定积分的换元法和分部积分法

高等数学 I-信息、统计外招

Weiwen Wang(王伟文)

暨南大学

2025 年秋季学期

课程网页

定理 1

假设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 函数 $x=\varphi(t)$ 满足条件:

(1) $\varphi(\alpha)=a,\ \varphi(\beta)=b$;

(2) $\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$(或 $[\beta,\alpha]$) 上具有连续导数, 且其值域 $R_\varphi=[a,b]$, 则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t \qquad \text{(换元公式)}$$

证明.

由假设可知, $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 连续, $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上连续. 故 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的原函数及 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上的原函数均存在.

证明.

由假设可知, $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 连续, $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上连续. 故 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的原函数及 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上的原函数均存在.

记 $f(x)$ 的原函数为 $F(x)$, 由牛顿-莱布尼兹公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

下面证明 $\Phi(t) = F[\varphi(t)]$ 是 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 的一个原函数.

证明.

由假设可知, $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 连续, $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上连续. 故 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的原函数及 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上的原函数均存在.

记 $f(x)$ 的原函数为 $F(x)$, 由牛顿-莱布尼兹公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

下面证明 $\Phi(t) = F[\varphi(t)]$ 是 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 的一个原函数.

由链式法则

$$\frac{\mathrm{d}\Phi(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}F[\varphi(t)]}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\varphi} \cdot \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = f[\varphi(t)]\varphi'(t)$$

$\square$

续.

由牛顿-莱布尼兹公式

$$\int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)]$$

续.

由牛顿-莱布尼兹公式

$$\int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)]$$

又因为 $\varphi(\beta) = b$, $\varphi(\alpha) = a$, 故

$$\begin{aligned}\int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t &= F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] \\ &= F(b) - F(a) \\ &= \int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

□

定理 1

假设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，函数 $x=\varphi(t)$ 满足条件：

(1) $\varphi(\alpha)=a$，$\varphi(\beta)=b$；

(2) $\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$(或 $[\beta,\alpha]$) 上具有连续导数，且其值域 $R_\varphi=[a,b]$，则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t \qquad \text{(换元公式)}$$

- 用 $x=\varphi(t)$ 作变量替换时，积分的上下限也要做出相应的改变；
- 计算出原函数后，不需要再把 t 换回 x.

例 1

计算 $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x \quad (a>0)$

例 1

计算 $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\mathrm{d}x \quad (a > 0)$

解: 令 $x = a\sin t \quad (0 \leq t \leq \frac{\pi}{2})$, 则 $\mathrm{d}x = a\cos t\mathrm{d}t$.

例 1

计算 $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\mathrm{d}x \quad (a > 0)$

解: 令 $x = a\sin t \quad (0 \le t \le \frac{\pi}{2})$, 则 $\mathrm{d}x = a\cos t\mathrm{d}t$.

当 $t = 0$ 时, $x = 0$; 当 $t = \frac{\pi}{2}$ 时, $x = a$.

例 1

计算 $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x \quad (a>0)$

解: 令 $x=a\sin t \quad (0\le t\le \frac{\pi}{2})$, 则 $\mathrm{d}x=a\cos t\mathrm{d}t$.

当 $t=0$ 时, $x=0$; 当 $t=\frac{\pi}{2}$ 时, $x=a$.

于是

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos^2 t\mathrm{d}t$$

例 1

计算 $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x \quad (a>0)$

解: 令 $x=a\sin t \quad (0\le t\le \frac{\pi}{2})$, 则 $\mathrm{d}x=a\cos t\mathrm{d}t$.

当 $t=0$ 时, $x=0$; 当 $t=\frac{\pi}{2}$ 时, $x=a$.

于是

$$\begin{aligned}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos^2 t\mathrm{d}t \\ &= a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2t+1}{2}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

例 1

计算 $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x \quad (a>0)$

解: 令 $x=a\sin t \quad (0\le t\le \frac{\pi}{2})$, 则 $\mathrm{d}x=a\cos t\mathrm{d}t$.

