函数的微分

高等数学 I-信息、统计外招

Weiwen Wang(王伟文)

暨南大学

2025 年秋季学期

课程网页

定义 1 (微分)

设函数 $y=f(x)$ 在某个区间内有定义, x_0 及 $x_0+\Delta x$ 在这区间内, 如果函数的增量

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$$

可表示为

$$\Delta y = A\cdot\Delta x + o(\Delta x)$$

其中 A 是不依赖于 Δx 的常数, 那么称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处是可微的, 而 $A\cdot\Delta x$ 叫做函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 相应于自变量 Δx 的微分, 记作 $\mathrm{d}y$, 即

$$\mathrm{d}y = A\cdot\Delta x.$$

推论

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可微的充分必要条件是函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导且当 $f(x)$ 在点 x_0 处可微时，其微分一定是

$$\mathrm{d}y = f'(x_0)\Delta x$$

推论

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可微的充分必要条件是函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导且当 $f(x)$ 在点 x_0 处可微时, 其微分一定是

$$\mathrm{d}y = f'(x_0)\Delta x$$

- **可微 $\Longrightarrow$ 可导:** $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} \right) = A$

推论

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可微的充分必要条件是函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导且当 $f(x)$ 在点 x_0 处可微时, 其微分一定是

$$\mathrm{d}y = f'(x_0)\Delta x$$

- 可微 $\Longrightarrow$ 可导: $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} \right) = A$
- 可导 $\Longrightarrow$ 可微:
  $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha \Rightarrow \Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$, 其中 $o(\Delta x) = \alpha \cdot \Delta x$.

例 1

求函数 $y=x^2$ 在 $x=1$ 处的微分; 进入一步地, 当 $\Delta x=0.02$ 时的微分.

例 1

求函数 $y=x^2$ 在 $x=1$ 处的微分; 进入一步地, 当 $\Delta x=0.02$ 时的微分.

解　函数 $y=x^2$ 在 $x=1$ 处的微分为

$$\mathrm{d}y = y'\big|_{x=1}\cdot\Delta x = 2\cdot 1\cdot\Delta x = 2\Delta x.$$

例 1

求函数 $y=x^2$ 在 $x=1$ 处的微分; 进入一步地, 当 $\Delta x=0.02$ 时的微分.

解　函数 $y=x^2$ 在 $x=1$ 处的微分为

$$\mathrm{d}y = y'\big|_{x=1} \cdot \Delta x = 2 \cdot 1 \cdot \Delta x = 2\Delta x.$$

当 $\Delta x = 0.02$, 相应的微分为

$$\mathrm{d}y\Big|_{\substack{x=1\\ \Delta x=0.02}} = 2 \cdot 0.02 = 0.04.$$

通常把自变量 x 的增量 Δx 称为自变量的微分，记作 $\mathrm{d}x$，即

$\mathrm{d}x = \Delta x$，于是函数 $y = f(x)$ 的微分又可记作

$$\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x.$$

从而有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x)$$

一些基本初等函数的微分公式

- $(x^{\mu})' = \mu x^{\mu-1}$
- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\sin x$
- $(a^x)' = a^x \ln a \ (a > 0, a \neq 1)$
- $(e^x)' = e^x$
- $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \ (a > 0, a \neq 1)$
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

- $\mathrm{d}(x^{\mu}) = \mu x^{\mu-1} \mathrm{d}x$
- $\mathrm{d}(\sin x) = \cos x \mathrm{d}x$
- $d(\cos x) = -\sin x \mathrm{d}x$
- $\mathrm{d}(a^x) = a^x \ln x \mathrm{d}x \ (a > 0, a \neq 1)$
- $\mathrm{d}(e^x) = e^x \mathrm{d}x$
- $\mathrm{d}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a} \mathrm{d}x \ (a > 0, a \neq 1)$
- $\mathrm{d}(\ln x) = \frac{1}{x} \mathrm{d}x$

函数和、差、积、商的微分法则

简记可微 (可导) 函数 $u = u(x)$, $v = v(x)$, C 为常数.

- $\mathrm{d}(u \pm v) = \mathrm{d}u \pm \mathrm{d}v$
- $\mathrm{d}(Cu) = C\mathrm{d}u$
- $\mathrm{d}(uv) = v\mathrm{d}u + u\mathrm{d}v$
- $\mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\mathrm{d}u - u\mathrm{d}v}{v^2} \quad (v \neq 0)$

复合函数的微分法则

设 $y=f(u)$ 及 $u=g(x)$ 可导，则复合函数 $y=f[g(x)]$ 的微分

$$\mathrm{d}y=y'_x\mathrm{d}x=f'(u)g'(x)\mathrm{d}x$$

复合函数的微分法则

设 $y=f(u)$ 及 $u=g(x)$ 可导，则复合函数 $y=f[g(x)]$ 的微分

$$\mathrm{d}y=y'_x\mathrm{d}x=f'(u)g'(x)\mathrm{d}x$$

又因为 $\mathrm{d}u=g'(x)\mathrm{d}x$，故

$$\mathrm{d}y=f'(u)\mathrm{d}u.$$

无论 u 是自变量还是中间变量，微分形式 $\mathrm{d}y=f'(u)\mathrm{d}u$ 保持不变，这一性质称为微分形式的不变性.

