

定积分的元素法 定积分在几何学上的应用

高等数学 I-信息、统计外招

Weiwen Wang(王伟文)

暨南大学

2025 年秋季学期



课程网页

定积分元素法

一般地，如果某一实际问题中所求量 U 符合下列条件

- (1) U 是与一个变量 x 的变化区间 $[a,b]$ 有关的量；
- (2) U 对于区间 $[a,b]$ 具有可加性，即如果把区间 $[a,b]$ 分成许多部分区间，则 U 相应地分成许多部分量，而 U 等于所有部分量之和；
- (3) 部分量 ΔU_i 的近似值可表示为 $f(\xi_i)\Delta x_i$ ，则可考虑使用定积分来表达这个量 U .

定积分元素法

一般地，如果某一实际问题中所求量 U 符合下列条件

- (1) U 是与一个变量 x 的变化区间 $[a, b]$ 有关的量；
- (2) U 对于区间 $[a, b]$ 具有可加性，即如果把区间 $[a, b]$ 分成许多部分区间，则 U 相应地分成许多部分量，而 U 等于所有部分量之和；
- (3) 部分量 ΔU_i 的近似值可表示为 $f(\xi_i)\Delta x_i$ ，则可考虑使用定积分来表达这个量 U .

定积分元素法

一般地，如果某一实际问题中所求量 U 符合下列条件

- (1) U 是与一个变量 x 的变化区间 $[a,b]$ 有关的量；
- (2) U 对于区间 $[a,b]$ 具有可加性，即如果把区间 $[a,b]$ 分成许多部分区间，则 U 相应地分成许多部分量，而 U 等于所有部分量之和；
- (3) 部分量 ΔU_i 的近似值可表示为 $f(\xi_i)\Delta x_i$ ，则可考虑使用定积分来表达这个量 U .

定积分元素法

对所求量 U 写出积分表达式的步骤:

- (1) 根据问题的具体情况, 选取一个变量例如 x 为积分变量, 并确定它的变化区间 $[a, b]$;
- (2) 设想把区间 $[a, b]$ 分成 n 个小区间, 取其中任一小区间并记作 $[x, x + dx]$, 求出相应于这个小区间的部分量 ΔU 的近似值. 如果 ΔU 能近似地表示为 $[a, b]$ 的一个连续函数在 x 处的值 $f(x)$ 与 dx 的乘积, 就把 $f(x)dx$ 称为量 U 的元素且记作 dU , 即

$$dU = f(x)dx;$$

定积分元素法

对所求量 U 写出积分表达式的步骤:

- (1) 根据问题的具体情况, 选取一个变量例如 x 为积分变量, 并确定它的变化区间 $[a, b]$;
- (2) 设想把区间 $[a, b]$ 分成 n 个小区间, 取其中任一小区间并记作 $[x, x + dx]$, 求出相应于这个小区间的部分量 ΔU 的近似值. 如果 ΔU 能近似地表示为 $[a, b]$ 的一个连续函数在 x 处的值 $f(x)$ 与 dx 的乘积, 就把 $f(x)dx$ 称为量 U 的元素且记作 dU , 即

$$dU = f(x)dx;$$

定积分元素法

(3) 以所求量 U 的元素 $f(x)dx$ 为被积表达式, 在区间 $[a, b]$ 上作定积分, 得

$$U = \int_a^b f(x)dx.$$

定积分元素法

(3) 以所求量 U 的元素 $f(x)dx$ 为被积表达式, 在区间 $[a, b]$ 上作定积分, 得

$$U = \int_a^b f(x)dx.$$

上述公式即所求量 U 的积分表达式.

平面图形的面积

由曲线 $y = f(x)$ ($f(x) \geq 0$) 及直线 $x = a, x = b$ ($a < b$) 与 x 轴所围成的曲边梯形的面积 A 是定积分

