

# 函数的极值与最大值最小值

高等数学 I-信息、统计外招

Weiwen Wang(王伟文)

暨南大学

2025 年秋季学期



课程网页

## 定义 (极大值与极小值)

设函数  $f(x)$  在点  $x_0$  的某邻域  $U(x_0)$  内有定义, 如果对于去心邻域  $\mathring{U}(x_0)$  内任一  $x$ , 有

$$f(x) < f(x_0) \quad (\text{或 } f(x) > f(x_0))$$

那么就称  $f(x_0)$  是函数  $f(x)$  的一个极大值(或极小值).

## 定义 (极大值与极小值)

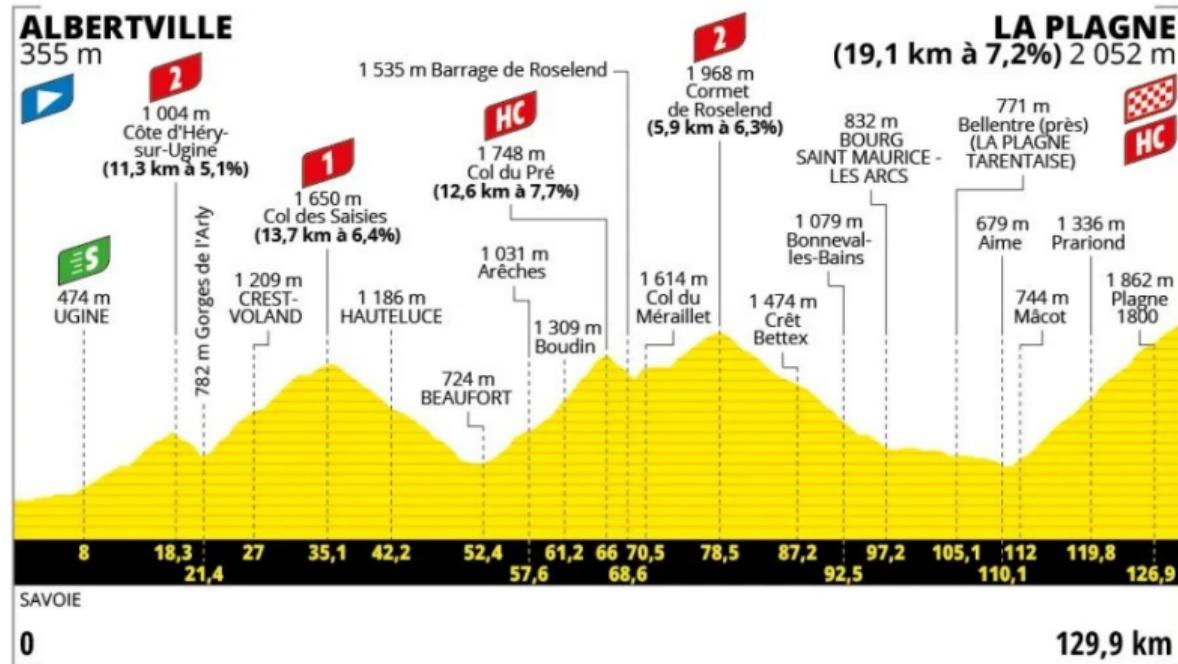
设函数  $f(x)$  在点  $x_0$  的某邻域  $U(x_0)$  内有定义, 如果对于去心邻域  $\mathring{U}(x_0)$  内任一  $x$ , 有

$$f(x) < f(x_0) \quad (\text{或 } f(x) > f(x_0))$$

那么就称  $f(x_0)$  是函数  $f(x)$  的一个极大值(或极小值).

函数的极大值与极小值统称为函数的极值, 使得函数取得极值的点称为极值点.

# 2025 年环法自行车赛: 第 19 赛段——阿尔贝维尔 (Albertville) 至拉普拉涅 (La Plagne)



## 定理 1 (必要条件)

设函数  $f(x)$  在  $x_0$  处可导, 且在  $x_0$  处取得极值, 则  $f'(x_0) = 0$ .

