

# 微积分基本公式

高等数学 I-信息、统计外招

Weiwen Wang(王伟文)

暨南大学

2025 年秋季学期



课程网页

如果积分上限制  $x$  在区间  $[a, b]$  上任意变动, 那么对于每一个取定的  $x$  值, 定积分有一个对应的值, 所以它在  $[a, b]$  上定义了一个函数, 记作  $\Phi(x)$ :

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt \quad (a \leq x \leq b)$$

## 定理 1

如果函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上连续, 那么积分上限的函数

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$$

在  $[a, b]$  上可导, 并且它的导数

$$\Phi'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x).$$

## 证明.

若  $x \in (a, b)$ , 且对于增量  $\Delta x$ ,  $x + \Delta x \in (a, b)$ , 积分上限函数的增量为

$$\begin{aligned}\Delta\Phi &= \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) \\ &= \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\end{aligned}$$

## 证明.

若  $x \in (a, b)$ , 且对于增量  $\Delta x$ ,  $x + \Delta x \in (a, b)$ , 积分上限函数的增量为

$$\begin{aligned}\Delta\Phi &= \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) \\&= \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \\&= \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \\&= \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt\end{aligned}$$

## 证明.

若  $x \in (a, b)$ , 且对于增量  $\Delta x$ ,  $x + \Delta x \in (a, b)$ , 积分上限函数的增量为

$$\begin{aligned}\Delta\Phi &= \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) \\&= \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \\&= \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \\&= \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt\end{aligned}$$

由积分中值定理, 存在  $\xi \in [x, x + \Delta x]$ , 使得  $\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = \Phi(\xi)\Delta x$ . 故

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = f(\xi).$$

续.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\xi)$$

续.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\xi)$$

注意到  $\xi \in [x, x + \Delta x]$ , 故当  $\Delta x \rightarrow 0$  时,  $\xi \rightarrow x$ , 又因为  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续. 因此

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\xi) = f\left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \xi\right) = f(x)$$

续.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\xi)$$

注意到  $\xi \in [x, x + \Delta x]$ , 故当  $\Delta x \rightarrow 0$  时,  $\xi \rightarrow x$ , 又因为  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续. 因此

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\xi) = f\left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \xi\right) = f(x)$$

综上,  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta x} = f(x)$ , 即

$$\Phi'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x).$$

续.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\xi)$$

注意到  $\xi \in [x, x + \Delta x]$ , 故当  $\Delta x \rightarrow 0$  时,  $\xi \rightarrow x$ , 又因为  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续. 因此

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\xi) = f\left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \xi\right) = f(x)$$

综上,  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta x} = f(x)$ , 即

$$\Phi'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x).$$

同理, 若  $x = a$ , 取  $\Delta x > 0$ , 可证  $\Phi'_+(a) = f(a)$ ; 若  $x = b$ , 取  $\Delta x < 0$ , 可证  $\Phi'_-(b) = f(b)$ . □

## 定理 2

如果函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上连续, 那么函数

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$$

是  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的一个原函数.

- 连续函数的原函数一定存在.
- 原函数可以表示为一个积分上限函数.

### 定理 3 (微积分基本定理)

如果函数  $F(x)$  是连续函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上的一个原函数, 那么

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad (\text{牛顿-莱布尼兹公式})$$

证明.

由定理 2,  $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$  是  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的一个原函数, 且  $F(x)$  也是一个原函数. 故

$$F(x) - \Phi(x) = C \quad (a \leq x \leq b)$$

其中  $C$  为常数.

## 证明.

由定理 2,  $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$  是  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的一个原函数, 且  $F(x)$  也是一个原函数. 故

$$F(x) - \Phi(x) = C \quad (a \leq x \leq b)$$

其中  $C$  为常数.

因为  $\Phi(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$ , 所以由上式  $F(a) = C$ .

## 证明.

由定理 2,  $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$  是  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的一个原函数, 且  $F(x)$  也是一个原函数. 故

$$F(x) - \Phi(x) = C \quad (a \leq x \leq b)$$

其中  $C$  为常数.

因为  $\Phi(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$ , 所以由上式  $F(a) = C$ .

同样由上式

$$F(b) - \Phi(b) = C = F(a)$$

## 证明.

由定理 2,  $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$  是  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的一个原函数, 且  $F(x)$  也是一个原函数. 故

$$F(x) - \Phi(x) = C \quad (a \leq x \leq b)$$

其中  $C$  为常数.

因为  $\Phi(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$ , 所以由上式  $F(a) = C$ .

