函数图像绘制、曲率

高等数学 I-信息、统计外招

Weiwen Wang(王伟文)

暨南大学

2025 年秋季学期

课程网页

绘制函数图形需要确定函数的拐点，驻点，单调区间，凹凸区间

(1) 确定函数的定义域；求出函数的一阶导数 $f'(x)$ 和二阶导数 $f''(x)$；

(2) 求出一阶导数 $f'(x)$ 和二阶导数 $f''(x)$ 在函数定义域内的全部零点，并求出函数 $f(x)$ 的间断点及 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 不存在的点，用这些点把函数定义域划分成几个部分的区间；

(3) 确定在这些部分区间内 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 的符号，并由此确定函数图形的升降、凹凸和拐点；

(4) 确定函数图形的水平、铅直渐进线；

(5) 算出 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 的零点以及不存在的点对应的函数值.

绘制函数图形需要确定函数的拐点，驻点，单调区间，凹凸区间

(1) 确定函数的定义域；求出函数的一阶导数 $f'(x)$ 和二阶导数 $f''(x)$；

(2) 求出一阶导数 $f'(x)$ 和二阶导数 $f''(x)$ 在函数定义域内的全部零点，并求出函数 $f(x)$ 的间断点及 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 不存在的点，用这些点把函数定义域划分成几个部分的区间；

(3) 确定在这些部分区间内 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 的符号，并由此确定函数图形的升降、凹凸和拐点；

(4) 确定函数图形的水平、铅直渐进线；

(5) 算出 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 的零点以及不存在的点对应的函数值.

绘制函数图形需要确定函数的拐点，驻点，单调区间，凹凸区间

(1) 确定函数的定义域；求出函数的一阶导数 $f'(x)$ 和二阶导数 $f''(x)$；

(2) 求出一阶导数 $f'(x)$ 和二阶导数 $f''(x)$ 在函数定义域内的全部零点，并求出函数 $f(x)$ 的间断点及 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 不存在的点，用这些点把函数定义域划分成几个部分的区间；

(3) 确定在这些部分区间内 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 的符号，并由此确定函数图形的升降、凹凸和拐点；

(4) 确定函数图形的水平、铅直渐进线；

(5) 算出 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 的零点以及不存在的点对应的函数值.

绘制函数图形需要确定函数的拐点，驻点，单调区间，凹凸区间

(1) 确定函数的定义域；求出函数的一阶导数 $f'(x)$ 和二阶导数 $f''(x)$；

(2) 求出一阶导数 $f'(x)$ 和二阶导数 $f''(x)$ 在函数定义域内的全部零点，并求出函数 $f(x)$ 的间断点及 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 不存在的点，用这些点把函数定义域划分成几个部分的区间；

(3) 确定在这些部分区间内 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 的符号，并由此确定函数图形的升降、凹凸和拐点；

(4) 确定函数图形的水平、铅直渐进线；

(5) 算出 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 的零点以及不存在的点对应的函数值.

绘制函数图形需要确定函数的拐点, 驻点, 单调区间, 凹凸区间

(1) 确定函数的定义域; 求出函数的一阶导数 $f'(x)$ 和二阶导数 $f''(x)$;

(2) 求出一阶导数 $f'(x)$ 和二阶导数 $f''(x)$ 在函数定义域内的全部零点, 并求出函数 $f(x)$ 的间断点及 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 不存在的点, 用这些点把函数定义域划分成几个部分的区间;

(3) 确定在这些部分区间内 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 的符号, 并由此确定函数图形的升降、凹凸和拐点;

(4) 确定函数图形的水平、铅直渐进线;

(5) 算出 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 的零点以及不存在的点对应的函数值.

例 1

画出函数 $y=x^3-x^2-x+1$ 的函数图形.

例 1

画出函数 $y = x^3 - x^2 - x + 1$ 的函数图形.

解　**1.** 写出函数定义、一阶导数和二阶导数.

函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$.

$$y' = 3x^2 - 2x - 1 \quad y'' = 6x - 2$$

2. 此函数没有间断点、一阶导数、二阶导数不存在的点.

令 $y' = 0$, 即

$$y' = 3x^2 - 2x - 1 = (3x+1)(x-1) = 0$$

解得 $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = 1$.

