

定积分的概念与性质

高等数学 I-信息、统计外招

Weiwen Wang(王伟文)

暨南大学

2025 年秋季学期



课程网页

定积分思想的源头

- 现代定积分由牛顿与莱布尼茨在 17 世纪建立
- 但其核心思想——“分割 + 求和”——可追溯到数千年前
- 古埃及的测量、工程与建筑中，已经出现类似积分的实践方法

计算区间 $[a, b]$ 上, 曲线 $y = f(x)$ 与 x 轴所围成的面积.

(1) 在区间 $[a, b]$ 上取 $n - 1$ 个点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

计算区间 $[a, b]$ 上, 曲线 $y = f(x)$ 与 x 轴所围成的面积.

(1) 在区间 $[a, b]$ 上取 $n-1$ 个点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

(2) 上述 $n-1$ 个点将 $[a, b]$ 划分成 n 个小区间

$$[x_i, x_{i+1}], i = 1, 2, \dots, n$$

区间长度为 $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$.

计算区间 $[a, b]$ 上, 曲线 $y = f(x)$ 与 x 轴所围成的面积.

(1) 在区间 $[a, b]$ 上取 $n-1$ 个点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

(2) 上述 $n-1$ 个点将 $[a, b]$ 划分成 n 个小区间

$$[x_i, x_{i+1}], i = 1, 2, \dots, n$$

区间长度为 $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$.

(3) 在区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 内任取一点 ξ_i , 则曲线在此区间内与 x 轴所围成的面积约等于 $f(\xi_i)\Delta x_i$

计算区间 $[a, b]$ 上, 曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴所围成的面积.

(1) 在区间 $[a, b]$ 上取 $n-1$ 个点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

(2) 上述 $n-1$ 个点将 $[a, b]$ 划分成 n 个小区间

$$[x_i, x_{i+1}], i = 1, 2, \dots, n$$

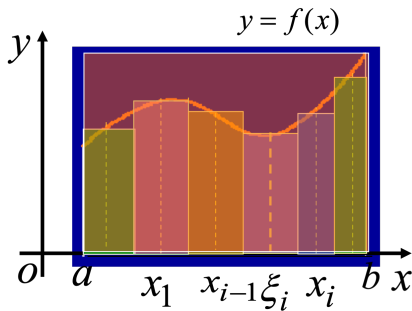
区间长度为 $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$.

(3) 在区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 内任取一点 ξ_i , 则曲线在此区间内与 x 轴所围成的面积约等于 $f(\xi_i)\Delta x_i$

(4) 所求曲线下面积约等于 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$

记 $\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n\}$, 则所求面积为

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$



定义 1 (定积分)

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有界, 在 $[a, b]$ 中任意插入 $n-1$ 个分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

把区间 $[a, b]$ 分成 n 个小区间

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \cdots, [x_{n-1}, x_n],$$

各个小区间的长度依此为

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0, \Delta x_2 = x_2 - x_1, \cdots, \Delta x_n = x_n - x_{n-1}.$$

定义 1 (续)

在每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上任取一点 $\xi_i (x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i)$, 在函数值 $f(\xi_i)$ 与小区间长度 Δx_i 的乘积 $f(\xi_i)\Delta x_i (i = 1, 2, \dots, n)$, 并作和

$$S = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i. \quad (1-1)$$

定义 1 (续)

在每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上任取一点 $\xi_i (x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i)$, 在函数值 $f(\xi_i)$ 与小区间长度 Δx_i 的乘积 $f(\xi_i)\Delta x_i (i = 1, 2, \dots, n)$, 并作和

$$S = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i. \quad (1-1)$$

记 $\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n\}$, 如果当 $\lambda \rightarrow 0$ 时, 这个和的极限存在, 且与闭区间 $[a, b]$ 的分法及点 ξ_i 的取法无关, 那么称这个极限 I 称为函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的定积分(简称积分),

定义 1 (续)

在每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上任取一点 $\xi_i (x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i)$, 在函数值 $f(\xi_i)$ 与小区间长度 Δx_i 的乘积 $f(\xi_i)\Delta x_i (i = 1, 2, \dots, n)$, 并作和

$$S = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i. \quad (1-1)$$

记 $\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n\}$, 如果当 $\lambda \rightarrow 0$ 时, 这个和的极限存在, 且与闭区间 $[a, b]$ 的分法及点 ξ_i 的取法无关, 那么称这个极限 I 称为函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的定积分(简称积分), 记作 $\int_a^b f(x)dx$, 即

$$\int_a^b f(x)dx = I = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i, \quad (1-2)$$

定义 1 (续)

$$\int_a^b f(x)dx = I = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i, \quad (1-2)$$

其中 $f(x)$ 叫做被积函数, $f(x)dx$ 叫做被积表达式, x 叫做积分变量,
 a 叫做积分下限, b 叫做积分上限, $[a, b]$ 叫做积分区间.

