

反常积分的审敛法 Γ 函数

高等数学 I-信息、统计外招

Weiwen Wang(王伟文)

暨南大学

2025 年秋季学期



课程网页

定理 1

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上连续, 且 $f(x) \geq 0$. 若函数

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

在 $[a, +\infty)$ 上有上界, 则反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛.

证明.

因为 $f(x) \geq 0$, 故 $F(x) = \int_a^x f(x)dx$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上单调递增,

证明.

因为 $f(x) \geq 0$, 故 $F(x) = \int_a^x f(x)dx$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上单调递增, 且 $F(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上有上界,

证明.

因为 $f(x) \geq 0$, 故 $F(x) = \int_a^x f(x)dx$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上单调递增, 且 $F(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上有上界, 则极限

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$$

收敛,

证明.

因为 $f(x) \geq 0$, 故 $F(x) = \int_a^x f(x)dx$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上单调递增, 且 $F(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上有上界, 则极限

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$$

收敛,

即

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t)dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$$

收敛.



定理 2 (比较审敛定理)

设函数 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上连续.

- (1) 如果 $0 \leq f(x) \leq g(x)$ ($a \leq x < +\infty$), 并且 $\int_a^{+\infty} g(x)$ 收敛, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 也收敛;

定理 2 (比较审敛定理)

设函数 $f(x)$, $g(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上连续.

- (1) 如果 $0 \leq f(x) \leq g(x)$ ($a \leq x < +\infty$), 并且 $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ 收敛, 则 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 也收敛;
- (2) 如果 $0 \leq g(x) \leq f(x)$ ($a \leq x < +\infty$), 并且 $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ 发散, 那么 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 发散.

证明.

(1) 因为 $0 \leq f(x) \leq g(x)$ ($a \leq x + \infty$), 故

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \leq \int_a^x g(t)dt \leq \int_a^{+\infty} g(x)dx \quad \forall x \in [a, +\infty)$$

证明.

(1) 因为 $0 \leq f(x) \leq g(x)$ ($a \leq x < +\infty$), 故

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \leq \int_a^x g(t)dt \leq \int_a^{+\infty} g(x)dx \quad \forall x \in [a, +\infty)$$

因为 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛, 记 $M = \int_a^{+\infty} g(x)dx$,

证明.

(1) 因为 $0 \leq f(x) \leq g(x)$ ($a \leq x < +\infty$), 故

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \leq \int_a^x g(t)dt \leq \int_a^{+\infty} g(x)dx \quad \forall x \in [a, +\infty)$$

因为 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛, 记 $M = \int_a^{+\infty} g(x)dx$, 故

$$F(x) \leq M,$$

即 $F(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上有上界,

证明.

(1) 因为 $0 \leq f(x) \leq g(x)$ ($a \leq x < +\infty$), 故

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \leq \int_a^x g(t)dt \leq \int_a^{+\infty} g(x)dx \quad \forall x \in [a, +\infty)$$

因为 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛, 记 $M = \int_a^{+\infty} g(x)dx$, 故

$$F(x) \leq M,$$

即 $F(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上有上界, 由定理 1, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛.

证明.

(1) 因为 $0 \leq f(x) \leq g(x)$ ($a \leq x < +\infty$), 故

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \leq \int_a^x g(t)dt \leq \int_a^{+\infty} g(x)dx \quad \forall x \in [a, +\infty)$$

因为 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛, 记 $M = \int_a^{+\infty} g(x)dx$, 故

$$F(x) \leq M,$$

即 $F(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上有上界, 由定理 1, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛.

(2) 使用反证法和 (1) 的结论即可证明. □

定理 3 (比较审敛法 1)

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ ($a > 0$) 上连续, 且 $f(x) \geq 0$.

- (1) 如果存在常数 $M > 0$ 及 $p > 1$, 使得 $f(x) \leq \frac{M}{x^p}$ ($a \leq x < +\infty$), 那么反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛;

定理 3 (比较审敛法 1)

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ ($a > 0$) 上连续, 且 $f(x) \geq 0$.

