函数的单调性与曲线的凹凸性

高等数学 I-信息、统计外招

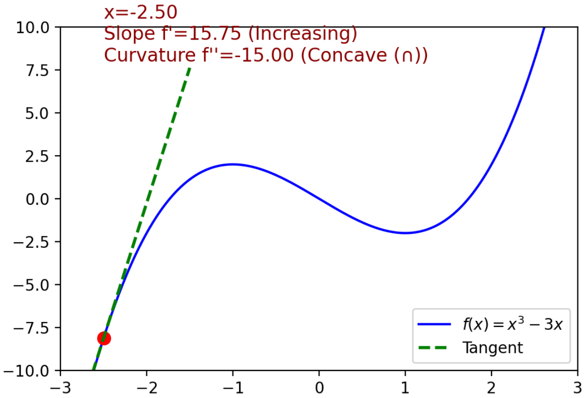
Weiwen Wang(王伟文)

暨南大学

2025 年秋季学期

课程网页

观测在不同的单调区间函数的导数的正负



定理 1

设函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导.

(1) 如果在 (a,b) 内 $f'(x)\geq 0$, 且等号仅在有限多个点成立, 那么函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加;

(2) 如果在 (a,b) 内 $f'(x)\leq 0$, 且等号仅在有限多个点成立, 那么函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调减少.

定理 1

设函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导.

(1) 如果在 (a,b) 内 $f'(x)\geq 0$，且等号仅在有限多个点成立，那么函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加;

(2) 如果在 (a,b) 内 $f'(x)\leq 0$，且等号仅在有限多个点成立，那么函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调减少.

- **判定法的闭区间可换成其他各种区间.**

- 使用拉格朗日中值定理证明.
- $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$, 不妨设 $x_1 < x_2$. 在区间 $[x_1, x_2]$ 上函数 $y = f(x)$ 满足拉格朗日中值定理的应用条件, 故 $\exists \xi \in (x_1, x_2)$,

$$f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(\xi)}_{\geq 0}\underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} \geq 0$$

即 $f(x_2) \geq f(x_1)$, 其中等号只在有限的情形下成立.

例 2

讨论函数 $y = e^x - x - 1$ 的单调性.

例 2

讨论函数 $y = e^x - x - 1$ 的单调性.

解　$y' = e^x - 1, x \in (-\infty, +\infty)$.

例 2

讨论函数 $y=e^x-x-1$ 的单调性.

解 $y'=e^x-1, x\in(-\infty,+\infty)$.

令 $y'=e^x-1<0$, 即 $e^x<1$

例 2

讨论函数 $y = e^x - x - 1$ 的单调性.

解 $y' = e^x - 1, x \in (-\infty, +\infty)$.

令 $y' = e^x - 1 < 0$, 即 $e^x < 1$

两边同时取自然对数, 解得 $x < 0$, 即使当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $y' < 0$, 故函数 $y = e^x - x - 1$ 在区间 $(-\infty, 0]$ 上单调减少.

例 2

讨论函数 $y=e^x-x-1$ 的单调性.

解　$y'=e^x-1, x\in(-\infty,+\infty)$.

令 $y'=e^x-1<0$，即 $e^x<1$

两边同时取自然对数，解得 $x<0$，即使当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$y'<0$，故函数 $y=e^x-x-1$ 在区间 $(-\infty,0]$ 上单调减少.

类似地，当 $x\in[0,+\infty)$ 时，$y'>0$，函数 $y=e^x-x-1$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上单调增加.

分析函数 $y=f(x)$ 的单调性

- 不等式 $f'(x)>0$ 的解即为函数 $y=f(x)$ 的单调递增区间.
- 不等式 $f'(x)<0$ 的解即为函数 $y=f(x)$ 的单调递减区间.

例 4

确定函数 $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$ 的单调区间.

例 4

确定函数 $f(x)=2x^3-9x^2+12x-3$ 的单调区间.

解

$$f'(x)=6x^2-18x+12$$

令 $f'(x)=6x^2-18x+12<0$, 即 $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)<0$, 解得 $1<x<2$. 因此, 函数 $f(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上单调递增.

例 4

确定函数 $f(x)=2x^3-9x^2+12x-3$ 的单调区间.

解

$$f'(x)=6x^2-18x+12$$

令 $f'(x)=6x^2-18x+12<0$，即 $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)<0$，解得 $1<x<2$. 因此，函数 $f(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上单调递增.

令 $f'(x)=6x^2-18x+12>0$，即 $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)>0$，解得 $x>2$ 或 $x<1$. 因此函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,1]$ 及区间 $[2,+\infty)$ 上单调递增.

