

函数的单调性与曲线的凹凸性

高等数学 I-信息、统计外招

Weiwen Wang(王伟文)

暨南大学

2025 年秋季学期



课程网页

观测在不同的单调区间函数的导数的正负

定理 1

设函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导.

- (1) 如果在 (a,b) 内 $f'(x) \geq 0$, 且等号仅在有限多个点成立, 那么函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加;
- (2) 如果在 (a,b) 内 $f'(x) \leq 0$, 且等号仅在有限多个点成立, 那么函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调减少.

定理 1

设函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导.

- (1) 如果在 (a,b) 内 $f'(x) \geq 0$, 且等号仅在有限多个点成立, 那么函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加;
- (2) 如果在 (a,b) 内 $f'(x) \leq 0$, 且等号仅在有限多个点成立, 那么函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调减少.

- 判定法的闭区间可换成其他各种区间.

- 使用拉格朗日中值定理证明.
- $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$, 不妨设 $x_1 < x_2$. 在区间 $[x_1, x_2]$ 上函数 $y = f(x)$ 满足拉格朗日中值定理的应用条件, 故 $\exists \xi \in (x_1, x_2)$,

$$f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(\xi)}_{\geq 0} \underbrace{(x_2 - x_1)}_{> 0} \geq 0$$

即 $f(x_2) \geq f(x_1)$, 其中等号只在有限的情形下成立.

例 2

讨论函数 $y = e^x - x - 1$ 的单调性.

例 2

讨论函数 $y = e^x - x - 1$ 的单调性.

解 $y' = e^x - 1, x \in (-\infty, +\infty)$.

例 2

讨论函数 $y = e^x - x - 1$ 的单调性.

解 $y' = e^x - 1, x \in (-\infty, +\infty)$.

令 $y' = e^x - 1 < 0$, 即 $e^x < 1$

例 2

讨论函数 $y = e^x - x - 1$ 的单调性.

解 $y' = e^x - 1, x \in (-\infty, +\infty)$.

令 $y' = e^x - 1 < 0$, 即 $e^x < 1$

两边同时取自然对数, 解得 $x < 0$, 即使当 $x \in (-\infty, 0)$ 时,
 $y' < 0$, 故函数 $y = e^x - x - 1$ 在区间 $(-\infty, 0]$ 上单调减少.

例 2

讨论函数 $y = e^x - x - 1$ 的单调性.

解 $y' = e^x - 1, x \in (-\infty, +\infty)$.

令 $y' = e^x - 1 < 0$, 即 $e^x < 1$

两边同时取自然对数, 解得 $x < 0$, 即使当 $x \in (-\infty, 0)$ 时,
 $y' < 0$, 故函数 $y = e^x - x - 1$ 在区间 $(-\infty, 0]$ 上单调减少.

类似地, 当 $x \in [0, +\infty)$ 时, $y' > 0$, 函数 $y = e^x - x - 1$ 在区间
[0, $+\infty$) 上单调增加.

分析函数 $y=f(x)$ 的单调性

- 不等式 $f'(x) > 0$ 的解即为函数 $y=f(x)$ 的单调递增区间.
- 不等式 $f'(x) < 0$ 的解即为函数 $y=f(x)$ 的单调递减区间.

例 4

确定函数 $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$ 的单调区间.

例 4

确定函数 $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$ 的单调区间.

解

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$$

令 $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 < 0$, 即 $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2) < 0$, 解得 $1 < x < 2$. 因此, 函数 $f(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 上单调递增.

例 4

确定函数 $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$ 的单调区间.

解

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$$

令 $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 < 0$, 即 $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2) < 0$, 解得 $1 < x < 2$. 因此, 函数 $f(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 上单调递增.

令 $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 > 0$, 即 $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2) > 0$, 解得 $x > 2$ 或 $x < 1$. 因此函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 1]$ 及区间 $[2, +\infty)$ 上单调递增.