- 若极值点处可导, 则极值点必然为驻点; 反之不成立!
- 导数不存在的点也可能是极值点, 如函数  $y = |x|$  在  $x = 0$  处取得极小值.

# 判断极值点的方法之一

## 定理 2 (第一充分条件)

设函数  $f(x)$  在  $x_0$  连续, 且在  $x_0$  的某去心邻域  $\mathring{U}(x_0, \delta)$  内可导,

- (1) 若  $x \in (x_0 - \delta, x_0)$  时,  $f'(x) > 0$ , 而  $x \in (x_0, x_0 + \delta)$  时,  $f'(x) < 0$ , 则  
 $f(x)$  在  $x_0$  处取得极大值;

# 判断极值点的方法之一

## 定理 2 (第一充分条件)

设函数  $f(x)$  在  $x_0$  连续, 且在  $x_0$  的某去心邻域  $\mathring{U}(x_0, \delta)$  内可导,

- (1) 若  $x \in (x_0 - \delta, x_0)$  时,  $f'(x) > 0$ , 而  $x \in (x_0, x_0 + \delta)$  时,  $f'(x) < 0$ , 则  $f(x)$  在  $x_0$  处取得极大值;
- (2) 若  $x \in (x_0 - \delta, x_0)$  时,  $f'(x) < 0$ , 而  $x \in (x_0, x_0 + \delta)$  时,  $f'(x) > 0$ , 则  $f(x)$  在  $x_0$  处取得极小值.

# 判断极值点的方法之一

## 定理 2 (第一充分条件)

设函数  $f(x)$  在  $x_0$  连续, 且在  $x_0$  的某去心邻域  $\mathring{U}(x_0, \delta)$  内可导,

- (1) 若  $x \in (x_0 - \delta, x_0)$  时,  $f'(x) > 0$ , 而  $x \in (x_0, x_0 + \delta)$  时,  $f'(x) < 0$ , 则  $f(x)$  在  $x_0$  处取得极大值;
- (2) 若  $x \in (x_0 - \delta, x_0)$  时,  $f'(x) < 0$ , 而  $x \in (x_0, x_0 + \delta)$  时,  $f'(x) > 0$ , 则  $f(x)$  在  $x_0$  处取得极小值.

- 在  $x_0$  的某个邻域内先增后减极大值; 先减后增极小值.

## 例

求函数  $f(x) = x - \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$  的极值.

## 例

求函数  $f(x) = x - \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$  的极值.

解 函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上连续, 且

$$f'(x) = 1 - x^{-\frac{1}{3}} = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

故  $x = 1$  为函数  $f(x)$  的驻点,  $x = 0$  处函数不可导.

## 例

求函数  $f(x) = x - \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$  的极值.

解 函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上连续, 且

$$f'(x) = 1 - x^{-\frac{1}{3}} = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

故  $x = 1$  为函数  $f(x)$  的驻点,  $x = 0$  处函数不可导.

当  $x > 1$  时,  $f'(x) > 0$ ; 当  $0 < x < 1$  时,  $f'(x) < 0$ ; 当  $x < 0$  时,  $f'(x) > 0$ .

故函数  $f(x)$  在  $x = 0$  处取得极大值  $f(0) = 0$ , 在  $x = 1$  处取得极小值

$$f(1) = -\frac{1}{2}.$$

# 第一充分定理求极值的步骤

- (1) 求出导数  $f'(x)$ ;
- (2) 求出  $f(x)$  全部驻点与不可导点;
- (3) 考察  $f'(x)$  的符号在每个驻点或不可导点的左、右邻近的情形, 以确定该点是否为极值点; 若是极值点, 进一步确定是极大值点还是极小值点.

