反常积分

高等数学 I-信息、统计外招

Weiwen Wang(王伟文)

暨南大学

2025 年秋季学期

课程网页

定义 1

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续，任取 $t>a$，作定积分 $\int_a^t f(x)\mathrm{d}x$，再求极限:

$$\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x,$$

称其为**函数 $f(x)$ 在无穷区间 $[a,+\infty)$ 上的反常积分**，记作 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x.$$

定义 1

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续，任取 $t>a$，作定积分 $\int_a^t f(x)\mathrm{d}x$，再求极限:

$$\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x,$$

称其为**函数 $f(x)$ 在无穷区间 $[a,+\infty)$ 上的反常积分**，记作 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x.$$

- 若极限 $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x$ 存在，则称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，积分值即是该极限.
- 若此极限不存在，则称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

定义 2

设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, b]$ 上连续, 任取 $t < b$, 作定积分 $\int_t^b f(x)\mathrm{d}x$, 再求极限:

$$\lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)\mathrm{d}x,$$

称其为函数 $f(x)$ 在无穷区间 $(-\infty, b]$ 上的反常积分, 记作 $\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x$, 即

$$\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)\mathrm{d}x.$$

定义 2

设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, b]$ 上连续，任取 $t < b$，作定积分 $\int_t^b f(x)\mathrm{d}x$，再求极限：

$$\lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)\mathrm{d}x,$$

称其为函数 $f(x)$ 在无穷区间 $(-\infty, b]$ 上的反常积分，记作 $\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)\mathrm{d}x.$$

- 若极限 $\lim\limits_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在，则称反常积分 $\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，积分值即是该极限.
- 若此极限不存在，则称反常积分 $\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

定义 3

设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，反常积分 $\int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{d}x$ 与反常积分 $\int_{0}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 之和称为**函数 $f(x)$ 在无穷区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的反常积分**，记作 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

定义 3

设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上连续, 反常积分 $\int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{d}x$ 与反常积分 $\int_{0}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 之和称为**函数 $f(x)$ 在无穷区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的反常积分**, 记作 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$, 即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

- 如果反常积分 $\int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_{0}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 均收敛, 则反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛;
- 否则, 反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

上述三类反常积分统称为无穷限的反常积分.

上述三类反常积分统称为无穷限的反常积分.

由牛顿-莱布尼兹公式

设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上的一个原函数，若 $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ 存在，则反常积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(a).$$

若 $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ 不存在，则反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

上述三类反常积分统称为无穷限的反常积分.

由牛顿-莱布尼兹公式

设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上的一个原函数, 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ 存在, 则反常积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(a).$$

若 $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ 不存在, 则反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

简记 $F(+\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$. 当 $F(+\infty)$ 存在时,

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = F(+\infty) - F(a) = [F(x)]_a^{+\infty}$$

- 若 $(-\infty, b]$ 上 $F'(x) = f(x)$，则当 $F(-\infty)$(即 $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x)$) 存在时，

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_{-\infty}^{b};$$

当 $F(-\infty)$ 不存在时，反常积分 $\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

- 若在 $(-\infty,+\infty)$ 内 $F'(x)=f(x)$，则当 $F(-\infty)$ 与 $F(+\infty)$ 都存在时，

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_{-\infty}^{+\infty};$$

当 $F(-\infty)$ 与 $F(+\infty)$ 有一个不存在时，反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$.

例 1

计算反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$

例 1

计算反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$

解:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} &= [\arctan x]_{-\infty}^{+\infty} \\ &= \lim_{x\to+\infty}\arctan x - \lim_{x\to-\infty}\arctan x \\ &= \frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{2}) \\ &= \pi.\end{aligned}$$

例 2

计算反常积分 $\int_0^{+\infty} te^{-pt}\mathrm{d}t$, 其中 p 是常数, 且 $p > 0$.

