

反常积分

高等数学 I-信息、统计外招

Weiwen Wang(王伟文)

暨南大学

2025 年秋季学期



课程网页

定义 1

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上连续, 任取 $t > a$, 作定积分 $\int_a^t f(x)dx$, 再求极限:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x)dx,$$

称其为函数 $f(x)$ 在无穷区间 $[a, +\infty)$ 上的反常积分, 记作

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$, 即

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x)dx.$$

定义 1

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上连续, 任取 $t > a$, 作定积分 $\int_a^t f(x)dx$, 再求极限:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x)dx,$$

称其为函数 $f(x)$ 在无穷区间 $[a, +\infty)$ 上的反常积分, 记作

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$, 即

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x)dx.$$

- 若极限 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x)dx$ 存在, 则称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 积分值即是该极限.
- 若此极限不存在, 则称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散.

定义 2

设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, b]$ 上连续, 任取 $t < b$, 作定积分 $\int_t^b f(x)dx$, 再求极限:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x)dx,$$

称其为函数 $f(x)$ 在无穷区间 $(-\infty, b]$ 上的反常积分, 记作

$\int_{-\infty}^b f(x)dx$, 即

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x)dx.$$

定义 2

设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, b]$ 上连续, 任取 $t < b$, 作定积分 $\int_t^b f(x)dx$, 再求极限:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x)dx,$$

称其为函数 $f(x)$ 在无穷区间 $(-\infty, b]$ 上的反常积分, 记作 $\int_{-\infty}^b f(x)dx$, 即

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x)dx.$$

- 若极限 $\lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x)dx$ 存在, 则称反常积分 $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ 收敛, 积分值即是该极限.
- 若此极限不存在, 则称反常积分 $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ 发散.

定义 3

设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 反常积分 $\int_{-\infty}^0 f(x)dx$ 与反常积分 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 之和称为**函数 $f(x)$ 在无穷区间 $(-\infty, +\infty)$ 上的反常积分**, 记作 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$, 即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^{+\infty} f(x)dx$$

定义 3

设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 反常积分 $\int_{-\infty}^0 f(x)dx$ 与反常积分 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 之和称为**函数 $f(x)$ 在无穷区间 $(-\infty, +\infty)$ 上的反常积分**, 记作 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$, 即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^{+\infty} f(x)dx$$

- 如果反常积分 $\int_{-\infty}^0 f(x)dx$ 与 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 均收敛, 则反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 收敛;
- 否则, 反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 发散.

上述三类反常积分统称为无穷限的反常积分.

上述三类反常积分统称为无穷限的反常积分.

由牛顿-莱布尼兹公式

设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上的一个原函数, 若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ 存在, 则反常积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) - F(a).$$

若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ 不存在, 则反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散.

上述三类反常积分统称为无穷限的反常积分.

由牛顿-莱布尼兹公式

设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上的一个原函数, 若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ 存在, 则反常积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) - F(a).$$

若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ 不存在, 则反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散.

简记 $F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$. 当 $F(+\infty)$ 存在时,

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(a) = [F(x)]_a^{+\infty}$$

- 若 $(-\infty, b]$ 上 $F'(x) = f(x)$, 则当 $F(-\infty)$ (即 $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$) 存在时,

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = [F(x)]_{-\infty}^b;$$

当 $F(-\infty)$ 不存在时, 反常积分 $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ 发散.

- 若在 $(-\infty, +\infty)$ 内 $F'(x) = f(x)$, 则当 $F(-\infty)$ 与 $F(+\infty)$ 都存在时,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = [F(x)]_{-\infty}^{+\infty};$$

当 $F(-\infty)$ 与 $F(+\infty)$ 有一个不存在时, 反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.

例 1

计算反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

例 1

计算反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

解:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} &= [\arctan x]_{-\infty}^{+\infty} \\&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x - \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x \\&= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \\&= \pi.\end{aligned}$$

例 2

计算反常积分 $\int_0^{+\infty} te^{-pt} dt$, 其中 p 是常数, 且 $p > 0$.