当 $t=0$ 时, $x=0$; 当 $t=\frac{\pi}{2}$ 时, $x=a$.

于是

$$\begin{aligned}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos^2 t\mathrm{d}t \\ &= a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2t+1}{2}\mathrm{d}t \\ &= \frac{a^2}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 2t+t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi a^2}{4}\end{aligned}$$

例 2

计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin x \mathrm{d}x$

例 2

计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin x \mathrm{d}x$

解: 令 $t = \cos x$, $\mathrm{d}t = -\sin x \mathrm{d}x$.

例 2

计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin x \mathrm{d}x$

解: 令 $t = \cos x$, $\mathrm{d}t = -\sin x \mathrm{d}x$.

当 $x = 0$ 时, $t = 1$; 当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时, $x = 0$.

于是

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin x \mathrm{d}x = \int_1^0 -t^5 \mathrm{d}t$$

例 2

计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin x \mathrm{d}x$

解: 令 $t = \cos x$, $\mathrm{d}t = -\sin x \mathrm{d}x$.

当 $x = 0$ 时, $t = 1$; 当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时, $x = 0$.

于是

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin x \mathrm{d}x &= \int_1^0 -t^5 \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 t^5 \mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{1}{6}t^6\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

例 3

计算 $\int_0^\pi \sqrt{\sin^3 x - \sin^5 x} \mathrm{d}x$

例 3

计算 $\int_0^\pi \sqrt{\sin^3 x - \sin^5 x}\mathrm{d}x$

解:

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sqrt{\sin^3 x - \sin^5 x}\mathrm{d}x &= \int_0^\pi \sqrt{\sin^3 x(1-\sin^2 x)}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\pi \sin^{\frac{3}{2}} x|\cos x|\mathrm{d}x\end{aligned}$$

例 3

计算 $\int_0^\pi \sqrt{\sin^3 x - \sin^5 x}\mathrm{d}x$

解:

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sqrt{\sin^3 x - \sin^5 x}\mathrm{d}x &= \int_0^\pi \sqrt{\sin^3 x(1-\sin^2 x)}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\pi \sin^{\frac{3}{2}} x|\cos x|\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{3}{2}} x\cos x\mathrm{d}x - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^{\frac{3}{2}} x\cos x\mathrm{d}x\end{aligned}$$

例 3

计算 $\int_0^\pi \sqrt{\sin^3 x - \sin^5 x}\mathrm{d}x$

解:

$$
\begin{aligned}
\int_0^\pi \sqrt{\sin^3 x - \sin^5 x}\mathrm{d}x &= \int_0^\pi \sqrt{\sin^3 x(1-\sin^2 x)}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\pi \sin^{\frac{3}{2}} x |\cos x| \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{3}{2}} x \cos x \mathrm{d}x - \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \sin^{\frac{3}{2}} x \cos x \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{3}{2}} x \mathrm{d}\sin x - \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \sin^{\frac{3}{2}} x \mathrm{d}\sin x
\end{aligned}
$$

例 3

计算 $\int_0^\pi \sqrt{\sin^3 x - \sin^5 x}\mathrm{d}x$

解:

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \sqrt{\sin^3 x - \sin^5 x}\mathrm{d}x &= \int_0^\pi \sqrt{\sin^3 x(1-\sin^2 x)}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\pi \sin^{\frac{3}{2}} x|\cos x|\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{3}{2}} x\cos x\mathrm{d}x - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^{\frac{3}{2}} x\cos x\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{3}{2}} x\mathrm{d}\sin x - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^{\frac{3}{2}} x\mathrm{d}\sin x \\
&= \left[\frac{2}{5}\sin^{\frac{5}{2}} x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\frac{2}{5}\sin^{\frac{5}{2}} x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \left(\frac{2}{5}-0\right)-\left(0-\frac{2}{5}\right) = \frac{4}{5}
\end{aligned}$$

例 4

计算 $\int_0^4 \frac{x+2}{\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x$

例 4

计算 $\int_0^4 \frac{x+2}{\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x$

解: 令 $t=\sqrt{2x+1}$, $x=\frac{t^2-1}{2}$, $\mathrm{d}x=t\mathrm{d}t$.