$$A = \int_a^b f(x)dx,$$

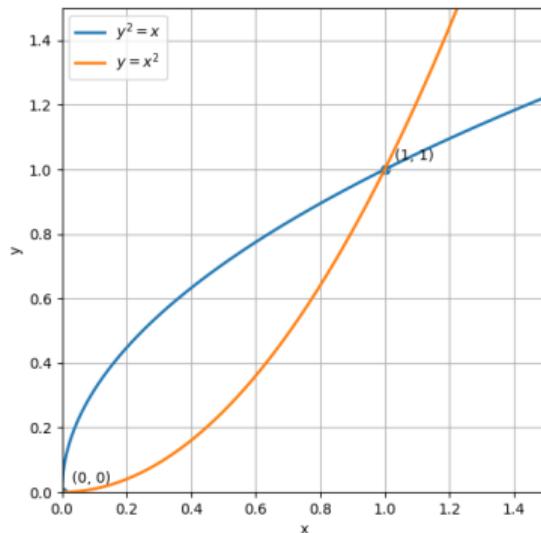
其中被积表达式 $f(x)dx$ 就是直角坐标下的面积元素, 它表示高为 $f(x)$, 底为 dx 的一个矩形面积.

例 1

计算由两条抛物线 $y^2 = x$, $y = x^2$ 所围成的图形的面积.

例 1

计算由两条抛物线 $y^2 = x$, $y = x^2$ 所围成的图形的面积.



解：先计算两条曲线的交点

$$\begin{cases} y^2 = x, \\ y = x^2. \end{cases}$$

得到两个解

$$x = 0, y = 0 \quad \text{及} \quad x = 1, y = 1.$$

因此函数图像在直线 $x = 0$ 及 $x = 1$ 之间.

解：先计算两条曲线的交点

$$\begin{cases} y^2 = x, \\ y = x^2. \end{cases}$$

得到两个解

$$x = 0, y = 0 \quad \text{及} \quad x = 1, y = 1.$$

因此函数图像在直线 $x = 0$ 及 $x = 1$ 之间.

取横坐标 x 为积分变量, 其变化范围为 $[0, 1]$, 取其中任一小区间 $[x, x + dx]$, 所求图形在此区间内的面积近似高为 $\sqrt{x} - x^2$, 底为 dx 的矩形面积, 因此面积元素为

$$dA = (\sqrt{x} - x^2) dx.$$

于是所求面积为定积分

$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

例 2

计算抛物线 $y^2 = 2x$ 与直线 $y = x - 4$ 所围成的面积.

例 2

计算抛物线 $y^2 = 2x$ 与直线 $y = x - 4$ 所围成的面积.

解： 抛物线与直线的交点满足

$$\begin{cases} y^2 = 2x, \\ y = x - 4. \end{cases}$$

因此交点为 $(8, 4)$ 和 $(2, -2)$, 图形在直线 $y = -2$ 和 $y = 4$ 之间.

取 y 为积分变量, 变化区间为 $[-2, 4]$, 任取一小区间 $[y, y + dy]$,

取 y 为积分变量, 变化区间为 $[-2, 4]$, 任取一小区间 $[y, y + dy]$, 图形在此小区间的面积近似于长为 $y + 4 - \frac{y^2}{2}$, 高为 dy 的矩形面积,

取 y 为积分变量, 变化区间为 $[-2, 4]$, 任取一小区间 $[y, y + dy]$, 图形在此小区间的面积近似于长为 $y + 4 - \frac{y^2}{2}$, 高为 dy 的矩形面积, 因此面积元素为

$$\Delta A = \left(y + 4 - \frac{y^2}{2} \right) dy$$

取 y 为积分变量, 变化区间为 $[-2, 4]$, 任取一小区间 $[y, y + dy]$, 图形在此小区间的面积近似于长为 $y + 4 - \frac{y^2}{2}$, 高为 dy 的矩形面积, 因此面积元素为

$$\Delta A = \left(y + 4 - \frac{y^2}{2} \right) dy$$

于是所求面积为定积分

$$A = \int_{-2}^4 \left(y + 4 - \frac{y^2}{2} \right) dy = \left[\frac{y^2}{2} + 4y - \frac{1}{6}y^3 \right]_{-2}^4 = 18$$

例 3

求椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 所围成的图形的面积 ($a > 0, b > 0$).

例 3

求椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 所围成的图形的面积 ($a > 0, b > 0$).

解：由对称性，只需求椭圆在第一象限所围成的面积.

例 3

求椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 所围成的图形的面积 ($a > 0, b > 0$).

解：由对称性，只需求椭圆在第一象限所围成的面积.

取 x 为积分变量, x 的变化范围为 $[0, a]$. 任取其一小区间 $[x, x + dx]$, 此区间的面积近似于高为 y , 底为 dx 的矩形面积, 故面积元素为

$$dA = y dx,$$

例 3

求椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 所围成的图形的面积 ($a > 0, b > 0$).