例 2

计算反常积分 $\int_0^{+\infty} te^{-pt} dt$, 其中 p 是常数, 且 $p > 0$.

解:

$$\int_0^{+\infty} te^{-pt} dt = \left[\int te^{-pt} dt \right]_0^{+\infty}$$

例 2

计算反常积分 $\int_0^{+\infty} te^{-pt} dt$, 其中 p 是常数, 且 $p > 0$.

解:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} te^{-pt} dt &= \left[\int te^{-pt} dt \right]_0^{+\infty} \\ &= \left[-\frac{1}{p} \int t de^{-pt} \right]_0^{+\infty} \\ &= \left[-\frac{1}{p} \left(te^{-pt} - \int e^{-pt} dt \right) \right]_0^{+\infty}\end{aligned}$$

例 2

计算反常积分 $\int_0^{+\infty} te^{-pt} dt$, 其中 p 是常数, 且 $p > 0$.

解:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} te^{-pt} dt &= \left[\int te^{-pt} dt \right]_0^{+\infty} \\&= \left[-\frac{1}{p} \int t de^{-pt} \right]_0^{+\infty} \\&= \left[-\frac{1}{p} \left(te^{-pt} - \int e^{-pt} dt \right) \right]_0^{+\infty} \\&= \left[-\frac{1}{p} \left(te^{-pt} + \frac{1}{p} \int e^{-pt} d(-pt) \right) \right]_0^{+\infty}\end{aligned}$$

例 2

计算反常积分 $\int_0^{+\infty} te^{-pt} dt$, 其中 p 是常数, 且 $p > 0$.

解:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} te^{-pt} dt &= \left[\int te^{-pt} dt \right]_0^{+\infty} \\&= \left[-\frac{1}{p} \int t de^{-pt} \right]_0^{+\infty} \\&= \left[-\frac{1}{p} \left(te^{-pt} - \int e^{-pt} dt \right) \right]_0^{+\infty} \\&= \left[-\frac{1}{p} \left(te^{-pt} + \frac{1}{p} \int e^{-pt} d(-pt) \right) \right]_0^{+\infty} = \left[-\frac{1}{p} \left(te^{-pt} + \frac{1}{p} e^{-pt} \right) \right]_0^{+\infty}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow +\infty} -\frac{1}{p} \left(te^{-pt} + \frac{1}{p} e^{-pt} \right) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} -\frac{1}{p} te^{-pt} + \lim_{t \rightarrow +\infty} -\frac{1}{p^2} e^{-pt} \\ &= -\frac{1}{p} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{e^{pt}} - 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow +\infty} -\frac{1}{p} \left(te^{-pt} + \frac{1}{p} e^{-pt} \right) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} -\frac{1}{p} te^{-pt} + \lim_{t \rightarrow +\infty} -\frac{1}{p^2} e^{-pt} \\ &= -\frac{1}{p} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{e^{pt}} - 0 \\ &= -\frac{1}{p} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{pe^{pt}} = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow +\infty} -\frac{1}{p} \left(te^{-pt} + \frac{1}{p} e^{-pt} \right) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} -\frac{1}{p} te^{-pt} + \lim_{t \rightarrow +\infty} -\frac{1}{p^2} e^{-pt} \\
 &= -\frac{1}{p} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{e^{pt}} - 0 \\
 &= -\frac{1}{p} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{pe^{pt}} = 0
 \end{aligned}$$

故

$$\int_0^{+\infty} te^{-pt} dt = \left[-\frac{1}{p} \left(te^{-pt} + \frac{1}{p} e^{-pt} \right) \right]_0^{+\infty} = 0 - \left(-\frac{1}{p^2} \right) = \frac{1}{p^2}$$

例 3

证明反常积分 $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} (a > 0, p > 0)$ 当 $p > 1$ 时收敛, 当 $p \leq 1$ 时发散.

例 3

证明反常积分 $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} (a > 0, p > 0)$ 当 $p > 1$ 时收敛, 当 $p \leq 1$ 时发散.

解: 当 $p = 1$ 时

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x} = [\ln x]_a^{+\infty} = +\infty.$$

例 3

证明反常积分 $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} (a > 0, p > 0)$ 当 $p > 1$ 时收敛, 当 $p \leq 1$ 时发散.

