

定积分的换元法和分部积分法

高等数学 I-信息、统计外招

Weiwen Wang(王伟文)

暨南大学

2025 年秋季学期



课程网页

定理 1

假设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 函数 $x = \varphi(t)$ 满足条件:

- (1) $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$;
- (2) $\varphi(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ (或 $[\beta, \alpha]$) 上具有连续导数, 且其值域 $R_\varphi = [a, b]$, 则有

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt \quad (\text{换元公式})$$

证明.

由假设可知, $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 连续, $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 在区间 $[\alpha, \beta]$ 上连续. 故 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的原函数及 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 在区间 $[\alpha, \beta]$ 上的原函数均存在.

证明.

由假设可知, $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 连续, $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 在区间 $[\alpha, \beta]$ 上连续. 故 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的原函数及 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 在区间 $[\alpha, \beta]$ 上的原函数均存在.

记 $f(x)$ 的原函数为 $F(x)$, 由牛顿-莱布尼兹公式

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

下面证明 $\Phi(t) = F[\varphi(t)]$ 是 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 的一个原函数.

证明.

由假设可知, $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 连续, $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 在区间 $[\alpha, \beta]$ 上连续. 故 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的原函数及 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 在区间 $[\alpha, \beta]$ 上的原函数均存在.

记 $f(x)$ 的原函数为 $F(x)$, 由牛顿-莱布尼兹公式

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

下面证明 $\Phi(t) = F[\varphi(t)]$ 是 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 的一个原函数.

由链式法则

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = \frac{dF[\varphi(t)]}{dt} = \frac{dF}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = f[\varphi(t)]\varphi'(t)$$



续.

由牛顿-莱布尼兹公式

$$\int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)]$$

续.

由牛顿-莱布尼兹公式

$$\int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)]$$

又因为 $\varphi(\beta) = b$, $\varphi(\alpha) = a$, 故

$$\begin{aligned}\int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt &= F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] \\ &= F(b) - F(a) \\ &= \int_a^b f(x)dx\end{aligned}$$



定理 1

假设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 函数 $x = \varphi(t)$ 满足条件:

- (1) $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$;
- (2) $\varphi(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ (或 $[\beta, \alpha]$) 上具有连续导数, 且其值域 $R_\varphi = [a, b]$, 则有

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt \quad (\text{换元公式})$$

- 用 $x = \varphi(t)$ 作变量替换时, 积分的上下限也要做出相应的改变;
- 计算出原函数后, 不需要再把 t 换回 x .

例 1

计算 $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx \quad (a > 0)$

例 1

计算 $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx \quad (a > 0)$

解: 令 $x = a \sin t \quad (0 \leq t \leq \frac{\pi}{2})$, 则 $dx = a \cos t dt$.

例 1

计算 $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx \quad (a > 0)$

解: 令 $x = a \sin t \quad (0 \leq t \leq \frac{\pi}{2})$, 则 $dx = a \cos t dt$.

当 $t = 0$ 时, $x = 0$; 当 $t = \frac{\pi}{2}$ 时, $x = a$.

例 1

计算 $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx \quad (a > 0)$

解: 令 $x = a \sin t \quad (0 \leq t \leq \frac{\pi}{2})$, 则 $dx = a \cos t dt$.

当 $t = 0$ 时, $x = 0$; 当 $t = \frac{\pi}{2}$ 时, $x = a$.

于是

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos^2 t dt$$

例 1

计算 $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx \quad (a > 0)$

解: 令 $x = a \sin t \quad (0 \leq t \leq \frac{\pi}{2})$, 则 $dx = a \cos t dt$.

当 $t = 0$ 时, $x = 0$; 当 $t = \frac{\pi}{2}$ 时, $x = a$.

于是

$$\begin{aligned} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos^2 t dt \\ &= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2t + 1}{2} dt \end{aligned}$$

例 1

计算 $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx \quad (a > 0)$

解: 令 $x = a \sin t \quad (0 \leq t \leq \frac{\pi}{2})$, 则 $dx = a \cos t dt$.

当 $t = 0$ 时, $x = 0$; 当 $t = \frac{\pi}{2}$ 时, $x = a$.

于是

$$\begin{aligned} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos^2 t dt \\ &= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2t + 1}{2} dt \\ &= \frac{a^2}{2} \left[\frac{1}{2} \sin 2t + t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi a^2}{4} \end{aligned}$$

例 2

计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin x dx$

例 2

计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin x dx$

解: 令 $t = \cos x$, $dt = -\sin x dx$.

