反常积分的审敛法　Γ 函数

高等数学 I-信息、统计外招

Weiwen Wang(王伟文)

暨南大学

2025 年秋季学期

课程网页

定理 1

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续, 且 $f(x) \geq 0$. 若函数

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

在 $[a,+\infty)$ 上有上界, 则反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

证明.

因为 $f(x)\geq 0$, 故 $F(x)=\int_a^x f(x)\mathrm{d}x$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上单调递增,

证明.

因为 $f(x) \geq 0$, 故 $F(x) = \int_a^x f(x)\mathrm{d}x$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上单调递增, 且 $F(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上有上界,

证明.

因为 $f(x) \geq 0$, 故 $F(x) = \int_a^x f(x)\mathrm{d}x$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上单调递增, 且 $F(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上有上界, 则极限

$$\lim_{x \to +\infty} F(x)$$

收敛,

证明.

因为 $f(x) \geq 0$, 故 $F(x) = \int_a^x f(x)\mathrm{d}x$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上单调递增, 且 $F(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上有上界, 则极限

$$\lim_{x \to +\infty} F(x)$$

收敛,

即

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x \to +\infty} F(x)$$

收敛. $\square$

定理 2 (比较审敛定理)

设函数 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续.

(1) 如果 $0 \le f(x) \le g(x)$ $(a \le x < +\infty)$, 并且 $\int_a^{+\infty} g(x)$ 收敛, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 也收敛;

定理 2 (比较审敛定理)

设函数 $f(x)$, $g(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续.

(1) 如果 $0 \le f(x) \le g(x)$ $(a \le x < +\infty)$, 并且 $\int_a^{+\infty} g(x)$ 收敛, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 也收敛;

(2) 如果 $0 \le g(x) \le f(x)$ $(a \le x < +\infty)$, 并且 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 发散, 那么 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

证明.

(1) 因为 $0 \le f(x) \le g(x)$ $(a \le x + \infty)$, 故

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \le \int_a^x g(t)\mathrm{d}t \le \int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x \quad \forall x \in [a, +\infty)$$

证明.

(1) 因为 $0 \le f(x) \le g(x)$ $(a \le x + \infty)$, 故

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \le \int_a^x g(t)\mathrm{d}t \le \int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x \quad \forall x \in [a, +\infty)$$

因为 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 记 $M = \int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$,

证明.

(1) 因为 $0 \le f(x) \le g(x)$ $(a \le x + \infty)$, 故

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \le \int_a^x g(t)\mathrm{d}t \le \int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x \quad \forall x \in [a, +\infty)$$

因为 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 记 $M = \int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$, 故

$$F(x) \le M,$$

即 $F(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上有上界,

证明.

(1) 因为 $0 \le f(x) \le g(x)$ $(a \le x + \infty)$, 故

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \le \int_a^x g(t)\mathrm{d}t \le \int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x \quad \forall x \in [a, +\infty)$$

因为 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 记 $M = \int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$, 故

$$F(x) \le M,$$

即 $F(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上有上界, 由定理 1, $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

证明.

(1) 因为 $0 \le f(x) \le g(x)$ $(a \le x + \infty)$, 故

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \le \int_a^x g(t)\mathrm{d}t \le \int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x \quad \forall x \in [a, +\infty)$$

因为 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 记 $M = \int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$, 故

$$F(x) \le M,$$

即 $F(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上有上界, 由定理 1, $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

(2) 使用反证法和 **(1)** 的结论即可证明. □

定理 3 (比较审敛法 1)

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ $(a>0)$ 上连续, 且 $f(x)\geq 0$.

(1) 如果存在常数 $M>0$ 及 $p>1$, 使得 $f(x)\leq \frac{M}{x^p}$ $(a\leq x<+\infty)$, 那么反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛;

定理 3 (比较审敛法 1)

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ $(a>0)$ 上连续, 且 $f(x)\geq 0$.

(1) 如果存在常数 $M>0$ 及 $p>1$, 使得 $f(x)\leq \frac{M}{x^p}$ $(a\leq x<+\infty)$, 那么反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛;

(2) 如果存在常数 $N>0$, 使得 $f(x)\geq \frac{N}{x}$ $(a\leq x<+\infty)$, 那么反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

定理 3 (比较审敛法 1)

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ $(a>0)$ 上连续, 且 $f(x)\geq 0$.

