

函数图像绘制、曲率

高等数学 I-信息、统计外招

Weiwen Wang(王伟文)

暨南大学

2025 年秋季学期



课程网页

绘制函数图形需要确定函数的拐点, 驻点, 单调区间, 凹凸区间

- (1) 确定函数的定义域; 求出函数的一阶导数 $f'(x)$ 和二阶导数 $f''(x)$;
- (2) 求出一阶导数 $f'(x)$ 和二阶导数 $f''(x)$ 在函数定义域内的全部零点, 并求出函数 $f(x)$ 的间断点及 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 不存在的点, 用这些点把函数定义域划分成几个部分的区间;
- (3) 确定在这些部分区间内 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 的符号, 并由此确定函数图形的升降、凹凸和拐点;
- (4) 确定函数图形的水平、铅直渐进线;
- (5) 算出 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 的零点以及不存在的点对应的函数值.

绘制函数图形需要确定函数的拐点, 驻点, 单调区间, 凹凸区间

- (1) 确定函数的定义域; 求出函数的一阶导数 $f'(x)$ 和二阶导数 $f''(x)$;
- (2) 求出一阶导数 $f'(x)$ 和二阶导数 $f''(x)$ 在函数定义域内的全部零点, 并求出函数 $f(x)$ 的间断点及 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 不存在的点, 用这些点把函数定义域划分成几个部分的区间;
- (3) 确定在这些部分区间内 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 的符号, 并由此确定函数图形的升降、凹凸和拐点;
- (4) 确定函数图形的水平、铅直渐进线;
- (5) 算出 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 的零点以及不存在的点对应的函数值.

绘制函数图形需要确定函数的拐点, 驻点, 单调区间, 凹凸区间

- (1) 确定函数的定义域; 求出函数的一阶导数 $f'(x)$ 和二阶导数 $f''(x)$;
- (2) 求出一阶导数 $f'(x)$ 和二阶导数 $f''(x)$ 在函数定义域内的全部零点, 并求出函数 $f(x)$ 的间断点及 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 不存在的点, 用这些点把函数定义域划分成几个部分的区间;
- (3) 确定在这些部分区间内 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 的符号, 并由此确定函数图形的升降、凹凸和拐点;
- (4) 确定函数图形的水平、铅直渐进线;
- (5) 算出 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 的零点以及不存在的点对应的函数值.

绘制函数图形需要确定函数的拐点, 驻点, 单调区间, 凹凸区间

- (1) 确定函数的定义域; 求出函数的一阶导数 $f'(x)$ 和二阶导数 $f''(x)$;
- (2) 求出一阶导数 $f'(x)$ 和二阶导数 $f''(x)$ 在函数定义域内的全部零点, 并求出函数 $f(x)$ 的间断点及 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 不存在的点, 用这些点把函数定义域划分成几个部分的区间;
- (3) 确定在这些部分区间内 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 的符号, 并由此确定函数图形的升降、凹凸和拐点;
- (4) 确定函数图形的水平、铅直渐进线;**
- (5) 算出 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 的零点以及不存在的点对应的函数值.

绘制函数图形需要确定函数的拐点, 驻点, 单调区间, 凹凸区间

- (1) 确定函数的定义域; 求出函数的一阶导数 $f'(x)$ 和二阶导数 $f''(x)$;
- (2) 求出一阶导数 $f'(x)$ 和二阶导数 $f''(x)$ 在函数定义域内的全部零点, 并求出函数 $f(x)$ 的间断点及 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 不存在的点, 用这些点把函数定义域划分成几个部分的区间;
- (3) 确定在这些部分区间内 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 的符号, 并由此确定函数图形的升降、凹凸和拐点;
- (4) 确定函数图形的水平、铅直渐进线;
- (5) 算出 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 的零点以及不存在的点对应的函数值.

例 1

画出函数 $y = x^3 - x^2 - x + 1$ 的函数图形.

例 1

画出函数 $y = x^3 - x^2 - x + 1$ 的函数图形.

解 1. 写出函数定义、一阶导数和二阶导数.

函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$.

$$y' = 3x^2 - 2x - 1 \quad y'' = 6x - 2$$

2. 此函数没有间断点、一阶导数、二阶导数不存在的点.

令 $y' = 0$, 即

$$y' = 3x^2 - 2x - 1 = (3x + 1)(x - 1) = 0$$

解得 $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = 1$.