令 $y'' = 6x - 2 = 0$, 解得 $x = \frac{1}{3}$.
$x = -\frac{1}{3}, 1, \frac{1}{3}$ 将定义域 $(-\infty, +\infty)$ 划分为

$$(-\infty, -\frac{1}{3}), (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}), (\frac{1}{3}, 1), (1, +\infty).$$

3. 当 $x \in (-\infty, -\frac{1}{3})$ 时, $f'(x) > 0$, $f''(x) < 0$, 故在该区间内函数单调递增, 且函数图形为凸弧.
当 $x \in (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ 时, $f'(x) < 0$, $f''(x) < 0$, 在该区间内函数单调递减, 且函数图形为凸弧.
当 $x \in (\frac{1}{3}, 1)$ 时, $f'(x) < 0$, $f''(x) > 0$, 在该区间内函数单调递减, 且函数图形为凹弧.
当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$, 在该区间内函数单调递增, 且函数图形为凹弧.

当 $x=\frac{1}{3}$ 时, $y=\frac{16}{27}$, 即函数图形的拐点为 $(\frac{1}{3},\frac{16}{27})$.

4. 函数图形不存在水平渐近线、铅直渐近线.

5. 计算一些点的函数值

$$f(-\frac{1}{3})=\frac{32}{27},\quad f(1)=0.$$

故函数图形通过 $\left(-\frac{1}{3},\frac{32}{27}\right),\left(\frac{1}{3},\frac{16}{27}\right),(1,0)$.

定义 (有向弧)

设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内具有连续导数. 在曲线 $y=f(x)$ 上取固定点 $M_0(x_0,y_0)$ 作为度量弧长的基点, 并规定依 x 增大的方向作为曲线的正向. 对曲线上任一点 $M(x,y)$, 规定有向弧段 $\overset{\frown}{M_0M}$ 的值 s 如下:

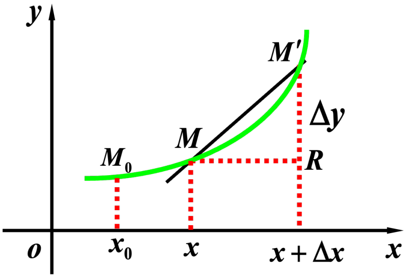
- $|s|$ 即有向弧段 $\overset{\frown}{M_0M}$ 的长度;
- $\overset{\frown}{M_0M}$ 的方向与曲线方向一致时, $s>0$;
- $\overset{\frown}{M_0M}$ 的方向与曲线方向相反时, $s<0$.

- **弧 s 与 x 存在函数关系: $s=s(x)$, 且 $s(x)$ 是 x 的单调增加函数.**

弧增量 Δs

设 x, $x+\Delta x$ 为 (a,b) 内相邻的点, 分别对应曲线 $y=f(x)$ 上的点 M, M', 则弧 s 的增量为

$$\Delta s = \overset{\frown}{M_0M'} - \overset{\frown}{M_0M} = \overset{\frown}{MM'}$$



$$\left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2 = \left(\frac{\overset{\frown}{MM'}}{\Delta x}\right)^2 = \left(\frac{\overset{\frown}{MM'}}{|MM'|} \cdot \frac{|MM'|}{\Delta x}\right)^2$$

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2 = \left(\frac{\overset{\frown}{MM'}}{\Delta x}\right)^2 &= \left(\frac{\overset{\frown}{MM'}}{|MM'|}\cdot\frac{|MM'|}{\Delta x}\right)^2 \\
&= \left(\frac{\overset{\frown}{MM'}}{|MM'|}\right)^2 \frac{|MM'|^2}{(\Delta x)^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2 = \left(\frac{\overset{\frown}{MM'}}{\Delta x}\right)^2 &= \left(\frac{\overset{\frown}{MM'}}{|MM'|}\cdot\frac{|MM'|}{\Delta x}\right)^2 \\
&= \left(\frac{\overset{\frown}{MM'}}{|MM'|}\right)^2 \frac{|MM'|^2}{(\Delta x)^2} \\
&= \left(\frac{\overset{\frown}{MM'}}{|MM'|}\right)^2 \frac{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2} \\
&= \left(\frac{\overset{\frown}{MM'}}{|MM'|}\right)^2 \left[1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right]
\end{aligned}
$$

因为 $s(x)$ 是关于 x 的单调增加函数,

$$
\frac{\Delta s}{\Delta x} = \frac{\overset{\frown}{MM'}}{|MM'|}\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}
$$

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\overset{\frown}{MM'}}{|MM'|} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \right)$$