- (1) 如果存在常数 $M > 0$ 及 $p > 1$, 使得 $f(x) \leq \frac{M}{x^p}$ ($a \leq x < +\infty$), 那么反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛;
- (2) 如果存在常数 $N > 0$, 使得 $f(x) \geq \frac{N}{x}$ ($a \leq x < +\infty$), 那么反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散.

定理 3 (比较审敛法 1)

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ ($a > 0$) 上连续, 且 $f(x) \geq 0$.

- (1) 如果存在常数 $M > 0$ 及 $p > 1$, 使得 $f(x) \leq \frac{M}{x^p}$ ($a \leq x < +\infty$), 那么反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛;
- (2) 如果存在常数 $N > 0$, 使得 $f(x) \geq \frac{N}{x}$ ($a \leq x < +\infty$), 那么反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散.

- 反常积分 $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ ($a > 0$) 当 $p > 1$ 时收敛, 当 $p \leq 1$ 时发散; 结合定理 2 即可以得到结论.

例 1

判断反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4+1}}$ 的收敛性.

例 1

判断反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4+1}}$ 的收敛性.

解: 因为

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x^4+1}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} = \frac{1}{x^{\frac{4}{3}}} \quad \forall x \in [1, +\infty)$$

例 1

判断反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4+1}}$ 的收敛性.

解: 因为

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x^4+1}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} = \frac{1}{x^{\frac{4}{3}}} \quad \forall x \in [1, +\infty)$$

故由定理 3, 反常积分

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4+1}}$$

收敛.

定理 4 (极限审敛法 I)

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上连续, 且 $f(x) \geq 0$.

- (1) 如果存在常数 $p > 1$, 使得 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^p f(x) = c < +\infty$, 那么, 反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛;
- (2) 如果 $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = d > 0$ (或 $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = +\infty$), 那么反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 发散.

证明.

(1) 因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^p f(x) = c < +\infty$, 由极限定义, 存在充分大的 x_1 ($x_1 > 0$ 且 $x_1 \geq a$) 使得当 $x > x_1$ 时,

$$|x^p f(x) - c| < 1.$$

证明.

(1) 因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^p f(x) = c < +\infty$, 由极限定义, 存在充分大的 x_1 ($x_1 > 0$ 且 $x_1 \geq a$) 使得当 $x > x_1$ 时,

$$|x^p f(x) - c| < 1.$$

从而

$$0 \leq x^p f(x) \leq 1 + c$$

记 $M = 1 + c$, 故在区间 $(x_1, +\infty)$ 上, 有 $0 \leq f(x) \leq \frac{M}{x^p}$.

证明.

(1) 因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^p f(x) = c < +\infty$, 由极限定义, 存在充分大的 $x_1 (x_1 > 0$ 且 $x_1 \geq a)$ 使得当 $x > x_1$ 时,

$$|x^p f(x) - c| < 1.$$

从而

$$0 \leq x^p f(x) \leq 1 + c$$

记 $M = 1 + c$, 故在区间 $(x_1, +\infty)$ 上, 有 $0 \leq f(x) \leq \frac{M}{x^p}$.

由定理 3, $\int_{x_1}^{+\infty} f(x) dx$ 收敛. 因为在区间 $[a, +\infty)$ 上 $f(x)$ 连续, 积分 $\int_a^{x_1} f(x) dx$ 存在.

证明.

(1) 因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^p f(x) = c < +\infty$, 由极限定义, 存在充分大的 $x_1 (x_1 > 0$ 且 $x_1 \geq a)$ 使得当 $x > x_1$ 时,

$$|x^p f(x) - c| < 1.$$

从而

$$0 \leq x^p f(x) \leq 1 + c$$

记 $M = 1 + c$, 故在区间 $(x_1, +\infty)$ 上, 有 $0 \leq f(x) \leq \frac{M}{x^p}$.

由定理 3, $\int_{x_1}^{+\infty} f(x) dx$ 收敛. 因为在区间 $[a, +\infty)$ 上 $f(x)$ 连续, 积分 $\int_a^{x_1} f(x) dx$ 存在.