(1) 如果存在常数 $M>0$ 及 $p>1$, 使得 $f(x)\leq \frac{M}{x^p}$ $(a\leq x<+\infty)$, 那么反常积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛;

(2) 如果存在常数 $N>0$, 使得 $f(x)\geq \frac{N}{x}$ $(a\leq x<+\infty)$, 那么反常积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

- **反常积分 $\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$ $(a>0)$ 当 $p>1$ 时收敛, 当 $p\leq 1$ 时发散; 结合定理 2 即可以得到结论.**

例 1

判断反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^4+1}}$ 的收敛性.

例 1

判断反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^4+1}}$ 的收敛性.

解: 因为

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x^4+1}} \le \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} = \frac{1}{x^{\frac{4}{3}}} \quad \forall x \in [1, +\infty)$$

例 1

判断反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^4+1}}$ 的收敛性.

解: 因为

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x^4+1}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} = \frac{1}{x^{\frac{4}{3}}} \quad \forall x \in [1, +\infty)$$

故由定理 3, 反常积分

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^4+1}}$$

收敛.

定理 4 (极限审敛法 I)

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续, 且 $f(x) \geq 0$.

(1) 如果存在常数 $p>1$, 使得 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p f(x) = c < +\infty$, 那么, 反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛;

(2) 如果 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = d > 0$ (或 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = +\infty$), 那么反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

证明.

(1) 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p f(x) = c < +\infty$, 由极限定义, 存在充分大的 $x_1(x_1 > 0$ 且 $x_1 \geq a)$ 使得当 $x > x_1$ 时,

$$|x^p f(x) - c| < 1.$$

证明.

(1) 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p f(x) = c < +\infty$, 由极限定义, 存在充分大的 $x_1(x_1 > 0$ 且 $x_1 \geq a)$ 使得当 $x > x_1$ 时,

$$|x^p f(x) - c| < 1.$$

从而

$$0 \leq x^p f(x) \leq 1 + c$$

记 $M = 1 + c$, 故在区间 $(x_1, +\infty)$ 上, 有 $0 \leq f(x) \leq \frac{M}{x^p}$.

证明.

(1) 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p f(x)=c<+\infty$, 由极限定义, 存在充分大的 $x_1(x_1>0$ 且 $x_1\geq a)$ 使得当 $x>x_1$ 时,

$$|x^p f(x)-c|<1.$$

从而

$$0\leq x^p f(x)\leq 1+c$$

记 $M=1+c$, 故在区间 $(x_1,+\infty)$ 上, 有 $0\leq f(x)\leq \frac{M}{x^p}$.
由定理 3, $\int_{x_1}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 因为在区间 $[a,+\infty)$ 上 $f(x)$ 连续, 积分 $\int_a^{x_1} f(x)\mathrm{d}x$ 存在.

证明.

(1) 因为 $\lim_{x\to+\infty} x^p f(x) = c < +\infty$, 由极限定义, 存在充分大的 $x_1(x_1 > 0$ 且 $x_1 \geq a)$ 使得当 $x > x_1$ 时,

$$|x^p f(x) - c| < 1.$$

从而

$$0 \leq x^p f(x) \leq 1 + c$$

记 $M = 1 + c$, 故在区间 $(x_1, +\infty)$ 上, 有 $0 \leq f(x) \leq \frac{M}{x^p}$.
由定理 3, $\int_{x_1}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 因为在区间 $[a, +\infty)$ 上 $f(x)$ 连续, 积分 $\int_a^{x_1} f(x)\mathrm{d}x$ 存在.
从而反常积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^{x_1} f(x)\mathrm{d}x + \int_{x_1}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

收敛. □

证明.

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)=d>0$, 由极限定义, 存在充分大的常数 $x_1(x_1>0$ 且 $x_1>a)$, 使得

$$|xf(x)-d|<\frac{d}{2}$$

证明.

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)=d>0$, 由极限定义, 存在充分大的常数 $x_1(x_1>0$ 且 $x_1>a)$, 使得

$$|xf(x)-d|<\frac{d}{2}$$

从而

$$xf(x)>\frac{d}{2}\quad x>x_1>0$$

记 $N=\frac{d}{2}>0$, 在区间 $(x_1,+\infty)$ 上, $f(x)>\frac{N}{x}$.

证明.

