定积分的概念与性质

高等数学 I-信息、统计外招

Weiwen Wang(王伟文)

暨南大学

2025 年秋季学期

课程网页

定积分思想的源头

- 现代定积分由牛顿与莱布尼茨在 17 世纪建立
- 但其核心思想——“分割 + 求和”——可追溯到数千年前
- 古埃及的测量、工程与建筑中，已经出现类似积分的实践方法

计算区间 $[a,b]$ 上，曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴所围成的面积.

(1) 在区间 $[a,b]$ 上取 $n-1$ 个点

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

计算区间 $[a,b]$ 上，曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴所围成的面积.

(1) 在区间 $[a,b]$ 上取 $n-1$ 个点

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

(2) 上述 $n-1$ 个点将 $[a,b]$ 划分成 n 个小区间

$$[x_i,x_{i+1}],i=1,2\ldots,n$$

区间长度为 $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$.

计算区间 $[a,b]$ 上，曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴所围成的面积.

(1) 在区间 $[a,b]$ 上取 $n-1$ 个点

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

(2) 上述 $n-1$ 个点将 $[a,b]$ 划分成 n 个小区间

$$[x_i,x_{i+1}],i=1,2\ldots,n$$

区间长度为 $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$.

(3) 在区间 $[x_i,x_{i+1}]$ 内任取一点 ξ_i，则曲线在此区间内与 x 轴所围成的面积约等于 $f(\xi_i)\Delta x_i$

计算区间 $[a,b]$ 上，曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴所围成的面积.

(1) 在区间 $[a,b]$ 上取 $n-1$ 个点

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

(2) 上述 $n-1$ 个点将 $[a,b]$ 划分成 n 个小区间

$$[x_i,x_{i+1}],i=1,2\ldots,n$$

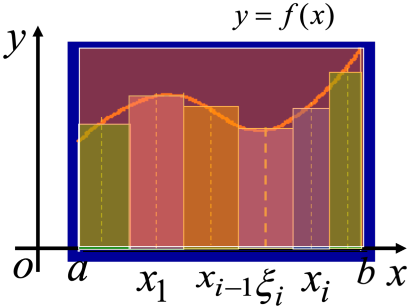
区间长度为 $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$.

(3) 在区间 $[x_i,x_{i+1}]$ 内任取一点 ξ_i，则曲线在此区间内与 x 轴所围成的面积约等于 $f(\xi_i)\Delta x_i$

(4) 所求曲线下面积约等于 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi)\Delta x_i$

记 $\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n\}$，则所求面积为

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$



定义 1 (定积分)

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界, 在 $[a,b]$ 中任意插入 $n-1$ 个分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

把区间 $[a,b]$ 分成 n 个小区间

$$[x_0,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_{n-1},x_n],$$

各个小区间的长度依此为

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0, \Delta x_2 = x_2 - x_1, \cdots, \Delta x_n = x_n - x_{n-1}.$$

定义 1 (续)

在每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上任取一点 $x_i(x_{i-1}\le\xi_i\le x_i)$, 在函数值 $f(\xi_i)$ 与小区间长度 Δx_i 的乘积 $f(\xi_i)\Delta x_i(i=1,2,\cdots,n)$, 并作和

$$S=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i. \tag{1-1}$$

记 $\lambda=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n\}$, 如果当 $\lambda\to 0$ 时, 这个和的极限存在, 且与闭区间 $[a,b]$ 的分法及点 ξ_i 的取法无关, 那么称这个极限 I 称为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的定积分(简称积分), 记作 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, 即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=I=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i, \tag{1-2}$$

定义 1 (续)

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = I = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i, \tag{1-2}$$

其中 $f(x)$ 叫做被积函数, $f(x)\mathrm{d}x$ 叫做被积表达式, x 叫做积分变量, a 叫做积分下限, b 叫做积分上限, $[a,b]$ 叫做积分区间.