例 4

计算 $\int_0^4 \frac{x+2}{\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x$

解: 令 $t=\sqrt{2x+1}$, $x=\frac{t^2-1}{2}$, $\mathrm{d}x=t\mathrm{d}t$.

当 $x=0$ 时, $t=1$; 当 $x=4$ 时, $t=3$.

例 4

计算 $\int_0^4 \frac{x+2}{\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x$

解: 令 $t=\sqrt{2x+1}$, $x=\frac{t^2-1}{2}$, $\mathrm{d}x=t\mathrm{d}t$.

当 $x=0$ 时, $t=1$; 当 $x=4$ 时, $t=3$.

于是

$$\int_0^4 \frac{x+2}{\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x=\int_1^3 \frac{t^2+3}{2t}t\mathrm{d}t$$

例 4

计算 $\int_0^4 \frac{x+2}{\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x$

解: 令 $t=\sqrt{2x+1}$, $x=\frac{t^2-1}{2}$, $\mathrm{d}x=t\mathrm{d}t$.

当 $x=0$ 时, $t=1$; 当 $x=4$ 时, $t=3$.

于是

$$\begin{aligned}\int_0^4 \frac{x+2}{\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x &= \int_1^3 \frac{t^2+3}{2t}t\mathrm{d}t \\ &= \int_1^3 \left(\frac{t^2}{2}+\frac{3}{2}\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{t^3}{3}+3t\right]_1^3 = \frac{1}{2}\left(18-\frac{10}{3}\right) = \frac{22}{3}\end{aligned}$$

例 5

证明:

(1) 若 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续且为偶函数, 则

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x.$$

(2) 若 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续且为奇函数, 则

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

证明.

(1) 令 $t=-x$, 则 $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$. 当 $x=-a$ 时, $t=a$; 当 $x=0$ 时, $t=0$.

证明.

(1) 令 $t=-x$, 则 $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$. 当 $x=-a$ 时, $t=a$; 当 $x=0$ 时, $t=0$. 于是

$$\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x=\int_{a}^{0}-f(-t)\mathrm{d}t$$

证明.

(1) 令 $t=-x$, 则 $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$. 当 $x=-a$ 时, $t=a$; 当 $x=0$ 时, $t=0$. 于是

$$\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x = \int_{a}^{0} -f(-t)\mathrm{d}t = -\int_{a}^{0} f(t)\mathrm{d}t = \int_{0}^{a} f(t)\mathrm{d}t = \int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$$

证明.

(1) 令 $t=-x$, 则 $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$. 当 $x=-a$ 时, $t=a$; 当 $x=0$ 时, $t=0$. 于是

$$\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x=\int_{a}^{0}-f(-t)\mathrm{d}t=-\int_{a}^{0} f(t)\mathrm{d}t=\int_{0}^{a} f(t)\mathrm{d}t=\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$$

故

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$$

证明.

(1) 令 $t=-x$, 则 $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$. 当 $x=-a$ 时, $t=a$; 当 $x=0$ 时, $t=0$. 于是

$$\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x=\int_{a}^{0} -f(-t)\mathrm{d}t=-\int_{a}^{0} f(t)\mathrm{d}t=\int_{0}^{a} f(t)\mathrm{d}t=\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$$

故

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x&=\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x\\&=\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x\\&=2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

□

续.

(2) 令 $t=-x$, 则 $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$. 当 $x=-a$ 时, $t=a$; 当 $x=0$ 时, $t=0$.

续.

(2) 令 $t=-x$, 则 $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$. 当 $x=-a$ 时, $t=a$; 当 $x=0$ 时, $t=0$. 因为 $f(x)$ 是奇函数, 故 $f(-t)=-f(t)$.

续.