例 2

计算反常积分 $\int_0^{+\infty} te^{-pt}\mathrm{d}t$, 其中 p 是常数, 且 $p>0$.

解:

$$\int_0^{+\infty} te^{-pt}\mathrm{d}t = \left[\int te^{-pt}\mathrm{d}t\right]_0^{+\infty}$$

例 2

计算反常积分 $\int_0^{+\infty} te^{-pt}\mathrm{d}t$, 其中 p 是常数, 且 $p>0$.

解:

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} te^{-pt}\mathrm{d}t &= \left[\int te^{-pt}\mathrm{d}t\right]_0^{+\infty} \\
&= \left[-\frac{1}{p}\int t\mathrm{d}e^{-pt}\right]_0^{+\infty} \\
&= \left[-\frac{1}{p}\left(te^{-pt} - \int e^{-pt}\mathrm{d}t\right)\right]_0^{+\infty}
\end{aligned}$$

例 2

计算反常积分 $\int_0^{+\infty} te^{-pt}\mathrm{d}t$, 其中 p 是常数, 且 $p>0$.

解:

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} te^{-pt}\mathrm{d}t &= \left[\int te^{-pt}\mathrm{d}t\right]_0^{+\infty} \\
&= \left[-\frac{1}{p}\int t\mathrm{d}e^{-pt}\right]_0^{+\infty} \\
&= \left[-\frac{1}{p}\left(te^{-pt} - \int e^{-pt}\mathrm{d}t\right)\right]_0^{+\infty} \\
&= \left[-\frac{1}{p}\left(te^{-pt} + \frac{1}{p}\int e^{-pt}\mathrm{d}(-pt)\right)\right]_0^{+\infty}
\end{aligned}$$

例 2

计算反常积分 $\int_0^{+\infty} te^{-pt}\mathrm{d}t$, 其中 p 是常数, 且 $p>0$.

解:

$$
\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} te^{-pt}\mathrm{d}t &= \left[\int te^{-pt}\mathrm{d}t\right]_0^{+\infty} \\
&= \left[-\frac{1}{p}\int t\mathrm{d}e^{-pt}\right]_0^{+\infty} \\
&= \left[-\frac{1}{p}\left(te^{-pt}-\int e^{-pt}\mathrm{d}t\right)\right]_0^{+\infty} \\
&= \left[-\frac{1}{p}\left(te^{-pt}+\frac{1}{p}\int e^{-pt}\mathrm{d}(-pt)\right)\right]_0^{+\infty} = \left[-\frac{1}{p}\left(te^{-pt}+\frac{1}{p}e^{-pt}\right)\right]_0^{+\infty}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}\lim_{t\to+\infty} -\frac{1}{p}\left(te^{-pt}+\frac{1}{p}e^{-pt}\right) &= \lim_{t\to+\infty} -\frac{1}{p}te^{-pt} + \lim_{t\to+\infty} -\frac{1}{p^2}e^{-pt} \\ &= -\frac{1}{p}\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{e^{pt}} - 0\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to+\infty} -\frac{1}{p}\left(te^{-pt}+\frac{1}{p}e^{-pt}\right) &= \lim_{t\to+\infty} -\frac{1}{p}te^{-pt} + \lim_{t\to+\infty} -\frac{1}{p^2}e^{-pt} \\
&= -\frac{1}{p}\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{e^{pt}} - 0 \\
&= -\frac{1}{p}\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{pe^{pt}} = 0
\end{aligned}
$$

$$\lim_{t\to+\infty} -\frac{1}{p}\left(te^{-pt}+\frac{1}{p}e^{-pt}\right) = \lim_{t\to+\infty} -\frac{1}{p}te^{-pt} + \lim_{t\to+\infty} -\frac{1}{p^2}e^{-pt}$$

$$= -\frac{1}{p}\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{e^{pt}} - 0$$

$$= -\frac{1}{p}\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{pe^{pt}} = 0$$

故

$$\int_0^{+\infty} te^{-pt}\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{p}\left(te^{-pt}+\frac{1}{p}e^{-pt}\right)\right]_0^{+\infty} = 0-\left(-\frac{1}{p^2}\right) = \frac{1}{p^2}$$

例 3

证明反常积分 $\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p}(a>0, p>0)$ 当 $p>1$ 时收敛, 当 $p\leq 1$ 时发散.

