

高等数学——函数极限

Weiwen Wang(王伟文)

暨南大学

2025 年秋季学期

自变量趋于有限值时函数的极限

定义

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义, 如果存在常数 A , 对于任意给定的正数 ϵ , 总存在正常数 δ , 使得当 x 满足不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式

$$|f(x) - A| < \epsilon,$$

则常数 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0).$$

- 去心邻域: 设 $x_0 \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, 开区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 称为点 x_0 的邻域, 记作 $U(x_0, \delta)$; 开区间 $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ 称为点 x_0 的去心邻域, 记作 $\dot{U}(x_0, \delta)$; δ 称为邻域的半径.

- 去心邻域: 设 $x_0 \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, 开区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 称为点 x_0 的邻域, 记作 $U(x_0, \delta)$; 开区间 $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ 称为点 x_0 的去心邻域, 记作 $\dot{U}(x_0, \delta)$; δ 称为邻域的半径.
- 极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 与函数 f 在 x_0 处是否有定义无关.

- 去心邻域: 设 $x_0 \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, 开区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 称为点 x_0 的邻域, 记作 $U(x_0, \delta)$; 开区间 $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ 称为点 x_0 的去心邻域, 记作 $\dot{U}(x_0, \delta)$; δ 称为邻域的半径.
- 极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 与函数 f 在 x_0 处是否有定义无关.
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - A| < \epsilon$.

- 去心邻域: 设 $x_0 \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, 开区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 称为点 x_0 的邻域, 记作 $U(x_0, \delta)$; 开区间 $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ 称为点 x_0 的去心邻域, 记作 $\dot{U}(x_0, \delta)$; δ 称为邻域的半径.
- 极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 与函数 f 在 x_0 处是否有定义无关.
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - A| < \epsilon$.
- 几何解释: 考虑点 x_0 , 给定 $\epsilon > 0$, 存在一个区间 $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$, 使得函数 $f(x)$ 在该区间内的图像落在直线 $y = A - \epsilon$ 和 $y = A + \epsilon$ 之间.

例 4

证明 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$

证明.

要证明原式成立, 只要证明对于任意给定 $\epsilon > 0$, 能找到一个正常数 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - 1| < \delta$ 时, 总有

$$\left| \frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2 \right| < \epsilon.$$

证明.

要证明原式成立, 只要证明对于任意给定 $\epsilon > 0$, 能找到一个正常数 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - 1| < \delta$ 时, 总有

$$\left| \frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2 \right| < \epsilon.$$

要使得上述不等式成立, 即使

$$|x - 1| < \epsilon \quad (x \neq 1).$$

证明.

要证明原式成立, 只要证明对于任意给定 $\epsilon > 0$, 能找到一个正常数 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - 1| < \delta$ 时, 总有

$$\left| \frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2 \right| < \epsilon.$$

要使得上述不等式成立, 即使

$$|x - 1| < \epsilon \quad (x \neq 1).$$

故取 $\delta = \epsilon$, 当 $0 < |x - 1| < \delta$ 时, 总有

$$\left| \frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2 \right| < \epsilon.$$



继.

所以 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$



定义 (左极限)

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心左邻域内有定义, 如果存在常数 A , 对于任意给定的正数 ϵ , 总存在正常数 δ , 使得当 x 满足不等式 $x_0 - \delta < x < x_0$ 时, 对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式

$$|f(x) - A| < \epsilon,$$

则常数 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的左极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x_0^-) = A.$$

- $x \rightarrow x_0^-$ 表示 x 从 x_0 的左侧趋于 x_0

定义 (右极限)

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心右邻域内有定义, 如果存在常数 A , 对于任意给定的正数 ϵ , 总存在正常数 δ , 使得当 x 满足不等式 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时, 对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式

$$|f(x) - A| < \epsilon,$$

则常数 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的右极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x_0^+) = A.$$

- $x \rightarrow x_0^+$ 表示 x 从 x_0 的右侧趋于 x_0

左右极限统称单侧极限.