从而反常积分

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_a^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{+\infty} f(x) dx$$

收敛.



证明.

(2) 因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = d > 0$, 由极限定义, 存在充分大的常数 $x_1 (x_1 > 0$ 且 $x_1 > a)$, 使得

$$|xf(x) - d| < \frac{d}{2}$$

证明.

(2) 因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = d > 0$, 由极限定义, 存在充分大的常数 x_1 ($x_1 > 0$ 且 $x_1 > a$), 使得

$$|xf(x) - d| < \frac{d}{2}$$

从而

$$xf(x) > \frac{d}{2} \quad x > x_1 > 0$$

记 $N = \frac{d}{2} > 0$, 在区间 $(x_1, +\infty)$ 上, $f(x) > \frac{N}{x}$.

证明.

(2) 因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = d > 0$, 由极限定义, 存在充分大的常数 x_1 ($x_1 > 0$ 且 $x_1 > a$), 使得

$$|xf(x) - d| < \frac{d}{2}$$

从而

$$xf(x) > \frac{d}{2} \quad x > x_1 > 0$$

记 $N = \frac{d}{2} > 0$, 在区间 $(x_1, +\infty)$ 上, $f(x) > \frac{N}{x}$.

由定理 3. 反常积分 $\int_{x_1}^{+\infty} f(x)dx$ 发散.

证明.

(2) 因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = d > 0$, 由极限定义, 存在充分大的常数 $x_1 (x_1 > 0$ 且 $x_1 > a)$, 使得

$$|xf(x) - d| < \frac{d}{2}$$

从而

$$xf(x) > \frac{d}{2} \quad x > x_1 > 0$$

记 $N = \frac{d}{2} > 0$, 在区间 $(x_1, +\infty)$ 上, $f(x) > \frac{N}{x}$.

由定理 3. 反常积分 $\int_{x_1}^{+\infty} f(x)dx$ 发散.

若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = +\infty$, 由极限定义, 有相同的结论.

证明.

(2) 因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = d > 0$, 由极限定义, 存在充分大的常数 $x_1 (x_1 > 0 \text{ 且 } x_1 > a)$, 使得

$$|xf(x) - d| < \frac{d}{2}$$

从而

$$xf(x) > \frac{d}{2} \quad x > x_1 > 0$$

记 $N = \frac{d}{2} > 0$, 在区间 $(x_1, +\infty)$ 上, $f(x) > \frac{N}{x}$.

由定理 3. 反常积分 $\int_{x_1}^{+\infty} f(x)dx$ 发散.

若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = +\infty$, 由极限定义, 有相同的结论.

于是反常积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{+\infty} f(x)dx$$

发散.



例 2

判断反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$ 的收敛性.

解:

例 2

判断反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$ 的收敛性.

解: 因为

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$$

例 2

判断反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$ 的收敛性.

解: 因为

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = 1.$$

由定理 4, 反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$ 收敛.

例 3

判断反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{x^{3/2}}{1+x^2} dx$ 的收敛性.

例 3

判断反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{x^{3/2}}{1+x^2} dx$ 的收敛性.

解:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \frac{x^{3/2}}{1+x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \sqrt{x}}{1+x^2} = +\infty$$

由定理 4, 反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{x^{3/2}}{1+x^2} dx$ 发散.

例 4

判断反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x} dx$ 的收敛性.

例 4

判断反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x} dx$ 的收敛性.

解:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \frac{\arctan x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}.$$

由定理 4, 反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x} dx$ 发散.

前面定理所讨论的被积函数 $f(x)$ 均是非负的, 下面的定理处理不满足这一约束的情形.

前面定理所讨论的被积函数 $f(x)$ 均是非负的, 下面的定理处理不满足这一约束的情形.

定理 5

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上连续. 如果反常积分

$$\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$$

收敛, 那么反常积分

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

也收敛.

证明.

设 $\varphi(x) = \frac{1}{2} (f(x) + |f(x)|)$, 则 $\varphi(x) \geq 0$ 且 $\varphi(x) \leq |f(x)|$.