定义

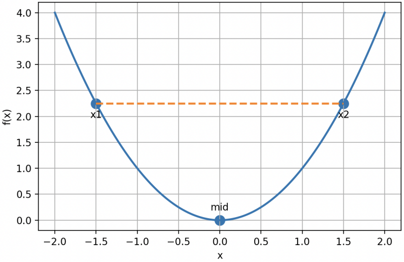
设 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 如果对 I 上任意的两点 x_1, x_2 恒有

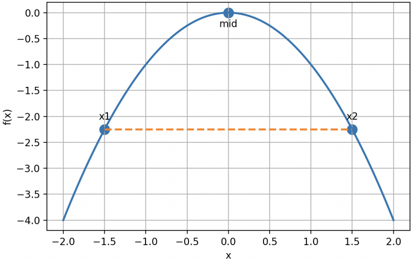
$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

那么称 $f(x)$ 在 I 上的图形是 (向上) 凹的 (或凹弧); 如果恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

那么称 $f(x)$ 在 I 上的图形是 (向上) 凸的 (或凸弧)


4.0
3.5
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
f(x)
x1
x2
mid
−2.0
−1.5
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
x


0.0
−0.5
−1.0
−1.5
−2.0
−2.5
−3.0
−3.5
−4.0
f(x)
mid
x1
x2
−2.0
−1.5
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
x

凹弧　　　　凸弧

定理 2

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内具有一阶和二阶导数, 那么

(1) 若在 (a,b) 内 $f''(x)>0$, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的图形是凹的;

(2) 若在 (a,b) 内 $f''(x)<0$, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的图形是凸的.

- **判定法中的闭区间换成其他区间结论也成立.**

证明.

(1) 从区间 $[a,b]$ 中任取不同的两点 x_1,x_2，不妨设 $x_1<x_2$，记 $\bar{x}=\frac{x_1+x_2}{2}$，则函数 $f(x)$ 在区间 $[x_1,\bar{x}]$ 和区间 $[\bar{x},x_1]$ 满足拉格朗日中值定理的条件，故

$$f(\bar{x})-f(x_1)=f'(\xi_1)(\bar{x}-x_2)=f'(\xi_1)\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)\quad \exists\xi_1\in(x_1,\bar{x}) \tag{1}$$

$$f(x_2)-f(\bar{x})=f'(\xi_2)(x_2-\bar{x})=f'(\xi_2)\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)\quad \exists\xi_2\in(\bar{x},x_2) \tag{2}$$

证明.

(1) 从区间 $[a,b]$ 中任取不同的两点 x_1,x_2，不妨设 $x_1<x_2$，记 $\bar{x}=\frac{x_1+x_2}{2}$，则函数 $f(x)$ 在区间 $[x_1,\bar{x}]$ 和区间 $[\bar{x},x_1]$ 满足拉格朗日中值定理的条件，故

$$f(\bar{x})-f(x_1)=f'(\xi_1)(\bar{x}-x_2)=f'(\xi_1)\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right) \quad \exists\xi_1\in(x_1,\bar{x}) \tag{1}$$

$$f(x_2)-f(\bar{x})=f'(\xi_2)(x_2-\bar{x})=f'(\xi_2)\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right) \quad \exists\xi_2\in(\bar{x},x_2) \tag{2}$$

(1) - (2)得到

$$2f(\bar{x})-(f(x_1)+f(x_2))=\left(f'(\xi_1)-f'(\xi_2)\right)\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)$$

□

继.

因为 $\forall x\in(a,b), f''(x)>0$ 且 $\xi_1<\xi_2$, 故 $f''(\xi_1)<f''(\xi_2)$. 因此

$$2f(\bar{x})-(f(x_1)+f(x_2))<0.$$

即

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

$\square$

例 6

判定曲线 $y = \ln x$ 的凹凸性.

例 6

判定曲线 $y=\ln x$ 的凹凸性.

解　函数 $y=\ln x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$.

$$y''=(y')'=[(\ln x)']'=\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$$

例 6

判定曲线 $y=\ln x$ 的凹凸性.

解　函数 $y=\ln x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$.

$$y''=(y')'=[(\ln x)']'=\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$$

故 $\forall x\in(0,+\infty)$, $y''<0$. 因此曲线 $y=\ln x$ 是凸的.

例 7

判定曲线 $y = x^3$ 的凹凸性.

例 7

判定曲线 $y=x^3$ 的凹凸性.