定义 1 (续)

$$\int_a^b f(x)dx = I = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i, \quad (1-2)$$

其中 $f(x)$ 叫做被积函数, $f(x)dx$ 叫做被积表达式, x 叫做积分变量, a 叫做积分下限, b 叫做积分上限, $[a, b]$ 叫做积分区间.

- 若函数 f 和积分区间不变, 且定积分存在, 则积分值与积分变量的记号无关, 即

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du.$$

定义 1 (续)

$$\int_a^b f(x)dx = I = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i, \quad (1-2)$$

其中 $f(x)$ 叫做被积函数, $f(x)dx$ 叫做被积表达式, x 叫做积分变量, a 叫做积分下限, b 叫做积分上限, $[a, b]$ 叫做积分区间.

- 若函数 f 和积分区间不变, 且定积分存在, 则积分值与积分变量的记号无关, 即

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du.$$

- $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ 称为 $f(x)$ 的积分和. 如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的定积分存在, 则称 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积.

- $\int_a^b f(x)dx = I \iff$

- $\int_a^b f(x)dx = I \iff$

对于任意 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对于区间 $[a, b]$ 的任何划分,
不论 ξ_i 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 中如何选取,

- $\int_a^b f(x)dx = I \iff$

对于任意 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对于区间 $[a, b]$ 的任何划分,
不论 ξ_i 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 中如何选取, 只要

$$\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n\} < \delta,$$

- $\int_a^b f(x)dx = I \iff$

对于任意 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对于区间 $[a, b]$ 的任何划分,
不论 ξ_i 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 中如何选取, 只要

$$\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n\} < \delta,$$

则

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i - I \right| < \epsilon.$$

定积分几何意义

- 若 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上非负;

定积分几何意义

- 若 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上非负;
- 若 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上非正;

定积分几何意义

- 若 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上非负;
- 若 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上非正;
- 若 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有正有负.

定理 1

设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可积.

定理 2

设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有界, 且只有有限个间断点, 则 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可积.

例 1

利用定义计算定积分 $\int_0^1 x^2 dx$

例 1

利用定义计算定积分 $\int_0^1 x^2 dx$

解: 因为 $f(x) = x^2$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续, 故 $\int_0^1 x^2 dx$ 存在, 且与 $[0, 1]$ 上的划分方法及积分和的取点 ξ_i 无关.

例 1

利用定义计算定积分 $\int_0^1 x^2 dx$

解: 因为 $f(x) = x^2$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续, 故 $\int_0^1 x^2 dx$ 存在, 且与 $[0, 1]$ 上的划分方法及积分和的取点 ξ_i 无关.

不妨将 $[0, 1]$ 取 n 等分, $x_i = \frac{i}{n}, i = 0, 1, 2, \dots, n$, 则

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n}, i = 1, 2, \dots, n.$$

例 1

利用定义计算定积分 $\int_0^1 x^2 dx$

解: 因为 $f(x) = x^2$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续, 故 $\int_0^1 x^2 dx$ 存在, 且与 $[0, 1]$ 上的划分方法及积分和的取点 ξ_i 无关.

不妨将 $[0, 1]$ 取 n 等分, $x_i = \frac{i}{n}, i = 0, 1, 2, \dots, n$, 则

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n}, i = 1, 2, \dots, n.$$

取 $\xi_i = x_i$, 则积分和为

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \frac{i^2}{n^2} \frac{1}{n}$$

例 1

利用定义计算定积分 $\int_0^1 x^2 dx$

解: 因为 $f(x) = x^2$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续, 故 $\int_0^1 x^2 dx$ 存在, 且与 $[0, 1]$ 上的划分方法及积分和的取点 ξ_i 无关.