定义

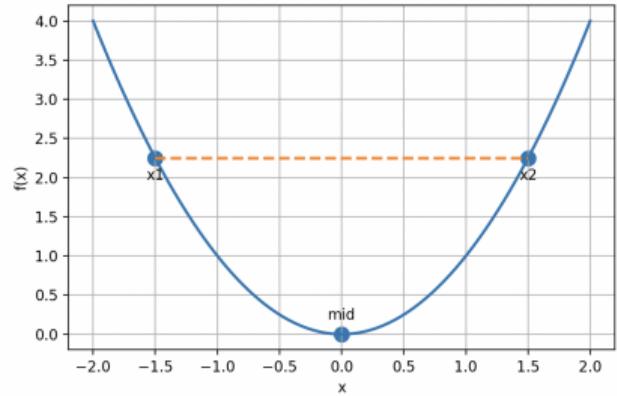
设 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 如果对 I 上任意的两点 x_1, x_2 恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

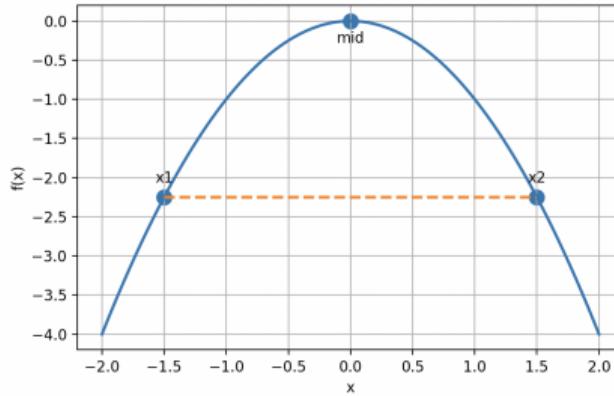
那么称 $f(x)$ 在 I 上的图形是 (向上) 凹的 (或凹弧); 如果恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

那么称 $f(x)$ 在 I 上的图形是 (向上) 凸的 (或凸弧)



凹弧



凸弧

定理 2

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内具有一阶和二阶导数, 那么

- (1) 若在 (a,b) 内 $f''(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的图形是凹的;
- (2) 若在 (a,b) 内 $f''(x) < 0$, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的图形是凸的.

- 判定法中的闭区间换成其他区间结论也成立.

证明.

(1) 从区间 $[a, b]$ 中任取不同的两点 x_1, x_2 , 不妨设 $x_1 < x_2$, 记 $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2}$,
则函数 $f(x)$ 在区间 $[x_1, \bar{x}]$ 和区间 $[\bar{x}, x_2]$ 满足拉格朗日中值定理的条件,
故

$$f(\bar{x}) - f(x_1) = f'(\xi_1)(\bar{x} - x_1) = f'(\xi_1)\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right) \quad \exists \xi_1 \in (x_1, \bar{x}) \quad (1)$$

$$f(x_2) - f(\bar{x}) = f'(\xi_2)(x_2 - \bar{x}) = f'(\xi_2)\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right) \quad \exists \xi_2 \in (\bar{x}, x_2) \quad (2)$$

证明.

(1) 从区间 $[a, b]$ 中任取不同的两点 x_1, x_2 , 不妨设 $x_1 < x_2$, 记 $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2}$, 则函数 $f(x)$ 在区间 $[x_1, \bar{x}]$ 和区间 $[\bar{x}, x_2]$ 满足拉格朗日中值定理的条件, 故

$$f(\bar{x}) - f(x_1) = f'(\xi_1)(\bar{x} - x_1) = f'(\xi_1)\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right) \quad \exists \xi_1 \in (x_1, \bar{x}) \quad (1)$$

$$f(x_2) - f(\bar{x}) = f'(\xi_2)(x_2 - \bar{x}) = f'(\xi_2)\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right) \quad \exists \xi_2 \in (\bar{x}, x_2) \quad (2)$$

(1) - (2) 得到

$$2f(\bar{x}) - (f(x_1) + f(x_2)) = (f'(\xi_1) - f'(\xi_2))\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)$$



继.

因为 $\forall x \in (a, b), f''(x) > 0$ 且 $\xi_1 < \xi_2$, 故 $f''(\xi_1) < f''(\xi_2)$. 因此

$$2f(\bar{x}) - (f(x_1) + f(x_2)) < 0.$$

即

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$



例 6

判定曲线 $y = \ln x$ 的凹凸性.

例 6

判定曲线 $y = \ln x$ 的凹凸性.

解 函数 $y = \ln x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$.

$$y'' = (y')' = [(\ln x)']' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

例 6

判定曲线 $y = \ln x$ 的凹凸性.

解 函数 $y = \ln x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$.

$$y'' = (y')' = [(\ln x)']' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

故 $\forall x \in (0, +\infty)$, $y'' < 0$. 因此曲线 $y = \ln x$ 是凸的.

例 7

判定曲线 $y = x^3$ 的凹凸性.

例 7

判定曲线 $y = x^3$ 的凹凸性.

