

微积分基本公式

高等数学 I-信息、统计外招

Weiwen Wang(王伟文)

暨南大学

2025 年秋季学期



课程网页

如果积分上限制 x 在区间 $[a, b]$ 上任意变动, 那么对于每一个取定的 x 值, 定积分有一个对应的值, 所以它在 $[a, b]$ 上定义了一个函数, 记作 $\Phi(x)$:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt \quad (a \leq x \leq b)$$

定理 1

如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 那么积分上限的函数

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$$

在 $[a, b]$ 上可导, 并且它的导数

$$\Phi'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x).$$

证明.

若 $x \in (a, b)$, 且对于增量 Δx , $x + \Delta x \in (a, b)$, 积分上限函数的增量为

$$\begin{aligned}\Delta\Phi &= \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) \\ &= \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\end{aligned}$$

证明.

若 $x \in (a, b)$, 且对于增量 Δx , $x + \Delta x \in (a, b)$, 积分上限函数的增量为

$$\begin{aligned}\Delta\Phi &= \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) \\&= \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \\&= \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \\&= \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt\end{aligned}$$

证明.

若 $x \in (a, b)$, 且对于增量 Δx , $x + \Delta x \in (a, b)$, 积分上限函数的增量为

$$\begin{aligned}\Delta\Phi &= \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) \\&= \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \\&= \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \\&= \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt\end{aligned}$$

由积分中值定理, 存在 $\xi \in [x, x + \Delta x]$, 使得 $\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = \Phi(\xi)\Delta x$. 故

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = f(\xi).$$

续.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\xi)$$

续.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\xi)$$

注意到 $\xi \in [x, x + \Delta x]$, 故当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $\xi \rightarrow x$, 又因为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续. 因此

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\xi) = f(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \xi) = f(x)$$

续.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\xi)$$

注意到 $\xi \in [x, x + \Delta x]$, 故当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $\xi \rightarrow x$, 又因为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续. 因此

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\xi) = f(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \xi) = f(x)$$

综上, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta x} = f(x)$, 即

$$\Phi'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x).$$

续.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\xi)$$

注意到 $\xi \in [x, x + \Delta x]$, 故当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $\xi \rightarrow x$, 又因为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续. 因此

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\xi) = f(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \xi) = f(x)$$

综上, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta x} = f(x)$, 即

$$\Phi'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x).$$

同理, 若 $x = a$, 取 $\Delta x > 0$, 可证 $\Phi'_+(a) = f(a)$; 若 $x = b$, 取 $\Delta x < 0$, 可证 $\Phi'_-(b) = f(b)$. □

定理 2

如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 那么函数

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$$

是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的一个原函数.

- 连续函数的原函数一定存在.
- 原函数可以表示为一个积分上限函数.

定理 3 (微积分基本定理)

如果函数 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的一个原函数, 那么

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad (\text{牛顿-莱布尼兹公式})$$

证明.

由定理 2, $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ 是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的一个原函数, 且 $F(x)$ 也是一个原函数. 故

$$F(x) - \Phi(x) = C \quad (a \leq x \leq b)$$

其中 C 为常数.

证明.

由定理 2, $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ 是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的一个原函数, 且 $F(x)$ 也是一个原函数. 故

$$F(x) - \Phi(x) = C \quad (a \leq x \leq b)$$

其中 C 为常数.

因为 $\Phi(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$, 所以由上式 $F(a) = C$.

证明.

由定理 2, $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ 是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的一个原函数, 且 $F(x)$ 也是一个原函数. 故

$$F(x) - \Phi(x) = C \quad (a \leq x \leq b)$$

其中 C 为常数.

因为 $\Phi(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$, 所以由上式 $F(a) = C$.

同样由上式

$$F(b) - \Phi(b) = C = F(a)$$

证明.

由定理 2, $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ 是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的一个原函数, 且 $F(x)$ 也是一个原函数. 故

$$F(x) - \Phi(x) = C \quad (a \leq x \leq b)$$

其中 C 为常数.

因为 $\Phi(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$, 所以由上式 $F(a) = C$.