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)=d>0$, 由极限定义, 存在充分大的常数 $x_1(x_1>0$ 且 $x_1>a)$, 使得

$$|xf(x)-d|<\frac{d}{2}$$

从而

$$xf(x)>\frac{d}{2} \quad x>x_1>0$$

记 $N=\frac{d}{2}>0$, 在区间 $(x_1,+\infty)$ 上, $f(x)>\frac{N}{x}$.
由定理 3. 反常积分 $\int_{x_1}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

证明.

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)=d>0$, 由极限定义, 存在充分大的常数 $x_1(x_1>0$ 且 $x_1>a)$, 使得

$$|xf(x)-d|<\frac{d}{2}$$

从而

$$xf(x)>\frac{d}{2} \quad x>x_1>0$$

记 $N=\frac{d}{2}>0$, 在区间 $(x_1,+\infty)$ 上, $f(x)>\frac{N}{x}$.
由定理 3. 反常积分 $\int_{x_1}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.
若 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)=+\infty$, 由极限定义, 有相同的结论.

证明.

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)=d>0$，由极限定义，存在充分大的常数 $x_1(x_1>0$ 且 $x_1>a)$，使得

$$|xf(x)-d|<\frac{d}{2}$$

从而

$$xf(x)>\frac{d}{2}\quad x>x_1>0$$

记 $N=\frac{d}{2}>0$，在区间 $(x_1,+\infty)$ 上，$f(x)>\frac{N}{x}$.
由定理 3. 反常积分 $\int_{x_1}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 发散.
若 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)=+\infty$，由极限定义，有相同的结论.
于是反常积分

$$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_a^{x_1}f(x)\mathrm{d}x+\int_{x_1}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$$

发散. □

例 2

判断反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2}}$ 的收敛性.

解:

例 2

判断反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2}}$ 的收敛性.

解：因为

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$$

例 2

判断反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2}}$ 的收敛性.

解: 因为

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 1.$$

由定理 4, 反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2}}$ 收敛.

例 3

判断反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{x^{3/2}}{1+x^2} \mathrm{d}x$ 的收敛性.

例 3

判断反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{x^{3/2}}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 的收敛性.

解:

$$\lim_{x\to+\infty} x\cdot\frac{x^{3/2}}{1+x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\sqrt{x}}{1+x^2} = +\infty$$

由定理 4, 反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{x^{3/2}}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 发散.

例 4

判断反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x} \mathrm{d}x$ 的收敛性.

例 4

判断反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x} \mathrm{d}x$ 的收敛性.

解:

$$\lim_{x \to +\infty} x \frac{\arctan x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}.$$

由定理 4, 反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x} \mathrm{d}x$ 发散.

前面定理所讨论的被积函数 $f(x)$ 均是非负的，下面的定理处理不满足这一约束的情形.

前面定理所讨论的被积函数 $f(x)$ 均是非负的，下面的定理处理不满足这一约束的情形.

定理 5

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续. 如果反常积分

$$\int_a^{+\infty} |f(x)| \mathrm{d}x$$

收敛，那么反常积分

$$\int_a^{+\infty} f(x) \mathrm{d}x$$

也收敛.

证明.

设 $\varphi(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) + |f(x)|\right)$, 则 $\varphi(x) \geq 0$ 且 $\varphi(x) \leq |f(x)|$.

证明.

设 $\varphi(x)=\frac{1}{2}\left(f(x)+|f(x)|\right)$, 则 $\varphi(x)\geq 0$ 且 $\varphi(x)\leq |f(x)|$. 因为 $\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛, 由定理 2,

$$\int_a^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x$$

收敛.

证明.

设 $\varphi(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) + |f(x)|\right)$, 则 $\varphi(x) \geq 0$ 且 $\varphi(x) \leq |f(x)|$. 因为 $\int_a^{+\infty} |f(x)| \mathrm{d}x$ 收敛, 由定理 2,

$$\int_a^{+\infty} \varphi(x) \mathrm{d}x$$

收敛. 又因为 $f(x) = 2\varphi(x) - |f(x)|$,

证明.

