

极限存在准则、两个重要极限

高等数学 I-信息、统计外招

Weiwen Wang(王伟文)

暨南大学

2025 年秋季学期



课程网页

定理 (夹逼准则 I)

如果数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 及 $\{z_n\}$ 满足下列条件:

(1) 从某项起, 即 $\exists n_0 \in \mathbb{N}_+$, 当 $n > n_0$ 时, 有

$$y_n \leq x_n \leq z_n;$$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$,

那么数列 $\{x_n\}$ 的极限存在, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

例

求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right)$

例

求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right)$

解 因为

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

例

求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right)$

解 因为

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

又因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1+1/n}} = 1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1+1/n^2}} = 1$$

例

求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right)$

解 因为

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

又因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1+1/n}} = 1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1+1/n^2}} = 1$$

由夹逼准则 1, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) = 1.$

定理 (夹逼准则 I')

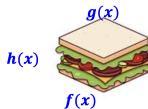
如果

(1) 当 $x \in \mathring{U}(x_0, r)$ (或 $|x| > M$ 时),

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x);$$

(2) $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} g(x) = A, \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} h(x) = A.$

那么 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x)$ 存在, 且等于 A .



两个重要极限之一

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ \varphi(x) \rightarrow 0}} \frac{\sin[\varphi(x)]}{\varphi(x)} = 1$$

例 2

求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

例 2

求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

解

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2(1 + \cos x)}$$

例 2

求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

解

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2(1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos x}\end{aligned}$$

例 2

求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

解

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2(1 + \cos x)} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos x} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

定义 (单调数列)

如果数列 $\{x_n\}$ 满足条件

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \cdots,$$

就称数列 $\{x_n\}$ 是单调增加的; 如果数列 $\{x_n\}$ 满足条件

$$x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \cdots \geq x_n \geq x_{n+1} \geq \cdots,$$

就称数列 $\{x_n\}$ 是单调减少的. 单调增加和单调减少的数列统称为单调数列.

定理 (准则 II)

单调有界数列必有极限.

- 发散数列一定有界?

定理 (准则 II)

单调有界数列必有极限.

- 发散数列一定有界?
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(n\pi)$

两个重要极限之二

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ \varphi(x) \rightarrow \infty}} \left(1 + \frac{1}{\varphi(x)}\right)^{\varphi(x)} = e.$$

字母 e 是无理数, $e = 2.718\ 281\ 828\ 459\ 045 \dots$

例 4

求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$

例 4

求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$

解 令 $t = -x$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{-t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t \right]^{-1}$$

例 4

求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$

解 令 $t = -x$,

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{-t} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t \right]^{-1} \\ &= \left[\lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t \right]^{-1} \\ &= \frac{1}{e}\end{aligned}$$

定理 (准则 II')

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个左邻域内单调且有界, 则 $f(x)$ 在 x_0 的左极限 $f(x_0^-)$ 必定存在.

随堂练习

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x$$

随堂练习

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = \frac{1}{2}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = e$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = 1$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x = e^{\frac{1}{2}}$$

作业

- 教材习题 1-6: $1(1)(6)$; $2(3)(4)$; $4(2)$.