(3) 虽然在 $x=x_0$ 处有定义，且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$.

那么函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续，而点 x_0 称为函数 $f(x)$ 的不连续点或间断点.

例 1

正切函数 $y=\tan x$ 在 $x=\frac{\pi}{2}$ 处无定义, 故 $x=\frac{\pi}{2}$ 为函数 $\tan x$ 的间断点.

例 1

正切函数 $y=\tan x$ 在 $x=\frac{\pi}{2}$ 处无定义，故 $x=\frac{\pi}{2}$ 为函数 $\tan x$ 的间断点. 因为

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan x=\infty.$$

我们称 $x=\frac{\pi}{2}$ 为函数 $\tan x$ 的无穷间断点.

例 2

函数 $y = \sin\frac{1}{x}$ 在 $x = 0$ 处无定义，函数极限 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在也不是无穷大. 我们称 $x = 0$ 为函数 $\sin\frac{1}{x}$ 的**振荡间断点**.

例 3

函数 $y=\frac{x^2-1}{x-1}$ 在 $x=1$ 处无定义, 所以 $x=1$ 为该函数的间断点.

例 3

函数 $y=\frac{x^2-1}{x-1}$ 在 $x=1$ 处无定义, 所以 $x=1$ 为该函数的间断点. 因为

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2,$$

若补充定义 $f(1)=2$, 则此时函数 $y=\frac{x^2-1}{x-1}$ 在 $x=1$ 处连续, 故我们称 $x=1$ 为该函数的**可去间断点**.

例 4

设 $y=f(x)=\begin{cases} x, & x\neq 1 \\ \dfrac{1}{2}, & x=1 \end{cases}$. 函数在 $x=1$ 处有定义,

例 4

设 $y = f(x) = \begin{cases} x, & x \neq 1 \\ \dfrac{1}{2}, & x = 1 \end{cases}$. 函数在 $x = 1$ 处有定义, 但 $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} x = 1 \neq f(1) = \frac{1}{2}$, 故 $x = 1$ 为该函数的间断点.

例 4

设 $y=f(x)=\begin{cases} x, & x\neq 1 \\ \dfrac{1}{2}, & x=1 \end{cases}$. 函数在 $x=1$ 处有定义, 但 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}x=1\neq f(1)=\frac{1}{2}$, 故 $x=1$ 为该函数的间断点. 若改变函数在 $x=1$ 处的值, 使得 $f(1)=1$, 此时函数 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处连续. 此类间断点 $x=1$ 也称为该函数的**可去间断点**.

例 5

设 $y=f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x+1, & x>0 \end{cases}$. 因为 $f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x-1)=-1$,

$f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+1)=1$,

例 5

设 $y=f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x+1, & x>0 \end{cases}$. 因为 $f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x-1)=-1$, $f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+1)=1$, 即当 $x\to 0$ 时, 左右极限存在但不相等, 故 $x=0$ 是该函数的间断点. 此间断点 $x=0$ 称为该函数的**跳跃间断点**.

函数间断点的分类

- 如果 x_0 是函数的间断点，但左右极限 $f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 均存在，则称 x_0 为函数 $y=f(x)$ 的第一类间断点；不是第一类间断点的任何间断点都是第二类间断点.

函数间断点的分类

- 如果 x_0 是函数的间断点，但左右极限 $f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 均存在，则称 x_0 为函数 $y=f(x)$ 的第一类间断点；不是第一类间断点的任何间断点都是第二类间断点.
- 第一类间断点中，左、右极限相等者称为可去间断点；不相等者称为跳跃间断点；

函数间断点的分类

- 如果 x_0 是函数的间断点，但左右极限 $f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 均存在，则称 x_0 为函数 $y=f(x)$ 的第一类间断点；不是第一类间断点的任何间断点都是第二类间断点.
- 第一类间断点中，左、右极限相等者称为可去间断点；不相等者称为跳跃间断点；
- 无穷间断点和振荡间断点均是第二类间断点.

随堂练习

判断 $x = x_0$ 处函数 $f(x)$ 是否为函数的间断点，若是，请判断其间断点类型.

(1) $f(x) = \begin{cases} x-1, & x<0 \\ x+1, & x \geq 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处;

(2) $f(x) = \frac{1}{x-1}$ 在 $x=1$ 处;

(3) $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \neq 1 \\ 1, & x=1 \end{cases}$ 在 $x=1$ 处.

随堂练习

(1) $f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0 \\ x+1, & x\geq 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处; $x=0$ 是函数 $y=f(x)$ 的跳跃间断点

(2) $f(x)=\frac{1}{x-1}$ 在 $x=1$ 处; $x=1$ 是函数 $y=f(x)$ 的无穷间断点

(3) $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\neq 1 \\ 1, & x=1 \end{cases}$ 在 $x=1$ 处. $x=1$ 是函数 $y=f(x)$ 的可去间断点

作业

- 抄写教材 57 页函数连续的两个定义
- 教材习题 1-8: 1; 3(4); 5.

扩展

Thomae(爆米花) 函数: 在无理点处连续, 在有理点处间断.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, & x=\dfrac{p}{q}\in\mathbb{Q}\text{且}p,q\text{既约};\\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}.\end{cases}$$