解　函数 $y=x^3$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

$$(y')'=\left[\left(x^3\right)'\right]'=(3x^2)'=6x.$$

例 7

判定曲线 $y = x^3$ 的凹凸性.

解　函数 $y = x^3$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$.

$$(y')' = \left[\left(x^3\right)'\right]' = (3x^2)' = 6x.$$

故 $\forall x \in (-\infty, 0)$, $y'' < 0$; $\forall x \in (0, +\infty)$, $y'' > 0$.

例 7

判定曲线 $y=x^3$ 的凹凸性.

解　函数 $y=x^3$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

$$(y')'=\left[\left(x^3\right)'\right]'=(3x^2)'=6x.$$

故 $\forall x\in(-\infty,0)$, $y''<0$; $\forall x\in(0,+\infty)$, $y''>0$.

所以曲线 $y=\ln x$ 在区间 $(-\infty,0]$ 是凸弧, 在区间 $[0,+\infty)$ 是凹弧.

定义 (拐点)

一般地, 设 $y=f(x)$ 在区间 I 上连续, x_0 是 I 内的点. 如果曲线 $y=f(x)$ 在经过点 $(x_0,f(x_0))$ 时, 曲线的凹凸性改变了, 那么就称点 $(x_0,f(x_0))$ 为这曲线的拐点.

利用二阶导数求拐点的基本步骤

- 求 $f''(x)$;
- 令 $f''(x) = 0$, 解出这个方程在区间 I 内的实根, 并求出在区间 I 内 $f''(x)$ 不存在的点;

利用二阶导数求拐点的基本步骤

- 求 $f''(x)$;
- 令 $f''(x)=0$, 解出这个方程在区间 I 内的实根, 并求出在区间 I 内 $f''(x)$ 不存在的点;
- 对于 (2) 中求出的每一个实根或二阶导数不存在的点 x_0, 检查 $f''(x)$ 在 x_0 左、右两侧邻近的符号, 那么当两侧的符号相反时, 点 $(x_0,f(x_0))$ 是拐点, 当两侧的符号相同时, 点 $(x_0,f(x_0))$ 不是拐点.

例 9

求曲线 $y = 3x^4 - 4x^3 + 1$ 的拐点及凹凸区间.

例 9

求曲线 $y = 3x^4 - 4x^3 + 1$ 的拐点及凹凸区间.

解

$$y'' = \left[(3x^4 - 4x^3 + 1)'\right]' = \left(12x^3 - 12x^2\right)' = 36x^2 - 24x$$

令 $y'' = 0$, 即使 $36x^2 - 24x = 0$, 解得方程两个实根 $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{2}{3}$. 且没有使得 $f''(x)$ 不存在的点.

例 9

求曲线 $y = 3x^4 - 4x^3 + 1$ 的拐点及凹凸区间.

解

$$y'' = \left[(3x^4 - 4x^3 + 1)'\right]' = \left(12x^3 - 12x^2\right)' = 36x^2 - 24x$$

令 $y'' = 0$, 即使 $36x^2 - 24x = 0$, 解得方程两个实根 $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{2}{3}$. 且没有使得 $f''(x)$ 不存在的点.

上述实根将函数 y 的定义域划分称 3 个区间: $(-\infty, 0], [0, \frac{2}{3}], [\frac{2}{3}, +\infty)$.

例 9

求曲线 $y = 3x^4 - 4x^3 + 1$ 的拐点及凹凸区间.

解

$$y'' = \left[(3x^4 - 4x^3 + 1)'\right]' = \left(12x^3 - 12x^2\right)' = 36x^2 - 24x$$

令 $y'' = 0$, 即使 $36x^2 - 24x = 0$, 解得方程两个实根 $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{2}{3}$. 且没有使得 $f''(x)$ 不存在的点.

上述实根将函数 y 的定义域划分称 3 个区间: $(-\infty, 0], [0, \frac{2}{3}], [\frac{2}{3}, +\infty)$.

当 $x < 0$ 时, $y'' > 0$, 所以此曲线在区间 $(-\infty, 0]$ 为凹弧.

当 $0 < x < \frac{2}{3}$ 时, $y'' < 0$, 所以此曲线在区间 $[0, \frac{2}{3}]$ 为凸弧.

当 $x > \frac{2}{3}$ 时, $y'' > 0$, 所以此曲线在区间 $[\frac{2}{3}, +\infty)$ 为凹弧.

例 9

求曲线 $y=3x^4-4x^3+1$ 的拐点及凹凸区间.