例 2

计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin x dx$

解: 令 $t = \cos x$, $dt = -\sin x dx$.

当 $x = 0$ 时, $t = 1$; 当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时, $t = 0$.

于是

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin x dx = \int_1^0 -t^5 dt$$

例 2

计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin x dx$

解: 令 $t = \cos x$, $dt = -\sin x dx$.

当 $x = 0$ 时, $t = 1$; 当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时, $x = 0$.

于是

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin x dx &= \int_1^0 -t^5 dt \\&= \int_0^1 t^5 dt \\&= \left[\frac{1}{6} t^6 \right]_0^1 \\&= \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

例 3

计算 $\int_0^{\pi} \sqrt{\sin^3 x - \sin^5 x} dx$

例 3

计算 $\int_0^{\pi} \sqrt{\sin^3 x - \sin^5 x} dx$

解:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \sqrt{\sin^3 x - \sin^5 x} dx &= \int_0^{\pi} \sqrt{\sin^3 x (1 - \sin^2 x)} dx \\ &= \int_0^{\pi} \sin^{\frac{3}{2}} x |\cos x| dx\end{aligned}$$

例 3

计算 $\int_0^{\pi} \sqrt{\sin^3 x - \sin^5 x} dx$

解:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \sqrt{\sin^3 x - \sin^5 x} dx &= \int_0^{\pi} \sqrt{\sin^3 x (1 - \sin^2 x)} dx \\&= \int_0^{\pi} \sin^{\frac{3}{2}} x |\cos x| dx \\&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{3}{2}} x \cos x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^{\frac{3}{2}} x \cos x dx\end{aligned}$$

例 3

计算 $\int_0^{\pi} \sqrt{\sin^3 x - \sin^5 x} dx$

解:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \sqrt{\sin^3 x - \sin^5 x} dx &= \int_0^{\pi} \sqrt{\sin^3 x (1 - \sin^2 x)} dx \\&= \int_0^{\pi} \sin^{\frac{3}{2}} x |\cos x| dx \\&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{3}{2}} x \cos x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^{\frac{3}{2}} x \cos x dx \\&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{3}{2}} x d \sin x - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^{\frac{3}{2}} x d \sin x\end{aligned}$$

例 3

计算 $\int_0^{\pi} \sqrt{\sin^3 x - \sin^5 x} dx$

解:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \sqrt{\sin^3 x - \sin^5 x} dx &= \int_0^{\pi} \sqrt{\sin^3 x (1 - \sin^2 x)} dx \\&= \int_0^{\pi} \sin^{\frac{3}{2}} x |\cos x| dx \\&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{3}{2}} x \cos x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^{\frac{3}{2}} x \cos x dx \\&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{3}{2}} x d \sin x - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^{\frac{3}{2}} x d \sin x \\&= \left[\frac{2}{5} \sin^{\frac{5}{2}} x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\frac{2}{5} \sin^{\frac{5}{2}} x \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \left(\frac{2}{5} - 0 \right) - \left(0 - \frac{2}{5} \right) = \frac{4}{5}\end{aligned}$$

例 4

计算 $\int_0^4 \frac{x+2}{\sqrt{2x+1}} dx$

例 4

计算 $\int_0^4 \frac{x+2}{\sqrt{2x+1}} dx$

解: 令 $t = \sqrt{2x+1}$, $x = \frac{t^2-1}{2}$, $dx = t dt$.

例 4

计算 $\int_0^4 \frac{x+2}{\sqrt{2x+1}} dx$

解: 令 $t = \sqrt{2x+1}$, $x = \frac{t^2-1}{2}$, $dx = t dt$.

当 $x=0$ 时, $t=1$; 当 $x=4$ 时, $t=3$.

例 4

计算 $\int_0^4 \frac{x+2}{\sqrt{2x+1}} dx$

解: 令 $t = \sqrt{2x+1}$, $x = \frac{t^2-1}{2}$, $dx = t dt$.

当 $x=0$ 时, $t=1$; 当 $x=4$ 时, $t=3$.

于是

$$\int_0^4 \frac{x+2}{\sqrt{2x+1}} dx = \int_1^3 \frac{t^2+3}{2t} t dt$$

例 4

计算 $\int_0^4 \frac{x+2}{\sqrt{2x+1}} dx$

解: 令 $t = \sqrt{2x+1}$, $x = \frac{t^2-1}{2}$, $dx = t dt$.