解: 当 $p = 1$ 时

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x} = [\ln x]_a^{+\infty} = +\infty.$$

当 $p \neq 1$ 时

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \left[\frac{x^{1-p}}{1-p} \right]_a^{+\infty}$$

例 3

证明反常积分 $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} (a > 0, p > 0)$ 当 $p > 1$ 时收敛, 当 $p \leq 1$ 时发散.

解: 当 $p = 1$ 时

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x} = [\ln x]_a^{+\infty} = +\infty.$$

当 $p \neq 1$ 时

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \left[\frac{x^{1-p}}{1-p} \right]_a^{+\infty} = \begin{cases} +\infty, & p < 1, \\ \frac{a^{1-p}}{p-1}, & p > 1. \end{cases}$$

例 3

证明反常积分 $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} (a > 0, p > 0)$ 当 $p > 1$ 时收敛, 当 $p \leq 1$ 时发散.

解: 当 $p = 1$ 时

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x} = [\ln x]_a^{+\infty} = +\infty.$$

当 $p \neq 1$ 时

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \left[\frac{x^{1-p}}{1-p} \right]_a^{+\infty} = \begin{cases} +\infty, & p < 1, \\ \frac{a^{1-p}}{p-1}, & p > 1. \end{cases}$$

因此, 反常积分 $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} (a > 0, p > 0)$ 当 $p > 1$ 时收敛, 当 $p \leq 1$ 时发

定义 4 (瑕点)

如果函数 $f(x)$ 在点 a 的任一邻域内都无界, 那么 a 称为函数 $f(x)$ 的瑕点(也称为无界间断点)

定义 4 (瑕点)

如果函数 $f(x)$ 在点 a 的任一邻域内都无界, 那么 a 称为函数 $f(x)$ 的瑕点(也称为无界间断点)

- 无界函数的反常积分又称为瑕积分.
- 无穷间断点一定是瑕点.
- 瑕点一定是无穷间断点

定义 5

设函数 $f(x)$ 在区间 $(a, b]$ 上连续, 点 a 为 $f(x)$ 的瑕点. 任取 $t > a$, 作定积分 $\int_t^b f(x)dx$, 取极限

$$\lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x)dx,$$

称其为函数 $f(x)$ 在区间 $(a, b]$ 上的反常积分, 仍然记作 $\int_a^b f(x)dx$, 即

$$\int_a^b f(x)dx.$$

定义 5

设函数 $f(x)$ 在区间 $(a, b]$ 上连续, 点 a 为 $f(x)$ 的瑕点. 任取 $t > a$, 作定积分 $\int_t^b f(x)dx$, 取极限

$$\lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x)dx,$$

称其为函数 $f(x)$ 在区间 $(a, b]$ 上的反常积分, 仍然记作 $\int_a^b f(x)dx$, 即

$$\int_a^b f(x)dx.$$

- 上述定义中, 若极限存在, 则称反常积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛, 积分值为极限值;
- 若极限不存在, 称反常积分 $\int_a^b f(x)dx$ 发散.

定义 6

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b)$ 上连续, 点 b 为 $f(x)$ 的瑕点. 任取 $t < b$, 作定积分 $\int_a^t f(x)dx$, 取极限

$$\lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x)dx,$$

称其为函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b)$ 上的反常积分, 仍然记作 $\int_a^b f(x)dx$, 即

$$\int_a^b f(x)dx.$$

定义 6

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b)$ 上连续, 点 b 为 $f(x)$ 的瑕点. 任取 $t < b$, 作定积分 $\int_a^t f(x)dx$, 取极限

$$\lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x)dx,$$

称其为函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b)$ 上的反常积分, 仍然记作 $\int_a^b f(x)dx$, 即

$$\int_a^b f(x)dx.$$

- 上述定义中, 若极限存在, 则称反常积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛, 积分值为极限值;
- 若极限不存在, 称反常积分 $\int_a^b f(x)dx$ 发散.

