微分中值定理

高等数学 I-信息、统计外招

Weiwen Wang(王伟文)

暨南大学

2025 年秋季学期

课程网页

引理 (费马引理)

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内有定义, 并且在 x_0 处可导, 如果对任意 $x \in U(x_0)$, 有

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (\text{或 } f(x) \geq f(x_0))$$

则 $f'(x_0) = 0$.

证明.

不妨设 $x \in U(x_0)$ 时, $f(x) \le f(x_0)$. 故若 $x_0 + \Delta x \in U(x_0)$, 则有

$$f(x_0 + \Delta x) \le f(x_0)$$

证明.

不妨设 $x \in U(x_0)$ 时, $f(x) \leq f(x_0)$. 故若 $x_0 + \Delta x \in U(x_0)$, 则有

$$f(x_0 + \Delta x) \leq f(x_0)$$

因此, 由极限的保号性

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0.$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0.$$

证明.

不妨设 $x \in U(x_0)$ 时, $f(x) \le f(x_0)$. 故若 $x_0 + \Delta x \in U(x_0)$, 则有

$$f(x_0 + \Delta x) \le f(x_0)$$

因此, 由极限的保号性

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \le 0.$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \ge 0.$$

又因为 $f'(x_0)$ 存在, 从而有

$$f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = f'(x_0) = 0.$$

□

通常称导数等于零的点为函数的驻点(或稳定点, 临界点)

通常称导数等于零的点为函数的驻点(或稳定点, 临界点)

定理 (罗尔定理)

如果函数 $f(x)$ 满足

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续;

(2) 在开区间 (a,b) 内可导;

(3) 在区间端点处的函数值相等, 即 $f(a)=f(b)$,

那么在 (a,b) 内至少有一点 $\xi(a<\xi<b)$, 使得 $f'(\xi)=0$.

定理 (罗尔定理)

如果函数 $f(x)$ 满足

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续;

(2) 在开区间 (a,b) 内可导;

(3) 在区间端点处的函数值相等, 即 $f(a)=f(b)$,

那么在 (a,b) 内至少有一点 $\xi(a<\xi<b)$, 使得 $f'(\xi)=0$.

- $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上必有最大值 M 和最小值 m.

定理 (罗尔定理)

如果函数 $f(x)$ 满足

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续;

(2) 在开区间 (a,b) 内可导;

(3) 在区间端点处的函数值相等, 即 $f(a)=f(b)$,

那么在 (a,b) 内至少有一点 $\xi(a<\xi<b)$, 使得 $f'(\xi)=0$.

- $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上必有最大值 M 和最小值 m.
- 若 $M>m$，因为 $f(a)=f(b)$，则最大值或最小值之一必在 (a,b) 内取得，不妨设 $\exists\xi\in(a,b), f(\xi)=M\geq f(x), \forall x\in(a,b)$，由费马引理 $f'(\xi)=0$.

定理 (罗尔定理)

如果函数 $f(x)$ 满足

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续;

(2) 在开区间 (a,b) 内可导;

(3) 在区间端点处的函数值相等, 即 $f(a)=f(b)$,

那么在 (a,b) 内至少有一点 $\xi(a<\xi<b)$, 使得 $f'(\xi)=0$.

- $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上必有最大值 M 和最小值 m.
- 若 $M>m$，因为 $f(a)=f(b)$，则最大值或最小值之一必在 (a,b) 内取得，不妨设 $\exists\xi\in(a,b), f(\xi)=M\geq f(x), \forall x\in(a,b)$，由费马引理 $f'(\xi)=0$.
- 若 $M=m$，则 $f(a)=f(b)=M=m$，函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上为常数，$\forall x\in(a,b), f'(x)=0$.


暨南大学
JINAN UNIVERSITY
MAIN TEACHING BUILDING

定理 (拉格朗日中值定理)

如果函数 $f(x)$ 满足

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续;

(2) 在开区间 (a,b) 内可导,

那么在 (a,b) 内至少有一点 $\xi(a<\xi<b)$, 使得等式

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$$

成立.