设 $\varphi(x)=\frac{1}{2}\left(f(x)+|f(x)|\right)$, 则 $\varphi(x)\geq 0$ 且 $\varphi(x)\leq |f(x)|$. 因为 $\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛, 由定理 2,

$$\int_a^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x$$

收敛. 又因为 $f(x)=2\varphi(x)-|f(x)|$, 故

$$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=2\int_a^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x-\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$$

收敛. □

- 若 $\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛，则称 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$绝对收敛；

- 若 $\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛，则称 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$绝对收敛；
- 定理 5 表明，绝对收敛的反常积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 必定收敛.

例 5

判断反常积分 $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx \mathrm{d}x(a,b$ 都是常数，且 $a>0)$ 的收敛性.

例 5

判断反常积分 $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx\mathrm{d}x (a,b$ 都是常数，且 $a>0)$ 的收敛性.

解:　因为 $0 \le |e^{-ax}\cos bx| \le e^{-ax}$，　且

$$\int_a^{+\infty} e^{-ax}\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\left[e^{-ax}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{a}.$$

例 5

判断反常积分 $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx\mathrm{d}x(a,b$ 都是常数，且 $a>0)$ 的收敛性.

解：　因为 $0\le|e^{-ax}\cos bx|\le e^{-ax}$，　且

$$\int_a^{+\infty} e^{-ax}\mathrm{d}x=-\frac{1}{a}\left[e^{-ax}\right]_0^{+\infty}=\frac{1}{a}.$$

故由定理 2，$\int_a^{+\infty}|e^{-ax}\cos bx|\mathrm{d}x$ 收敛.

例 5

判断反常积分 $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx\mathrm{d}x(a,b$ 都是常数，且 $a>0)$ 的收敛性.

解:　因为 $0 \le |e^{-ax}\cos bx| \le e^{-ax}$，　且

$$\int_a^{+\infty} e^{-ax}\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\left[e^{-ax}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{a}.$$

故由定理 2, $\int_a^{+\infty} |e^{-ax}\cos bx|\mathrm{d}x$ 收敛. 由定理 5, 反常积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx\mathrm{d}x$$

收敛.

随堂练习

判断反常积分 $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\frac{\sin x}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x$($a$ 是常数，且 $a>0$) 的收敛性.

随堂练习

判断反常积分 $\int_0^{+\infty} e^{-ax} \frac{\sin x}{\sqrt{x^2+1}} \mathrm{d}x$($a$ 是常数，且 $a>0$) 的收敛性.

[Hint]: $0 \leq \left| e^{-ax} \frac{\sin x}{\sqrt{x^2+1}} \right| \leq \left| e^{-ax} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right| \leq e^{-ax}$

考虑瑕积分

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^q}$$

- 当 $0<q<1$ 时收敛;
- 当 $q \geq 1$ 时发散.

定理 6 (比较审敛法 2)

设函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b]$ 上连续, 且 $f(x) \geq 0$, $x=a$ 为 $f(x)$ 的瑕点.

定理 6 (比较审敛法 2)

设函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b]$ 上连续, 且 $f(x)\geq 0$, $x=a$ 为 $f(x)$ 的瑕点.

- 如果存在常数 $M>0$ 及 $q<1$, 使得

$$f(x)\leq \frac{M}{(x-a)^q}\quad (a<x\leq b)$$

那么反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛;

定理 6 (比较审敛法 2)

设函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b]$ 上连续, 且 $f(x)\geq 0$, $x=a$ 为 $f(x)$ 的瑕点.

- 如果存在常数 $M>0$ 及 $q<1$, 使得

$$f(x)\leq \frac{M}{(x-a)^q} \quad (a<x\leq b)$$

  那么反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛;

- 如果存在常数 $N>0$, 使得

$$f(x)\geq \frac{N}{x-a} \quad (a<x\leq b)$$

  那么反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

定理 7 (极限审敛法 2)

设函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b]$ 上连续, 且 $f(x)\geq 0$, $x=a$ 为 $f(x)$ 的瑕点.

定理 7 (极限审敛法 2)

设函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b]$ 上连续, 且 $f(x)\geq 0$, $x=a$ 为 $f(x)$ 的瑕点.

- 如果存在常数 $0<q<1$, 使得

$$\lim_{x\to a^+}(x-a)^q f(x)$$

存在, 那么反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛;

定理 7 (极限审敛法 2)

设函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b]$ 上连续, 且 $f(x)\geq 0$, $x=a$ 为 $f(x)$ 的瑕点.