解

$$y''=\left[(3x^4-4x^3+1)'\right]'=\left(12x^3-12x^2\right)'=36x^2-24x$$

令 $y''=0$, 即使 $36x^2-24x=0$, 解得方程两个实根 $x_1=0$, $x_2=\frac{2}{3}$. 且没有使得 $f''(x)$ 不存在的点.

上述实根将函数 y 的定义域划分称 3 个区间: $(-\infty,0],[0,\frac{2}{3}],[\frac{2}{3},+\infty)$.

当 $x<0$ 时, $y''>0$, 所以此曲线在区间 $(-\infty,0]$ 为凹弧.

当 $0<x<\frac{2}{3}$ 时, $y''<0$, 所以此曲线在区间 $[0,\frac{2}{3}]$ 为凸弧.

当 $x>\frac{2}{3}$ 时, $y''>0$, 所以此曲线在区间 $[\frac{2}{3},+\infty)$ 为凹弧.

因此, 在 $x=0$ 及 $x=\frac{2}{3}$ 处左、右邻近两侧二阶导数符号相反, 所以 $(0,1)$ 和 $(\frac{2}{3},\frac{11}{27})$ 为此曲线的拐点.

随堂练习

设函数 $y = x^4 - 2x^3 + 1$,

(1) 求单调区间;

(2) 求函数图像的凹凸区间及拐点.

随堂练习

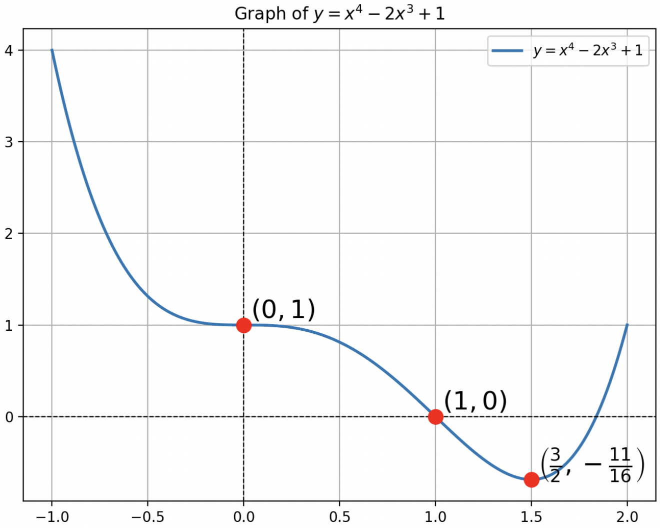
设函数 $y = x^4 - 2x^3 + 1$,

(1) 求单调区间;

函数在 $(-\infty, \frac{3}{2}]$ 上单调递减，在 $[\frac{3}{2}, +\infty)$ 上单调递增.

(2) 求函数图像的凹凸区间及拐点.

函数图像在区间 $(-\infty, 0]$ 及区间 $[1, +\infty)$ 为凹弧; 在区间 $[0, 1]$ 上为凸弧; $(0, 1)$ 及 $(1, 0)$ 为此图像的拐点.


Graph of $y = x^4 - 2x^3 + 1$
$y = x^4 - 2x^3 + 1$
$(0, 1)$
$(1, 0)$
$\left(\frac{3}{2}, -\frac{11}{16}\right)$
4
3
2
1
0
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0

例 11

求曲线 $y = \sqrt[3]{x}$ 的拐点及凹凸区间.

例 11

求曲线 $y = \sqrt[3]{x}$ 的拐点及凹凸区间.

解:

$$y' = \frac{1}{3}\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}, \quad y'' = -\frac{2}{9x\sqrt[3]{x^2}}$$

例 11

求曲线 $y=\sqrt[3]{x}$ 的拐点及凹凸区间.

解:

$$y'=\frac{1}{3}\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}},\quad y''=-\frac{2}{9x\sqrt[3]{x^2}}$$

y'' 不存在零点.

当 $x>0$ 时, $y''<0$, 故曲线在 $(0,+\infty)$ 上是凸的;

例 11

求曲线 $y = \sqrt[3]{x}$ 的拐点及凹凸区间.

解:

$$y' = \frac{1}{3}\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}, \quad y'' = -\frac{2}{9x\sqrt[3]{x^2}}$$

y'' 不存在零点.

当 $x > 0$ 时, $y'' < 0$, 故曲线在 $(0, +\infty)$ 上是凸的;

当 $x < 0$ 时, $y'' > 0$, 故曲线在 $(-\infty, 0)$ 上是凹的.

当 $x = 0$ 时, $y = 0$, 因此 (0, 0) 是该曲线的拐点.

作业

- 教材习题 3-4: 3(1)(7); 4; 5(1); 10(1).