### 定理 3 (第二充分条件)

设函数  $f(x)$  在  $x_0$  处具有二阶导数且  $f'(x_0) = 0, f''(x_0) \neq 0$ , 则

- (1) 当  $f''(x_0) < 0$  时, 函数在  $x_0$  处取得极大值;
- (2) 当  $f''(x_0) > 0$  时, 函数在  $x_0$  处取得极小值.

证明.

证 (2). 由二阶导数定义

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = f''(x_0) > 0.$$

证明.

证 (2). 由二阶导数定义

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = f''(x_0) > 0.$$

由极限的保号性, 存在  $x_0$  某邻域  $U(x_0)$ , 使得

$$\frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} > 0 \quad \forall x \in U(x_0)$$

证明.

证 (2). 由二阶导数定义

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = f''(x_0) > 0.$$

由极限的保号性, 存在  $x_0$  某邻域  $U(x_0)$ , 使得

$$\frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} > 0 \quad \forall x \in U(x_0)$$

故在此邻域内, 当  $x$  位于  $x_0$  左侧,  $f'(x) < f'(x_0) = 0$ ; 当  $x$  位于  $x_0$  右侧,  
 $f'(x) > f'(x_0) = 0$ .

证明.

证 (2). 由二阶导数定义

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = f''(x_0) > 0.$$

由极限的保号性, 存在  $x_0$  某邻域  $U(x_0)$ , 使得

$$\frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} > 0 \quad \forall x \in U(x_0)$$

故在此邻域内, 当  $x$  位于  $x_0$  左侧,  $f'(x) < f'(x_0) = 0$ ; 当  $x$  位于  $x_0$  右侧,  $f'(x) > f'(x_0) = 0$ .

函数  $f(x)$  在  $x_0$  处取得极小值, 即  $x_0$  为  $f(x)$  的极小值点. □

## 例 2

求函数  $f(x) = (x^2 - 1)^3 + 1$  的极值

## 例 2

求函数  $f(x) = (x^2 - 1)^3 + 1$  的极值

解

$$f'(x) = 3(x^2 - 1)^2 \cdot 2x \quad f''(x) = 24x^2(x^2 - 1) + 6(x^2 - 1)^2$$

函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上无不可导点. 令  $f'(x) = 0$ , 解得

$$x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = 1.$$

## 例 2

求函数  $f(x) = (x^2 - 1)^3 + 1$  的极值

解

$$f'(x) = 3(x^2 - 1)^2 \cdot 2x \quad f''(x) = 24x^2(x^2 - 1) + 6(x^2 - 1)^2$$

函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上无不可导点. 令  $f'(x) = 0$ , 解得

$$x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = 1.$$

当  $x = 0$  时,  $f''(0) = 6 > 0$ , 故  $x = 0$  为函数  $f(x)$  的极小值点, 极小值为  $f(0) = 0$ .

## 例 2

求函数  $f(x) = (x^2 - 1)^3 + 1$  的极值

解

$$f'(x) = 3(x^2 - 1)^2 \cdot 2x \quad f''(x) = 24x^2(x^2 - 1) + 6(x^2 - 1)^2$$

函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上无不可导点. 令  $f'(x) = 0$ , 解得

$$x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = 1.$$

当  $x = 0$  时,  $f''(0) = 6 > 0$ , 故  $x = 0$  为函数  $f(x)$  的极小值点, 极小值为  $f(0) = 0$ .

当  $x = \pm 1$  时,  $f''(\pm 1) = 0$ , 不满足第二充分条件的使用条件.

## 例 2

求函数  $f(x) = (x^2 - 1)^3 + 1$  的极值

解

$$f'(x) = 3(x^2 - 1)^2 \cdot 2x \quad f''(x) = 24x^2(x^2 - 1) + 6(x^2 - 1)^2$$

函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上无不可导点. 令  $f'(x) = 0$ , 解得

$$x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = 1.$$

当  $x = 0$  时,  $f''(0) = 6 > 0$ , 故  $x = 0$  为函数  $f(x)$  的极小值点, 极小值为  $f(0) = 0$ .