同样由上式

$$F(b) - \Phi(b) = C = F(a)$$

移项得到

$$\Phi(b) = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$



## 定理 4 (微积分基本定理)

如果函数  $F(x)$  是连续函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上的一个原函数, 那么

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad (\text{牛顿-莱布尼兹公式})$$

- 若  $a > b$ , 牛顿-莱布尼兹公式同样成立.
- $F(b) - F(a)$  可记为  $[F(x)]_a^b$ , 故

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$$

## 例 1

求  $\int_0^1 x^2 dx$

## 例 1

求  $\int_0^1 x^2 dx$

解:  $\frac{x^3}{3}$  是  $x^2$  的一个原函数, 故

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$$

### 例 3

求  $\int_{-3}^{-1} \frac{dx}{x}$

### 例 3

求  $\int_{-3}^{-1} \frac{dx}{x}$

解:  $\frac{1}{x}$  的一个原函数是  $\ln|x|$ , 故

$$\int_{-3}^{-1} \frac{dx}{x} = [\ln|x|]_{-3}^{-1} = \ln|-1| - \ln|-3| = -\ln 3$$

## 例 4

计算曲线  $y = e^x$  在区间  $[0, 1]$  上与  $x$  轴所围成的平面图形的面积.

#### 例 4

计算曲线  $y = e^x$  在区间  $[0, 1]$  上与  $x$  轴所围成的平面图形的面积.

解： 所求面积为

$$\int_0^1 e^x dx$$

$e^x$  的一个原函数是  $e^x$ , 故

$$\int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1 = e - 1.$$

## 例 6

证明积分中值定理: 若函数  $f(x)$  在闭区间  $[a,b]$  上连续, 则在开区间内至少存在一点  $\xi$  使得

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) \quad (a < \xi < b).$$

## 例 6

证明积分中值定理: 若函数  $f(x)$  在闭区间  $[a,b]$  上连续, 则在开区间内至少存在一点  $\xi$  使得

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) \quad (a < \xi < b).$$

### 证明.

设  $F(x)$  是  $f(x)$  的一个原函数, 在  $F(x)$  在区间  $[a,b]$  上可导, 由拉格朗日中值定理知, 存在  $\xi \in (a,b)$  使得

$$F(b) - F(a) = F'(\xi)(b-a).$$

由假设  $F'(\xi) = f(\xi)$ , 故

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F'(\xi)(b-a) = f(\xi)(b-a) \quad (a < \xi < b).$$

## 例 7

设  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上连续且  $f(x) > 0$ , 证明函数

$$F(x) = \frac{\int_0^x tf(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}$$

在  $(0, +\infty)$  上单调递增.

证明.

由定理 1

$$\frac{d}{dx} \int_0^x t f(t) dt = x f(x), \quad \frac{d}{dx} \int_0^x f(t) dt = f(x)$$

故

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{x f(x) \int_0^x f(t) dt - f(x) \int_0^x t f(t) dt}{\left( \int_0^x f(t) dt \right)^2} \\ &= \frac{f(x) \int_0^x (x-t) f(t) dt}{\left( \int_0^x f(t) dt \right)^2} \end{aligned}$$

又因为对于  $x > 0, f(t) > 0, \forall t \in (0, x)$ , 故  $(x-t)f(t) > 0$ , 由积分中值定理

$$\int_0^x (x-t) f(t) dt > 0.$$

因此  $F'(x) > 0$ ,  $F(x)$  在区间  $(0, +\infty)$  上单调递增. □

设  $f(u)$  在区间  $[a, b]$  上连续, 若  $\varphi(x) = u \in [a, b]$  且函数  $\varphi$  可导, 则

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \int_a^{\varphi(x)} f(t) dt &= \frac{d\Phi(\varphi(x))}{dx} = \frac{d\Phi(u)}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\&= \frac{d}{du} \int_a^u f(t) dt \cdot \frac{du}{dx} \\&= f[\varphi(x)]\varphi'(x)\end{aligned}$$

设  $f(u)$  在区间  $[a, b]$  上连续, 若  $\varphi(x) = u \in [a, b]$  且函数  $\varphi$  可导, 则

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \int_a^{\varphi(x)} f(t) dt &= \frac{d\Phi(\varphi(x))}{dx} = \frac{d\Phi(u)}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\&= \frac{d}{du} \int_a^u f(t) dt \cdot \frac{du}{dx} \\&= f[\varphi(x)]\varphi'(x)\end{aligned}$$

类似地,

$$\frac{d}{dx} \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t) dt = f[\varphi(x)]\varphi'(x) - f[\psi(x)]\psi'(x)$$

## 例 8

求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_{\cos x}^1 e^{-t^2} dt}{x^2}$

解：此极限为  $\frac{0}{0}$  型，因为

$$\int_{\cos x}^1 e^{-t^2} dt = - \int_1^{\cos x} e^{-t^2} dt$$

且

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \left( - \int_1^{\cos x} e^{-t^2} dt \right) &= - \frac{d}{dx} \int_1^{\cos x} e^{-t^2} dt \\ &= e^{-\cos^2 x} \cdot (\cos x)' \\ &= -(-e^{-\cos^2 x} \sin x) = e^{-\cos^2 x} \sin x\end{aligned}$$

由洛必达法则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_{\cos x}^1 e^{-t^2} dt}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\cos^2 x} \sin x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\cos^2 x}}{2} = \frac{1}{2e}$$

# 作业

- 教材习题 5-2: 4, 5(1)(2), 8(1)(4)(6)(9), 11(1), 12, 14.