定义 1 (续)

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = I = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i, \tag{1-2}$$

其中 $f(x)$ 叫做被积函数, $f(x)\mathrm{d}x$ 叫做被积表达式, x 叫做积分变量, a 叫做积分下限, b 叫做积分上限, $[a,b]$ 叫做积分区间.

- 若函数 f 和积分区间不变，且定积分存在，则积分值与积分变量的记号无关，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u.$$

- $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 称为 $f(x)$ 的积分和. 如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分存在，则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

- $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = I \Longleftrightarrow$
  对于任意 $\epsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得对于区间 $[a,b]$ 的任何划分，不论 ξ_i 在 $[x_{i-1},x_i]$ 中如何选取，只要

$$\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n\} < \delta,$$

则

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I\right| < \epsilon.$$

定积分几何意义

- $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上非负;
- $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上非正;
- $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有正有负.

定理 1

设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积.

定理 2

设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界, 且只有有限个间断点, 则 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积.

例 1

利用定义计算定积分 $\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x$

例 1

利用定义计算定积分 $\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x$

解: 因为 $f(x)=x^2$ 在区间 $[0,1]$ 上连续, 故 $\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x$ 存在, 且与 $[0,1]$ 上的划分方法及积分和的取点 ξ_i 无关.

例 1

利用定义计算定积分 $\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x$

解:　　因为 $f(x)=x^2$ 在区间 $[0,1]$ 上连续, 故 $\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x$ 存在, 且与 $[0,1]$ 上的划分方法及积分和的取点 ξ_i 无关.

不妨将 $[0,1]$ 取 n 等分, $x_i=\frac{i}{n}, i=0,1,2,\ldots,n$, 则

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n}, i=1,2,\ldots,n.$$

例 1

利用定义计算定积分 $\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x$

解: 因为 $f(x)=x^2$ 在区间 $[0,1]$ 上连续, 故 $\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x$ 存在, 且与 $[0,1]$ 上的划分方法及积分和的取点 ξ_i 无关.

不妨将 $[0,1]$ 取 n 等分, $x_i=\frac{i}{n}, i=0,1,2,\ldots,n$, 则

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n}, i=1,2,\ldots,n.$$

取 $\xi_i = x_i$, 则积分和为

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{n^2}\frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 &= \frac{1}{n^3}\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\\ &= \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

记 $\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n\} = \frac{1}{n}$，令 $\lambda \to 0$，即 $n \to \infty$，由定积分定义

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x &= \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i \\
&= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i \\
&= \lim \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

定积分补充规定

- 当 $a=b$ 时，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$;
- 当 $a>b$ 时，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$.

定积分性质

假定所讨论的定积分都存在.

性质 1

设 α 与 β 均为常数, 则

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

- **性质 1 对于任意有限个函数的线性组合也是成立的.**

证明.

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[\alpha f(\xi_i)\Delta x_i + \beta g(\xi_i)\Delta x_i]$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\left[\sum_{i=1}^{n}\alpha f(\xi_i)\Delta_i + \sum_{i=1}^{n}\beta g(\xi_i)\Delta_i\right]$$

证明.

$$
\begin{aligned}
\int_a^b [\alpha f(x)+\beta g(x)]\mathrm{d}x &= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[\alpha f(\xi_i)\Delta x_i+\beta g(\xi_i)\Delta x_i] \\
&= \lim_{\lambda\to 0}\left[\sum_{i=1}^{n}\alpha f(\xi_i)\Delta_i+\sum_{i=1}^{n}\beta g(\xi_i)\Delta_i\right] \\
&= \alpha\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta_i+\beta\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}g(\xi_i)\Delta_i \\
&= \alpha\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\beta\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

□

引理 1

若 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积, 则对于任意 $[c,d]\subset[a,b]$, $f(x)$ 在区间 $[c,d]$ 上可积.

性质 2

设 $a<c<b$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

- 定积分对于积分区间具有可加性;
- 无论 a,b,c 的相对位置，总有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

证明.