不妨将 $[0, 1]$ 取 n 等分, $x_i = \frac{i}{n}, i = 0, 1, 2, \dots, n$, 则

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n}, i = 1, 2, \dots, n.$$

取 $\xi_i = x_i$, 则积分和为

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \frac{i^2}{n^2} \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{n^3} \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

例 1

利用定义计算定积分 $\int_0^1 x^2 dx$

解: 因为 $f(x) = x^2$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续, 故 $\int_0^1 x^2 dx$ 存在, 且与 $[0, 1]$ 上的划分方法及积分和的取点 ξ_i 无关.

不妨将 $[0, 1]$ 取 n 等分, $x_i = \frac{i}{n}, i = 0, 1, 2, \dots, n$, 则

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n}, i = 1, 2, \dots, n.$$

取 $\xi_i = x_i$, 则积分和为

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i &= \sum_{i=1}^n \frac{i^2}{n^2} \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{n^3} \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \\ &= \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

记 $\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n\} = \frac{1}{n}$, 令 $\lambda \rightarrow 0$, 即 $n \rightarrow \infty$,

记 $\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n\} = \frac{1}{n}$, 令 $\lambda \rightarrow 0$, 即 $n \rightarrow \infty$, 由定积分定义

$$\int_0^1 x^2 dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

记 $\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n\} = \frac{1}{n}$, 令 $\lambda \rightarrow 0$, 即 $n \rightarrow \infty$, 由定积分定义

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2 dx &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

定积分补充规定

- 当 $a = b$ 时, $\int_a^b f(x)dx = 0$;

定积分补充规定

- 当 $a = b$ 时, $\int_a^b f(x)dx = 0$;
- 当 $a > b$ 时, $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

定积分性质

假定所讨论的定积分都存在.

性质 1

设 α 与 β 均为常数, 则

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx.$$

- 性质 1 对于任意有限个函数的线性组合也是成立的.

证明.

$$\begin{aligned}\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [\alpha f(\xi_i) \Delta x_i + \beta g(\xi_i) \Delta x_i] \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left[\sum_{i=1}^n \alpha f(\xi_i) \Delta x_i + \sum_{i=1}^n \beta g(\xi_i) \Delta x_i \right]\end{aligned}$$

证明.

$$\begin{aligned}\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [\alpha f(\xi_i) \Delta x_i + \beta g(\xi_i) \Delta x_i] \\&= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left[\sum_{i=1}^n \alpha f(\xi_i) \Delta x_i + \sum_{i=1}^n \beta g(\xi_i) \Delta x_i \right] \\&= \alpha \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i + \beta \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \Delta x_i \\&= \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx.\end{aligned}$$



引理 1

若 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可积, 则对于任意 $[c, d] \subset [a, b]$, $f(x)$ 在区间 $[c, d]$ 上可积.

性质 2

设 $a < c < b$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

- 定积分对于积分区间具有可加性;

性质 2

设 $a < c < b$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

- 定积分对于积分区间具有可加性;
- 无论 a, b, c 的相对位置, 总有

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

证明.

由引理 1, $\int_a^c f(x)dx$ 和 $\int_c^b f(x)dx$ 存在. 取 $[a,b]$ 上的一划分使得 c 也是其中一个分点, 则此划分也将区间 $[a,c]$ 和区间 $[c,b]$ 划分成不同的小区间, 且有

$$\sum_{[a,b]} f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{[a,c]} f(\xi_i) \Delta x_i + \sum_{[c,b]} f(\xi_i) \Delta x_i$$

证明.

由引理 1, $\int_a^c f(x)dx$ 和 $\int_c^b f(x)dx$ 存在. 取 $[a,b]$ 上的一划分使得 c 也是其中一个分点, 则此划分也将区间 $[a,c]$ 和区间 $[c,b]$ 划分成不同的小区间, 且有

$$\sum_{[a,b]} f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{[a,c]} f(\xi_i) \Delta x_i + \sum_{[c,b]} f(\xi_i) \Delta x_i$$

令 $\lambda \rightarrow 0$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{[a,b]} f(\xi_i) \Delta x_i = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left(\sum_{[a,c]} f(\xi_i) \Delta x_i + \sum_{[c,b]} f(\xi_i) \Delta x_i \right)$$



续.

