函数的极值与最大值最小值

高等数学 I-信息、统计外招

Weiwen Wang(王伟文)

暨南大学

2025 年秋季学期

课程网页

定义 (极大值与极小值)

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内有定义, 如果对于去心邻域 $\mathring{U}(x_0)$ 内任一 x, 有

$$f(x) < f(x_0) \quad (\text{或 } f(x) > f(x_0))$$

那么就称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个极大值(或极小值).

定义 (极大值与极小值)

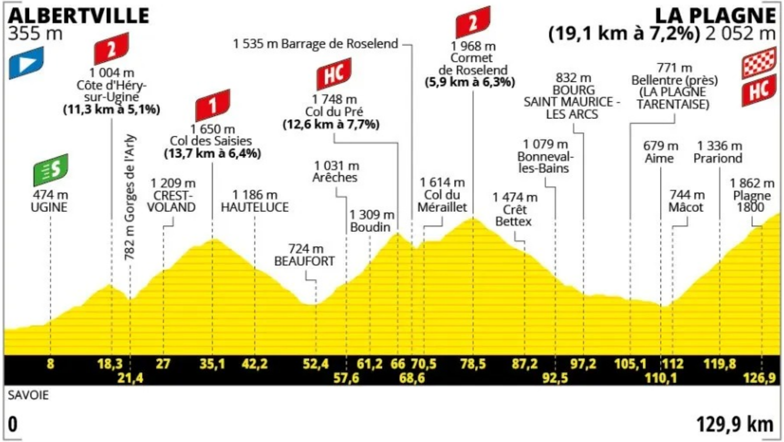
设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内有定义, 如果对于去心邻域 $\mathring{U}(x_0)$ 内任一 x, 有

$$f(x) < f(x_0) \quad (\text{或 } f(x) > f(x_0))$$

那么就称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个极大值(或极小值).

函数的极大值与极小值统称为函数的极值, 使得函数取得极值的点称为极值点.

2025 年环法自行车赛: 第 19 赛段——阿尔贝维尔 (Albertville) 至拉普拉涅 (La Plagne)



定理 1 (必要条件)

设函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导，且在 x_0 处取得极值，则 $f'(x_0)=0$.

- 若极值点处可导，则极值点必然为驻点；反之不成立！
- 导数不存在的点也可能是极值点，如函数 $y=|x|$ 在 $x=0$ 处取得极小值.

判断极值点的方法之一

定理 2 (第一充分条件)

设函数 $f(x)$ 在 x_0 连续, 且在 x_0 的某去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内可导,

(1) 若 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时, $f'(x)>0$, 而 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时, $f'(x)<0$, 则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值;

判断极值点的方法之一

定理 2 (第一充分条件)

设函数 $f(x)$ 在 x_0 连续, 且在 x_0 的某去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内可导,

(1) 若 $x \in (x_0-\delta, x_0)$ 时, $f'(x) > 0$, 而 $x \in (x_0, x_0+\delta)$ 时, $f'(x) < 0$, 则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值;

(2) 若 $x \in (x_0-\delta, x_0)$ 时, $f'(x) < 0$, 而 $x \in (x_0, x_0+\delta)$ 时, $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值.

判断极值点的方法之一

定理 2 (第一充分条件)

设函数 $f(x)$ 在 x_0 连续, 且在 x_0 的某去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内可导,

(1) 若 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时, $f'(x)>0$, 而 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时, $f'(x)<0$, 则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值;

(2) 若 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时, $f'(x)<0$, 而 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时, $f'(x)>0$, 则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值.

- 在 x_0 的某个邻域内先增后减极大值; 先减后增极小值.

例

求函数 $f(x) = x - \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$ 的极值.

例

求函数 $f(x)=x-\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$ 的极值.

解　函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续, 且

$$f'(x)=1-x^{-\frac{1}{3}}=1-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

故 $x=1$ 为函数 $f(x)$ 的驻点, $x=0$ 处函数不可导.

例

求函数 $f(x)=x-\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$ 的极值.