解 函数 $y = x^3$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$.

$$(y')' = \left[(x^3)' \right]' = (3x^2)' = 6x.$$

例 7

判定曲线 $y = x^3$ 的凹凸性.

解 函数 $y = x^3$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$.

$$(y')' = \left[(x^3)' \right]' = (3x^2)' = 6x.$$

故 $\forall x \in (-\infty, 0)$, $y'' < 0$; $\forall x \in (0, +\infty)$, $y'' > 0$.

例 7

判定曲线 $y = x^3$ 的凹凸性.

解 函数 $y = x^3$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$.

$$(y')' = \left[(x^3)' \right]' = (3x^2)' = 6x.$$

故 $\forall x \in (-\infty, 0)$, $y'' < 0$; $\forall x \in (0, +\infty)$, $y'' > 0$.

所以曲线 $y = \ln x$ 在区间 $(-\infty, 0]$ 是凸弧, 在区间 $[0, +\infty)$ 是凹弧.

定义 (拐点)

一般地, 设 $y = f(x)$ 在区间 I 上连续, x_0 是 I 内的点. 如果曲线 $y = f(x)$ 在经过点 $(x_0, f(x_0))$ 时, 曲线的凹凸性改变了, 那么就称点 $(x_0, f(x_0))$ 为这曲线的拐点.

利用二阶导数求拐点的基本步骤

- 求 $f''(x)$;
- 令 $f''(x) = 0$, 解出这个方程在区间 I 内的实根, 并求出在区间 I 内 $f''(x)$ 不存在的点;

利用二阶导数求拐点的基本步骤

- 求 $f''(x)$;
- 令 $f''(x) = 0$, 解出这个方程在区间 I 内的实根, 并求出在区间 I 内 $f''(x)$ 不存在的点;
- 对于 (2) 中求出的每一个实根或二阶导数不存在的点 x_0 , 检查 $f''(x)$ 在 x_0 左、右两侧邻近的符号, 那么当两侧的符号相反时, 点 $(x_0, f(x_0))$ 是拐点, 当两侧的符号相同时, 点 $(x_0, f(x_0))$ 不是拐点.

例 9

求曲线 $y = 3x^4 - 4x^3 + 1$ 的拐点及凹凸区间.

例 9

求曲线 $y = 3x^4 - 4x^3 + 1$ 的拐点及凹凸区间.

解

$$y'' = [(3x^4 - 4x^3 + 1)']' = (12x^3 - 12x^2)' = 36x^2 - 24x$$

令 $y'' = 0$, 即使 $36x^2 - 24x = 0$, 解得方程两个实根 $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{2}{3}$. 且没有使得 $f''(x)$ 不存在的点.

例 9

求曲线 $y = 3x^4 - 4x^3 + 1$ 的拐点及凹凸区间.

解

$$y'' = \left[(3x^4 - 4x^3 + 1)' \right]' = \left(12x^3 - 12x^2 \right)' = 36x^2 - 24x$$

令 $y'' = 0$, 即使 $36x^2 - 24x = 0$, 解得方程两个实根 $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{2}{3}$. 且没有使得 $f''(x)$ 不存在的点.

上述实根将函数 y 的定义域划分称 3 个区间: $(-\infty, 0]$, $[0, \frac{2}{3}]$, $[\frac{2}{3}, +\infty)$.

例 9

求曲线 $y = 3x^4 - 4x^3 + 1$ 的拐点及凹凸区间.

解

$$y'' = \left[(3x^4 - 4x^3 + 1)' \right]' = \left(12x^3 - 12x^2 \right)' = 36x^2 - 24x$$

令 $y'' = 0$, 即使 $36x^2 - 24x = 0$, 解得方程两个实根 $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{2}{3}$. 且没有使得 $f''(x)$ 不存在的点.

上述实根将函数 y 的定义域划分称 3 个区间: $(-\infty, 0]$, $[0, \frac{2}{3}]$, $[\frac{2}{3}, +\infty)$.

当 $x < 0$ 时, $y'' > 0$, 所以此曲线在区间 $(-\infty, 0]$ 为凹弧.

当 $0 < x < \frac{2}{3}$ 时, $y'' < 0$, 所以此曲线在区间 $[0, \frac{2}{3}]$ 为凸弧.

当 $x > \frac{2}{3}$ 时, $y'' > 0$, 所以此曲线在区间 $[\frac{2}{3}, +\infty)$ 为凹弧.

例 9

求曲线 $y = 3x^4 - 4x^3 + 1$ 的拐点及凹凸区间.

