不定积分的概念与性质

高等数学 I-信息、统计外招

Weiwen Wang(王伟文)

暨南大学

2025 年秋季学期

课程网页

定义 1

如果在区间 I 上, 可导函数 $F(x)$ 的导函数为 $f(x)$, 即对任一 $x \in I$, 都有

$$F'(x) = f(x) \quad 或 \quad \mathrm{d}F(x) = f(x)\mathrm{d}x,$$

那么函数 $F(x)$ 就称为 $f(x)$(或 $f(x)\mathrm{d}x$) 在区间 I 上的一个**原函数**.

- 因为 $(\sin x)' = \cos x$, 故 $\sin x$ 是 $\cos x$ 的原函数.

定理 (原函数存在定理)

如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 那么在区间 I 上存在可导函数 $F(x)$, 使对任一 $x \in I$ 都有

$$F'(x) = f(x).$$

- 连续函数一定有原函数.

定理 (原函数存在定理)

如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 那么在区间 I 上存在可导函数 $F(x)$, 使对任一 $x \in I$ 都有

$$F'(x) = f(x).$$

- 连续函数一定有原函数.
- 若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的原函数, 则对任意常数 C, $F(x)+C$ 也是 $f(x)$ 在区间 I 上的原函数.

定理 (原函数存在定理)

如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 那么在区间 I 上存在可导函数 $F(x)$, 使对任一 $x \in I$ 都有

$$F'(x) = f(x).$$

- 连续函数一定有原函数.
- 若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的原函数, 则对任意常数 C, $F(x)+C$ 也是 $f(x)$ 在区间 I 上的原函数.
- $f(x)$ 在区间 I 上的任意两个不同原函数只相差一个常数 C.

定义 2

在区间 I 上, 函数 $f(x)$ 的带有任意常数项的原函数称为 $f(x)$(或 $f(x)\mathrm{d}x$) 在区间 I 上的不定积分, 记作

$$\int f(x)\mathrm{d}x.$$

其中记号 $\int$ 称为积分号, $f(x)$ 称为被积函数, $f(x)\mathrm{d}x$ 称为被积表达式, x 称为积分变量.

定义 2

在区间 I 上, 函数 $f(x)$ 的带有任意常数项的原函数称为 $f(x)$(或 $f(x)\mathrm{d}x$) 在区间 I 上的**不定积分**, 记作

$$\int f(x)\mathrm{d}x.$$

其中记号 $\int$ 称为**积分号**, $f(x)$ 称为**被积函数**, $f(x)\mathrm{d}x$ 称为**被积表达式**, x 称为**积分变量**.

- 如果 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数, 那么 $F(x)+C$ 就是 $f(x)$ 的不定积分, 即

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$$

因而不定积分 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 可以表示 $f(x)$ 的任意一个原函数.

一个物理学家、一个工程师和一个数学家一起讨论 $\int 2x\mathrm{d}x$ 等于多少。

- 物理学家看了一眼，说："x^2，这很简单。"
- 工程师点点头："对，是 x^2。"
- 最后轮到数学家，他慢条斯理地说："是 x^2+C，其中 C 是一个任意常数。"
- 物理学家和工程师不耐烦了："那个 C 有什么用？每次都加它，多麻烦！"
- 数学家严肃地推了推眼镜："没有 C，那只是'一个'原函数。有了 C，才是'所有'原函数的集合。这是严谨与草率的区别！"

[1]–DeepSeek 生成

例 1

求 $\int x^2 \mathrm{d}x$

例 1

求 $\int x^2 \mathrm{d}x$

解　因为 $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$, 故 $\frac{x^3}{3}$ 是 x^2 的一个原函数. 因此

$$\int x^2 \mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + C.$$

例 2

求 $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x$.

例 2

求 $\int \frac{1}{x} \mathrm{d}x$.

解　当 $x > 0$ 时, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, 所以 $\ln x$ 是 $\frac{1}{x}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上的一个原函数. 故在区间 $(0, +\infty)$ 上

$$\int \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \ln x + C.$$

例 2

求 $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x$.

解　当 $x>0$ 时, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, 所以 $\ln x$ 是 $\frac{1}{x}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上的一个原函数. 故在区间 $(0,+\infty)$ 上

$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln x + C.$$

当 $x<0$ 时, $(\ln(-x))' = \frac{1}{x}$, 所以 $\ln(-x)$ 是 $\frac{1}{x}$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上的一个原函数. 故在区间 $(-\infty,0)$ 上

$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln(-x) + C.$$

综上,

$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C.$$

常用基本积分公式

- $\int k\mathrm{d}x = kx + C$ (k 是常数)
- $\int x^{\mu}\mathrm{d}x = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C$ $(\mu \neq -1)$
- $\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C$
- $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x + C$
- $\int \cos \mathrm{d}x = \sin x + C$
- $\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$
- $\int e^{x}\mathrm{d}x = e^{x} + C$
- $\int a^{x}\mathrm{d}x = \frac{a^{x}}{\ln a} + C$
- $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

例 11

求 $\int 2^x e^x \mathrm{d}x$

例 11

求 $\int 2^x e^x \mathrm{d}x$

解

$$\int 2^x e^x \mathrm{d}x = \int (2e)^x \mathrm{d}x$$

例 11

求 $\int 2^x e^x \mathrm{d}x$

解

$$\begin{aligned}\int 2^x e^x \mathrm{d}x &= \int (2e)^x \mathrm{d}x \\ &= \frac{(2e)^x}{\ln(2e)} + C = \frac{2^x e^x}{1+\ln 2} + C\end{aligned}$$

定理 (性质 1)

设函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 的原函数存在, 则

$$\int [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x.$$

定理 (性质 2)