证明.

设 $\varphi(x) = \frac{1}{2} (f(x) + |f(x)|)$, 则 $\varphi(x) \geq 0$ 且 $\varphi(x) \leq |f(x)|$. 因为 $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ 收敛, 由定理 2,

$$\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$$

收敛.

证明.

设 $\varphi(x) = \frac{1}{2} (f(x) + |f(x)|)$, 则 $\varphi(x) \geq 0$ 且 $\varphi(x) \leq |f(x)|$. 因为 $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ 收敛, 由定理 2,

$$\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$$

收敛. 又因为 $f(x) = 2\varphi(x) - |f(x)|$,

证明.

设 $\varphi(x) = \frac{1}{2} (f(x) + |f(x)|)$, 则 $\varphi(x) \geq 0$ 且 $\varphi(x) \leq |f(x)|$. 因为 $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ 收敛, 由定理 2,

$$\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$$

收敛. 又因为 $f(x) = 2\varphi(x) - |f(x)|$, 故

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = 2 \int_a^{+\infty} \varphi(x) dx - \int_a^{+\infty} |f(x)| dx$$

收敛.



- 若 $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ 收敛, 则称 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 绝对收敛;

- 若 $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ 收敛, 则称 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 绝对收敛;
- 定理 5 表明, 绝对收敛的反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 必定收敛.

例 5

判断反常积分 $\int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos bx dx$ (a, b 都是常数, 且 $a > 0$) 的收敛性.

例 5

判断反常积分 $\int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos bx dx$ (a, b 都是常数, 且 $a > 0$) 的收敛性.

解: 因为 $0 \leq |e^{-ax} \cos bx| \leq e^{-ax}$, 且

$$\int_a^{+\infty} e^{-ax} dx = -\frac{1}{a} [e^{-ax}]_0^{+\infty} = \frac{1}{a}.$$

例 5

判断反常积分 $\int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos bx dx$ (a, b 都是常数, 且 $a > 0$) 的收敛性.

解: 因为 $0 \leq |e^{-ax} \cos bx| \leq e^{-ax}$, 且

$$\int_a^{+\infty} e^{-ax} dx = -\frac{1}{a} [e^{-ax}]_0^{+\infty} = \frac{1}{a}.$$

故由定理 2, $\int_a^{+\infty} |e^{-ax} \cos bx| dx$ 收敛.

例 5

判断反常积分 $\int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos bx dx$ (a, b 都是常数, 且 $a > 0$) 的收敛性.

解: 因为 $0 \leq |e^{-ax} \cos bx| \leq e^{-ax}$, 且

$$\int_a^{+\infty} e^{-ax} dx = -\frac{1}{a} [e^{-ax}]_0^{+\infty} = \frac{1}{a}.$$

故由定理 2, $\int_a^{+\infty} |e^{-ax} \cos bx| dx$ 收敛. 由定理 5, 反常积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos bx dx$$

收敛.

随堂练习

判断反常积分 $\int_0^{+\infty} e^{-ax} \frac{\sin x}{\sqrt{x^2+1}} dx$ (a 是常数, 且 $a > 0$) 的收敛性.

考虑瑕积分

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^q}$$

- 当 $0 < q < 1$ 时收敛;
- 当 $q \geq 1$ 时发散.

定理 6 (比较审敛法 2)

设函数 $f(x)$ 在区间 $(a, b]$ 上连续, 且 $f(x) \geq 0$, $x = a$ 为 $f(x)$ 的瑕点.

定理 6 (比较审敛法 2)

设函数 $f(x)$ 在区间 $(a, b]$ 上连续, 且 $f(x) \geq 0$, $x = a$ 为 $f(x)$ 的瑕点.

- 如果存在常数 $M > 0$ 及 $q < 1$, 使得

$$f(x) \leq \frac{M}{(x-a)^q} \quad (a < x \leq b)$$

那么反常积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛;

定理 6 (比较审敛法 2)

设函数 $f(x)$ 在区间 $(a, b]$ 上连续, 且 $f(x) \geq 0$, $x = a$ 为 $f(x)$ 的瑕点.

