

# 泰勒公式

高等数学 I-信息、统计外招

Weiwen Wang(王伟文)

暨南大学

2025 年秋季学期



课程网页

设  $f(x)$  在  $x_0$  处具有  $n$  阶导数, 能否找到一个关于  $(x-x_0)$  的  $n$  次多项式

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n$$

来近似表达  $f(x)$ , 使得  $f(x) - p_n(x)$  是当  $x \rightarrow x_0$  时比  $(x-x_0)^n$  的高阶无穷小.

设  $f(x)$  在  $x_0$  处具有  $n$  阶导数, 能否找到一个关于  $(x-x_0)$  的  $n$  次多项式

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n$$

来近似表达  $f(x)$ , 使得  $f(x) - p_n(x)$  是当  $x \rightarrow x_0$  时比  $(x-x_0)^n$  的高阶无穷小.

**A:** 能找到! 且多项式的系数  $a_k (k=0, 1, 2, \dots, n)$  由  $f(x)$  在  $x_0$  处的  $k$ -阶导数确定!

## 定理 (泰勒 (Taylor) 中值定理 1)

如果函数  $f(x)$  在  $x_0$  处具有  $n$  阶导数, 那么存在  $x_0$  的一个邻域, 对于该邻域内的任一  $x$ , 有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x)$$

其中

$$R_n(x) = o((x-x_0)^n).$$

## 定理 (泰勒 (Taylor) 中值定理 1)

如果函数  $f(x)$  在  $x_0$  处具有  $n$  阶导数, 那么存在  $x_0$  的一个邻域, 对于该邻域内的任一  $x$ , 有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x)$$

其中

$$R_n(x) = o((x-x_0)^n).$$

- $$p_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

## 定理 (泰勒 (Taylor) 中值定理 1)

如果函数  $f(x)$  在  $x_0$  处具有  $n$  阶导数, 那么存在  $x_0$  的一个邻域, 对于该邻域内的任一  $x$ , 有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x)$$

其中

$$R_n(x) = o((x-x_0)^n).$$

- $p_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$
- $p_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0), k = 0, 1, 2, \dots, n.$

## 定理 (泰勒 (Taylor) 中值定理 1)

如果函数  $f(x)$  在  $x_0$  处具有  $n$  阶导数, 那么存在  $x_0$  的一个邻域, 对于该邻域内的任一  $x$ , 有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x)$$

其中

$$R_n(x) = o((x-x_0)^n).$$

- $p_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$
- $p_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0), k = 0, 1, 2, \dots, n.$
- $R_n(x) = o((x-x_0)^n)$  称为皮亚诺余项.

## 定理 (泰勒 (Taylor) 中值定理 2)

如果函数  $f(x)$  在  $x_0$  的某个邻域  $U(x_0)$  内具有  $(n+1)$  导数, 那么对任一  $x \in U(x_0)$ , 有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x)$$

其中

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!},$$

这里  $\xi$  是  $x_0$  与  $x$  之间的某个值.

- $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$  称为拉格朗日余项.



在泰勒公式中, 取  $x_0 = 0$

- 带皮亚诺余项的麦克劳林公式

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

- 带拉格朗日余项的麦克劳林公式

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad \exists \theta \in (0, 1).$$

### 例 1

写出函数  $f(x) = e^x$  的带有拉格朗日余项的  $n$  麦克劳林公式.

### 例 1

写出函数  $f(x) = e^x$  的带有拉格朗日余项的  $n$  麦克劳林公式.

解因为  $f^{(k)}(x) = e^x, n = 0, 1, 2, \dots, n+1$ . 故

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = f^{(3)}(0) = \dots = f^{(n)}(0) = e^0 = 1.$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} \quad \exists \theta \in (0, 1)$$

### 例 1

写出函数  $f(x) = e^x$  的带有拉格朗日余项的  $n$  麦克劳林公式.

解因为  $f^{(k)}(x) = e^x, n = 0, 1, 2, \dots, n+1$ . 故

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = f^{(3)}(0) = \dots = f^{(n)}(0) = e^0 = 1.$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} \quad \exists \theta \in (0, 1)$$

根据 Taylor 中值定理 2, 所求麦克劳林公式为

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} \quad \exists \theta \in (0, 1)$$

拉格朗日余项满足

$$|R_n(x)| = \left| \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} \right| < \frac{e^{|x|}}{(n+1)!} |x|^{n+1}.$$

# 作业

- 教材习题 3-3: 4.