例 3

$y = \sin(2x+1)$, 求 $\mathrm{d}y$.

例 3

$y=\sin(2x+1)$，求 $\mathrm{d}y$.

解　记 $u=2x+1$，由微分形式不变性

$$\mathrm{d}y=(\sin u)'\mathrm{d}u=\cos u\,\mathrm{d}u$$

例 3

$y=\sin(2x+1)$，求 $\mathrm{d}y$.

解　记 $u=2x+1$，由微分形式不变性

$$\mathrm{d}y=(\sin u)'\mathrm{d}u=\cos u\mathrm{d}u$$

又因为

$$\mathrm{d}u=d(2x+1)=(2x+1)'\mathrm{d}x=2\mathrm{d}x,$$

例 3

$y = \sin(2x+1)$，求 $\mathrm{d}y$.

解　记 $u = 2x+1$，由微分形式不变性

$$\mathrm{d}y = (\sin u)'\mathrm{d}u = \cos u\mathrm{d}u$$

又因为

$$\mathrm{d}u = d(2x+1) = (2x+1)'\mathrm{d}x = 2\mathrm{d}x,$$

且 $u = 2x+1$，代入上式得到

$$\mathrm{d}y = \cos(2x+1)\cdot 2\cdot \mathrm{d}x = 2\cos(2x+1)\mathrm{d}x.$$

例 5

$y = e^{1-3x}\cos x$, 求 $\mathrm{d}y$.

解

例 5

$y = e^{1-3x}\cos x$，求 $\mathrm{d}y$.

解 由微分法则

$$\mathrm{d}y = \mathrm{d}(e^{1-3x}\cos x) = \cos x\,\mathrm{d}(e^{1-3x}) + e^{1-3x}\mathrm{d}(\cos x)$$

例 5

$y = e^{1-3x}\cos x$, 求 $\mathrm{d}y$.

解 由微分法则

$$\begin{aligned}\mathrm{d}y = \mathrm{d}(e^{1-3x}\cos x) &= \cos x \mathrm{d}(e^{1-3x}) + e^{1-3x}\mathrm{d}(\cos x)\\ &= \cos x \cdot e^{1-3x}\mathrm{d}(1-3x) + e^{1-3x}(\cos x)'\mathrm{d}x\end{aligned}$$

例 5

$y = e^{1-3x}\cos x$，求 $\mathrm{d}y$.

解 由微分法则

$$\begin{aligned}\mathrm{d}y = \mathrm{d}(e^{1-3x}\cos x) &= \cos x \mathrm{d}(e^{1-3x}) + e^{1-3x}\mathrm{d}(\cos x)\\ &= \cos x \cdot e^{1-3x}\mathrm{d}(1-3x) + e^{1-3x}(\cos x)'\mathrm{d}x\\ &= \cos x \cdot e^{1-3x}(1-3x)'\mathrm{d}x + e^{1-3x}(-\sin x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

例 5

$y = e^{1-3x}\cos x$，求 $\mathrm{d}y$.

解 由微分法则

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}y = \mathrm{d}(e^{1-3x}\cos x) &= \cos x\,\mathrm{d}(e^{1-3x}) + e^{1-3x}\mathrm{d}(\cos x)\\
&= \cos x \cdot e^{1-3x}\mathrm{d}(1-3x) + e^{1-3x}(\cos x)'\mathrm{d}x\\
&= \cos x \cdot e^{1-3x}(1-3x)'\mathrm{d}x + e^{1-3x}(-\sin x)\mathrm{d}x\\
&= -3\cos x \cdot e^{1-3x}\mathrm{d}x - \sin x \cdot e^{1-3x}\mathrm{d}x\\
&= (-3\cos x \cdot e^{1-3x} - \sin x \cdot e^{1-3x})\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

随堂练习

求下列函数的微分

(1) $y = x^3$ 在 $x = 1$ 处

(2) $y = xe^x$

(3) $y = \sin(2x) + 2x$

(4) $y = \frac{\ln x}{x}$

随堂练习

求下列函数的微分

(1) $y = x^3$ 在 $x = 1$ 处 $\quad \mathrm{d}y\Big|_{x=1} = 3x^2\Big|_{x=1}\mathrm{d}x = 3\mathrm{d}x$

(2) $y = xe^x \quad \mathrm{d}y = e^x\mathrm{d}x + xe^x\mathrm{d}x$

(3) $y = \sin(2x) + 2x \quad \mathrm{d}y = [2\cos(2x) + 2]\mathrm{d}x$

(4) $y = \frac{\ln x}{x} \quad \mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}x - \ln x\mathrm{d}x}{y^2} = \left(\frac{1-\ln x}{y^2}\right)\mathrm{d}x$

作业

- 教材习题 2-5: 1; 3(2)(4)(5); 4(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)