函数的求导法则

高等数学 I-信息、统计外招

Weiwen Wang(王伟文)

暨南大学

2025 年秋季学期

课程网页

常数和基本初等函数的导数公式

- $(C)' = 0$
- $(x^{\mu})' = \mu x^{\mu-1}$
- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\sin x$
- $(a^x)' = a^x \ln a \ (a > 0, a \neq 1)$
- $(e^x)' = e^x$
- $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \ (a > 0, a \neq 1)$
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

定理 1 (函数的和、差、积、商的求导法则)

如果函数 $u=u(x)$ 及 $v=v(x)$ 都在点 x 具有导数, 那么它们的和、差、积、商 (除分母为零的点外) 都在点 x 具有导数, 且

- $[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x)$;
- $[u(v)\cdot v(x)]'=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$;
- $\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]'=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$.

运算	口诀	公式
加法 ($u+v$)	和的导数等于导数的和	$(u+v)' = u' + v'$
减法 ($u-v$)	差的导数等于导数的差	$(u-v)' = u' - v'$
乘法 ($u \cdot v$)	**前导后不导 + 后导前不导**	$(u \cdot v)' = u'v + uv'$
除法 ($\frac{u}{v}$)	**母平方，子导母不导 减 母导子不导**	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$

随堂练习

(1) $y = 2x^3 - 3x^2 + 7x + 5$, 求 y' 及 $y'|_{x=1}$.

(2) $f(x) = x^2 \cos x$, 求 $f'(x)$ 及 $f'(\frac{\pi}{2})$.

(3) 求曲线 $y = \frac{e^x}{x+1}$ 在点 $(0,1)$ 处的切线.

(1) $y = 2x^3 - 3x^2 + 7x + 5$，求 y' 及 $y'|_{x=1}$.

解 $$y' = (2x^3)' - (3x^2)' + (7x)' + (5)' = 6x^2 - 6x + 7$$

$$y'|_{x=1} = 6 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 7 = 7$$

(1) $y = 2x^3 - 3x^2 + 7x + 5$，求 y' 及 $y'|_{x=1}$.

解 $y' = (2x^3)' - (3x^2)' + (7x)' + (5)' = 6x^2 - 6x + 7$

$y'|_{x=1} = 6 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 7 = 7$

(2) $f(x) = x^2 \cos x$，求 $f'(x)$ 及 $f'(\frac{\pi}{2})$.

解

$$f'(x) = \left(x^2 \cos x\right)' = \left(x^2\right)' \cdot \cos x + x^2 (\cos x)'$$
$$= 2x\cos x - x^2 \sin x.$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \cdot \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \sin\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}$$

(3) 求曲线 $y=\frac{e^x}{x+1}$ 在点 $(0,1)$ 处的切线.

解

$$y'=\left(\frac{e^x}{x+1}\right)'=\frac{\left(e^x\right)'(x+1)-e^x(x+1)'}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{xe^x}{(x+1)^2}$$

(3) 求曲线 $y=\frac{e^x}{x+1}$ 在点 $(0,1)$ 处的切线.

解

$$y'=\left(\frac{e^x}{x+1}\right)'=\frac{\left(e^x\right)'(x+1)-e^x(x+1)'}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{xe^x}{(x+1)^2}$$

函数 y 在 $x=0$ 处的导数 $y'|_{x=0}=0$.

(3) 求曲线 $y=\frac{e^x}{x+1}$ 在点 $(0,1)$ 处的切线.

解

$$y'=\left(\frac{e^x}{x+1}\right)'=\frac{\left(e^x\right)'(x+1)-e^x(x+1)'}{(x+1)^2}$$
$$=\frac{xe^x}{(x+1)^2}$$

函数 y 在 $x=0$ 处的导数 $y'|_{x=0}=0$.

由导数的几何意义知所求切线斜率 $k=y'|_{x=0}=0$, 相应的切线方程

$$y-1=0\cdot(x-0),$$

即 $y=1$.