- 如果存在常数 $0<q<1$, 使得

$$\lim_{x\to a^+}(x-a)^q f(x)$$

  存在, 那么反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛;

- 如果

$$\lim_{x\to a^+}(x-a)f(x)=d>0 \quad (\text{或} \lim_{x\to a^+}(x-a)f(x)=+\infty),$$

  那么反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

例 6

判断反常积分 $\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$ 的收敛性.

例 6

判断反常积分 $\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$ 的收敛性.

解: $x=1$ 为被积函数的瑕点.

例 6

判断反常积分 $\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$ 的收敛性.

解: $x=1$ 为被积函数的瑕点. 因为

$$\lim_{x\to 1^+}(x-1)\frac{1}{\ln x}=\lim_{x\to 1^+}x=1>0.$$

例 6

判断反常积分 $\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$ 的收敛性.

解: $x=1$ 为被积函数的瑕点. 因为

$$\lim_{x\to 1^+}(x-1)\frac{1}{\ln x} = \lim_{x\to 1^+} x = 1 > 0.$$

由极限审敛法 2, 反常积分 $\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$ 发散.

例 7

判定椭圆积分

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \quad (k^2<1)$$

的收敛性

例 7

判定椭圆积分

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \quad (k^2<1)$$

的收敛性

解: $x=1$ 为所求积分的瑕点. 因为

$$\lim_{x\to 1^-}(1-x)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}=\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{\sqrt{(1+x)(1-k^2x^2)}}=\frac{1}{\sqrt{2(1-k^2)}}$$

由极限审敛法 2, 所列反常积分收敛.

随堂练习

判断下列反常积分的收敛性

- $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{(\ln x)^2}$
- $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x(1-x)}}$

随堂练习

判断下列反常积分的收敛性

- $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{(\ln x)^2}$ **[Hint]:** $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x-1}{(\ln x)^2} = +\infty$
- $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x(1-x)}}$ **[Hint]:** $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{3}} \frac{1}{\sqrt[3]{x(1-x)}} = 1 \quad \lim\limits_{x\to 1^-} (1-x)^{\frac{1}{3}} \frac{1}{\sqrt[3]{x(1-x)}} = 1$

定理 8

设函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b]$ 上连续, $x=a$ 为 $f(x)$ 的瑕点. 如果反常积分

$$\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$$

收敛, 那么反常积分

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

也收敛.

例 8

判定反常积分 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \sin\frac{1}{x} \mathrm{d}x$ 的收敛性.

例 8

判定反常积分 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \sin \frac{1}{x} \mathrm{d}x$ 的收敛性.

解:　因为 $0 \le \left| \frac{1}{\sqrt{x}} \sin \frac{1}{x} \right| \le \frac{1}{\sqrt{x}}$,

例 8

判定反常积分 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \sin \frac{1}{x} \mathrm{d}x$ 的收敛性.

解: 因为 $0 \le \left| \frac{1}{\sqrt{x}} \sin \frac{1}{x} \right| \le \frac{1}{\sqrt{x}}$, 且反常积分 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$ 收敛.

例 8

判定反常积分 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \sin \frac{1}{x} \mathrm{d}x$ 的收敛性.

解:　因为 $0 \leq \left| \frac{1}{\sqrt{x}} \sin \frac{1}{x} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$, 且反常积分 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$ 收敛.
由比较审敛法 2, 反常积分

$$\int_0^1 \left| \frac{1}{\sqrt{x}} \sin \frac{1}{x} \right| \mathrm{d}x$$

收敛.

例 8

判定反常积分 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \sin \frac{1}{x} \mathrm{d}x$ 的收敛性.

解: 因为 $0 \le \left| \frac{1}{\sqrt{x}} \sin \frac{1}{x} \right| \le \frac{1}{\sqrt{x}}$, 且反常积分 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$ 收敛.
由比较审敛法 2, 反常积分

$$\int_0^1 \left| \frac{1}{\sqrt{x}} \sin \frac{1}{x} \right| \mathrm{d}x$$

收敛. 于是反常积分

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \sin \frac{1}{x} \mathrm{d}x$$

收敛.