例 3

证明反常积分 $\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p} (a>0, p>0)$ 当 $p>1$ 时收敛, 当 $p \le 1$ 时发散.

解: 当 $p=1$ 时

$$\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x} = [\ln x]_a^{+\infty} = +\infty.$$

例 3

证明反常积分 $\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}(a>0,p>0)$ 当 $p>1$ 时收敛, 当 $p\le 1$ 时发散.

解: 当 $p=1$ 时

$$\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x}=[\ln x]_a^{+\infty}=+\infty.$$

当 $p\neq 1$ 时

$$\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}=\left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_a^{+\infty}$$

例 3

证明反常积分 $\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}(a>0,p>0)$ 当 $p>1$ 时收敛，当 $p\le 1$ 时发散.

解：当 $p=1$ 时

$$\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x}=[\ln x]_a^{+\infty}=+\infty.$$

当 $p\neq 1$ 时

$$\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}=\left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_a^{+\infty}=\begin{cases}+\infty, & p<1,\\ \dfrac{a^{1-p}}{p-1}, & p>1.\end{cases}$$

例 3

证明反常积分 $\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}(a>0,p>0)$ 当 $p>1$ 时收敛，当 $p\le 1$ 时发散.

解：当 $p=1$ 时

$$\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x}=[\ln x]_a^{+\infty}=+\infty.$$

当 $p\neq 1$ 时

$$\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}=\left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_a^{+\infty}=\begin{cases}+\infty, & p<1,\\ \dfrac{a^{1-p}}{p-1}, & p>1.\end{cases}$$

因此，反常积分 $\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}(a>0,p>0)$ 当 $p>1$ 时收敛，当 $p\le 1$ 时发散.

定义 4 (瑕点)

如果函数 $f(x)$ 在点 a 的任一邻域内都无界，那么 a 称为函数 $f(x)$ 的瑕点(也称为无界间断点)

定义 4 (瑕点)

如果函数 $f(x)$ 在点 a 的任一邻域内都无界, 那么 a 称为函数 $f(x)$ 的瑕点(也称为无界间断点)

- 无界函数的反常积分又称为瑕积分.
- 无穷间断点一定是瑕点.
- 瑕点一定是无穷间断点

定义 5

设函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b]$ 上连续，点 a 为 $f(x)$ 的瑕点．任取 $t>a$，作定积分 $\int_t^b f(x)\mathrm{d}x$，取极限

$$\lim_{x\to a^+}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

称其为函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b]$ 上的反常积分，仍然记作 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

定义 5

设函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b]$ 上连续，点 a 为 $f(x)$ 的瑕点．任取 $t>a$，作定积分 $\int_t^b f(x)\mathrm{d}x$，取极限

$$\lim_{x\to a^+}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

称其为函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b]$ 上的反常积分，仍然记作 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

- 上述定义中，若极限存在，则称反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，积分值为极限值；
- 若极限不存在，称反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散．

定义 6

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b)$ 上连续，点 b 为 $f(x)$ 的瑕点. 任取 $t<b$，作定积分 $\int_a^t f(x)\mathrm{d}x$，取极限

$$\lim_{x\to b^-}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x,$$

称其为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b)$ 上的反常积分，仍然记作 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

定义 6

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b)$ 上连续，点 b 为 $f(x)$ 的瑕点．任取 $t<b$，作定积分 $\int_a^t f(x)\mathrm{d}x$，取极限

$$\lim_{x\to b^-}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x,$$

称其为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b)$ 上的反常积分，仍然记作 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