解　函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续, 且

$$f'(x)=1-x^{-\frac{1}{3}}=1-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

故 $x=1$ 为函数 $f(x)$ 的驻点, $x=0$ 处函数不可导.

当 $x>1$ 时, $f'(x)>0$; 当 $0<x<1$ 时, $f'(x)<0$; 当 $x<0$ 时, $f'(x)>0$.

故函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极大值 $f(0)=0$, 在 $x=1$ 处取得极小值 $f(1)=-\frac{1}{2}$.

第一充分定理求极值的步骤

(1) 求出导数 $f'(x)$;

(2) 求出 $f(x)$ 全部驻点与不可导点;

(3) 考察 $f'(x)$ 的符号在每个驻点或不可导点的左、右邻近的情形，以确定该点是否为极值点; 若是极值点，进一步确定是极大值点还是极小值点.

定理 3 (第二充分条件)

设函数 $f(x)$ 在 x_0 处具有二阶导数且 $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)\neq 0$, 则

(1) 当 $f''(x_0)<0$ 时, 函数在 x_0 处取得极大值;

(2) 当 $f''(x_0)>0$ 时, 函数在 x_0 处取得极小值.

证明.

证 (2). 由二阶导数定义

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=f''(x_0)>0.$$

证明.

证 (2). 由二阶导数定义

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = f''(x_0) > 0.$$

由极限的保号性, 存在 x_0 某邻域 $U(x_0)$, 使得

$$\frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} > 0 \quad \forall x \in U(x_0)$$

证明.

证 (2). 由二阶导数定义

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=f''(x_0)>0.$$

由极限的保号性, 存在 x_0 某邻域 $U(x_0)$, 使得

$$\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}>0 \quad \forall x\in U(x_0)$$

故在此邻域内, 当 x 位于 x_0 左侧, $f'(x)<f'(x_0)=0$; 当 x 位于 x_0 右侧, $f'(x)>f'(x_0)=0$.

证明.

证 (2). 由二阶导数定义

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=f''(x_0)>0.$$

由极限的保号性, 存在 x_0 某邻域 $U(x_0)$, 使得

$$\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}>0 \quad \forall x\in U(x_0)$$

故在此邻域内, 当 x 位于 x_0 左侧, $f'(x)<f'(x_0)=0$; 当 x 位于 x_0 右侧, $f'(x)>f'(x_0)=0$.

函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值, 即 x_0 为 $f(x)$ 的极小值点. $\square$

例 2

求函数 $f(x)=(x^2-1)^3+1$ 的极值

例 2

求函数 $f(x)=(x^2-1)^3+1$ 的极值

解

$$f'(x)=3(x^2-1)^2\cdot 2x \quad f''(x)=24x^2(x^2-1)+6(x^2-1)^2$$

函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上无不可导点. 令 $f'(x)=0$, 解得 $x_1=0, x_2=-1, x_3=1$.

例 2

求函数 $f(x)=(x^2-1)^3+1$ 的极值

解

$$f'(x)=3(x^2-1)^2\cdot 2x \quad f''(x)=24x^2(x^2-1)+6(x^2-1)^2$$

函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上无不可导点. 令 $f'(x)=0$, 解得 $x_1=0, x_2=-1, x_3=1$.

当 $x=0$ 时, $f''(0)=6>0$, 故 $x=0$ 为函数 $f(x)$ 的极小值点, 极小值为 $f(0)=0$.

例 2

求函数 $f(x)=(x^2-1)^3+1$ 的极值

解

$$f'(x)=3(x^2-1)^2\cdot 2x \quad f''(x)=24x^2(x^2-1)+6(x^2-1)^2$$

函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上无不可导点. 令 $f'(x)=0$, 解得 $x_1=0, x_2=-1, x_3=1$.

当 $x=0$ 时, $f''(0)=6>0$, 故 $x=0$ 为函数 $f(x)$ 的极小值点, 极小值为 $f(0)=0$.

当 $x=\pm 1$ 时, $f''(\pm 1)=0$, 不满足第二充分条件的使用条件.