解：由对称性，只需求椭圆在第一象限所围成的面积.

取 x 为积分变量, x 的变化范围为 $[0, a]$. 任取其一小区间 $[x, x + dx]$, 此区间的面积近似于高为 y , 底为 dx 的矩形面积, 故面积元素为

$$dA = ydx,$$

于是椭圆的第一象限的面积为

$$A = \int_0^a ydx.$$

由椭圆参数方程, $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

由椭圆参数方程, $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

$dx = d(a \cos t) = -a \sin t dt$. 当 $x = 0$ 时, $t = \frac{\pi}{2}$; 当 $x = a$ 时, $t = 0$.

由椭圆参数方程, $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

$dx = d(a \cos t) = -a \sin t dt$. 当 $x = 0$ 时, $t = \frac{\pi}{2}$; 当 $x = a$ 时, $t = 0$.

故

$$\begin{aligned} A &= \int_0^a y dx = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 ab \sin^2 t dt \\ &= ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt \end{aligned}$$

由椭圆参数方程, $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

$dx = d(a \cos t) = -a \sin t dt$. 当 $x = 0$ 时, $t = \frac{\pi}{2}$; 当 $x = a$ 时, $t = 0$.

故

$$\begin{aligned} A &= \int_0^a y dx = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 ab \sin^2 t dt \\ &= ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt \\ &= ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = ab \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

由椭圆参数方程, $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

$dx = d(a \cos t) = -a \sin t dt$. 当 $x = 0$ 时, $t = \frac{\pi}{2}$; 当 $x = a$ 时, $t = 0$.

故

$$\begin{aligned} A &= \int_0^a y dx = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 ab \sin^2 t dt \\ &= ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt \\ &= ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = ab \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

所求椭圆所围成的面积为 $4 \cdot \frac{\pi}{4} ab = \pi ab$.

设由曲线 $\rho = \rho(\theta)$ 及射线 $\theta = \alpha, \theta = \beta$ 围成一图形 (称曲边扇形),
 $\rho(\theta)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续, 且 $\rho(\theta) \geq 0, 0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$.

设由曲线 $\rho = \rho(\theta)$ 及射线 $\theta = \alpha, \theta = \beta$ 围成一图形 (称曲边扇形),

$\rho(\theta)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续, 且 $\rho(\theta) \geq 0, 0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$.

取极角 θ 为积分变量, 其变化范围为 $[\alpha, \beta]$,

设由曲线 $\rho = \rho(\theta)$ 及射线 $\theta = \alpha, \theta = \beta$ 围成一图形 (称曲边扇形),
 $\rho(\theta)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续, 且 $\rho(\theta) \geq 0, 0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$.

取极角 θ 为积分变量, 其变化范围为 $[\alpha, \beta]$, 在其任一小区间
 $[\theta, \theta + d\theta]$, 此区间对应的面积近似于中心角为 $d\theta$, 半角为 $\rho(\theta)$ 的
扇形面积, 于是面积元素为

$$dA = \frac{1}{2} [\rho(\theta)]^2 d\theta$$

设由曲线 $\rho = \rho(\theta)$ 及射线 $\theta = \alpha, \theta = \beta$ 围成一图形 (称曲边扇形),
 $\rho(\theta)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续, 且 $\rho(\theta) \geq 0, 0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$.

取极角 θ 为积分变量, 其变化范围为 $[\alpha, \beta]$, 在其任一小区间
 $[\theta, \theta + d\theta]$, 此区间对应的面积近似于中心角为 $d\theta$, 半角为 $\rho(\theta)$ 的
扇形面积, 于是面积元素为

$$dA = \frac{1}{2} [\rho(\theta)]^2 d\theta$$

所求面积由定积分得到,

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} [\rho(\theta)]^2 d\theta.$$

例 4

计算阿基米德螺线

$$\rho(\theta) = a\theta \quad (a > 0)$$

上相应于 θ 从 0 到 2π 的一段弧与极轴所围成的图形的面积.

例 4

计算阿基米德螺线

$$\rho(\theta) = a\theta \quad (a > 0)$$

上相应于 θ 从 0 到 2π 的一段弧与极轴所围成的图形的面积.