- 如果存在常数 $M > 0$ 及 $q < 1$, 使得

$$f(x) \leq \frac{M}{(x-a)^q} \quad (a < x \leq b)$$

那么反常积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛;

- 如果存在常数 $N > 0$, 使得

$$f(x) \geq \frac{N}{x-a} \quad (a < x \leq b)$$

那么反常积分 $\int_a^b f(x)dx$ 发散.

定理 7 (极限审敛法 2)

设函数 $f(x)$ 在区间 $(a, b]$ 上连续, 且 $f(x) \geq 0$, $x = a$ 为 $f(x)$ 的瑕点.

定理 7 (极限审敛法 2)

设函数 $f(x)$ 在区间 $(a, b]$ 上连续, 且 $f(x) \geq 0$, $x = a$ 为 $f(x)$ 的瑕点.

- 如果存在常数 $0 < q < 1$, 使得

$$\lim_{x \rightarrow a^+} (x - a)^q f(x)$$

存在, 那么反常积分 $\int_a^b f(x) dx$ 收敛;

定理 7 (极限审敛法 2)

设函数 $f(x)$ 在区间 $(a, b]$ 上连续, 且 $f(x) \geq 0$, $x = a$ 为 $f(x)$ 的瑕点.

- 如果存在常数 $0 < q < 1$, 使得

$$\lim_{x \rightarrow a^+} (x - a)^q f(x)$$

存在, 那么反常积分 $\int_a^b f(x) dx$ 收敛;

- 如果

$$\lim_{x \rightarrow a^+} (x - a) f(x) = d > 0 \quad (\text{或} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} (x - a) f(x) = +\infty),$$

那么反常积分 $\int_a^b f(x) dx$ 发散.

例 6

判断反常积分 $\int_1^3 \frac{dx}{\ln x}$ 的收敛性.

例 6

判断反常积分 $\int_1^3 \frac{dx}{\ln x}$ 的收敛性.

解: $x = 1$ 为被积函数的瑕点.

例 6

判断反常积分 $\int_1^3 \frac{dx}{\ln x}$ 的收敛性.

解: $x = 1$ 为被积函数的瑕点. 因为

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 1) \frac{1}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} x = 1 > 0.$$

例 6

判断反常积分 $\int_1^3 \frac{dx}{\ln x}$ 的收敛性.

解: $x = 1$ 为被积函数的瑕点. 因为

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 1) \frac{1}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} x = 1 > 0.$$

由极限审敛法 2, 反常积分 $\int_1^3 \frac{dx}{\ln x}$ 发散.

例 7

判定椭圆积分

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \quad (k^2 < 1)$$

的收敛性

例 7

判定椭圆积分

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \quad (k^2 < 1)$$

的收敛性

解: $x = 1$ 为所求积分的瑕点. 因为

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\sqrt{(1+x)(1-k^2x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{2(1-k^2)}}$$

由极限审敛法 2, 所列反常积分收敛.

随堂练习

判断下列反常积分的收敛性

- $\int_1^2 \frac{dx}{(\ln x)^2}$
- $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x(1-x)}}$

定理 8

设函数 $f(x)$ 在区间 $(a, b]$ 上连续, $x = a$ 为 $f(x)$ 的瑕点. 如果反常积分

$$\int_a^b |f(x)| dx$$

收敛, 那么反常积分

$$\int_a^b f(x) dx$$

也收敛.

例 8

判定反常积分 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \sin \frac{1}{x} dx$ 的收敛性.

例 8

判定反常积分 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \sin \frac{1}{x} dx$ 的收敛性.

解: 因为 $0 \leq \left| \frac{1}{\sqrt{x}} \sin \frac{1}{x} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}},$

例 8

判定反常积分 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \sin \frac{1}{x} dx$ 的收敛性.

解: 因为 $0 \leq \left| \frac{1}{\sqrt{x}} \sin \frac{1}{x} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$, 且反常积分 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ 收敛.