例 2

求函数 $f(x)=(x^2-1)^3+1$ 的极值

解

$$f'(x)=3(x^2-1)^2\cdot 2x \quad f''(x)=24x^2(x^2-1)+6(x^2-1)^2$$

函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上无不可导点. 令 $f'(x)=0$, 解得
$x_1=0, x_2=-1, x_3=1$.
当 $x=0$ 时, $f''(0)=6>0$, 故 $x=0$ 为函数 $f(x)$ 的极小值点, 极小值为
$f(0)=0$.
当 $x=\pm1$ 时, $f''(\pm1)=0$, 不满足第二充分条件的使用条件.
当 $x<-1$ 时, $f'(x)<0$; 当 $-1<x<0$ 时, $f'(x)<0$. 当 $0<x<1$ 时,
$f'(x)>0$, 当 $x>1$ 时, $f'(x)>0$. 即 $x=-1$ 及 $x=1$ 的左、右邻近两侧 $f'(x)$
符号不变, 故在 $x=-1$ 及 $x=1$ 处无极值.

最大值与最小值判断

闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数 $f(x)$ 一定存在最大值最小值

(1) 求出 $f(x)$ 在 (a,b) 内的驻点及不可导点;

(2) 计算 $f(x)$ 在上述驻点、不可导点处的函数值及 $f(a)$, $f(b)$;

(3) 比较 (2) 中诸值的大小, 其中最大的便是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值、最小值即是 $f(x)$ 的最小值.

例 3

求函数 $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$ 在区间 $[-3, 4]$ 上的最大值与最小值.

例 3

求函数 $f(x)=|x^2-3x+2|$ 在区间 $[-3,4]$ 上的最大值与最小值.

解

$$f(x)=\begin{cases} x^2-3x+2 & x\in[-3,1]\cup[2,4] \\ -x^2+3x-2 & x\in(1,2) \end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases} 2x-3 & x\in(-3,1)\cup(2,4) \\ -2x+3 & x\in(1,2) \end{cases}$$

例 3

求函数 $f(x)=|x^2-3x+2|$ 在区间 $[-3,4]$ 上的最大值与最小值.

解

$$f(x)=\begin{cases} x^2-3x+2 & x\in[-3,1]\cup[2,4] \\ -x^2+3x-2 & x\in(1,2) \end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases} 2x-3 & x\in(-3,1)\cup(2,4) \\ -2x+3 & x\in(1,2) \end{cases}$$

$x=\frac{3}{2}$ 为 $f(x)$ 的驻点, 在 $x=1$ 及 $x=2$ 处不可导.
$f(-3)=20$, $f(4)=6$, $f(\frac{3}{2})=\frac{1}{4}$, $f(1)=0$, $f(2)=0$. 故在此区间内 $f(x)$ 的最大值为 20, 最小值为 0.

$f(x)$ 在一个区间 (有限或无限, 闭或开) 内可导且只有一个驻点 x_0, 并且这个驻点 x_0 是函数的极值; 那么, 当 $f(x_0)$ 是极大值时, $f(x_0)$ 就是该区间的最大值; 当 $f(x_0)$ 为极小值时, $f(x_0)$ 就是该区间的最小值.

例

假设某工厂生产产品 x 千件成本为 $C(x) = 2400 + 4000x + 100x^2$(元), 销售产品 x 千件的收入为 $r(x) = 5000x$(元), 问生产多少件时利润最大?

例

假设某工厂生产产品 x 千件成本为 $C(x)=2400+4000x+100x^2$(元), 销售产品 x 千件的收入为 $r(x)=5000x$(元), 问生产多少件时利润最大?

解　利润函数为

$$L(x)=r(x)-C(x)=-100x^2+1000x-2400$$

$$L'(x)=-200x+1000 \quad L''(x)=-200$$

令 $L'(x)=-200x+1000=5$, 解得 $x=5$, 故 $x=5$ 为该函数的唯一驻点, 且 $L''(5)=-200<0$, 亦即 $x=5$ 为该函数的极大值点, 极大值为 $L(5)=100$, 此极大值为最大值. 因此生产 5000 千件时利润最大.

作业

- 教材习题 3-5: 1(1)(2); 6(1)(2); 7; 17.