当 $x=0$ 时, $t=1$; 当 $x=4$ 时, $t=3$.

于是

$$\begin{aligned}\int_0^4 \frac{x+2}{\sqrt{2x+1}} dx &= \int_1^3 \frac{t^2+3}{2t} t dt \\&= \int_1^3 \left(\frac{t^2}{2} + \frac{3}{2} \right) dt \\&= \frac{1}{2} \left[\frac{t^3}{3} + 3t \right]_1^3 = \frac{1}{2} \left(18 - \frac{10}{3} \right) = \frac{22}{3}\end{aligned}$$

例 5

证明:

(1) 若 $f(x)$ 在 $[-a, a]$ 上连续且为偶函数, 则

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

(2) 若 $f(x)$ 在 $[-a, a]$ 上连续且为奇函数, 则

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

证明.

(1) 令 $t = -x$, 则 $dx = -dt$. 当 $x = -a$ 时, $t = a$; 当 $x = 0$ 时, $t = 0$.

证明.

(1) 令 $t = -x$, 则 $dx = -dt$. 当 $x = -a$ 时, $t = a$; 当 $x = 0$ 时, $t = 0$. 于是

$$\int_{-a}^0 f(x)dx = \int_a^0 -f(-t)dt$$

证明.

(1) 令 $t = -x$, 则 $dx = -dt$. 当 $x = -a$ 时, $t = a$; 当 $x = 0$ 时, $t = 0$. 于是

$$\int_{-a}^0 f(x)dx = \int_a^0 -f(-t)dt = -\int_a^0 f(t)dt = \int_0^a f(t)dt = \int_0^a f(x)dx$$

证明.

(1) 令 $t = -x$, 则 $dx = -dt$. 当 $x = -a$ 时, $t = a$; 当 $x = 0$ 时, $t = 0$. 于是

$$\int_{-a}^0 f(x)dx = \int_a^0 -f(-t)dt = -\int_a^0 f(t)dt = \int_0^a f(t)dt = \int_0^a f(x)dx$$

故

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx$$

证明.

(1) 令 $t = -x$, 则 $dx = -dt$. 当 $x = -a$ 时, $t = a$; 当 $x = 0$ 时, $t = 0$. 于是

$$\int_{-a}^0 f(x)dx = \int_a^0 -f(-t)dt = -\int_a^0 f(t)dt = \int_0^a f(t)dt = \int_0^a f(x)dx$$

故

$$\begin{aligned}\int_{-a}^a f(x)dx &= \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx \\ &= \int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(x)dx \\ &= 2 \int_0^a f(x)dx\end{aligned}$$



续.

(2) 令 $t = -x$, 则 $dx = -dt$. 当 $x = -a$ 时, $t = a$; 当 $x = 0$ 时, $t = 0$.

续.

(2) 令 $t = -x$, 则 $dx = -dt$. 当 $x = -a$ 时, $t = a$; 当 $x = 0$ 时, $t = 0$.
因为 $f(x)$ 是奇函数, 故 $f(-t) = -f(t)$.

续.

(2) 令 $t = -x$, 则 $dx = -dt$. 当 $x = -a$ 时, $t = a$; 当 $x = 0$ 时, $t = 0$.

因为 $f(x)$ 是奇函数, 故 $f(-t) = -f(t)$.

于是

$$\int_{-a}^0 f(x)dx = \int_a^0 -f(-t)dt$$

续.

(2) 令 $t = -x$, 则 $dx = -dt$. 当 $x = -a$ 时, $t = a$; 当 $x = 0$ 时, $t = 0$.

因为 $f(x)$ 是奇函数, 故 $f(-t) = -f(t)$.

于是

$$\int_{-a}^0 f(x)dx = \int_a^0 -f(-t)dt = \int_a^0 f(t)dt = -\int_0^a f(t)dt = -\int_0^a f(x)dx$$

续.

(2) 令 $t = -x$, 则 $dx = -dt$. 当 $x = -a$ 时, $t = a$; 当 $x = 0$ 时, $t = 0$.

因为 $f(x)$ 是奇函数, 故 $f(-t) = -f(t)$.

于是

$$\int_{-a}^0 f(x)dx = \int_a^0 -f(-t)dt = \int_a^0 f(t)dt = -\int_0^a f(t)dt = -\int_0^a f(x)dx$$

故

$$\begin{aligned}\int_{-a}^a f(x)dx &= \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx \\ &= -\int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(x)dx \\ &= 0.\end{aligned}$$



例 6

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 证明:

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx;$$

$$(2) \int_0^{\pi} xf(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx, \text{ 由此计算}$$

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx.$$

证明.