定理 3 (复合函数求导法则)

如果 $u=g(x)$ 在点 x 处可导, 而 $y=f(u)$ 在点 $u=g(x)$ 可导, 那么复合函数 $y=f[g(x)]$ 在点 x 可导, 且其导数为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(u)\cdot g'(x) \quad \text{或} \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

定理 3 (复合函数求导法则)

如果 $u=g(x)$ 在点 x 处可导, 而 $y=f(u)$ 在点 $u=g(x)$ 可导, 那么复合函数 $y=f[g(x)]$ 在点 x 可导, 且其导数为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(u)\cdot g'(x) \quad \text{或} \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

- $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(u)\cdot g'(x)=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(g(x))\cdot g'(x)$
- “外导不变里，乘以内导再”

例

设 $y = \sin x^3$，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

例

设 $y=\sin x^3$，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

$$y=\boxed{\sin}\boxed{x^3}$$

例

设 $y=\sin x^3$，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

解　令 $u=g(x)=x^3$，则 $y=f(u)=\sin u$.

例

设 $y=\sin x^3$，求 $\frac{dy}{dx}$

解 令 $u=g(x)=x^3$，则 $y=f(u)=\sin u$. 由复合函数求导公式

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\cos u\cdot 3x^2=3x^2\cos x^3$$

例

设 $y = e^{x^2+1}$，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

例

设 $y = e^{x^2+1}$，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

$$y = \boxed{e}^{\boxed{x^2+1}}$$

例

设 $y=e^{x^2+1}$, 求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

解　令 $u=x^2+1$, 则 $y=e^u$. 由复合函数求导公式

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=e^u\cdot(2x)=2xe^{x^2+1}.$$

例

设 $y=\sin x^3$，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

解 令 $u=g(x)=x^3$，则 $y=f(u)=\sin u$.

例

设 $y=\sin x^3$，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

解　令 $u=g(x)=x^3$，则 $y=f(u)=\sin u$. 由复合函数求导公式

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\cos u\cdot 3x^2=3x^2\cos x^3$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(\sin x^3)'=\cos x^3\cdot(x^3)'=\cos x^3\cdot 3x^2$$

例

设 $y = e^{x^2+1}$，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

解 令 $u = x^2 + 1$，则 $y = e^u$. 由复合函数求导公式

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = e^u \cdot (2x) = 2xe^{x^2+1}.$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \left(e^{x^2+1}\right)' = e^{x^2+1} \cdot \left(x^2 + 1\right)' = e^{x^2+1} \cdot 2x.$$

随堂练习

(1) 设 $y = e^{\sin x} \cdot \cos 2x$, 求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

(2) 设 $y = \ln(2x+1)$, 求 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$

(3) 设 $y = \sqrt{x^2+1}$, 求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

随堂练习

(1) 设 $y = e^{\sin x} \cdot \cos 2x$, 求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \left(e^{\sin x}\right)' \cos 2x + e^{\sin x} \cdot (\cos 2x)'$$

随堂练习

(1) 设 $y = e^{\sin x} \cdot \cos 2x$, 求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \left(e^{\sin x}\right)' \cos 2x + e^{\sin x} \cdot (\cos 2x)' \\
&= e^{\sin x} \left(\sin x\right)' \cos 2x + e^{\sin x} \cdot \left(-\sin 2x\right) \cdot (2x)'
\end{aligned}
$$

随堂练习

(1) 设 $y=e^{\sin x}\cdot\cos 2x$, 求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \left(e^{\sin x}\right)'\cos 2x + e^{\sin x}\cdot(\cos 2x)' \\
&= e^{\sin x}\left(\sin x\right)'\cos 2x + e^{\sin x}\cdot\left(-\sin 2x\right)\cdot(2x)' \\
&= e^{\sin x}\cos x\cos 2x - 2e^{\sin x}\sin 2x
\end{aligned}
$$

随堂练习

(2) 设 $y=\ln(2x+1)$, 求 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$

解

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=[\ln(2x+1)]'=\frac{1}{2x+1}(2x+1)'=\frac{2}{2x+1}$$

随堂练习

(3) 设 $y=\sqrt{x^2+1}$, 求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\left[(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\right]'=\frac{1}{2}(x^2+1)^{\frac{1}{2}-1}\cdot(x^2+1)'$$

随堂练习

(3) 设 $y=\sqrt{x^2+1}$, 求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \left[(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\right]' &= \frac{1}{2}(x^2+1)^{\frac{1}{2}-1}\cdot(x^2+1)' \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\end{aligned}$$

作业

- 教材习题 2-2: 2(1)(5)(7);3(3);6(1)(3)(5);8(3);10;11(5)