令 $y'' = 6x - 2 = 0$, 解得 $x = \frac{1}{3}$.

$x = -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}$ 将定义域 $(-\infty, +\infty)$ 划分为

$$(-\infty, -\frac{1}{3}), (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}), (\frac{1}{3}, 1), (1, +\infty).$$

3. 当 $x \in (-\infty, -\frac{1}{3})$ 时, $f'(x) > 0$, $f''(x) < 0$, 故在该区间内函数单调递增, 且函数图形为凸弧.

当 $x \in (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ 时, $f'(x) < 0$, $f''(x) < 0$, 在该区间内函数单调递减, 且函数图形为凸弧.

当 $x \in (\frac{1}{3}, 1)$ 时, $f'(x) < 0$, $f''(x) > 0$, 在该区间内函数单调递减, 且函数图形为凹弧.

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$, 在该区间内函数单调递增, 且函数图形为凹弧.

当 $x = \frac{1}{3}$ 时, $y = \frac{16}{27}$, 即函数图形的拐点为 $(\frac{1}{3}, \frac{16}{27})$.

4. 函数图形不存在水平渐近线、铅直渐近线.

5. 计算一些点的函数值

$$f(-\frac{1}{3}) = \frac{32}{27}, \quad f(1) = 0.$$

故函数图形通过 $(-\frac{1}{3}, \frac{32}{27}), (\frac{1}{3}, \frac{16}{27}), (1, 0)$.

定义 (有向弧)

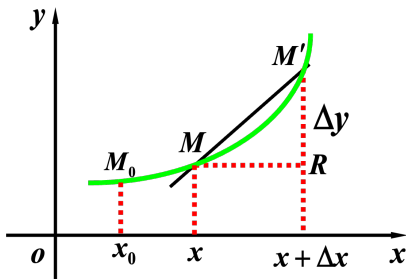
设函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内具有连续导数. 在曲线 $y = f(x)$ 上取固定点 $M_0(x_0, y_0)$ 作为度量弧长的基点, 并规定依 x 增大的方向作为曲线的正向. 对曲线上任一点 $M(x, y)$, 规定有向弧段 $\widehat{M_0M}$ 的值 s 如下:

- $|s|$ 即有向弧段 $\widehat{M_0M}$ 的长度;
 - $\widehat{M_0M}$ 的方向与曲线方向一致时, $s > 0$;
 - $\widehat{M_0M}$ 的方向与曲线方向相反时, $s < 0$.
-
- 弧 s 与 x 存在函数关系: $s = s(x)$, 且 $s(x)$ 是 x 的单调增加函数.

弧增量 Δs

设 $x, x + \Delta x$ 为 (a, b) 内相邻的点, 分别对应曲线 $y = f(x)$ 上的点 M, M' , 则弧 s 的增量为

$$\Delta s = \widehat{M_0 M'} - \widehat{M_0 M} = \widehat{M M'}$$



$$\left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2 = \left(\frac{\widehat{MM'}}{\Delta x}\right)^2 = \left(\frac{\widehat{MM'}}{|MM'|} \cdot \frac{|MM'|}{\Delta x}\right)^2$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2 &= \left(\frac{\widehat{MM'}}{\Delta x}\right)^2 = \left(\frac{\widehat{MM'}}{|MM'|} \cdot \frac{|MM'|}{\Delta x}\right)^2 \\ &= \left(\frac{\widehat{MM'}}{|MM'|}\right)^2 \frac{|MM'|^2}{(\Delta x)^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2 &= \left(\frac{\widehat{MM'}}{\Delta x}\right)^2 = \left(\frac{\widehat{MM'}}{|MM'|} \cdot \frac{|MM'|}{\Delta x}\right)^2 \\
 &= \left(\frac{\widehat{MM'}}{|MM'|}\right)^2 \frac{|MM'|^2}{(\Delta x)^2} \\
 &= \left(\frac{\widehat{MM'}}{|MM'|}\right)^2 \frac{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}{(\Delta x)^2} \\
 &= \left(\frac{\widehat{MM'}}{|MM'|}\right)^2 \left[1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right]
 \end{aligned}$$

因为 $s(x)$ 是关于 x 的单调增加函数,

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} = \frac{\widehat{MM'}}{|MM'|} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$$

$$\frac{ds}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\widehat{MM'}}{|MM'|} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2} \right)$$

$$\frac{ds}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\widehat{MM'}}{|MM'|} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2} \right) = \sqrt{1 + y'^2}$$

$$\frac{ds}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\widehat{MM'}}{|MM'|} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2} \right) = \sqrt{1 + y'^2}$$