解: θ 相应于指定弧的变化范围为 $[0, 2\pi]$, 面积元素

$$dA = \frac{1}{2}(a\theta)^2 d\theta$$

例 4

计算阿基米德螺线

$$\rho(\theta) = a\theta \quad (a > 0)$$

上相应于 θ 从 0 到 2π 的一段弧与极轴所围成的图形的面积.

解: θ 相应于指定弧的变化范围为 $[0, 2\pi]$, 面积元素

$$dA = \frac{1}{2}(a\theta)^2 d\theta$$

所求面积由定积分给出:

$$A = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(a\theta)^2 d\theta = \frac{4a^2\pi^3}{3}.$$

例 5

计算心形线

$$\rho = a(1 + \cos \theta) \quad (a > 0)$$

所围成的图形的面积.

例 5

计算心形线

$$\rho = a(1 + \cos \theta) \quad (a > 0)$$

所围成的图形的面积.

解: 心形线关于极轴对称, 只需要求出极轴上方的心形线与极轴所围成的面积.

例 5

计算心形线

$$\rho = a(1 + \cos \theta) \quad (a > 0)$$

所围成的图形的面积.

解: 心形线关于极轴对称, 只需要求出极轴上方的心形线与极轴所围成的面积. 此时, θ 的变化范围为 $[0, \pi]$, 面积元素为

$$dA = \frac{1}{2}a^2(1 + \cos \theta)^2 d\theta$$

例 5

计算心形线

$$\rho = a(1 + \cos \theta) \quad (a > 0)$$

所围成的图形的面积.

解: 心形线关于极轴对称, 只需要求出极轴上方的心形线与极轴所围成的面积. 此时, θ 的变化范围为 $[0, \pi]$, 面积元素为

$$dA = \frac{1}{2}a^2(1 + \cos \theta)^2 d\theta$$

心形线在极轴上方的所围成的面积由定积分给出:

$$A = \int_0^\pi \frac{1}{2}a^2(1 + \cos \theta)^2 d\theta$$

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^\pi \frac{1}{2}a^2(1+\cos\theta)^2 d\theta \\
&= \frac{a^2}{2} \int_0^\pi (1+2\cos\theta+\cos^2\theta) d\theta \\
&= \frac{a^2}{2} \int_0^\pi \left(\frac{3}{2} + 2\cos\theta + \frac{\cos 2\theta}{2}\right) d\theta \\
&= \frac{a^2}{2} \left[\frac{3\theta}{2} + 2\sin\theta + \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_0^\pi \\
&= \frac{3a^2\pi}{4}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^\pi \frac{1}{2}a^2(1+\cos\theta)^2 d\theta \\
&= \frac{a^2}{2} \int_0^\pi (1+2\cos\theta+\cos^2\theta) d\theta \\
&= \frac{a^2}{2} \int_0^\pi \left(\frac{3}{2} + 2\cos\theta + \frac{\cos 2\theta}{2}\right) d\theta \\
&= \frac{a^2}{2} \left[\frac{3\theta}{2} + 2\sin\theta + \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_0^\pi \\
&= \frac{3a^2\pi}{4}.
\end{aligned}$$

所求面积为 $2A = \frac{3a^2\pi}{2}$.

旋转体

旋转体

旋转体

旋转体

设旋转体由连续曲线 $y=f(x)$, 直线 $x=a$, $x=b$ 及 x 轴所围成的曲边梯形绕 x 旋转一周而成的立体.

设旋转体由连续曲线 $y = f(x)$, 直线 $x = a$, $x = b$ 及 x 轴所围成的曲边梯形绕 x 旋转一周而成的立体.

取横坐标 x 为积分变量, 积分区间为 $[a, b]$. 相应于 $[a, b]$ 上任一小区间 $[x, x + dx]$ 的窄曲边梯形绕 x 轴旋转而成的薄片的体积近似于以 $f(x)$ 为底半径, dx 为高的扁圆柱体的体积, 即体积元素

$$dV = \pi[f(x)]^2 dx.$$

设旋转体由连续曲线 $y = f(x)$, 直线 $x = a$, $x = b$ 及 x 轴所围成的曲边梯形绕 x 旋转一周而成的立体.

