

微分中值定理

高等数学 I-信息、统计外招

Weiwen Wang(王伟文)

暨南大学

2025 年秋季学期



课程网页

引理 (费马引理)

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内有定义, 并且在 x_0 处可导, 如果对任意 $x \in U(x_0)$, 有

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (\text{或 } f(x) \geq f(x_0))$$

则 $f'(x_0) = 0$.

证明.

不妨设 $x \in U(x_0)$ 时, $f(x) \leq f(x_0)$. 故若 $x_0 + \Delta x \in U(x_0)$, 则有

$$f(x_0 + \Delta x) \leq f(x_0)$$

证明.

不妨设 $x \in U(x_0)$ 时, $f(x) \leq f(x_0)$. 故若 $x_0 + \Delta x \in U(x_0)$, 则有

$$f(x_0 + \Delta x) \leq f(x_0)$$

因此, 由极限的保号性

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0.$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0.$$

证明.

不妨设 $x \in U(x_0)$ 时, $f(x) \leq f(x_0)$. 故若 $x_0 + \Delta x \in U(x_0)$, 则有

$$f(x_0 + \Delta x) \leq f(x_0)$$

因此, 由极限的保号性

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0.$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0.$$

又因为 $f'(x_0)$ 存在, 从而有

$$f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = f'(x_0) = 0.$$



通常称导数等于零的点为函数的驻点(或稳定点, 临界点)

通常称导数等于零的点为函数的驻点(或稳定点, 临界点)

定理 (罗尔定理)

如果函数 $f(x)$ 满足

- (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续;
- (2) 在开区间 (a, b) 内可导;
- (3) 在区间端点处的函数值相等, 即 $f(a) = f(b)$,

那么在 (a, b) 内至少有一点 $\xi (a < \xi < b)$, 使得 $f'(\xi) = 0$.

定理 (罗尔定理)

如果函数 $f(x)$ 满足

- (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续;
- (2) 在开区间 (a, b) 内可导;
- (3) 在区间端点处的函数值相等, 即 $f(a) = f(b)$,

那么在 (a, b) 内至少有一点 $\xi (a < \xi < b)$, 使得 $f'(\xi) = 0$.

- $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上必有最大值 M 和最小值 m .

定理 (罗尔定理)

如果函数 $f(x)$ 满足

- (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续;
- (2) 在开区间 (a, b) 内可导;
- (3) 在区间端点处的函数值相等, 即 $f(a) = f(b)$,

那么在 (a, b) 内至少有一点 $\xi (a < \xi < b)$, 使得 $f'(\xi) = 0$.

- $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上必有最大值 M 和最小值 m .
- 若 $M > m$, 因为 $f(a) = f(b)$, 则最大值或最小值之一必在 (a, b) 内取得, 不妨设 $\exists \xi \in (a, b), f(\xi) = M \geq f(x), \forall x \in (a, b)$, 由费马引理 $f'(\xi) = 0$.

定理 (罗尔定理)

如果函数 $f(x)$ 满足

- (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续;
- (2) 在开区间 (a, b) 内可导;
- (3) 在区间端点处的函数值相等, 即 $f(a) = f(b)$,

那么在 (a, b) 内至少有一点 $\xi (a < \xi < b)$, 使得 $f'(\xi) = 0$.

- $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上必有最大值 M 和最小值 m .
- 若 $M > m$, 因为 $f(a) = f(b)$, 则最大值或最小值之一必在 (a, b) 内取得, 不妨设 $\exists \xi \in (a, b), f(\xi) = M \geq f(x), \forall x \in (a, b)$, 由费马引理 $f'(\xi) = 0$.
- 若 $M = m$, 则 $f(a) = f(b) = M = m$, 函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上为常数, $\forall x \in (a, b), f'(x) = 0$.



定理 (拉格朗日中值定理)

如果函数 $f(x)$ 满足

- (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续;
- (2) 在开区间 (a, b) 内可导,

那么在 (a, b) 内至少有一点 $\xi (a < \xi < b)$, 使得等式

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$

成立.