定理 7 (极限存在的充分必要条件)

函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时极限存在的充分必要条件时左右极限各自存在并且相等, 即

$$f(x_0^-) = f(x_0^+).$$

随堂练习

观测相应的函数图像, 计算极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \ln x$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 1)$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \sin x$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x$$

随堂练习

观测相应的函数图像, 计算极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \ln x = 0$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 1) = 1$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = 1$$

随堂练习

观测相应的函数图像, 计算 $x \rightarrow 0$ 时函数 $f(x)$ 的左、右极限, 并判断 $x \rightarrow 0$ 时, 函数极限是否存在.

$$(1) f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ e^x, & x \geq 0 \end{cases} \quad (2) f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ e^x, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$(1) f(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 = 1;$$

$$f(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0^-) = f(0^+).$$

$$\begin{aligned}
 (1) \quad f(0^-) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 = 1; & (2) \quad f(0^-) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0; \\
 f(0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = 1; & f(0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = 1; \\
 \lim_{x \rightarrow 0} &= f(0^-) = f(0^+). & f(0^-) &\neq f(0^+), \lim_{x \rightarrow 0} \text{不存在}.
 \end{aligned}$$

自变量趋于无穷大时函数的极限

定义

设函数 $f(x)$ 当 $|x|$ 大于某一正数时有定义. 如果存在常数 A , 对于任意给定的正数 ϵ , 总存在正数 X , 使得当 x 满足不等式 $|x| > X$ 时, 对应的函数值满足不等式

$$|f(x) - A| < \epsilon,$$

那么常数 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时的极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A (x \rightarrow \infty).$$

- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists X > 0, \text{当 } |x| > X \text{ 时, 有 } |f(x) - A| < \epsilon.$

- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists X > 0, \text{当 } |x| > X \text{ 时, 有 } |f(x) - A| < \epsilon.$
- 若将定义中的 “ $|x| > X$ ” 改为 “ $x > X$ ”, 则得到 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ 的定义.

- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists X > 0, \text{当 } |x| > X \text{ 时, 有 } |f(x) - A| < \epsilon.$
- 若将定义中的 “ $|x| > X$ ” 改为 “ $x > X$ ”, 则得到 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ 的定义.
- 若将定义中的 “ $|x| > X$ ” 改为 “ $x < -X$ ”, 则得到 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ 的定义.

- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists X > 0, \text{当 } |x| > X \text{ 时, 有 } |f(x) - A| < \epsilon.$
- 若将定义中的 “ $|x| > X$ ” 改为 “ $x > X$ ”, 则得到 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ 的定义.
- 若将定义中的 “ $|x| > X$ ” 改为 “ $x < -X$ ”, 则得到 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ 的定义.
- 几何解释: 任意给定 $\epsilon > 0$, 作直线 $y = A - \epsilon$ 和 $y = A + \epsilon$, 则总有一个正数 X 存在, 使得当 $x > X$ 或 $x < -X$ 时, 函数 $y = f(x)$ 的图像位于这两条直线之间, 称 $y = A$ 为函数 $y = f(x)$ 的图形的水平渐近线.

例 7

证明 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$

例 7

证明 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$

证明.

给定任意 $\epsilon > 0$, 要证存在 $X > 0$, 使得当 $|x| > X$ 时, $\left| \frac{1}{x} - 0 \right| < \epsilon$.

例 7

证明 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$

证明.

给定任意 $\epsilon > 0$, 要证存在 $X > 0$, 使得当 $|x| > X$ 时, $\left| \frac{1}{x} - 0 \right| < \epsilon$. 又因为

$$\left| \frac{1}{x} - 0 \right| < \epsilon \iff |x| > \frac{1}{\epsilon}$$

例 7

证明 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$

证明.

给定任意 $\epsilon > 0$, 要证存在 $X > 0$, 使得当 $|x| > X$ 时, $\left| \frac{1}{x} - 0 \right| < \epsilon$. 又因为

$$\left| \frac{1}{x} - 0 \right| < \epsilon \iff |x| > \frac{1}{\epsilon}$$

故取 $X = \frac{1}{\epsilon}$, 当 $|x| > X = \frac{1}{\epsilon}$ 时, $\left| \frac{1}{x} - 0 \right| < \epsilon$. □

函数极限的性质

定理 (函数极限的唯一性)

如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 那么这极限唯一.