定义 7

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, c)$ 和 $(c, b]$ 上连续, 点 c 为 $f(x)$ 的瑕点, 反常积分 $\int_a^c f(x)dx$ 与反常积分 $\int_c^b f(x)dx$ 之和称为函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的反常积分, 仍然记作 $\int_a^b f(x)dx$, 即

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

定义 7

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, c)$ 和 $(c, b]$ 上连续, 点 c 为 $f(x)$ 的瑕点, 反常积分 $\int_a^c f(x)dx$ 与反常积分 $\int_c^b f(x)dx$ 之和称为函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的反常积分, 仍然记作 $\int_a^b f(x)dx$, 即

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

- 若反常积分 $\int_a^c f(x)dx$ 与反常积分 $\int_c^b f(x)dx$ 均收敛, 则称反常积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛, 反常积分 $\int_a^b f(x)dx$ 的值即 $\int_a^c f(x)dx$ 与 $\int_c^b f(x)dx$ 之和.
- 否则, 就称反常积分 $\int_a^b f(x)dx$ 发散.

设 $x=a$ 为 $f(x)$ 的瑕点, 在 $(a,b]$ 上 $F'(x)=f(x)$, 如果 $\lim_{x \rightarrow a^+} F(x)$ 存在, 则反常积分

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - \lim_{x \rightarrow a^+} F(x) = F(b) - F(a^+);$$

若 $\lim_{x \rightarrow a^+} F(x)$ 不存在, $\int_a^b f(x)dx$ 发散.

设 $x=a$ 为 $f(x)$ 的瑕点, 在 $(a,b]$ 上 $F'(x)=f(x)$, 如果 $\lim_{x \rightarrow a^+} F(x)$ 存在, 则反常积分

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - \lim_{x \rightarrow a^+} F(x) = F(b) - F(a^+);$$

若 $\lim_{x \rightarrow a^+} F(x)$ 不存在, $\int_a^b f(x)dx$ 发散.

上述等式可以简记为

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b.$$

设 $x=b$ 为 $f(x)$ 的瑕点, 在 $[a,b)$ 上 $F'(x)=f(x)$, 如果 $\lim_{x \rightarrow b^-} F(x)$ 存在, 则反常积分

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{x \rightarrow b^-} F(x) - F(a) = F(b^-) - F(a);$$

若 $\lim_{x \rightarrow b^-} F(x)$ 不存在, $\int_a^b f(x)dx$ 发散.

设 $x=b$ 为 $f(x)$ 的瑕点, 在 $[a,b)$ 上 $F'(x)=f(x)$, 如果 $\lim_{x \rightarrow b^-} F(x)$ 存在, 则反常积分

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{x \rightarrow b^-} F(x) - F(a) = F(b^-) - F(a);$$

若 $\lim_{x \rightarrow b^-} F(x)$ 不存在, $\int_a^b f(x)dx$ 发散.

上述等式可以简记为

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b.$$

例 4

计算反常积分 $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$

例 4

计算反常积分 $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$

解: 因为 $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} = +\infty$, 故 $x = a$ 是瑕点.

例 4

计算反常积分 $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$

解: 因为 $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} = +\infty$, 故 $x=a$ 是瑕点.
于是

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \left[\arcsin \frac{x}{a} \right]_0^a =$$

例 4

计算反常积分 $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$

解: 因为 $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} = +\infty$, 故 $x=a$ 是瑕点.
于是

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \left[\arcsin \frac{x}{a} \right]_0^a = \lim_{x \rightarrow a^-} \arcsin \frac{x}{a} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

例 5

讨论反常积分 $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$ 的收敛性.

例 5

讨论反常积分 $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$ 的收敛性.

解: 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$, 故 $x = 0$ 是瑕点.

例 5

讨论反常积分 $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$ 的收敛性.

解: 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$, 故 $x = 0$ 是瑕点.

于是

$$\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x} \right]_{-1}^0 = -\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} - 1 = +\infty$$

例 5

讨论反常积分 $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$ 的收敛性.

解: 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$, 故 $x = 0$ 是瑕点.