定理 (拉格朗日中值定理)

如果函数 $f(x)$ 满足

- (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续;
- (2) 在开区间 (a, b) 内可导,

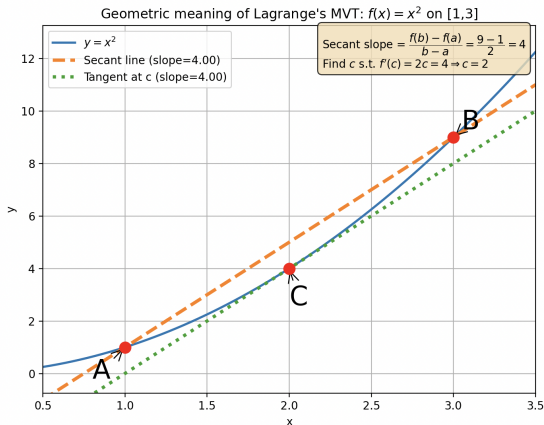
那么在 (a, b) 内至少有一点 $\xi (a < \xi < b)$, 使得等式

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$

成立.

- 定义函数 $\varphi(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$, $\varphi(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上满足罗尔定理条件, 应用罗尔定理证得结论.

- 拉格朗日中值定理的几何意义：区间 (a,b) 内至少有一点的导数，与通过区间端点 $(a,f(a))$ 和 $(b,f(b))$ 的直线的斜率相同。



若函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内可导, 设有增量 $\Delta x > 0$ (或 $\Delta x < 0$), 使得 $[x_0, x_0 + \Delta x]$ (或 $[x_0 + \Delta x, x_0]$) $\subset U(x_0)$, 则由拉格朗日中值定理, 存在 $\theta \in (0, 1)$ 使得

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0 + \theta \Delta x) \cdot \Delta x \quad (\text{有限增量公式})$$

即

$$\Delta y = f'(x_0 + \theta \Delta x) \cdot \Delta x$$

若函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内可导, 设有增量 $\Delta x > 0$ (或 $\Delta x < 0$), 使得 $[x_0, x_0 + \Delta x]$ (或 $[x_0 + \Delta x, x_0]$) $\subset U(x_0)$, 则由拉格朗日中值定理, 存在 $\theta \in (0, 1)$ 使得

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0 + \theta \Delta x) \cdot \Delta x \quad (\text{有限增量公式})$$

即

$$\Delta y = f'(x_0 + \theta \Delta x) \cdot \Delta x$$

注意区别

$$\Delta y \approx dy = f'(x_0) \cdot \Delta x \quad (\Delta y \text{ 的近似值})$$

- 拉格朗日中值定理给出函数增量的精确表示式.

定理

如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续, I 内 (即不包括区间端点) 可导且导数恒为零, 那么 $f(x)$ 在区间 I 上是一个常数.

例

证明当 $x > 0$ 时, $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$.

例

证明当 $x > 0$ 时, $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$.

证明.

定义函数 $f(t) = \ln(1+t)$, 给定 $x > 0$, $f(t)$ 在 $[0, x]$ 上连续, 在 $(0, x)$ 上可导.

例

证明当 $x > 0$ 时, $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$.

证明.

定义函数 $f(t) = \ln(1+t)$, 给定 $x > 0$, $f(t)$ 在 $[0, x]$ 上连续, 在 $(0, x)$ 上可导.
由拉格朗日中值定理知, $\exists \xi \in (0, x)$, 使得

$$f(x) - f(0) = f'(\xi)(x - 0),$$

即

$$\ln(1+x) = \frac{1}{1+\xi}x \quad (0 < \xi < x)$$

例

证明当 $x > 0$ 时, $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$.

证明.

定义函数 $f(t) = \ln(1+t)$, 给定 $x > 0$, $f(t)$ 在 $[0, x]$ 上连续, 在 $(0, x)$ 上可导.
由拉格朗日中值定理知, $\exists \xi \in (0, x)$, 使得

$$f(x) - f(0) = f'(\xi)(x - 0),$$

即

$$\ln(1+x) = \frac{1}{1+\xi}x \quad (0 < \xi < x)$$

故

$$\ln(1+x) = \frac{1}{1+\xi}x < \frac{1}{1+0}x = x \quad \text{且} \quad \ln(1+x) = \frac{1}{1+\xi}x > \frac{1}{1+x}x$$



定理 (柯西中值定理)

如果函数 $f(x)$ 及 $F(x)$ 满足

- (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续;
- (2) 在开区间 (a, b) 内可导;
- (3) 对任一 $x \in (a, b)$, $F'(x) \neq 0$,

那么在 (a, b) 内至少有一点 ξ , 使得等式

$$\frac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$$

成立.

作业

- 教材习题 3-1: 1; 2; 3; 8; 10.