定理 (函数极限的局部有界性)

如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 那么存在常数 $M > 0$ 和 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x)| \leq M$.

定理 (函数极限的局部有界性)

如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 那么存在常数 $M > 0$ 和 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x)| \leq M$.

证明.

取 $\epsilon = 1$, $\exists \delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时 $|f(x) - A| < 1$

定理 (函数极限的局部有界性)

如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 那么存在常数 $M > 0$ 和 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x)| \leq M$.

证明.

取 $\epsilon = 1$, $\exists \delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时 $|f(x) - A| < 1$

$$|f(x)| = |f(x) - A + A| \leq |f(x) - A| + |A| \leq 1 + |A|$$

定理 (函数极限的局部有界性)

如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 那么存在常数 $M > 0$ 和 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x)| \leq M$.

证明.

取 $\epsilon = 1$, $\exists \delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时 $|f(x) - A| < 1$

$$|f(x)| = |f(x) - A + A| \leq |f(x) - A| + |A| \leq 1 + |A|$$

故取 $M = 1 + |A|$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $|f(x)| \leq M$. □

定理 (函数极限的局部保号性)

如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 且 $A > 0$ (或 $A < 0$), 那么存在常数 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $f(x) > 0$ (或 $f(x) < 0$).

定理 (函数极限的局部保号性)

如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 且 $A > 0$ (或 $A < 0$), 那么存在常数 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $f(x) > 0$ (或 $f(x) < 0$).

证明.

此处只证明 $A > 0$ 的情形.

取 $\epsilon = \frac{A}{2}$, $\exists \delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$, $|f(x) - A| < \epsilon = \frac{A}{2}$, 即

$$-\frac{A}{2} + A < f(x) < A + \frac{A}{2} \Rightarrow f(x) > \frac{A}{2} > 0.$$



推论

如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A (A \neq 0)$, 那么就存在 x_0 的某一个去心邻域 $\mathring{U}(x_0)$, 当 $x \in \mathring{U}(x_0)$ 时, 就有 $|f(x)| > \frac{|A|}{2}$.

推论

如果在 x_0 的某去心邻域内 $f(x) \geq 0$ (或 $f(x) \leq 0$), 而且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 那么 $A \geq 0$ (或 $A \leq 0$).

- 为什么是 “ \geq ”, 而不是 “ > 0 ”? 反证法结合保号性.

定理 (函数极限与数列极限的关系)

如果极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, $\{x_n\}$ 为函数 $f(x)$ 定义域内任一收敛于 x_0 的数列, 且满足 $x_n \neq x_0 (n \in \mathbb{N}_+)$, 那么函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 必收敛, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

证明.

记 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则由函数极限定义,

给定 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $|f(x) - A| < \epsilon$.

证明.

记 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则由函数极限定义,

给定 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $|f(x) - A| < \epsilon$.

又因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ 且 $x_n \neq x_0 (n \in \mathbb{N}_+)$, 由数列极限定义,

对于 $\delta > 0$, 存在正整数 $N \in \mathbb{N}_+$, 当 $n > N$ 时, $0 < |x_n - x_0| < \delta$

从而 $|f(x_n) - A| < \epsilon$.

证明.

记 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则由函数极限定义,

给定 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $|f(x) - A| < \epsilon$.

又因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ 且 $x_n \neq x_0 (n \in \mathbb{N}_+)$, 由数列极限定义,

对于 $\delta > 0$, 存在正整数 $N \in \mathbb{N}_+$, 当 $n > N$ 时, $0 < |x_n - x_0| < \delta$

从而 $|f(x_n) - A| < \epsilon$.

综合可得

给定 $\epsilon > 0$, 存在整数 $N \in \mathbb{N}_+$, 当 $n > N$ 时, $|f(x_n) - A| < \epsilon$,

即 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.



作业

- 例题 3, 教材 Page 29;
- 抄写函数极限定义, 教材 Page 28;
- 教材习题 1-3: 1; 3(1)(3); 4;5(1).