(2) 令 $t=-x$, 则 $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$. 当 $x=-a$ 时, $t=a$; 当 $x=0$ 时, $t=0$.

因为 $f(x)$ 是奇函数, 故 $f(-t)=-f(t)$.

于是

$$\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x = \int_{a}^{0} -f(-t)\mathrm{d}t$$

续.

(2) 令 $t=-x$, 则 $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$. 当 $x=-a$ 时, $t=a$; 当 $x=0$ 时, $t=0$.

因为 $f(x)$ 是奇函数, 故 $f(-t)=-f(t)$.

于是

$$\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x=\int_{a}^{0} -f(-t)\mathrm{d}t=\int_{a}^{0} f(t)\mathrm{d}t=-\int_{0}^{a} f(t)\mathrm{d}t=-\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$$

续.

(2) 令 $t=-x$, 则 $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$. 当 $x=-a$ 时, $t=a$; 当 $x=0$ 时, $t=0$.

因为 $f(x)$ 是奇函数, 故 $f(-t)=-f(t)$.

于是

$$\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x=\int_{a}^{0}-f(-t)\mathrm{d}t=\int_{a}^{0} f(t)\mathrm{d}t=-\int_{0}^{a} f(t)\mathrm{d}t=-\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$$

故

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x&=\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x\\&=-\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x\\&=0.\end{aligned}$$

$\square$

例 6

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 证明:

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x$;

(2) $\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x$, 由此计算

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x.$$

证明.

(1) 设 $x = \frac{\pi}{2} - t$, $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$. 当 $x = 0$ 时, $t = \frac{\pi}{2}$, 当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时, $t = 0$.

证明.

(1) 设 $x = \frac{\pi}{2} - t$, $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$. 当 $x = 0$ 时, $t = \frac{\pi}{2}$, 当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时, $t = 0$.
利用三角函数公式 $\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos t$.

证明.

(1) 设 $x=\frac{\pi}{2}-t$, $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$. 当 $x=0$ 时, $t=\frac{\pi}{2}$, 当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时, $t=0$.
利用三角函数公式 $\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\cos t$.
于是

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{2}}^0 -f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right)\mathrm{d}t$$

证明.

(1) 设 $x=\frac{\pi}{2}-t$, $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$. 当 $x=0$ 时, $t=\frac{\pi}{2}$, 当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时, $t=0$.

利用三角函数公式 $\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\cos t$.

于是

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 -f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right)\mathrm{d}t \\
&= -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(\cos t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

□

续.

(2) 令 $x=\pi-t$, $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$. 当 $x=0$ 时, $t=\pi$, 当 $x=\pi$ 时, $t=0$.

续.

(2) 令 $x = \pi - t$, $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$. 当 $x = 0$ 时, $t = \pi$, 当 $x = \pi$ 时, $t = 0$.

利用三角函数公式 $\sin(\pi - t) = \sin t$.

续.

(2) 令 $x=\pi-t$, $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$. 当 $x=0$ 时, $t=\pi$, 当 $x=\pi$ 时, $t=0$.

利用三角函数公式 $\sin(\pi-t)=\sin t$.

于是

$$\int_0^\pi xf(\sin x)\mathrm{d}x=\int_\pi^0 -(\pi-t)f(\sin(\pi-t))\mathrm{d}t$$

续.

(2) 令 $x=\pi-t$, $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$. 当 $x=0$ 时, $t=\pi$, 当 $x=\pi$ 时, $t=0$.

利用三角函数公式 $\sin(\pi-t)=\sin t$.

于是

$$\begin{aligned}\int_0^\pi xf(\sin x)\mathrm{d}x &= \int_\pi^0 -(\pi-t)f(\sin(\pi-t))\mathrm{d}t \\ &= -\int_\pi^0 (\pi-t)f(\sin t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\pi (\pi-t)f(\sin t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\pi \pi f(\sin t)\mathrm{d}t - \int_0^\pi tf(\sin t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

续.