弧微分公式: $ds = \sqrt{1 + y'^2} dx$

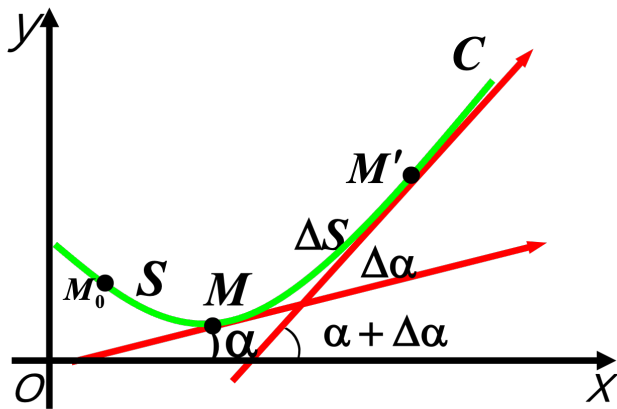
定义 (平均曲率与曲率)

设 $y=f(x)$ 存在二阶导数. 在曲线 $y=f(x)$ 上取固定 M_0 作为度量弧 s 的基点. 设曲线上点 M 对应于弧 s , 在点 M 处切线的倾角为 α ; 曲线上另外一点 M' 对应于弧 $s+\Delta s$, 在点 M' 处切线的倾角为 $\alpha+\Delta\alpha$, 则弧段 $\widehat{MM'}$ 的长度为 $|\Delta s|$, 当动点从 M 运动到 M' 时切线转过的角度为 $|\Delta\alpha|$. 定义弧段 $\widehat{MM'}$ 的平均曲率为

$$\bar{K} = \frac{|\Delta s|}{|\Delta\alpha|}$$

分别记点 M, M' 的横坐标为 $x, x+\Delta x$, 定义点 M 处点曲率为

$$K = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta s|}{|\Delta\alpha|}$$



曲率计算

$$\begin{aligned} K &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta s|}{|\Delta \alpha|} = \left| \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta s}{\Delta x} \middle/ \left(\frac{\Delta \alpha}{\Delta x} \right) \right) \right| \\ &= \left| \frac{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta x}}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta x}} \right| = \left| \frac{ds/dx}{d\alpha/dx} \right| \end{aligned}$$

又因为 $\tan \alpha = y'$, 等式两端同时关于 x 求导

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} \frac{d\alpha}{dx} = y'' \Rightarrow \frac{d\alpha}{dx} = y'' \cos^2 \alpha = \frac{y''}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{y''}{1 + y'^2}$$

曲率计算

结合弧微分公式, 点 $M(x,y)$ 处的曲率为

$$K = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

例 1

计算等边双曲线 $xy = 1$ 在点 $(1, 1)$ 处的曲率.

例 1

计算等边双曲线 $xy = 1$ 在点 $(1, 1)$ 处的曲率.

解 由 $y = \frac{1}{x}$ 得

$$y' = -\frac{1}{x^2} \quad y'' = \frac{2}{x^3}$$

$$y'|_{x=1} = -1 \quad y''|_{x=1} = 2.$$

代入曲率计算公式, 曲线在点 $(1, 1)$ 处的曲率为

$$K = \frac{2}{(1 + 1^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

定义 (曲率圆与曲率半径)

设曲线 $y = f(x)$ 在点 $M(x, y)$ 处曲率为 $K (K \neq 0)$. 在点 M 处的曲线的法线上, 在凹的一侧取一点 D , 使得 $|DM| = \frac{1}{K} = \rho$. 以 D 为圆心, ρ 为半径作圆, 这个圆叫做曲线在点 M 处的曲率圆, 曲率圆的圆心 D 叫做曲线在点 M 处的曲率中心, 曲率圆的半径 ρ 叫做曲线在点 M 处的曲率半径.

- 曲率圆与曲线在点 M 处有相同的切线与曲率.
- 在点 M 处的曲率半径 ρ 与曲率 $K (K \neq 0)$ 互为倒数: $K = \frac{1}{\rho}$,
 $\rho = \frac{1}{K}$.

作业

- 教材习题 3-6: 1 (模仿例 1 解题).
- 教材习题 3-7:1;3;5.