取横坐标 x 为积分变量, 积分区间为 $[a, b]$. 相应于 $[a, b]$ 上任一小区间 $[x, x + dx]$ 的窄曲边梯形绕 x 轴旋转而成的薄片的体积近似于以 $f(x)$ 为底半径, dx 为高的扁圆柱体的体积, 即体积元素

$$dV = \pi[f(x)]^2 dx.$$

以 $\pi[f(x)]^2 dx$ 为被积表达式, 在闭区间 $[a, b]$ 上作定积分, 所求旋转体体积为

$$V = \int_a^b \pi[f(x)]^2 dx.$$

例 7

计算由椭圆

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0)$$

所围成的图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积.

例 7

计算由椭圆

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0)$$

所围成的图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积.

解： 所求旋转体可看作半个椭圆

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \quad (-a \leq x \leq a)$$

及 x 轴围成的图形绕 x 轴旋转一周而成的立体.

取 x 为积分变量, 其变化区间为 $[-a, a]$, 任取其一小区间 $[x, x + dx]$,
旋转体相应于此小区间的薄片的体积近似于底半径为 y , 高为 dx
的圆柱体体积, 即体积元素为

$$dV = \pi y^2 dx = \frac{\pi b^2}{a^2} (a^2 - x^2) dx$$

取 x 为积分变量, 其变化区间为 $[-a, a]$, 任取其一小区间 $[x, x + dx]$,
旋转体相应于此小区间的薄片的体积近似于底半径为 y , 高为 dx
的圆柱体体积, 即体积元素为

$$dV = \pi y^2 dx = \frac{\pi b^2}{a^2} (a^2 - x^2) dx$$

于是所求圆柱体的体积为

$$\int_{-a}^a \frac{\pi b^2}{a^2} (a^2 - x^2) dx = \frac{\pi b^2}{a^2} \int_{-a}^a (a^2 - x^2) dx$$

取 x 为积分变量, 其变化区间为 $[-a, a]$, 任取其一小区间 $[x, x + dx]$, 旋转体相应于此小区间的薄片的体积近似于底半径为 y , 高为 dx 的圆柱体体积, 即体积元素为

$$dV = \pi y^2 dx = \frac{\pi b^2}{a^2} (a^2 - x^2) dx$$

于是所求圆柱体的体积为

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a \frac{\pi b^2}{a^2} (a^2 - x^2) dx &= \frac{\pi b^2}{a^2} \int_{-a}^a (a^2 - x^2) dx \\ &= \frac{2\pi b^2}{a^2} \int_0^a (a^2 - x^2) dx \\ &= \frac{2\pi b^2}{a^2} \left[a^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^a = \frac{4\pi}{3} ab^2. \end{aligned}$$

例 8

计算由摆线 $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ 相应于 $0 \leq t \leq 2\pi$ 的一拱与直线 $y = 0$ 所围成的图形分别绕 x 轴, y 轴旋转而成的旋转体的体积 ($a > 0$).

例 8

计算由摆线 $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ 相应于 $0 \leq t \leq 2\pi$ 的一拱与直线 $y = 0$ 所围成的图形分别绕 x 轴, y 轴旋转而成的旋转体的体积 ($a > 0$).

解: 由旋转体的体积公式, 绕 x 轴旋转而成的旋转体体积为

$$V_x = \int_0^{2\pi a} \pi y^2 dx = \int_0^{2\pi} \pi a^2 (1 - \cos t)^2 d(a(t - \sin t))$$

例 8

计算由摆线 $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ 相应于 $0 \leq t \leq 2\pi$ 的一拱与直线 $y = 0$ 所围成的图形分别绕 x 轴, y 轴旋转而成的旋转体的体积 ($a > 0$).

解: 由旋转体的体积公式, 绕 x 轴旋转而成的旋转体体积为

$$\begin{aligned} V_x &= \int_0^{2\pi a} \pi y^2 dx = \int_0^{2\pi} \pi a^2 (1 - \cos t)^2 d(a(t - \sin t)) \\ &= \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt \\ &= \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t) dt \\ &= 5\pi^2 a^3. \end{aligned}$$