例 8

判定反常积分 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \sin \frac{1}{x} dx$ 的收敛性.

解: 因为 $0 \leq \left| \frac{1}{\sqrt{x}} \sin \frac{1}{x} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$, 且反常积分 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ 收敛.
由比较审敛法 2, 反常积分

$$\int_0^1 \left| \frac{1}{\sqrt{x}} \sin \frac{1}{x} \right| dx$$

收敛.

例 8

判定反常积分 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \sin \frac{1}{x} dx$ 的收敛性.

解: 因为 $0 \leq \left| \frac{1}{\sqrt{x}} \sin \frac{1}{x} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$, 且反常积分 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ 收敛.
由比较审敛法 2, 反常积分

$$\int_0^1 \left| \frac{1}{\sqrt{x}} \sin \frac{1}{x} \right| dx$$

收敛. 于是反常积分

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \sin \frac{1}{x} dx$$

收敛.

Γ 函数

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx \quad (s > 0)$$

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx \quad (s > 0)$$

- 当 $s = 1$ 时

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = -[e^{-x}]_0^{+\infty} = 1$$

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx \quad (s > 0)$$

- 当 $0 < s < 1$ 时, $x = 0$ 是被积函数的瑕点

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx \stackrel{?}{=} \int_0^1 e^{-x} x^{s-1} dx + \int_1^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx$$

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx \quad (s > 0)$$

- 当 $0 < s < 1$ 时, $x = 0$ 是被积函数的瑕点

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx \stackrel{?}{=} \int_0^1 e^{-x} x^{s-1} dx + \int_1^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx$$

- (1) 因为 $0 < e^{-x} x^{s-1} = \frac{s-1}{e^x} < \frac{1}{x^{1-s}}, \forall x \in (0, 1]$, 且 $\int_0^1 \frac{dx}{x^{1-s}}$ 收敛, 故由比较审敛法 2, $\int_0^1 e^{-x} x^{s-1} dx$ 收敛.

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx \quad (s > 0)$$

- 当 $0 < s < 1$ 时, $x = 0$ 是被积函数的瑕点

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx \stackrel{?}{=} \int_0^1 e^{-x} x^{s-1} dx + \int_1^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx$$

- 因为 $0 < e^{-x} x^{s-1} = \frac{s-1}{e^x} < \frac{1}{x^{1-s}}, \forall x \in (0, 1]$, 且 $\int_0^1 \frac{dx}{x^{1-s}}$ 收敛, 故由比较审敛法 2, $\int_0^1 e^{-x} x^{s-1} dx$ 收敛.
- 因为 $0 < e^{-x} x^{s-1} = e^{-x} \frac{1}{x^{1-s}} < e^{-x}, \forall x \in (1, +\infty)$, 且 $\int_1^{+\infty} e^{-x} dx = \frac{1}{e}$ 收敛, 故由比较审敛法原理 (定理 2), $\int_1^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx$ 收敛.

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx \quad (s > 0)$$

- 当 $0 < s < 1$ 时, $x = 0$ 是被积函数的瑕点

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx \stackrel{?}{=} \int_0^1 e^{-x} x^{s-1} dx + \int_1^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx$$

- 因为 $0 < e^{-x} x^{s-1} = \frac{s-1}{e^x} < \frac{1}{x^{1-s}}, \forall x \in (0, 1]$, 且 $\int_0^1 \frac{dx}{x^{1-s}}$ 收敛, 故由比较审敛法 2, $\int_0^1 e^{-x} x^{s-1} dx$ 收敛.
- 因为 $0 < e^{-x} x^{s-1} = e^{-x} \frac{1}{x^{1-s}} < e^{-x}, \forall x \in (1, +\infty)$, 且 $\int_1^{+\infty} e^{-x} dx = \frac{1}{e}$ 收敛, 故由比较审敛法原理 (定理 2), $\int_1^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx$ 收敛.

因此, 当 $0 < s < 1$ 时, $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx$ 收敛.