同样由上式

$$F(b) - \Phi(b) = C = F(a)$$

移项得到

$$\Phi(b) = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$



定理 4 (微积分基本定理)

如果函数 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的一个原函数, 那么

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad (\text{牛顿-莱布尼兹公式})$$

- 若 $a > b$, 牛顿-莱布尼兹公式同样成立.
- $F(b) - F(a)$ 可记为 $[F(x)]_a^b$, 故

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$$

例 1

求 $\int_0^1 x^2 dx$

例 1

求 $\int_0^1 x^2 dx$

解: $\frac{x^3}{3}$ 是 x^2 的一个原函数, 故

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$$

例 3

求 $\int_{-3}^{-1} \frac{dx}{x}$

例 3

求 $\int_{-3}^{-1} \frac{dx}{x}$

解: $\frac{1}{x}$ 的一个原函数是 $\ln|x|$, 故

$$\int_{-3}^{-1} \frac{dx}{x} = [\ln|x|]_{-3}^{-1} = \ln|-1| - \ln|-3| = -\ln 3$$

例 4

计算曲线 $y = e^x$ 在区间 $[0, 1]$ 上与 x 轴所围成的平面图形的面积.

例 4

计算曲线 $y = e^x$ 在区间 $[0, 1]$ 上与 x 轴所围成的平面图形的面积.

解: 所求面积为

$$\int_0^1 e^x dx$$

e^x 的一个原函数是 e^x , 故

$$\int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1 = e - 1.$$

例 6

证明积分中值定理: 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则在开区间内至少存在一点 ξ 使得

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) \quad (a < \xi < b).$$

例 6

证明积分中值定理: 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则在开区间内至少存在一点 ξ 使得

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) \quad (a < \xi < b).$$

证明.

设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 在 $F(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可导, 由拉格朗日中值定理知, 存在 $\xi \in (a, b)$ 使得

$$F(b) - F(a) = F'(\xi)(b-a).$$

由假设 $F'(\xi) = f(\xi)$, 故

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F'(\xi)(b-a) = f(\xi)(b-a) \quad (a < \xi < b).$$

例 7

设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续且 $f(x) > 0$, 证明函数

$$F(x) = \frac{\int_0^x tf(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}$$

在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

证明.

由定理 1

$$\frac{d}{dx} \int_0^x tf(t)dt = xf(x), \quad \frac{d}{dx} \int_0^x f(t)dt = f(x)$$

故

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{xf(x) \int_0^x f(t)dt - f(x) \int_0^x tf(t)dt}{\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2} \\ &= \frac{f(x) \int_0^x (x-t)f(t)dt}{\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2} \end{aligned}$$

又因为对于 $x > 0$, $f(t) > 0, \forall t \in (0, x)$, 故 $(x-t)f(t) > 0$, 由积分中值定理 $\int_0^x (x-t)f(t)dt > 0$.

因此 $F'(x) > 0$, $F(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增.



设 $f(u)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 若 $\varphi(x) = u \in [a, b]$ 且函数 φ 可导, 则

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \int_a^{\varphi(x)} f(t) dt &= \frac{d\Phi(\varphi(x))}{dx} = \frac{d\Phi(u)}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= \frac{d}{du} \int_a^u f(t) dt \cdot \frac{du}{dx} \\ &= f[\varphi(x)] \varphi'(x)\end{aligned}$$

设 $f(u)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 若 $\varphi(x) = u \in [a, b]$ 且函数 φ 可导, 则

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \int_a^{\varphi(x)} f(t) dt &= \frac{d\Phi(\varphi(x))}{dx} = \frac{d\Phi(u)}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= \frac{d}{du} \int_a^u f(t) dt \cdot \frac{du}{dx} \\ &= f[\varphi(x)]\varphi'(x)\end{aligned}$$

类似地,

$$\frac{d}{dx} \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t) dt = f[\varphi(x)]\varphi'(x) - f[\psi(x)]\psi'(x)$$

例 8

$$\text{求 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_{\cos x}^1 e^{-t^2} dt}{x^2}$$

解: 此极限为 $\frac{0}{0}$ 型, 因为

$$\int_{\cos x}^1 e^{-t^2} dt = - \int_1^{\cos x} e^{-t^2} dt$$

且

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(- \int_1^{\cos x} e^{-t^2} dt \right) &= - \frac{d}{dx} \int_1^{\cos x} e^{-t^2} dt \\ &= e^{-\cos^2 x} \cdot (\cos x)' \\ &= -(-e^{-\cos^2 x} \sin x) = e^{-\cos^2 x} \sin x \end{aligned}$$

由洛必达法则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_{\cos x}^1 e^{-t^2} dt}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\cos^2 x} \sin x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\cos^2 x}}{2} = \frac{1}{2e}$$

作业

- 教材习题 5-2: 4, 5(1)(2), 8(1)(4)(6)(9), 11(1), 12, 14.