Γ 函数

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{s-1}\mathrm{d}x \quad (s>0)$$

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{s-1}\mathrm{d}x \quad (s>0)$$

- 当 $s=1$ 时

$$\Gamma(1)=\int_0^{+\infty} e^{-x}\mathrm{d}x=-\left[e^{-x}\right]_0^{+\infty}=1$$

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{s-1}\mathrm{d}x \quad (s>0)$$

- **当 $0<s<1$ 时, $x=0$ 是被积函数的瑕点**

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{s-1}\mathrm{d}x \overset{?}{=} \int_0^{1} e^{-x}x^{s-1}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty} e^{-x}x^{s-1}\mathrm{d}x$$

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{s-1}\mathrm{d}x \quad (s>0)$$

- **当 $0<s<1$ 时，$x=0$ 是被积函数的瑕点**

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{s-1}\mathrm{d}x \overset{?}{=} \int_0^{1} e^{-x}x^{s-1}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty} e^{-x}x^{s-1}\mathrm{d}x$$

(1) **因为 $0<e^{-x}x^{s-1}=\frac{s-1}{e^x}<\frac{1}{x^{1-s}}, \forall x\in(0,1]$，且 $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^{1-s}}$ 收敛，故由比较审敛法 2，$\int_0^1 e^{-x}x^{s-1}\mathrm{d}x$ 收敛.**

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{s-1}\mathrm{d}x \quad (s>0)$$

- **当 $0<s<1$ 时，$x=0$ 是被积函数的瑕点**

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{s-1}\mathrm{d}x \overset{?}{=} \int_0^{1} e^{-x}x^{s-1}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty} e^{-x}x^{s-1}\mathrm{d}x$$

(1) **因为 $0<e^{-x}x^{s-1}=\frac{s-1}{e^x}<\frac{1}{x^{1-s}}, \forall x\in(0,1]$，且 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^{1-s}}$ 收敛，故由比较审敛法 2，$\int_0^1 e^{-x}x^{s-1}\mathrm{d}x$ 收敛.**

(2) **因为 $0<e^{-x}x^{s-1}=e^{-x}\frac{1}{x^{1-s}}<e^{-x}, \forall x\in(1,+\infty)$，且 $\int_1^{+\infty} e^{-x}\mathrm{d}x=\frac{1}{e}$ 收敛，故由比较审敛法原理 (定理 2)，$\int_1^{+\infty} e^{-x}x^{s-1}\mathrm{d}x$ 收敛.**

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} \mathrm{d}x \quad (s > 0)$$

- **当 $0 < s < 1$ 时，$x = 0$ 是被积函数的瑕点**

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} \mathrm{d}x \stackrel{?}{=} \int_0^1 e^{-x} x^{s-1} \mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} \mathrm{d}x$$

(1) **因为 $0 < e^{-x} x^{s-1} = \frac{s-1}{e^x} < \frac{1}{x^{1-s}}, \forall x \in (0,1]$，且 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^{1-s}}$ 收敛，故由比较审敛法 2，$\int_0^1 e^{-x} x^{s-1} \mathrm{d}x$ 收敛.**

(2) **因为 $0 < e^{-x} x^{s-1} = e^{-x} \frac{1}{x^{1-s}} < e^{-x}, \forall x \in (1, +\infty)$，且 $\int_1^{+\infty} e^{-x} \mathrm{d}x = \frac{1}{e}$ 收敛，故由比较审敛法原理 (定理 2)，$\int_1^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} \mathrm{d}x$ 收敛.**

因此，当 $0 < s < 1$ 时，$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} \mathrm{d}x$ 收敛.

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{s-1}\mathrm{d}x \quad (s>0)$$

- 当 $s>1$ 时,

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{s-1}\mathrm{d}x \overset{?}{=} \int_0^{1} e^{-x}x^{s-1}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty} e^{-x}x^{s-1}\mathrm{d}x$$

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{s-1}\mathrm{d}x \quad (s>0)$$

- 当 $s>1$ 时,

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{s-1}\mathrm{d}x \overset{?}{=} \int_0^{1}e^{-x}x^{s-1}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}e^{-x}x^{s-1}\mathrm{d}x$$

(1) $\int_0^1 e^{-x}x^{s-1}\mathrm{d}x$ 是定积分，故收敛.

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{s-1}\mathrm{d}x \quad (s>0)$$

- 当 $s>1$ 时,

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{s-1}\mathrm{d}x \overset{?}{=} \int_0^{1} e^{-x}x^{s-1}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty} e^{-x}x^{s-1}\mathrm{d}x$$

(1) $\int_0^1 e^{-x}x^{s-1}\mathrm{d}x$ 是定积分，故收敛.

