

不定积分的概念与性质

高等数学 I-信息、统计外招

Weiwen Wang(王伟文)

暨南大学

2025 年秋季学期



课程网页

定义 1

如果在区间 I 上, 可导函数 $F(x)$ 的导函数为 $f(x)$, 即对任一 $x \in I$, 都有

$$F'(x) = f(x) \quad \text{或} \quad dF(x) = f(x)dx,$$

那么函数 $F(x)$ 就称为 $f(x)$ (或 $f(x)dx$) 在区间 I 上的一个原函数.

- 因为 $(\sin x)' = \cos x$, 故 $\sin x$ 是 $\cos x$ 的原函数.

定理 (原函数存在定理)

如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 那么在区间 I 上存在可导函数 $F(x)$, 使对任一 $x \in I$ 都有

$$F'(x) = f(x).$$

- 连续函数一定有原函数.

定理 (原函数存在定理)

如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 那么在区间 I 上存在可导函数 $F(x)$, 使对任一 $x \in I$ 都有

$$F'(x) = f(x).$$

- 连续函数一定有原函数.
- 若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的原函数, 则对任意常数 C , $F(x) + C$ 也是 $f(x)$ 在区间 I 上的原函数.

定理 (原函数存在定理)

如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 那么在区间 I 上存在可导函数 $F(x)$, 使对任一 $x \in I$ 都有

$$F'(x) = f(x).$$

- 连续函数一定有原函数.
- 若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的原函数, 则对任意常数 C , $F(x) + C$ 也是 $f(x)$ 在区间 I 上的原函数.
- $f(x)$ 在区间 I 上的任意两个不同原函数只相差一个常数 C .

定义 2

在区间 I 上, 函数 $f(x)$ 的带有任意常数项的原函数称为 $f(x)$ (或 $f(x)dx$) 在区间 I 上的不定积分, 记作

$$\int f(x)dx.$$

其中记号 \int 称为积分号, $f(x)$ 称为被积函数, $f(x)dx$ 称为被积表达式, x 称为积分变量.

定义 2

在区间 I 上, 函数 $f(x)$ 的带有任意常数项的原函数称为 $f(x)$ (或 $f(x)dx$) 在区间 I 上的不定积分, 记作

$$\int f(x)dx.$$

其中记号 \int 称为积分号, $f(x)$ 称为被积函数, $f(x)dx$ 称为被积表达式, x 称为积分变量.

- 如果 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数, 那么 $F(x)+C$ 就是 $f(x)$ 的不定积分, 即

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

因而不定积分 $\int f(x)dx$ 可以表示 $f(x)$ 的任意一个原函数.

一个物理学家、一个工程师和一个数学家一起讨论 $\int 2x dx$ 等于多少。

- 物理学家看了一眼，说：“ x^2 ，这很简单。”
- 工程师点点头：“对，是 x^2 。”
- 最后轮到数学家，他慢条斯理地说：“是 $x^2 + C$ ，其中 C 是一个任意常数。”
- 物理学家和工程师不耐烦了：“那个 C 有什么用？每次都加它，多麻烦！”
- 数学家严肃地推了推眼镜：“没有 C ，那只是‘一个’原函数。有了 C ，才是‘所有’原函数的集合。这是严谨与草率的区别！”

¹-DeepSeek 生成

例 1

求 $\int x^2 dx$

例 1

求 $\int x^2 dx$

解 因为 $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$, 故 $\frac{x^3}{3}$ 是 x^2 的一个原函数. 因此

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C.$$

例 2

求 $\int \frac{1}{x} dx$.

例 2

求 $\int \frac{1}{x} dx$.

解 当 $x > 0$ 时, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, 所以 $\ln x$ 是 $\frac{1}{x}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上的一个原函数. 故在区间 $(0, +\infty)$ 上

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C.$$

例 2

求 $\int \frac{1}{x} dx$.

解 当 $x > 0$ 时, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, 所以 $\ln x$ 是 $\frac{1}{x}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上的一个原函数. 故在区间 $(0, +\infty)$ 上

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C.$$

当 $x < 0$ 时, $(\ln(-x))' = \frac{1}{x}$, 所以 $\ln(-x)$ 是 $\frac{1}{x}$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 上的一个原函数. 故在区间 $(-\infty, 0)$ 上

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(-x) + C.$$

综上,

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C.$$

常用基本积分公式

- $\int k dx = kx + C$ (k 是常数)
- $\int x^\mu dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C$ ($\mu \neq -1$)
- $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
- $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$
- $\int \cos x dx = \sin x + C$
- $\int \sin x dx = -\cos x + C$
- $\int e^x dx = e^x + C$
- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

例 11

求 $\int 2^x e^x dx$

例 11

求 $\int 2^x e^x dx$

解

$$\int 2^x e^x dx = \int (2e)^x dx$$

例 11

求 $\int 2^x e^x dx$

解

$$\begin{aligned}\int 2^x e^x dx &= \int (2e)^x dx \\ &= \frac{(2e)^x}{\ln(2e)} + C = \frac{2^x e^x}{1 + \ln 2} + C\end{aligned}$$