(2) 令 $x = \pi - t$, $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$. 当 $x = 0$ 时, $t = \pi$, 当 $x = \pi$ 时, $t = 0$.

利用三角函数公式 $\sin(\pi - t) = \sin t$.

于是

$$
\begin{aligned}
\int_0^\pi x f(\sin x)\mathrm{d}x &= \int_\pi^0 -(\pi - t) f(\sin(\pi - t))\mathrm{d}t \\
&= -\int_\pi^0 (\pi - t) f(\sin t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\pi (\pi - t) f(\sin t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\pi \pi f(\sin t)\mathrm{d}t - \int_0^\pi t f(\sin t)\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

即

$$
\int_0^\pi x f(\sin x)\mathrm{d}x = \int_0^\pi \pi f(\sin x)\mathrm{d}x - \int_0^\pi x f(\sin x)\mathrm{d}x
$$

续.

解得
$$\int_0^{\pi} x f(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x.$$

因此
$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

续.

解得

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x.$$

因此

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x &= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x\\ &= -\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{1}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}\cos x\\ &= -\frac{\pi}{2}\left[\arctan(\cos x)\right]_0^{\pi}\\ &= -\frac{\pi}{2}(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi^2}{4}.\end{aligned}$$

□

例 7

设 $f(x)$ 是连续的周期函数, 周期为 T, 证明

$$\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\mathrm{d}x$$

证明.

定义函数 $\Phi(a)=\int_a^{a+T}f(x)\mathrm{d}x$,

证明.

定义函数 $\Phi(a)=\int_a^{a+T}f(x)\mathrm{d}x$, 则

$$\Phi'(a)=\left(\int_a^{a+T}f(x)\mathrm{d}x\right)'=f(a+T)-f(a)=0.$$

故 $\Phi(a)=C$, 其中 C 为一常数.

证明.

定义函数 $\Phi(a)=\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x$, 则

$$\Phi'(a)=\left(\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x\right)'=f(a+T)-f(a)=0.$$

故 $\Phi(a)=C$, 其中 C 为一常数.

因此

$$\Phi(a)=\Phi(0)=\int_0^T f(x)\mathrm{d}x,$$

证明.

定义函数 $\Phi(a)=\int_a^{a+T}f(x)\mathrm{d}x$, 则

$$\Phi'(a)=\left(\int_a^{a+T}f(x)\mathrm{d}x\right)'=f(a+T)-f(a)=0.$$

故 $\Phi(a)=C$, 其中 C 为一常数.

因此

$$\Phi(a)=\Phi(0)=\int_0^T f(x)\mathrm{d}x,$$

即

$$\int_a^{a+T}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^T f(x)\mathrm{d}x.$$

$\square$

例 9

设函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+\cos x}, & -\pi<x<0\\ xe^{-x^2}, & x\geq 0\end{cases}$$

计算 $\int_1^4 f(x-2)\mathrm{d}x$.

解: 令 $t=x-2$, $\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$. 当 $x=1$ 时, $t=-1$; 当 $x=4$ 时, $t=2$.

于是

$$\int_1^4 f(x-2)\mathrm{d}x=\int_{-1}^2 f(t)\mathrm{d}t$$

解: 令 $t=x-2$, $\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$. 当 $x=1$ 时, $t=-1$; 当 $x=4$ 时, $t=2$.

于是

$$\begin{aligned}\int_1^4 f(x-2)\mathrm{d}x &= \int_{-1}^2 f(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_{-1}^0 f(t)\mathrm{d}t+\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

解:　令 $t=x-2$, $\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$. 当 $x=1$ 时, $t=-1$; 当 $x=4$ 时, $t=2$.

于是

$$\begin{aligned}\int_1^4 f(x-2)\mathrm{d}x &= \int_{-1}^2 f(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_{-1}^0 f(t)\mathrm{d}t + \int_0^2 f(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_{-1}^0 \frac{1}{1+\cos t}\mathrm{d}t + \int_0^2 te^{-t^2}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

解:　令 $t=x-2$, $\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$. 当 $x=1$ 时, $t=-1$; 当 $x=4$ 时, $t=2$.