解

$$y'' = \left[(3x^4 - 4x^3 + 1)' \right]' = \left(12x^3 - 12x^2 \right)' = 36x^2 - 24x$$

令 $y'' = 0$, 即使 $36x^2 - 24x = 0$, 解得方程两个实根 $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{2}{3}$. 且没有使得 $f''(x)$ 不存在的点.

上述实根将函数 y 的定义域划分称 3 个区间: $(-\infty, 0]$, $[0, \frac{2}{3}]$, $[\frac{2}{3}, +\infty)$.

当 $x < 0$ 时, $y'' > 0$, 所以此曲线在区间 $(-\infty, 0]$ 为凹弧.

当 $0 < x < \frac{2}{3}$ 时, $y'' < 0$, 所以此曲线在区间 $[0, \frac{2}{3}]$ 为凸弧.

当 $x > \frac{2}{3}$ 时, $y'' > 0$, 所以此曲线在区间 $[\frac{2}{3}, +\infty)$ 为凹弧.

因此, 在 $x = 0$ 及 $x = \frac{2}{3}$ 处左、右邻近两侧二阶导数符号相反, 所以 $(0, 1)$ 和 $(\frac{2}{3}, \frac{11}{27})$ 为此曲线的拐点.

随堂练习

设函数 $y = x^4 - 2x^3 + 1$,

- (1) 求单调区间;
- (2) 求函数图像的凹凸区间及拐点.

随堂练习

设函数 $y = x^4 - 2x^3 + 1$,

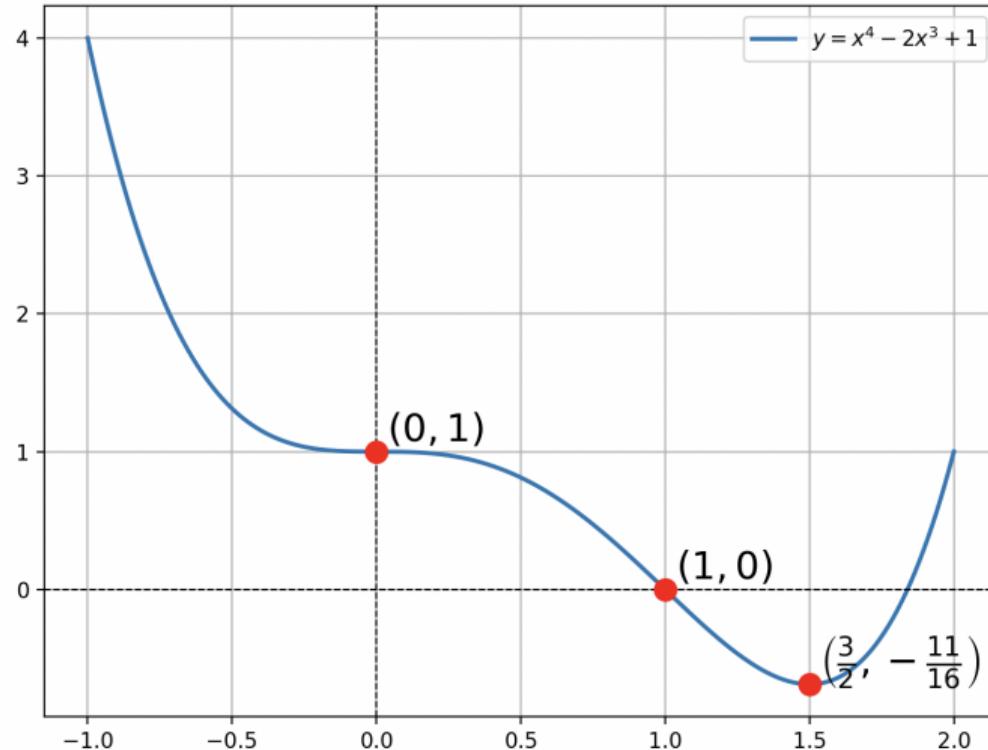
(1) 求单调区间;

函数在 $(-\infty, \frac{3}{2}]$ 上单调递减, 在 $[\frac{3}{2}, +\infty)$ 上单调递增.

(2) 求函数图像的凹凸区间及拐点.

函数图像在区间 $(-\infty, 0]$ 及区间 $[1, +\infty)$ 为凹弧; 在区间 $[0, 1]$ 上为凸弧; $(0, 1)$ 及 $(1, 0)$ 为此图像的拐点.

Graph of $y = x^4 - 2x^3 + 1$



作业

- 教材习题 3-4: 3(1)(7); 4; 5(1); 10(1).