- 上述定义中，若极限存在，则称反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，积分值为极限值；
- 若极限不存在，称反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散．

定义 7

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,c)$ 和 $(c,b]$ 上连续, 点 c 为 $f(x)$ 的瑕点, 反常积分 $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$ 与反常积分 $\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ 之和称为**函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的反常积分, 仍然记作 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$**, 即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

定义 7

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,c)$ 和 $(c,b]$ 上连续，点 c 为 $f(x)$ 的瑕点，反常积分 $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$ 与反常积分 $\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ 之和称为**函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的反常积分，仍然记作 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$**，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

- 若反常积分 $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$ 与反常积分 $\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ 均收敛，则称反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的值即 $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ 之和.
- 否则，就称反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

设 $x=a$ 为 $f(x)$ 的瑕点，在 $(a,b]$ 上 $F'(x)=f(x)$，如果 $\lim\limits_{x\to a^+}F(x)$ 存在，则反常积分

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b)-\lim_{x\to a^+}F(x)=F(b)-F(a^+);$$

若 $\lim\limits_{x\to a^+}F(x)$ 不存在，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

设 $x=a$ 为 $f(x)$ 的瑕点，在 $(a,b]$ 上 $F'(x)=f(x)$，如果 $\lim\limits_{x\to a^+}F(x)$ 存在，则反常积分

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - \lim_{x\to a^+}F(x) = F(b) - F(a^+);$$

若 $\lim\limits_{x\to a^+}F(x)$ 不存在，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

上述等式可以简记为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b.$$

设 $x=b$ 为 $f(x)$ 的瑕点，在 $[a,b)$ 上 $F'(x)=f(x)$，如果 $\lim\limits_{x\to b^-}F(x)$ 存在，则反常积分

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{x\to b^-}F(x)-F(a)=F(b^-)-F(a);$$

若 $\lim\limits_{x\to b^-}F(x)$ 不存在，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

设 $x=b$ 为 $f(x)$ 的瑕点，在 $[a,b)$ 上 $F'(x)=f(x)$，如果 $\lim\limits_{x\to b^-}F(x)$ 存在，则反常积分

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{x\to b^-}F(x)-F(a)=F(b^-)-F(a);$$

若 $\lim\limits_{x\to b^-}F(x)$ 不存在，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

上述等式可以简记为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=[F(x)]_a^b.$$

例 4

计算反常积分 $\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}$

例 4

计算反常积分 $\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}$

解: 因为 $\lim\limits_{x\to a^-} \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} = +\infty$, 故 $x = a$ 是瑕点.

例 4

计算反常积分 $\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}$

解: 因为 $\lim\limits_{x\to a^-} \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} = +\infty$, 故 $x=a$ 是瑕点.

于是

$$\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \left[\arcsin\frac{x}{a}\right]_0^a =$$

例 4

计算反常积分 $\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}$

解: 因为 $\lim\limits_{x\to a^-} \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} = +\infty$, 故 $x=a$ 是瑕点.

于是

$$\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \left[\arcsin\frac{x}{a}\right]_0^a = \lim_{x\to a^-} \arcsin\frac{x}{a} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

例 5

讨论反常积分 $\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ 的收敛性.

例 5

讨论反常积分 $\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ 的收敛性.

解: 因为 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$, 故 $x = 0$ 是瑕点.

例 5

讨论反常积分 $\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ 的收敛性.

解: 因为 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$, 故 $x = 0$ 是瑕点.

于是

$$\int_{-1}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{0} = -\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} - 1 = +\infty$$

例 5

讨论反常积分 $\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ 的收敛性.

解: 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$, 故 $x=0$ 是瑕点.

于是

$$\int_{-1}^{0}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=\left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{0}=-\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}-1=+\infty$$

即反常积分 $\int_{-1}^{0}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ 发散, 故反常积分 $\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ 发散.

例 6

证明反常积分 $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^q}$ 当 $0<q<1$ 时收敛, $q \geq 1$ 时发散.

