

洛必达法则

高等数学 I-信息、统计外招

Weiwen Wang(王伟文)

暨南大学

2025 年秋季学期



课程网页

如果当 $x \rightarrow a$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时, 两个函数 $f(x)$ 与 $F(x)$ 都趋于零或都趋于无穷大, 那么极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f(x)}{F(x)}$ 可能存在、也可能不存在. 通常把这种极限叫做未定式, 分别简记为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$.

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}.$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} (n > 0).$

定理 1

设

- (1) 当 $x \rightarrow a$, 函数 $f(x)$ 及 $F(x)$ 都趋于零;
- (2) 在点 a 的某个去心邻域内, $f'(x)$ 及 $F'(x)$ 都存在且 $F'(x) \neq 0$;
- (3) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在 (或为无穷大),

则

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{F'(x)}$$

$x \rightarrow a$ 时, 未定式 $\frac{\infty}{\infty}$ 同样适用洛必达法则.

例 1

求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}$ ($b \neq 0$)

例 1

求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}$ ($b \neq 0$)

解

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \cos ax}{b \cos bx} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} (a \cos ax)}{\lim_{x \rightarrow 0} (b \cos bx)} = \frac{a}{b}.$$

例 3

求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$

例 3

求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$

解

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}$$

定理 2

设

- (1) 当 $x \rightarrow \infty$, 函数 $f(x)$ 及 $F(x)$ 都趋于零;
- (2) 存在正数 X , 当 $|x| > X$ 时, $f'(x)$ 及 $F'(x)$ 都存在且 $F'(x) \neq 0$;
- (3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在 (或为无穷大),

则

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{F'(x)}$$

- $x \rightarrow \infty$ 时, 未定式 $\underset{\infty}{\approx}$ 同样适用洛必达法则.

例 5

求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n}$ ($n > 0$)

例 5

求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n}$ ($n > 0$)

解

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{nx^{n-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{nx^n} = 0.$$

其他未定式转换为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$

- $0 \cdot \infty: 0 \cdot \frac{1}{0}$ 或 $\frac{1}{\infty} \cdot \infty$
- $\infty - \infty: \frac{1}{0} - \frac{1}{0} = \frac{0-0}{0}$
- $0^0: \ln 0^0 \rightarrow 0 \cdot \infty$
- $\infty^0: \ln \infty^0 \rightarrow 0 \cdot \infty$
- $1^\infty: \ln 1^\infty \rightarrow \infty \cdot 0$

例 7

求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x$ ($n > 0$)

例 7

求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x$ ($n > 0$)

解 此极限为 $0 \cdot \infty$ 型未定式, 转化为 $\frac{\infty}{\infty}$ 型

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^n}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-nx^{-n-1}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{-nx^{-n}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^n}{-n} = 0.$$

例 9

求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$.

例 9

求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x.$

解 这是 0^0 型未定式, 用对数变换转换为 $0 \cdot \infty$ 型.

例 9

求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$.

解 这是 0^0 型未定式, 用对数变换转换为 $0 \cdot \infty$ 型.

因为 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$, 故

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln x^x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x} = e^0 = 1.$$

随堂练习

1. 使用洛必达法则求极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\ln x}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$$

2. 验证极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x}$ 存在, 但不能用洛必达法则得出.

随堂练习

1. 使用洛必达法则求极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\ln x} = 2$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = 1$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) = \frac{1}{2}$$

2. 验证极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x}$ 存在, 但不能用洛必达法则得出.

解 因为 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$, 故

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\sin x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 1 + 0 = 1.$$

2. 验证极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x}$ 存在, 但不能用洛必达法则得出.

解 因为 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$, 故

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\sin x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 1 + 0 = 1.$$

若使用洛必达法则

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \cos x)$$

2. 验证极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x}$ 存在, 但不能用洛必达法则得出.

解 因为 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$, 故

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\sin x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 1 + 0 = 1.$$

若使用洛必达法则

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \cos x)$$

因为极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \cos x$ 不存在, 故极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \cos x)$ 不存在, 从而不满足洛必达法则使用条件 (3).

作业

- 教材习题 3-2: 1(1)(5)(6)(12)(13)(15); 3.