当  $x = \pm 1$  时,  $f''(\pm 1) = 0$ , 不满足第二充分条件的使用条件.

当  $x < -1$  时,  $f'(x) < 0$ ; 当  $-1 < x < 0$  时,  $f'(x) < 0$ . 当  $0 < x < 1$  时,  $f'(x) > 0$ , 当  $x > 1$  时,  $f'(x) > 0$ . 即  $x = -1$  及  $x = 1$  的左、右邻近两侧  $f'(x)$  符号不变, 故在  $x = -1$  及  $x = 1$  处无极值.

# 最大值与最小值判断

闭区间  $[a, b]$  上的连续函数  $f(x)$  一定存在最大值最小值

- (1) 求出  $f(x)$  在  $(a, b)$  内的驻点及不可导点;
- (2) 计算  $f(x)$  在上述驻点、不可导点处的函数值及  $f(a), f(b)$ ;
- (3) 比较 (2) 中诸值的大小, 其中最大的便是  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的最大值、最小值即是  $f(x)$  的最小值.

### 例 3

求函数  $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$  在区间  $[-3, 4]$  上的最大值与最小值.

### 例 3

求函数  $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$  在区间  $[-3, 4]$  上的最大值与最小值.

解

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 & x \in [-3, 1] \cup [2, 4] \\ -x^2 + 3x - 2 & x \in (1, 2) \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 3 & x \in (-3, 1) \cup (2, 4) \\ -2x + 3 & x \in (1, 2) \end{cases}$$

### 例 3

求函数  $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$  在区间  $[-3, 4]$  上的最大值与最小值.

解

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 & x \in [-3, 1] \cup [2, 4] \\ -x^2 + 3x - 2 & x \in (1, 2) \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 3 & x \in (-3, 1) \cup (2, 4) \\ -2x + 3 & x \in (1, 2) \end{cases}$$

$x = \frac{3}{2}$  为  $f(x)$  的驻点, 在  $x = 1$  及  $x = 2$  处不可导.

$f(-3) = 20$ ,  $f(4) = 6$ ,  $f(\frac{3}{2}) = \frac{1}{4}$ ,  $f(1) = 0$ ,  $f(2) = 0$ . 故在此区间内  $f(x)$  的最大值为 20, 最小值为 0.

$f(x)$  在一个区间 (有限或无限, 闭或开) 内可导且只有一个驻点  $x_0$ , 并且这个驻点  $x_0$  是函数的极值; 那么, 当  $f(x_0)$  是极大值时,  $f(x_0)$  就是该区间的最大值; 当  $f(x_0)$  为极小值时,  $f(x_0)$  就是该区间的最小值.

## 例

假设某工厂生产产品  $x$  千件成本为

$C(x) = 2400 + 4000x + 100x^2$ (元), 销售产品  $x$  千件的收入为

$r(x) = 5000x$ (元), 问生产多少件时利润最大?

## 例

假设某工厂生产产品  $x$  千件成本为

$C(x) = 2400 + 4000x + 100x^2$ (元), 销售产品  $x$  千件的收入为  
 $r(x) = 5000x$ (元), 问生产多少件时利润最大?

解 利润函数为

$$L(x) = r(x) - C(x) = -100x^2 + 1000x - 2400$$

$$L'(x) = -200x + 1000 \quad L''(x) = -200$$

令  $L'(x) = -200x + 1000 = 0$ , 解得  $x = 5$ , 故  $x = 5$  为该函数的唯一驻点, 且  
 $L''(5) = -200 < 0$ , 亦即  $x = 5$  为该函数的极大值点, 极大值为  $L(5) = 100$ ,  
此极大值为最大值. 因此生产 5 千件时利润最大.

# 作业

- 教材习题 3-5: 1(1)(2); 6(1)(2); 7; 17.