

# 函数的求导法则

高等数学 I-信息、统计外招

Weiwen Wang(王伟文)

暨南大学

2025 年秋季学期



课程网页

## 常数和基本初等函数的导数公式

- $(C)' = 0$

- $(\sin x)' = \cos x$

- $(a^x)' = a^x \ln a \quad (a > 0, a \neq 1)$

- $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \quad (a > 0, a \neq 1)$

- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

- $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

- $(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}$

- $(\cos x)' = -\sin x$

- $(e^x)' = e^x$

- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

- $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

### 定理 1 (函数的和、差、积、商的求导法则)

如果函数  $u = u(x)$  及  $v = v(x)$  都在点  $x$  具有导数, 那么它们的和、差、积、商 (除分母为零的点外) 都在点  $x$  具有导数, 且

- $[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x);$
- $[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x);$
- $\left[ \frac{u(x)}{v(x)} \right]' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}.$

运算	口诀	公式
加法 ( $u + v$ )	和的导数等于导数的和	$(u + v)' = u' + v'$
减法 ( $u - v$ )	差的导数等于导数的差	$(u - v)' = u' - v'$
乘法 ( $u \cdot v$ )	前导后不导 + 后导前不导	$(u \cdot v)' = u'v + uv'$
除法 ( $\frac{u}{v}$ )	母平方，子导母不导 减 母导子不导	$(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

## 随堂练习

(1)  $y = 2x^3 - 3x^2 + 7x + 5$ , 求  $y'$  及  $y'|_{x=1}$ .

(2)  $f(x) = x^2 \cos x$ , 求  $f'(x)$  及  $f'(\frac{\pi}{2})$ .

(3) 求曲线  $y = \frac{e^x}{x+1}$  在点  $(0, 1)$  处的切线.

(1)  $y = 2x^3 - 3x^2 + 7x + 5$ , 求  $y'$  及  $y'|_{x=1}$ .

解  $y' = (2x^3)' - (3x^2)' + (7x)' + (5)' = 6x^2 - 6x + 7$

$$y'|_{x=1} = 6 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 7 = 7$$

(1)  $y = 2x^3 - 3x^2 + 7x + 5$ , 求  $y'$  及  $y'|_{x=1}$ .

解  $y' = (2x^3)' - (3x^2)' + (7x)' + (5)' = 6x^2 - 6x + 7$

$$y'|_{x=1} = 6 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 7 = 7$$

(2)  $f(x) = x^2 \cos x$ , 求  $f'(x)$  及  $f'(\frac{\pi}{2})$ .

解

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2 \cos x)' = (x^2)' \cdot \cos x + x^2 (\cos x)' \\ &= 2x \cos x - x^2 \sin x. \end{aligned}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \cdot \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \sin \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi^2}{4}$$

(3) 求曲线  $y = \frac{e^x}{x+1}$  在点  $(0,1)$  处的切线.

解

$$\begin{aligned} y' &= \left( \frac{e^x}{x+1} \right)' = \frac{(e^x)'(x+1) - e^x(x+1)'}{(x+1)^2} \\ &= \frac{xe^x}{(x+1)^2} \end{aligned}$$



(3) 求曲线  $y = \frac{e^x}{x+1}$  在点  $(0,1)$  处的切线.

解

$$\begin{aligned} y' &= \left( \frac{e^x}{x+1} \right)' = \frac{(e^x)'(x+1) - e^x(x+1)'}{(x+1)^2} \\ &= \frac{xe^x}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

函数  $y$  在  $x=0$  处的导数  $y'|_{x=0} = 0$ .

(3) 求曲线  $y = \frac{e^x}{x+1}$  在点  $(0,1)$  处的切线.

解

$$\begin{aligned} y' &= \left( \frac{e^x}{x+1} \right)' = \frac{(e^x)'(x+1) - e^x(x+1)'}{(x+1)^2} \\ &= \frac{xe^x}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

函数  $y$  在  $x=0$  处的导数  $y'|_{x=0} = 0$ .

由导数的几何意义知所求切线斜率  $k = y'|_{x=0} = 0$ , 相应的切线方程

$$y - 1 = 0 \cdot (x - 0),$$

即  $y = 1$ .

### 定理 3 (复合函数求导法则)

如果  $u = g(x)$  在点  $x$  处可导, 而  $y = f(u)$  在点  $u = g(x)$  可导, 那么复合函数  $y = f[g(x)]$  在点  $x$  可导, 且其导数为

$$\frac{dy}{dx} = f'(u) \cdot g'(x) \quad \text{或} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

### 定理 3 (复合函数求导法则)

如果  $u = g(x)$  在点  $x$  处可导, 而  $y = f(u)$  在点  $u = g(x)$  可导, 那么复合函数  $y = f[g(x)]$  在点  $x$  可导, 且其导数为

$$\frac{dy}{dx} = f'(u) \cdot g'(x) \quad \text{或} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

- $\frac{dy}{dx} = f'(u) \cdot g'(x) = \frac{dy}{dx} = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
- “外导不变里, 乘以内导再”

例

设  $y = \sin x^3$ , 求  $\frac{dy}{dx}$

例

设  $y = \sin x^3$ , 求  $\frac{dy}{dx}$

$$y = \sin x^3$$

例

设  $y = \sin x^3$ , 求  $\frac{dy}{dx}$

解 令  $u = g(x) = x^3$ , 则  $y = f(u) = \sin u$ .