又因为 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{[a,c]} f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^c f(x) dx$ 且 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{[c,b]} f(\xi_i) \Delta x_i = \int_c^b f(x) dx$,

续.

又因为 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{[a,c]} f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^c f(x) dx$ 且 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{[c,b]} f(\xi_i) \Delta x_i = \int_c^b f(x) dx$,

故

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{[a,b]} f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$



性质 3

如果在区间 $[a, b]$ 上 $f(x) \equiv 1$, 则

$$\int_a^b 1 dx = \int_a^b dx = b - a.$$

性质 4

如果在区间 $[a, b]$ 上 $f(x) \geq 0$, 那么

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0 \quad (a < b)$$

性质 4

如果在区间 $[a, b]$ 上 $f(x) \geq 0$, 那么

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0 \quad (a < b)$$

证明.

因为 $f(x) \geq 0$, $f(\xi_i) \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 故 $f(\xi_i)\Delta x_i \geq 0$.

性质 4

如果在区间 $[a, b]$ 上 $f(x) \geq 0$, 那么

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0 \quad (a < b)$$

证明.

因为 $f(x) \geq 0$, $f(\xi_i) \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 故 $f(\xi_i)\Delta x_i \geq 0$.

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i \geq 0$$

性质 4

如果在区间 $[a, b]$ 上 $f(x) \geq 0$, 那么

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0 \quad (a < b)$$

证明.

因为 $f(x) \geq 0$, $f(\xi_i) \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 故 $f(\xi_i)\Delta x_i \geq 0$.

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i \geq 0$$

令 $\lambda \rightarrow 0$,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i \geq 0$$



推论 1

如果在区间 $[a, b]$ 上 $f(x) \leq g(x)$, 那么

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \quad (a < b)$$

- 性质 4 的结论.

推论 2

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \quad (a < b)$$

- 思考: 若函数 φ 在 $[a, b]$ 是凹的, 则

$$\varphi \left(\int_a^b f(x) dx \right) \leq \int_a^b \varphi(f(x)) dx?$$

证明.

因为 $-f(x) \leq |f(x)| \leq f(x)$. 由推论 1,

证明.

因为 $-f(x) \leq |f(x)| \leq f(x)$. 由推论 1,

$$-\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx,$$

证明.

因为 $-f(x) \leq |f(x)| \leq f(x)$. 由推论 1,

$$-\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx,$$

即

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$



性质 5

设 M 及 m 分别是函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的最大值和最小值, 则

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a) \quad (a < b).$$

性质 5

设 M 及 m 分别是函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的最大值和最小值, 则

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a) \quad (a < b).$$

证明.

因为 $m \leq f(x) \leq M$, 故

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) \leq \int_a^b M dx$$

性质 5

设 M 及 m 分别是函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的最大值和最小值, 则

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a) \quad (a < b).$$

证明.

因为 $m \leq f(x) \leq M$, 故

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) \leq \int_a^b M dx$$

又因为 $\int_a^b m dx = m \int_a^b dx = m(b-a)$, 同理, $\int_a^b M dx = M(b-a)$,

性质 5

设 M 及 m 分别是函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的最大值和最小值, 则

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a) \quad (a < b).$$

证明.

因为 $m \leq f(x) \leq M$, 故

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) \leq \int_a^b M dx$$

又因为 $\int_a^b m dx = m \int_a^b dx = m(b-a)$, 同理, $\int_a^b M dx = M(b-a)$, 故

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a) \quad (a < b).$$

性质 6 (定积分中值定理)

如果函数 $f(x)$ 在积分区间 $[a, b]$ 上连续, 那么在 $[a, b]$ 上至少存在一点 ξ , 使得下式成立:

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) \quad (a \leq \xi \leq b),$$

则这个公式叫做积分中值公式.

证明.

由性质 5,

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M.$$

证明.

由性质 5,

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M.$$

由介值定理推论, 至少存在一点 $\xi \in [a, b]$ 使得

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

证明.

由性质 5,

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M.$$

由介值定理推论, 至少存在一点 $\xi \in [a, b]$ 使得

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

即

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a) \quad (a \leq \xi \leq b).$$



作业

- 教材习题 5-1: $3(1)$, $4(1)(3)$, 5 , $7(4)$, 9 , 12 .