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{-x}x^{s-1}=0$，故由极限审敛法 1(定理 4)，$\int_1^{+\infty} e^{-x}x^{s-1}\mathrm{d}x$ 收敛.

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{s-1}\mathrm{d}x \quad (s>0)$$

- 当 $s>1$ 时,

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{s-1}\mathrm{d}x \overset{?}{=} \int_0^{1} e^{-x}x^{s-1}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty} e^{-x}x^{s-1}\mathrm{d}x$$

(1) $\int_0^1 e^{-x}x^{s-1}\mathrm{d}x$ 是定积分, 故收敛.

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{-x}x^{s-1}=0$, 故由极限审敛法 **1(定理 4)**, $\int_1^{+\infty} e^{-x}x^{s-1}\mathrm{d}x$ 收敛.

因此, 当 $s>1$ 时, $\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{s-1}\mathrm{d}x$ 收敛.

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{s-1}\mathrm{d}x \quad (s>0) \quad \text{总有意义.}$$

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{s-1}\mathrm{d}x \quad (s>0) \quad \text{总有意义.}$$

性质 1 $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s) \quad (s>0)$，**特别地**，$\Gamma(n+1)=n! \quad \forall n\in\mathbb{N}_+$.

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{s-1}\mathrm{d}x\quad(s>0)\quad\text{总有意义.}$$

性质 1 $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)\quad(s>0)$，特别地，$\Gamma(n+1)=n!\quad\forall n\in\mathbb{N}_+$.

$$\Gamma(s+1)=\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{s+1-1}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{s}\mathrm{d}x$$

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{s-1}\mathrm{d}x \quad (s>0) \quad \text{总有意义.}$$

性质 1 $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s) \quad (s>0)$，特别地，$\Gamma(n+1)=n! \quad \forall n\in\mathbb{N}_+$.

$$\begin{aligned}\Gamma(s+1)=\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{s+1-1}\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{s}\mathrm{d}x\\ &= -\int_0^{+\infty} x^{s}\mathrm{d}e^{-x}\end{aligned}$$

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{s-1}\mathrm{d}x \quad (s>0) \quad \text{总有意义.}$$

性质 1 $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s) \quad (s>0)$，特别地，$\Gamma(n+1)=n! \quad \forall n\in\mathbb{N}_+$.

$$\begin{aligned}\Gamma(s+1)=\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{s+1-1}\mathrm{d}x&=\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{s}\mathrm{d}x\\&=-\int_0^{+\infty} x^{s}\mathrm{d}e^{-x}\\&=-\left[e^{-x}x^{s}\right]_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty} e^{-x}\mathrm{d}x^{s}\end{aligned}$$

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{s-1}\mathrm{d}x \quad (s>0) \quad \text{总有意义}.$$

性质 1 $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s) \quad (s>0)$，特别地，$\Gamma(n+1)=n! \quad \forall n\in\mathbb{N}_+$.

$$\begin{aligned}\Gamma(s+1)=\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{s+1-1}\mathrm{d}x&=\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{s}\mathrm{d}x\\&=-\int_0^{+\infty}x^s\mathrm{d}e^{-x}\\&=-\left[e^{-x}x^s\right]_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-x}\mathrm{d}x^s\\&=\int_0^{+\infty}se^{-x}x^{s-1}\mathrm{d}x=s\Gamma(s).\end{aligned}$$

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{s-1}\mathrm{d}x \quad (s>0)$$

性质 2 当 $s\to 0^+$, $\Gamma(s)\to +\infty$

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{s-1}\mathrm{d}x \quad (s>0)$$

性质 2 当 $s\to 0^+$，$\Gamma(s)\to +\infty$

性质 3 $\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\frac{\pi}{\sin \pi s}$ $(0<s<1)$，特别地 $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$.

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{s-1}\mathrm{d}x \quad (s>0)$$

性质 2 当 $s\to 0^+$，$\Gamma(s)\to+\infty$

性质 3 $\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\frac{\pi}{\sin\pi s}$ $(0<s<1)$，特别地 $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$.

性质 4 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}x^t\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1+t}{2}\right) \quad (t>-1)$，特别地，取 $t=0$，

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

作业

- 教材习题 5-5: 1(1)(2)(3)(8), 5(1)(2).