(1) 设 $x = \frac{\pi}{2} - t$, $dx = -dt$. 当 $x = 0$ 时, $t = \frac{\pi}{2}$, 当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时, $t = 0$.

证明.

(1) 设 $x = \frac{\pi}{2} - t$, $dx = -dt$. 当 $x = 0$ 时, $t = \frac{\pi}{2}$, 当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时, $t = 0$.
利用三角函数公式 $\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos t$.

证明.

(1) 设 $x = \frac{\pi}{2} - t$, $dx = -dt$. 当 $x = 0$ 时, $t = \frac{\pi}{2}$, 当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时, $t = 0$.

利用三角函数公式 $\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos t$.

于是

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 -f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right) dt$$

证明.

(1) 设 $x = \frac{\pi}{2} - t$, $dx = -dt$. 当 $x = 0$ 时, $t = \frac{\pi}{2}$, 当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时, $t = 0$.

利用三角函数公式 $\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos t$.

于是

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 -f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right) dt \\&= -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(\cos t) dt \\&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t) dt \\&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx.\end{aligned}$$



续.

(2) 令 $x = \pi - t$, $dx = -dt$. 当 $x = 0$ 时, $t = \pi$, 当 $x = \pi$ 时, $t = 0$.

续.

(2) 令 $x = \pi - t$, $dx = -dt$. 当 $x = 0$ 时, $t = \pi$, 当 $x = \pi$ 时, $t = 0$.

利用三角函数公式 $\sin(\pi - t) = \sin t$.

续.

(2) 令 $x = \pi - t$, $dx = -dt$. 当 $x = 0$ 时, $t = \pi$, 当 $x = \pi$ 时, $t = 0$.

利用三角函数公式 $\sin(\pi - t) = \sin t$.

于是

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \int_{\pi}^0 -(\pi - t) f(\sin(\pi - t)) dt$$

续.

(2) 令 $x = \pi - t$, $dx = -dt$. 当 $x = 0$ 时, $t = \pi$, 当 $x = \pi$ 时, $t = 0$.

利用三角函数公式 $\sin(\pi - t) = \sin t$.

于是

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx &= \int_{\pi}^0 -(\pi - t) f(\sin(\pi - t)) dt \\&= - \int_{\pi}^0 (\pi - t) f(\sin t) dt \\&= \int_0^{\pi} (\pi - t) f(\sin t) dt \\&= \int_0^{\pi} \pi f(\sin t) dt - \int_0^{\pi} t f(\sin t) dt\end{aligned}$$

续.

(2) 令 $x = \pi - t$, $dx = -dt$. 当 $x = 0$ 时, $t = \pi$, 当 $x = \pi$ 时, $t = 0$.

利用三角函数公式 $\sin(\pi - t) = \sin t$.

于是

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx &= \int_{\pi}^0 -(\pi - t)f(\sin(\pi - t))dt \\&= -\int_{\pi}^0 (\pi - t)f(\sin t)dt \\&= \int_0^{\pi} (\pi - t)f(\sin t)dt \\&= \int_0^{\pi} \pi f(\sin t)dt - \int_0^{\pi} tf(\sin t)dt\end{aligned}$$

即

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \int_0^{\pi} \pi f(\sin x)dx - \int_0^{\pi} xf(\sin x)dx$$

续.

解得

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x)dx.$$

因此

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx$$

续.

解得

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx.$$

因此

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx \\ &= -\frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{1}{1 + \cos^2 x} d \cos x \\ &= -\frac{\pi}{2} [\arctan(\cos x)]_0^{\pi} \\ &= -\frac{\pi}{2} \left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi^2}{4}. \end{aligned}$$



例 7

设 $f(x)$ 是连续的周期函数, 周期为 T , 证明

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$$

证明.

令 $x = t + T$. $dx = dt$. 当 $x = a$ 时, $t = 0$, 当 $x = a + T$ 时, $t = a$. 又因为 $f(t + T) = f(t)$.

证明.

令 $x = t + T$. $dx = dt$. 当 $x = a$ 时, $t = 0$, 当 $x = a + T$ 时, $t = a$. 又因为 $f(t + T) = f(t)$.

于是

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(t+T)dt$$

证明.