定理 (拉格朗日中值定理)

如果函数 $f(x)$ 满足

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续;

(2) 在开区间 (a,b) 内可导,

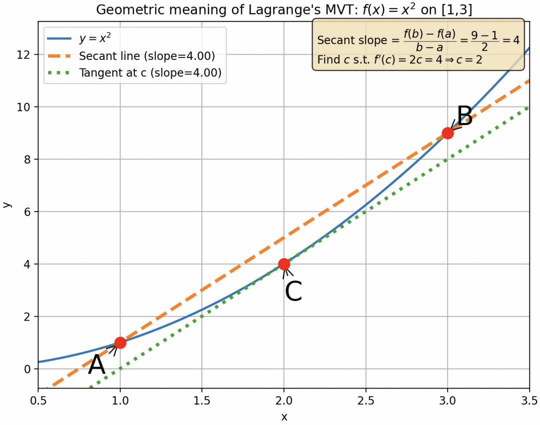
那么在 (a,b) 内至少有一点 $\xi(a<\xi<b)$, 使得等式

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$$

成立.

- 定义函数 $\varphi(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$, $\varphi(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上满足罗尔定理条件, 应用罗尔定理证得结论.

- 拉格朗日中值定理的几何意义：区间 (a,b) 内至少有一点的导数，与通过区间端点 $(a,f(a))$ 和 $(b,f(b))$ 的直线的斜率相同.



若函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内可导，设有增量 $\Delta x > 0(\text{或}\Delta x < 0)$，使得 $[x_0, x_0+\Delta x](\text{或}[x_0+\Delta x, x_0]) \subset U(x_0)$，则由拉格朗日中值定理，存在 $\theta \in (0,1)$ 使得

$$f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = f'(x_0+\theta\Delta x)\cdot\Delta x \quad (\text{有限增量公式})$$

即

$$\Delta y = f'(x_0+\theta\Delta x)\cdot\Delta x$$

若函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内可导，设有增量 $\Delta x > 0(\text{或}\Delta x < 0)$，使得 $[x_0, x_0+\Delta x](\text{或}[x_0+\Delta x, x_0]) \subset U(x_0)$，则由拉格朗日中值定理，存在 $\theta \in (0,1)$ 使得

$$f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = f'(x_0+\theta\Delta x)\cdot\Delta x \quad (\text{有限增量公式})$$

即

$$\Delta y = f'(x_0+\theta\Delta x)\cdot\Delta x$$

注意区别

$$\Delta y \approx \mathrm{d}y = f'(x_0)\cdot\Delta x \quad (\Delta y \text{ 的近似值})$$

- 拉格朗日中值定理给出函数增量的精确表示式.

定理

如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续, I 内 (即不包括区间端点) 可导且导数恒为零, 那么 $f(x)$ 在区间 I 上是一个常数.

例

证明当 $x>0$ 时，$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$.

例

证明当 $x>0$ 时，$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$.

证明.

定义函数 $f(t)=\ln(1+t)$, 给定 $x>0$, $f(t)$ 在 $[0,x]$ 上连续, 在 $(0,x)$ 上可导.

例

证明当 $x>0$ 时, $\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$.

证明.

定义函数 $f(t)=\ln(1+t)$, 给定 $x>0$, $f(t)$ 在 $[0,x]$ 上连续, 在 $(0,x)$ 上可导. 由拉格朗日中值定理知, $\exists\xi\in(0,x)$, 使得

$$f(x)-f(0)=f'(\xi)(x-0),$$

即

$$\ln(1+x)=\frac{1}{1+\xi}x \quad (0<\xi<x)$$

例

证明当 $x>0$ 时, $\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$.

证明.

定义函数 $f(t)=\ln(1+t)$, 给定 $x>0$, $f(t)$ 在 $[0,x]$ 上连续, 在 $(0,x)$ 上可导. 由拉格朗日中值定理知, $\exists\xi\in(0,x)$, 使得

$$f(x)-f(0)=f'(\xi)(x-0),$$

即

$$\ln(1+x)=\frac{1}{1+\xi}x \quad (0<\xi<x)$$

故

$$\ln(1+x)=\frac{1}{1+\xi}x<\frac{1}{1+0}x=x \quad 且 \quad \ln(1+x)=\frac{1}{1+\xi}>\frac{1}{1+x}x$$

□

定理 (柯西中值定理)

如果函数 $f(x)$ 及 $F(x)$ 满足

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续;

(2) 在开区间 (a,b) 内可导;

(3) 对任一 $x \in (a,b)$, $F'(x) \neq 0$,

那么在 (a,b) 内至少有一点 ξ, 使得等式

$$\frac{f(a)-f(b)}{F(b)-F(a)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$$

成立.

作业

- 教材习题 3-1: 1; 2; 3; 8; 10.