解： 绕 y 轴所得的旋转体的体积看看作两个旋转体的体积，即

$$V_y = \int_0^{2a} \pi x_1^2(y) dy - \int_0^{2a} \pi x_2^2(y) dy$$

解： 绕 y 轴所得的旋转体的体积看看作两个旋转体的体积，即

$$\begin{aligned}V_y &= \int_0^{2a} \pi x_1^2(y) dy - \int_0^{2a} \pi x_2^2(y) dy \\&= \int_{2\pi}^{\pi} \pi a^2(t - \sin t)^2 d(a(1 - \cos t)) - \int_0^{\pi} \pi a^2(t - \sin t)^2 d(a(1 - \cos t)) \\&= \pi a^3 \int_{2\pi}^{\pi} (t - \sin t)^2 \sin t dt - \pi a^3 \int_0^{\pi} (t - \sin t)^2 \sin t dt\end{aligned}$$

解： 绕 y 轴所得的旋转体的体积看看作两个旋转体的体积，即

$$\begin{aligned}V_y &= \int_0^{2a} \pi x_1^2(y) dy - \int_0^{2a} \pi x_2^2(y) dy \\&= \int_{2\pi}^{\pi} \pi a^2(t - \sin t)^2 d(a(1 - \cos t)) - \int_0^{\pi} \pi a^2(t - \sin t)^2 d(a(1 - \cos t)) \\&= \pi a^3 \int_{2\pi}^{\pi} (t - \sin t)^2 \sin t dt - \pi a^3 \int_0^{\pi} (t - \sin t)^2 \sin t dt \\&= -\pi a^3 \int_0^{2\pi} (t - \sin t)^2 \sin t dt \\&= 6\pi^2 a^3.\end{aligned}$$

通过计算旋转体体积的定积分元素法，如知道立体沿着某一方向、在每一处的截面积，则可计算出该立体的体积.

通过计算旋转体体积的定积分元素法，如知道立体沿着某一方向、在每一处的截面积，则可计算出该立体的体积。

设 x 轴垂直于立体的截面，并且该立体在过点 $x = a, x = b$ 且垂直于 x 轴的两个平面之间。以 $A(x)$ 表示过 x 点且垂直于 x 轴的截面面积。假定 $A(x)$ 为已知的 x 的连续函数。取 x 为积分变量，其变化区间为 $[a, b]$ ，任取一小区间 $[x, x + dx]$ ，立体相应于此区间的体积近似于底面积为 $A(x)$ ，高为 dx 的圆柱体的体积，即体积元素

$$dV = A(x)dx.$$

所求立体体积为

$$V = \int_a^b A(x)dx.$$

例 9

一平面经过半径为 R 的圆柱体的底圆中心, 并与底面交成角 α ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$), 计算这平面截圆柱体所得立体的体积.

例 9

一平面经过半径为 R 的圆柱体的底圆中心, 并与底面交成角 α ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$), 计算这平面截圆柱体所得立体的体积.

解: 设平面通过 x 轴. 以底圆中心为原点, 截圆柱体在 x 处的截面为底是 $\sqrt{R^2 - x^2}$, 高为 $\tan \alpha \cdot \sqrt{R^2 - x^2}$ 的三角形, 对应的截面积为

$$A(x) = \frac{\tan \alpha}{2} (R^2 - x^2),$$

其中 x 的变化范围为 $[-R, R]$.

因此, 所求立体的体积为

$$\begin{aligned} V &= \int_{-R}^R \frac{\tan \alpha}{2} (R^2 - x^2) dx \\ &= \tan \alpha \int_0^R (R^2 - x^2) dx \end{aligned}$$

因此, 所求立体的体积为

$$\begin{aligned} V &= \int_{-R}^R \frac{\tan \alpha}{2} (R^2 - x^2) dx \\ &= \tan \alpha \int_0^R (R^2 - x^2) dx \\ &= \tan \alpha \left[R^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^R \\ &= \frac{2R^3 \tan \alpha}{3}. \end{aligned}$$

平面曲线的弧长

设有参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases} \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

在任一小区间 $[t, t + dt]$ 的弧段长度近似于 $\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$, 于是长度元素为

$$\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{\varphi'^2(t)(dt)^2 + \psi'^2(t)(dt)^2}$$

平面曲线的弧长

设有参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases} \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

在任一小区间 $[t, t + dt]$ 的弧段长度近似于 $\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$, 于是长度元素为

$$\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{\varphi'^2(t)(dt)^2 + \psi'^2(t)(dt)^2} = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}dt$$