令 $x = t + T$. $dx = dt$. 当 $x = a$ 时, $t = 0$, 当 $x = a + T$ 时, $t = a$. 又因为 $f(t + T) = f(t)$.

于是

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(t+T)dt = \int_0^T f(t)dt = \int_0^T f(x)dx$$



例 9

设函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 + \cos x}, & -\pi < x < 0 \\ xe^{-x^2}, & x \geq 0 \end{cases}$$

计算 $\int_1^4 f(x-2)dx$.

解: 令 $t = x - 2$, $dx = dt$. 当 $x = 1$ 时, $t = -1$; 当 $x = 4$ 时, $t = 2$.

于是

$$\int_1^4 f(x-2)dx = \int_{-1}^2 f(t)dt$$

解: 令 $t = x - 2$, $dx = dt$. 当 $x = 1$ 时, $t = -1$; 当 $x = 4$ 时, $t = 2$.

于是

$$\begin{aligned}\int_1^4 f(x-2)dx &= \int_{-1}^2 f(t)dt \\ &= \int_{-1}^0 f(t)dt + \int_0^2 f(t)dt\end{aligned}$$

解: 令 $t = x - 2$, $dx = dt$. 当 $x = 1$ 时, $t = -1$; 当 $x = 4$ 时, $t = 2$.

于是

$$\begin{aligned}\int_1^4 f(x-2)dx &= \int_{-1}^2 f(t)dt \\ &= \int_{-1}^0 f(t)dt + \int_0^2 f(t)dt \\ &= \int_{-1}^0 \frac{1}{1+\cos t} dt + \int_0^2 te^{-t^2} dt\end{aligned}$$

解: 令 $t = x - 2$, $dx = dt$. 当 $x = 1$ 时, $t = -1$; 当 $x = 4$ 时, $t = 2$.

于是

$$\begin{aligned}\int_1^4 f(x-2)dx &= \int_{-1}^2 f(t)dt \\&= \int_{-1}^0 f(t)dt + \int_0^2 f(t)dt \\&= \int_{-1}^0 \frac{1}{1+\cos t} dt + \int_0^2 te^{-t^2} dt \\&= \int_{-1}^0 \frac{1}{2\cos^2 \frac{t}{2}} dt - \frac{1}{2} \int_0^2 e^{-t^2} d(-t^2) \\&= \left[\tan \frac{t}{2} \right]_{-1}^0 - \frac{1}{2} \left[e^{-t^2} \right]_0^2 \\&= \tan \frac{1}{2} - \frac{1}{2e^4} + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

由不定积分的分部积分法

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g'(x)dx &= \int_a^b f(x)dg(x) \\ &= [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b g(x)df(x) \\ &= [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b g(x) \cdot f'(x)dx\end{aligned}$$

例 10

计算 $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx$

例 10

计算 $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx$

解:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx = [x \arcsin x]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} x d \arcsin x$$

例 10

计算 $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx$

解:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx &= [x \arcsin x]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} x d \arcsin x \\ &= [x \arcsin x]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx\end{aligned}$$

例 10

计算 $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx$

解:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx &= [x \arcsin x]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} x d \arcsin x \\&= [x \arcsin x]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\&= [x \arcsin x]_0^{\frac{1}{2}} + [(1-x^2)^{\frac{1}{2}}]_0^{\frac{1}{2}} \\&= \frac{1}{2} \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \\&= \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1\end{aligned}$$

例 11

计算 $\int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx$

例 11

计算 $\int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx$

解: 令 $t = \sqrt{x}$, $dx = 2t dt$. 当 $x = 0$ 时, $t = 0$; 当 $x = 1$ 时, $t = 1$.

于是

$$\int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 e^t 2t dt = 2 \int_0^1 t de^t$$

例 11

计算 $\int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx$

解: 令 $t = \sqrt{x}$, $dx = 2t dt$. 当 $x = 0$ 时, $t = 0$; 当 $x = 1$ 时, $t = 1$.

于是

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx &= \int_0^1 e^t 2t dt = 2 \int_0^1 t de^t \\ &= 2 \left[te^t \Big|_0^1 - \int_0^1 e^t dt \right] \\ &= 2 \left([te^t]_0^1 - [e^t]_0^1 \right) \\ &= 2\end{aligned}$$

作业

- 教材习题 5-3: $1(3)(5)(6)(12)(15)(24)(25)$, 2 , $7(1)(2)(5)(6)(7)$.