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx \quad (s > 0)$$

- 当 $s > 1$ 时,

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx \stackrel{?}{=} \int_0^1 e^{-x} x^{s-1} dx + \int_1^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx$$

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx \quad (s > 0)$$

- 当 $s > 1$ 时,

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx \stackrel{?}{=} \int_0^1 e^{-x} x^{s-1} dx + \int_1^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx$$

(1) $\int_0^1 e^{-x} x^{s-1} dx$ 是定积分, 故收敛.

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx \quad (s > 0)$$

• 当 $s > 1$ 时,

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx \stackrel{?}{=} \int_0^1 e^{-x} x^{s-1} dx + \int_1^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx$$

(1) $\int_0^1 e^{-x} x^{s-1} dx$ 是定积分, 故收敛.

(2) 因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} x^{s-1} = 0$, 故由极限审敛法 1 (定理 4),
 $\int_1^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx$ 收敛.

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx \quad (s > 0)$$

• 当 $s > 1$ 时,

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx \stackrel{?}{=} \int_0^1 e^{-x} x^{s-1} dx + \int_1^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx$$

(1) $\int_0^1 e^{-x} x^{s-1} dx$ 是定积分, 故收敛.

(2) 因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} x^{s-1} = 0$, 故由极限审敛法 1(定理 4),
 $\int_1^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx$ 收敛.

因此, 当 $s > 1$ 时, $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx$ 收敛.

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx \quad (s > 0) \quad \text{总有意义.}$$

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx \quad (s > 0) \quad \text{总有意义.}$$

性质 1 $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \quad (s > 0)$, 特别地, $\Gamma(n+1) = n! \quad \forall n \in \mathbb{N}_+$.

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx \quad (s > 0) \quad \text{总有意义.}$$

性质 1 $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ ($s > 0$), 特别地, $\Gamma(n+1) = n!$ $\forall n \in \mathbb{N}_+$.

$$\Gamma(s+1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s+1-1} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^s dx$$

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx \quad (s > 0) \quad \text{总有意义.}$$

性质 1 $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ ($s > 0$), 特别地, $\Gamma(n+1) = n!$ $\forall n \in \mathbb{N}_+$.

$$\begin{aligned} \Gamma(s+1) &= \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s+1-1} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^s dx \\ &= - \int_0^{+\infty} x^s de^{-x} \end{aligned}$$

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx \quad (s > 0) \quad \text{总有意义.}$$

性质 1 $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ ($s > 0$), 特别地, $\Gamma(n+1) = n!$ $\forall n \in \mathbb{N}_+$.

$$\begin{aligned} \Gamma(s+1) &= \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s+1-1} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^s dx \\ &= - \int_0^{+\infty} x^s de^{-x} \\ &= -[e^{-x} x^s]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x} dx^s \end{aligned}$$

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx \quad (s > 0) \quad \text{总有意义.}$$

性质 1 $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ ($s > 0$), 特别地, $\Gamma(n+1) = n!$ $\forall n \in \mathbb{N}_+$.

$$\begin{aligned} \Gamma(s+1) &= \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s+1-1} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^s dx \\ &= - \int_0^{+\infty} x^s de^{-x} \\ &= -[e^{-x} x^s]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x} dx^s \\ &= \int_0^{+\infty} s e^{-x} x^{s-1} dx = s\Gamma(s). \end{aligned}$$

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx \quad (s > 0)$$

性质 2 当 $s \rightarrow 0^+$, $\Gamma(s) \rightarrow +\infty$

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx \quad (s > 0)$$

性质 2 当 $s \rightarrow 0^+$, $\Gamma(s) \rightarrow +\infty$

性质 3 $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}$ ($0 < s < 1$), 特别地 $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx \quad (s > 0)$$

性质 2 当 $s \rightarrow 0^+$, $\Gamma(s) \rightarrow +\infty$

性质 3 $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}$ ($0 < s < 1$), 特别地 $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

性质 4 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} x^t dx = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1+t}{2}\right)$ ($t > -1$), 特别地, 取 $t = 0$,

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

作业

- 教材习题 5-5: $1(1)(2)(3)(8)$, $5(1)(2)$.