由引理 1, $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在. 取 $[a,b]$ 上的一划分使得 c 也是其中一个分点, 则此划分也将区间 $[a,c]$ 和区间 $[c,b]$ 划分成不同的小区间, 且有

$$\sum_{[a,b]} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{[a,c]} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{[c,b]} f(\xi_i)\Delta x_i$$

证明.

由引理 1, $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在. 取 $[a,b]$ 上的一划分使得 c 也是其中一个分点, 则此划分也将区间 $[a,c]$ 和区间 $[c,b]$ 划分成不同的小区间, 且有

$$\sum_{[a,b]} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{[a,c]} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{[c,b]} f(\xi_i)\Delta x_i$$

令 $\lambda \to 0$

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{[a,b]} f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{\lambda\to 0}\left(\sum_{[a,c]} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{[c,b]} f(\xi_i)\Delta x_i\right)$$

□

续.

又因为 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{[a,c]} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x$ 且 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{[c,b]} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$,

故

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{[a,b]} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

$\square$

性质 3

如果在区间 $[a,b]$ 上 $f(x)\equiv 1$, 则

$$\int_a^b 1\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x = b-a.$$

性质 4

如果在区间 $[a,b]$ 上 $f(x) \geq 0$, 那么

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0 \quad (a < b)$$

性质 4

如果在区间 $[a,b]$ 上 $f(x) \geq 0$，那么

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0 \quad (a<b)$$

证明.

因为 $f(x) \geq 0$，$f(\xi_i) \geq 0 \quad (i=1,2,\ldots,n)$，故 $f(\xi_i)\Delta x_i \geq 0$.

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \geq 0$$

令 $\lambda \to 0$，

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \geq 0$$

$\square$

推论 1

如果在区间 $[a,b]$ 上 $f(x) \le g(x)$, 那么

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \quad (a < b)$$

- 性质 4 的结论.

推论 2

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \quad (a < b)$$

- 思考：若函数 φ 在 $[a,b]$ 是凹的，则

$$\varphi\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right) \le \int_a^b \varphi(f(x))\mathrm{d}x?$$

证明.

因为 $-f(x) \le |f(x)| \le f(x)$. 由推论 1,

证明.

因为 $-f(x) \le |f(x)| \le f(x)$. 由推论 1,

$$-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

即

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$$

$\square$

性质 5

设 M 及 m 分别是函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的最大值和最小值, 则

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq M(b-a) \quad (a<b).$$

性质 5

设 M 及 m 分别是函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的最大值和最小值, 则

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq M(b-a) \quad (a<b).$$

证明.

因为 $m \leq f(x) \leq M$, 故

$$\int_a^b m\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x) \leq \int_a^b M\mathrm{d}x$$

性质 5

设 M 及 m 分别是函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的最大值和最小值, 则

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le M(b-a) \quad (a<b).$$

证明.

因为 $m \le f(x) \le M$, 故

$$\int_a^b m\mathrm{d}x \le \int_a^b f(x) \le \int_a^b M\mathrm{d}x$$

又因为 $\int_a^b m\mathrm{d}x = m\int_a^b \mathrm{d}x = m(b-a)$, 同理, $\int_a^b M\mathrm{d}x = M(b-a)$, 故

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le M(b-a) \quad (a<b).$$

□

性质 6 (定积分中值定理)

如果函数 $f(x)$ 在积分区间 $[a,b]$ 上连续, 那么在 $[a,b]$ 上至少存在一点 ξ, 使得下式成立:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a) \quad (a \le \xi \le b),$$

则这个公式叫做积分中值公式.

证明.

由性质 5,

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le M.$$

证明.

由性质 5,

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le M.$$

由介值定理推论, 至少存在一点 $\xi \in [a,b]$ 使得

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a) \quad (a \le \xi \le b).$$

□

作业

- 教材习题 5-1: 3(1), 4(1)(3), 5, 7(4), 9, 12.