故曲线弧长为

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt$$

当曲线弧由直角坐标方程

$$y = f(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

给出, 其中 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上具有一阶连续导数, 这时曲弧有参数方程

$$\begin{cases} x = x, \\ y = f(x). \end{cases} \quad (a \leq x \leq b)$$

当曲线弧由直角坐标方程

$$y = f(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

给出, 其中 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上具有一阶连续导数, 这时曲弧有参数方程

$$\begin{cases} x = x, \\ y = f(x). \end{cases} \quad (a \leq x \leq b)$$

从而所求弧长为

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx.$$

当曲线弧由极坐标方程

$$\rho = \rho(\theta) \quad (\alpha \leq \theta \leq \beta)$$

给出, 其中 $\rho(\theta)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上具有连续导数,

当曲线弧由极坐标方程

$$\rho = \rho(\theta) \quad (\alpha \leq \theta \leq \beta)$$

给出, 其中 $\rho(\theta)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上具有连续导数, 则由直角与极坐标的关
系可得

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta = \rho(\theta) \cos \theta, \\ y = \rho \sin \theta = \rho(\theta) \sin \theta. \end{cases} \quad (\alpha \leq \theta \leq \beta)$$

从而曲线弧长为

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)} d\theta$$

例 11

计算曲线 $y = \frac{2}{3}x^{3/2}$ 上相应于 $a \leq x \leq b$ 的一段弧的长度.

例 11

计算曲线 $y = \frac{2}{3}x^{3/2}$ 上相应于 $a \leq x \leq b$ 的一段弧的长度.

解：由弧长计算公式，所求弧长为

$$\begin{aligned}s &= \int_a^b \sqrt{1+y'^2} dx = \int_a^b \sqrt{1+x} dx = \frac{2}{3} \left[(1+x)^{\frac{3}{2}} \right]_a^b \\&= \frac{2}{3} \left[(1+b)^{3/2} - (1+a)^{3/2} \right]\end{aligned}$$

例 12

计算摆线

$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin \theta), \\ y = a(1 - \cos \theta) \end{cases} \quad (a > 0)$$

一拱 ($0 \leq x \leq 2\pi$) 的长度.

例 12

计算摆线

$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin \theta), \\ y = a(1 - \cos \theta) \end{cases} \quad (a > 0)$$

一拱 ($0 \leq x \leq 2\pi$) 的长度.

解: 由弧长公式

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 - \cos \theta)^2 + a^2 \sin^2 \theta} d\theta \\ &= a\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos \theta} d\theta \\ &= 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{\theta}{2} d\theta \end{aligned}$$

例 12

计算摆线

$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin \theta), \\ y = a(1 - \cos \theta) \end{cases} \quad (a > 0)$$

一拱 ($0 \leq x \leq 2\pi$) 的长度.

解: 由弧长公式

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 - \cos \theta)^2 + a^2 \sin^2 \theta} d\theta \\ &= a\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos \theta} d\theta \\ &= 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{\theta}{2} d\theta = 4a \left[-\cos \frac{\theta}{2} \right]_0^{2\pi} = 8a \end{aligned}$$

例 13

求阿基米德螺线 $\rho = a\theta$ ($a > 0$) 相应于 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ 一段的弧长.

例 13

求阿基米德螺线 $\rho = a\theta$ ($a > 0$) 相应于 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ 一段的弧长.

解：由弧长计算公式

$$\begin{aligned}s &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + a^2\theta^2} d\theta \\&= a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \theta^2} d\theta\end{aligned}$$

例 13

求阿基米德螺线 $\rho = a\theta$ ($a > 0$) 相应于 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ 一段的弧长.

解：由弧长计算公式

$$\begin{aligned}s &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + a^2\theta^2} d\theta \\&= a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \theta^2} d\theta \quad (\text{分部积分法})\end{aligned}$$

例 13

求阿基米德螺线 $\rho = a\theta$ ($a > 0$) 相应于 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ 一段的弧长.

解：由弧长计算公式

$$\begin{aligned}s &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + a^2\theta^2} d\theta \\&= a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \theta^2} d\theta \quad (\text{分部积分法}) \\&= \frac{a}{2} \left[x\sqrt{1+x^2} + \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \right]_0^{2\pi} \\&= \frac{a}{2} \left[2\pi\sqrt{1+4\pi^2} + \ln(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2}) \right]\end{aligned}$$

作业

- 教材习题 6-2: 2(2), 5(1), 6, 12, 14, 25, 28, 30.