定理 (性质 1)

设函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 的原函数存在, 则

$$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$$

定理 (性质 2)

设函数 $f(x)$ 的原函数存在, k 为非零常数, 则

$$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx.$$

三角函数倍角公式

$$\sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta,$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 1 - 2 \sin^2 \theta,$$

$$\tan(2\theta) = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}.$$

三角函数倍角公式

$$\sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta,$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 1 - 2 \sin^2 \theta,$$

$$\tan(2\theta) = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}.$$

三角函数半角公式

$$\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{2},$$

$$\cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos \theta}{2},$$

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} = \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta}.$$

例 12

求 $\int \tan^2 x dx$

例 12

求 $\int \tan^2 x dx$

解 已知

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

例 12

求 $\int \tan^2 x dx$

解 已知

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\int \tan^2 x dx = \int \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)^2 dx$$

例 12

求 $\int \tan^2 x dx$

解 已知

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\begin{aligned}\int \tan^2 x dx &= \int \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)^2 dx \\&= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx \\&= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx\end{aligned}$$

例 12

求 $\int \tan^2 x dx$

解 已知

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\begin{aligned}\int \tan^2 x dx &= \int \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)^2 dx \\&= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx \\&= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx \\&= \tan x - x + C.\end{aligned}$$

例 13

求 $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx$

例 13

求 $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx$

解 由三角函数半角公式

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$$

例 13

求 $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx$

解 由三角函数半角公式

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$$

$$\begin{aligned} \int \sin^2 \frac{x}{2} dx &= \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos x \right) dx \\ &= \int \frac{1}{2} dx - \int \frac{1}{2} \cos x dx \end{aligned}$$

例 13

求 $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx$

解 由三角函数半角公式

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$$

$$\begin{aligned}\int \sin^2 \frac{x}{2} dx &= \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos x \right) dx \\ &= \int \frac{1}{2} dx - \int \frac{1}{2} \cos x dx \\ &= \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos x dx\end{aligned}$$

例 13

求 $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx$

解 由三角函数半角公式

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$$

$$\begin{aligned}\int \sin^2 \frac{x}{2} dx &= \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos x \right) dx \\&= \int \frac{1}{2} dx - \int \frac{1}{2} \cos x dx \\&= \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos x dx \\&= \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \sin x + C\end{aligned}$$

例 14

求 $\int \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} dx$

例 14

求 $\int \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} dx$

解 由三角函数倍角公式

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} dx &= \int \frac{1}{\left(\frac{1}{2} \sin x\right)^2} dx \\ &= 4 \int \frac{1}{\sin^2 x} dx \\ &= -\frac{4}{\tan x} + C. \end{aligned}$$

例 15

求 $\int \frac{2x^4+x^2+1}{x^2+1} dx$

解

$$\int \frac{2x^4+x^2+1}{x^2+1} dx = \int \frac{2x^4+2x^2-x^2-1+2}{x^2+1} dx$$

例 15

求 $\int \frac{2x^4+x^2+1}{x^2+1} dx$

解

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^4+x^2+1}{x^2+1} dx &= \int \frac{2x^4+2x^2-x^2-1+2}{x^2+1} dx \\&= \int \left(2x^2-1+\frac{2}{x^2+1} \right) dx \\&= 2 \int x^2 dx - \int dx + 2 \int \frac{1}{1+x^2} dx\end{aligned}$$

例 15

求 $\int \frac{2x^4+x^2+1}{x^2+1} dx$

解

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^4+x^2+1}{x^2+1} dx &= \int \frac{2x^4+2x^2-x^2-1+2}{x^2+1} dx \\&= \int \left(2x^2-1+\frac{2}{x^2+1} \right) dx \\&= 2 \int x^2 dx - \int dx + 2 \int \frac{1}{1+x^2} dx \\&= \frac{2}{3}x^3 - x + 2 \arctan x + C.\end{aligned}$$

随堂练习

求以下不定积分

$$(1) \int (\sin x + \frac{1}{x}) dx$$

$$(2) \int (x^2 + 2x + 4) dx$$

$$(3) \int (e^x + 4 \cos x) dx$$

$$(4) \int \frac{x^2+1}{x^2} dx$$

随堂练习

求以下不定积分

$$(1) \int (\sin x + \frac{1}{x}) dx = -\cos x + \ln |x| + C$$

$$(2) \int (x^2 + 2x + 4) dx = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 4x + C$$

$$(3) \int (e^x + 4 \cos x) dx = e^x + 4 \sin x + C$$

$$(4) \int \frac{x^2+1}{x^2} dx = x - \frac{1}{x} + C$$

作业

- 教材习题 4-1: $1(1)(2);$
 $2(1)(3)(7)(12)(13)(14)(17)(19)(20)(22)(25).$