设函数 $f(x)$ 的原函数存在, k 为非零常数, 则

$$\int kf(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x.$$

三角函数倍角公式

$$\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta,$$
$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta,$$
$$\tan(2\theta) = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}.$$

三角函数倍角公式

$$\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta,$$
$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta,$$
$$\tan(2\theta) = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}.$$

三角函数半角公式

$$\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2},$$
$$\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2},$$
$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}.$$

例 12

求 $\int \tan^2 x \mathrm{d}x$

例 12

求 $\int \tan^2 x \mathrm{d}x$

解　　已知

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

例 12

求 $\int \tan^2 x \mathrm{d}x$

解　已知

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\int \tan^2 \mathrm{d}x = \int \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 \mathrm{d}x$$

例 12

求 $\int \tan^2 x \mathrm{d}x$

解　已知

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\begin{aligned}
\int \tan^2 \mathrm{d}x &= \int \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 \mathrm{d}x \\
&= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x - \cos^2 x}{\cos^2 x} \mathrm{d}x \\
&= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

例 12

求 $\int \tan^2 x \mathrm{d}x$

解　已知

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\begin{aligned}
\int \tan^2 \mathrm{d}x &= \int \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 \mathrm{d}x \\
&= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x - \cos^2 x}{\cos^2 x} \mathrm{d}x \\
&= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) \mathrm{d}x \\
&= \tan x - x + C.
\end{aligned}$$

例 13

求 $\int \sin^2 \frac{x}{2} \mathrm{d}x$

例 13

求 $\int \sin^2 \frac{x}{2} \mathrm{d}x$

解　由三角函数半角公式

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$$

例 13

求 $\int \sin^2 \frac{x}{2} \mathrm{d}x$

解　由三角函数半角公式

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$$

$$\begin{aligned}\int \sin^2 \frac{x}{2} \mathrm{d}x &= \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos x\right) \mathrm{d}x \\ &= \int \frac{1}{2} \mathrm{d}x - \int \frac{1}{2} \cos x \mathrm{d}x\end{aligned}$$

例 13

求 $\int \sin^2 \frac{x}{2} \mathrm{d}x$

解　由三角函数半角公式

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$$

$$\begin{aligned}
\int \sin^2 \frac{x}{2} \mathrm{d}x &= \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos x \right) \mathrm{d}x \\
&= \int \frac{1}{2} \mathrm{d}x - \int \frac{1}{2} \cos x \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} \int \mathrm{d}x - \frac{1}{2} \int \cos x \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

例 13

求 $\int \sin^2 \frac{x}{2} \mathrm{d}x$

解　由三角函数半角公式

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$$

$$\begin{aligned}
\int \sin^2 \frac{x}{2} \mathrm{d}x &= \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos x\right) \mathrm{d}x \\
&= \int \frac{1}{2} \mathrm{d}x - \int \frac{1}{2} \cos x \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} \int \mathrm{d}x - \frac{1}{2} \int \cos x \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \sin x + C
\end{aligned}$$

例 14

求 $\int \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} \mathrm{d}x$

例 14

求 $\int \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} \mathrm{d}x$

解　由三角函数倍角公式

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} \mathrm{d}x &= \int \frac{1}{\left(\frac{1}{2} \sin x\right)^2} \mathrm{d}x \\
&= 4 \int \frac{1}{\sin^2 x} \mathrm{d}x \\
&= -\frac{4}{\tan x} + C.
\end{aligned}$$

例 15

求 $\int \frac{2x^4+x^2+1}{x^2+1}\mathrm{d}x$

解

$$\int \frac{2x^4+x^2+1}{x^2+1}\mathrm{d}x = \int \frac{2x^4+2x^2-x^2-1+4}{x^2+1}\mathrm{d}x$$

例 15

求 $\int \frac{2x^4+x^2+1}{x^2+1}\mathrm{d}x$

解

$$
\begin{aligned}
\int \frac{2x^4+x^2+1}{x^2+1}\mathrm{d}x &= \int \frac{2x^4+2x^2-x^2-1+4}{x^2+1}\mathrm{d}x \\
&= \int \left(2x^2-1+\frac{4}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x \\
&= 2\int x^2\mathrm{d}x - \int \mathrm{d}x + 4\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

例 15

求 $\int \frac{2x^4+x^2+1}{x^2+1}\mathrm{d}x$

解

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^4+x^2+1}{x^2+1}\mathrm{d}x &= \int \frac{2x^4+2x^2-x^2-1+4}{x^2+1}\mathrm{d}x\\ &= \int \left(2x^2-1+\frac{4}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x\\ &= 2\int x^2\mathrm{d}x - \int \mathrm{d}x + 4\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x\\ &= \frac{2}{3}x^3 - x + 4\arctan x + C.\end{aligned}$$

随堂练习

求以下不定积分

(1) $\int(\sin x+\frac{1}{x})\mathrm{d}x$

(2) $\int(x^2+2x+4)\mathrm{d}x$

(3) $\int(e^x+4\cos x)\mathrm{d}x$

(4) $\int\frac{x^2+1}{x^2}\mathrm{d}x$

随堂练习

求以下不定积分

(1) $\int(\sin x+\frac{1}{x})\mathrm{d}x$ $=-\cos x+\ln|x|+C$

(2) $\int(x^2+2x+4)\mathrm{d}x$ $=\frac{1}{3}x^3+x^2+4x+C$

(3) $\int(e^x+4\cos x)\mathrm{d}x$ $=e^x+4\sin x+C$

(4) $\int\frac{x^2+1}{x^2}\mathrm{d}x$ $=x-\frac{1}{x}+C$

作业

- 教材习题 4-1: 1(1)(2); 2(1)(3)(7)(12)(13)(14)(17)(19)(20)(22)(25).