例 6

证明反常积分 $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^q}$ 当 $0<q<1$ 时收敛, $q\ge 1$ 时发散.

解: $x=a$ 是瑕点.

当 $q=1$ 时

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x-a} = \left[\ln(x-a)\right]_a^b = \ln(b-a) - \lim_{x\to a^+} \ln(x-a) = +\infty$$

例 6

证明反常积分 $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^q}$ 当 $0<q<1$ 时收敛, $q\geq 1$ 时发散.

解: $x=a$ 是瑕点.

当 $q=1$ 时

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x-a} = \left[\ln(x-a)\right]_a^b = \ln(b-a) - \lim_{x\to a^+} \ln(x-a) = +\infty$$

当 $q\neq 1$ 且 $q>0$ 时

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^q} = \left[\frac{1}{1-q}(x-a)^{1-q}\right]_a^b$$

例 6

证明反常积分 $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^q}$ 当 $0<q<1$ 时收敛, $q\geq 1$ 时发散.

解: $x=a$ 是瑕点.

当 $q=1$ 时

$$\int_a^b \frac{dx}{x-a} = [\ln(x-a)]_a^b = \ln(b-a) - \lim_{x\to a^+} \ln(x-a) = +\infty$$

当 $q\neq 1$ 且 $q>0$ 时

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^q} = \left[\frac{1}{1-q}(x-a)^{1-q}\right]_a^b = \begin{cases} \frac{(b-a)^{1-q}}{1-q}, & 0<q<1 \\ +\infty, q>1 \end{cases}$$

因此, 当 $0<q<1$ 时, 反常积分收敛; 当 $q\geq 1$ 时, 反常积分发散.

反常积分也使用换元法替换成正常积分.

反常积分也使用换元法替换成正常积分.

例 7

求反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x+1)^3}}$

反常积分也使用换元法替换成正常积分.

例 7

求反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x+1)^3}}$

解：取 $\sqrt{x}=\tan u \quad (0<u<\frac{\pi}{2})$，则 $x=\tan^2 u$，$\mathrm{d}x=2\tan u\sec^2 u\,\mathrm{d}u$.

反常积分也使用换元法替换成正常积分.

例 7

求反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x+1)^3}}$

解：取 $\sqrt{x} = \tan u \quad (0 < u < \frac{\pi}{2})$，则 $x = \tan^2 u$，$\mathrm{d}x = 2\tan u \sec^2 u \mathrm{d}u$.

又因为

$$\sec^2 u = \tan^2 u + 1,$$

且 $0 < u < \frac{\pi}{2}$，$\sec u > 0$.

反常积分也使用换元法替换成正常积分.

例 7

求反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)^3}}$

解: 取 $\sqrt{x} = \tan u \quad (0 < u < \frac{\pi}{2})$, 则 $x = \tan^2 u$, $dx = 2\tan u \sec^2 u du$.

又因为

$$\sec^2 u = \tan^2 u + 1,$$

且 $0 < u < \frac{\pi}{2}$, $\sec u > 0$.

代入所求积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)^3}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\tan u \sec^2 u du}{\tan u \sec^3 u} =$$

反常积分也使用换元法替换成正常积分.

例 7

求反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x+1)^3}}$

解: 取 $\sqrt{x} = \tan u \quad (0 < u < \frac{\pi}{2})$, 则 $x = \tan^2 u$, $\mathrm{d}x = 2\tan u \sec^2 u \mathrm{d}u$.

又因为

$$\sec^2 u = \tan^2 u + 1,$$

且 $0 < u < \frac{\pi}{2}$, $\sec u > 0$.

代入所求积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x+1)^3}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\tan u \sec^2 u \mathrm{d}u}{\tan u \sec^3 u} = = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos u \mathrm{d}u = 2.$$

作业

- 教材习题 5-4: 1(1)(3)(8)(10), 4.