于是

$$\begin{aligned}\int_1^4 f(x-2)\mathrm{d}x &= \int_{-1}^2 f(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_{-1}^0 f(t)\mathrm{d}t + \int_0^2 f(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_{-1}^0 \frac{1}{1+\cos t}\mathrm{d}t + \int_0^2 te^{-t^2}\mathrm{d}t \\ &= \int_{-1}^0 \frac{1}{2\cos^2\frac{t}{2}}\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_0^2 e^{-t^2}\mathrm{d}(-t^2)\end{aligned}$$

解:　令 $t=x-2$, $\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$. 当 $x=1$ 时, $t=-1$; 当 $x=4$ 时, $t=2$.

于是

$$\begin{aligned}
\int_1^4 f(x-2)\mathrm{d}x &= \int_{-1}^2 f(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_{-1}^0 f(t)\mathrm{d}t + \int_0^2 f(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_{-1}^0 \frac{1}{1+\cos t}\mathrm{d}t + \int_0^2 te^{-t^2}\mathrm{d}t \\
&= \int_{-1}^0 \frac{1}{2\cos^2\frac{t}{2}}\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_0^2 e^{-t^2}\mathrm{d}(-t^2) \\
&= \left[\tan\frac{t}{2}\right]_{-1}^0 - \frac{1}{2}\left[e^{-t^2}\right]_0^2 \\
&= \tan\frac{1}{2} - \frac{1}{2e^4} + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

由不定积分的分部积分法

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x &= \int_a^b f(x)\mathrm{d}g(x)\\ &= [f(x)\cdot g(x)]_a^b - \int_a^b g(x)\mathrm{d}f(x)\\ &= [f(x)\cdot g(x)]_a^b - \int_a^b g(x)\cdot f'(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

例 10

计算 $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x \mathrm{d}x$

例 10

计算 $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x \mathrm{d}x$

解:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x \mathrm{d}x = [x \arcsin x]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} x \mathrm{d} \arcsin x$$

例 10

计算 $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x \mathrm{d}x$

解:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x \mathrm{d}x &= [x \arcsin x]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} x \mathrm{d} \arcsin x \\ &= [x \arcsin x]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x\end{aligned}$$

例 10

计算 $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x \mathrm{d}x$

解:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x \mathrm{d}x &= [x \arcsin x]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} x \mathrm{d} \arcsin x \\ &= [x \arcsin x]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x \\ &= [x \arcsin x]_0^{\frac{1}{2}} + [(1-x^2)^{\frac{1}{2}}]_0^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

例 10

计算 $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x \mathrm{d}x$

解:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x \mathrm{d}x &= [x \arcsin x]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} x \mathrm{d} \arcsin x \\
&= [x \arcsin x]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x \\
&= [x \arcsin x]_0^{\frac{1}{2}} + [(1-x^2)^{\frac{1}{2}}]_0^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \\
&= \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1
\end{aligned}$$

例 11

计算 $\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

例 11

计算 $\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

解: 令 $t=\sqrt{x}$, $\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$. 当 $x=0$ 时, $t=0$; 当 $x=1$ 时, $t=1$.

于是

$$\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\int_0^1 e^t 2t\mathrm{d}t=2\int_0^1 t\mathrm{d}e^t$$

例 11

计算 $\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

解: 令 $t=\sqrt{x}$, $\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$. 当 $x=0$ 时, $t=0$; 当 $x=1$ 时, $t=1$.

于是

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\int_0^1 e^t 2t\mathrm{d}t=2\int_0^1 t\mathrm{d}e^t\\ &=2\left[[te^t]_0^1-\int_0^1 e^t\mathrm{d}t\right]\\ &=2\left([te^t]_0^1-[e^t]_0^1\right)\\ &=2\end{aligned}$$

作业

- 教材习题 5-3: 1(3)(5)(6)(12)(15)(24)(25), 2, 7(1)(2)(5)(6)(7).