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\overset{\frown}{MM'}}{|MM'|} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \right) = \sqrt{1 + y'^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\overset{\frown}{MM'}}{|MM'|} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2} \right) = \sqrt{1 + y'^2}$$

弧微分公式: $\boxed{\mathrm{d}\mathbf{s} = \sqrt{\mathbf{1} + \mathbf{y'^2}}\,\mathrm{d}\mathbf{x}}$

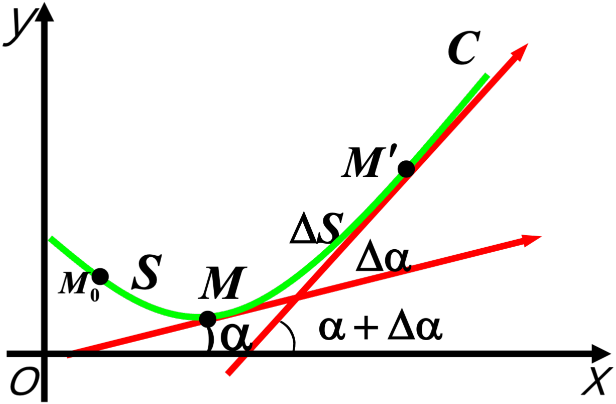
定义 (平均曲率与曲率)

设 $y=f(x)$ 存在二阶导数. 在曲线 $y=f(x)$ 上取固定 M_0 作为度量弧 s 的基点. 设曲线上点 M 对应于弧 s, 在点 M 处切线的倾角为 α; 曲线上另外一点 M' 对应于弧 $s+\Delta s$, 在点 M' 处切线的倾角为 $\alpha+\Delta\alpha$, 则弧段 $\widehat{MM'}$ 的长度为 $|\Delta s|$, 当动点从 M 运动到 M' 时切线转过的角度为 $|\Delta\alpha|$. 定义弧段 $\widehat{MM'}$ 的平均曲率为

$$\bar{K}=\frac{|\Delta\alpha|}{|\Delta s|}$$

分别记点 M,M' 的横坐标为 x, $x+\Delta x$, 定义点 M 处点曲率为

$$K=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta\alpha|}{|\Delta s|}$$


y
C
M'
ΔS
Δα
S
M
M0
α
α + Δα
O
x

曲率计算

$$K=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta\alpha|}{|\Delta s|}=\left|\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta\alpha}{\Delta x}\Big/\left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)\right)\right|$$

$$=\left|\frac{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\alpha}{\Delta x}}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta x}}\right|=\left|\frac{\mathrm{d}\alpha/\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s/\mathrm{d}x}\right|$$

又因为 $\tan\alpha=y'$, 等式两端同时关于 x 求导

$$\frac{1}{\cos^2\alpha}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}=y''\Rightarrow\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}=y''\cos^2\alpha=\frac{y''}{1+\tan^2\alpha}=\frac{y''}{1+y'^2}$$

曲率计算

结合弧微分公式，点 $M(x,y)$ 处的曲率为

$$K = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

例 1

计算等边双曲线 $xy = 1$ 在点 $(1, 1)$ 处的曲率.

例 1

计算等边双曲线 $xy=1$ 在点 $(1,1)$ 处的曲率.

解　由 $y=\frac{1}{x}$ 得

$$y'=-\frac{1}{x^2}\quad y''=\frac{2}{x^3}$$

$$y'\big|_{x=1}=-1\quad y''\big|_{x=1}=2.$$

代入曲率计算公式, 曲线在点 $(1,1)$ 处的曲率为

$$K=\frac{2}{(1+1^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

定义 (曲率圆与曲率半径)

设曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x,y)$ 处曲率为 $K(K\neq 0)$. 在点 M 处的曲线的法线上, 在凹的一侧取一点 D, 使得 $|DM|=\frac{1}{K}=\rho$. 以 D 为圆心, ρ 为半径作圆, 这个圆叫做曲线在点 M 处的**曲率圆**, 曲率圆的圆心 D 叫做曲线在点 M 处的**曲率中心**, 曲率圆的半径 ρ 叫做曲线在点 M 处的**曲率半径**.

- 曲率圆与曲线在点 M 处有相同的切线与曲率.
- 在点 M 处的曲率半径 ρ 与曲率 $K(K\neq 0)$ 互为倒数: $K=\frac{1}{\rho}$, $\rho=\frac{1}{K}$.

作业

- 教材习题 3-6: 1 (模仿例 1 解题).
- 教材习题 3-7:1;3;5.