例

设  $y = \sin x^3$ , 求  $\frac{dy}{dx}$

解 令  $u = g(x) = x^3$ , 则  $y = f(u) = \sin u$ . 由复合函数求导公式

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \cos u \cdot 3x^2 = 3x^2 \cos x^3$$



例

设  $y = e^{x^2+1}$ , 求  $\frac{dy}{dx}$

例

设  $y = e^{x^2+1}$ , 求  $\frac{dy}{dx}$

$$y = e^{x^2+1}$$

例

设  $y = e^{x^2+1}$ , 求  $\frac{dy}{dx}$

解 令  $u = x^2 + 1$ , 则  $y = e^u$ . 由复合函数求导公式

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = e^u \cdot (2x) = 2xe^{x^2+1}.$$

例

设  $y = \sin x^3$ , 求  $\frac{dy}{dx}$

解 令  $u = g(x) = x^3$ , 则  $y = f(u) = \sin u$ .

例

设  $y = \sin x^3$ , 求  $\frac{dy}{dx}$

解 令  $u = g(x) = x^3$ , 则  $y = f(u) = \sin u$ . 由复合函数求导公式

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \cos u \cdot 3x^2 = 3x^2 \cos x^3$$

$$\frac{dy}{dx} = (\sin x^3)' = \cos x^3 \cdot (x^3)' = \cos x^3 \cdot 3x^2$$

例

设  $y = e^{x^2+1}$ , 求  $\frac{dy}{dx}$

解 令  $u = x^2 + 1$ , 则  $y = e^u$ . 由复合函数求导公式

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = e^u \cdot (2x) = 2xe^{x^2+1}.$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(e^{x^2+1}\right)' = e^{x^2+1} \cdot (x^2 + 1)' = e^{x^2+1} \cdot 2x.$$

## 随堂练习

- (1) 设  $y = e^{\sin x} \cdot \cos 2x$ , 求  $\frac{dy}{dx}$ .
- (2) 设  $y = \ln(2x + 1)$ , 求  $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=0}$
- (3) 设  $y = \sqrt{x^2 + 1}$ , 求  $\frac{dy}{dx}$ .

## 随堂练习

(1) 设  $y = e^{\sin x} \cdot \cos 2x$ , 求  $\frac{dy}{dx}$ .

解

$$\frac{dy}{dx} = \left(e^{\sin x}\right)' \cos 2x + e^{\sin x} \cdot (\cos 2x)'$$



## 随堂练习

(1) 设  $y = e^{\sin x} \cdot \cos 2x$ , 求  $\frac{dy}{dx}$ .

解

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \left(e^{\sin x}\right)' \cos 2x + e^{\sin x} \cdot (\cos 2x)' \\ &= e^{\sin x} (\sin x)' \cos 2x + e^{\sin x} \cdot (-\sin 2x) \cdot (2x)'\end{aligned}$$

## 随堂练习

(1) 设  $y = e^{\sin x} \cdot \cos 2x$ , 求  $\frac{dy}{dx}$ .

解

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \left(e^{\sin x}\right)' \cos 2x + e^{\sin x} \cdot (\cos 2x)' \\ &= e^{\sin x} (\sin x)' \cos 2x + e^{\sin x} \cdot (-\sin 2x) \cdot (2x)' \\ &= e^{\sin x} \cos x \cos 2x - 2e^{\sin x} \sin 2x\end{aligned}$$

## 随堂练习

(2) 设  $y = \ln(2x + 1)$ , 求  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0}$

解

$$\frac{dy}{dx} = [\ln(2x + 1)]' = \frac{1}{2x + 1} (2x + 1)' = \frac{2}{2x + 1}$$

## 随堂练习

(3) 设  $y = \sqrt{x^2 + 1}$ , 求  $\frac{dy}{dx}$ .

解

$$\frac{dy}{dx} = \left[ (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \right]' = \frac{1}{2}(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}-1} \cdot (x^2 + 1)'$$

## 随堂练习

(3) 设  $y = \sqrt{x^2 + 1}$ , 求  $\frac{dy}{dx}$ .

解

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \left[ (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \right]' = \frac{1}{2} (x^2 + 1)^{\frac{1}{2} - 1} \cdot (x^2 + 1)' \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \cdot 2x \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\end{aligned}$$

# 作业

- 教材习题 2-2:  $2(1)(5)(7); 3(3); 6(1)(3)(5); 8(3); 10; 11(5)$