于是

$$\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x} \right]_{-1}^0 = -\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} - 1 = +\infty$$

即反常积分 $\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2}$ 发散, 故反常积分 $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$ 发散.

例 6

证明反常积分 $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^q}$ 当 $0 < q < 1$ 时收敛, $q \geq 1$ 时发散.

例 6

证明反常积分 $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^q}$ 当 $0 < q < 1$ 时收敛, $q \geq 1$ 时发散.

解: $x = a$ 是瑕点.

当 $q = 1$ 时

$$\int_a^b \frac{dx}{x-a} = [\ln(x-a)]_a^b = \ln(b-a) - \lim_{x \rightarrow a^+} \ln(x-a) = +\infty$$

例 6

证明反常积分 $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^q}$ 当 $0 < q < 1$ 时收敛, $q \geq 1$ 时发散.

解: $x = a$ 是瑕点.

当 $q = 1$ 时

$$\int_a^b \frac{dx}{x-a} = [\ln(x-a)]_a^b = \ln(b-a) - \lim_{x \rightarrow a^+} \ln(x-a) = +\infty$$

当 $q \neq 1$ 且 $q > 0$ 时

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^q} = \left[\frac{1}{1-q} (x-a)^{1-q} \right]_a^b$$

例 6

证明反常积分 $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^q}$ 当 $0 < q < 1$ 时收敛, $q \geq 1$ 时发散.

解: $x = a$ 是瑕点.

当 $q = 1$ 时

$$\int_a^b \frac{dx}{x-a} = [\ln(x-a)]_a^b = \ln(b-a) - \lim_{x \rightarrow a^+} \ln(x-a) = +\infty$$

当 $q \neq 1$ 且 $q > 0$ 时

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^q} = \left[\frac{1}{1-q} (x-a)^{1-q} \right]_a^b = \begin{cases} \frac{(b-a)^{1-q}}{1-q}, & 0 < q < 1 \\ +\infty, & q > 1 \end{cases}$$

因此, 当 $0 < q < 1$ 时, 反常积分收敛; 当 $q \geq 1$ 时, 反常积分发散.

反常积分也使用换元法替换成正常积分.

反常积分也使用换元法替换成正常积分.

例 7

求反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)^3}}$

反常积分也使用换元法替换成正常积分.

例 7

求反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)^3}}$

解: 取 $\sqrt{x} = \tan u$ ($0 < u < \frac{\pi}{2}$), 则 $x = \tan^2 u$, $dx = 2 \tan u \sec^2 u du$.

反常积分也使用换元法替换成正常积分.

例 7

求反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)^3}}$

解: 取 $\sqrt{x} = \tan u$ ($0 < u < \frac{\pi}{2}$), 则 $x = \tan^2 u$, $dx = 2 \tan u \sec^2 u du$.

又因为

$$\sec^2 u = \tan^2 u + 1,$$

且 $0 < u < \frac{\pi}{2}$, $\sec u > 0$.

反常积分也使用换元法替换成正常积分.

例 7

求反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)^3}}$

解: 取 $\sqrt{x} = \tan u$ ($0 < u < \frac{\pi}{2}$), 则 $x = \tan^2 u$, $dx = 2 \tan u \sec^2 u du$.

又因为

$$\sec^2 u = \tan^2 u + 1,$$

且 $0 < u < \frac{\pi}{2}$, $\sec u > 0$.

代入所求积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)^3}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \tan u \sec^2 u du}{\tan u \sec^3 u} =$$

反常积分也使用换元法替换成正常积分.

例 7

求反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)^3}}$

解: 取 $\sqrt{x} = \tan u$ ($0 < u < \frac{\pi}{2}$), 则 $x = \tan^2 u$, $dx = 2 \tan u \sec^2 u du$.

又因为

$$\sec^2 u = \tan^2 u + 1,$$

且 $0 < u < \frac{\pi}{2}$, $\sec u > 0$.

代入所求积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)^3}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \tan u \sec^2 u du}{\tan u \sec^3 u} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos u du = 2.$$

作业

- 教材习题 5-4: $1(1)(3)(8)(10)$, 4.