极限存在准则、两个重要极限

高等数学 I-信息、统计外招

Weiwen Wang(王伟文)

暨南大学

2025 年秋季学期

课程网页

定理 (夹逼准则 I)

如果数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 及 $\{z_n\}$ 满足下列条件:

(1) 从某项起, 即 $\exists n_0 \in \mathbb{N}_+$, 当 $n > n_0$ 时, 有

$$y_n \leq x_n \leq z_n;$$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$,

那么数列 $\{x_n\}$ 的极限存在, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} = a$.

例

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$

例

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$

解　因为

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \le \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \le \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

例

求极限 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$

解　因为

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\le\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\le\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

又因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+1/n}}=1\qquad\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+1/n^2}}=1$$

例

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$

解　因为

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\le\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\le\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

又因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+1/n}}=1\quad\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+1/n^2}}=1$$

由夹逼准则 I, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1.$

定理 (夹逼准则 I')

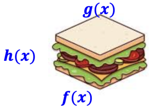
如果

(1) 当 $x \in \mathring{U}(x_0, r)$(或 $|x| > M$ 时),

$$g(x) \le f(x) \le h(x);$$

(2) $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} g(x) = A$, $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} h(x) = A$.

那么 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x)$ 存在, 且等于 A.



两个重要极限之一

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ \varphi(x)\to 0}}\frac{\sin[\varphi(x)]}{\varphi(x)}=1$$

例 2

求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

例 2

求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}$$

例 2

求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\cos x}$$

例 2

求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

解

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\cos x} \\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

定义 (单调数列)

如果数列 $\{x_n\}$ 满足条件

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \cdots,$$

就称数列 $\{x_n\}$ 是**单调增加**的; 如果数列 $\{x_n\}$ 满足条件

$$x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \cdots \geq x_n \geq x_{n+1} \geq \cdots,$$

就称数列 $\{x_n\}$ 是**单调减少**的. 单调增加和单调减少的数列统称为**单调数列**.

定理 (准则 II)

单调有界数列必有极限.

- 有界数列一定收敛?

定理 (准则 II)

单调有界数列必有极限.

- 有界数列一定收敛?
- $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(n\pi)$

两个重要极限之二

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e,\qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e;\qquad \lim_{\substack{x\to\infty\\ \varphi(x)\to\infty}}\left(1+\frac{1}{\varphi(x)}\right)^{\varphi(x)}=e.$$

字母 e 是无理数, $e=2.718\ 281\ 828\ 459\ 045\cdots$

例 4

求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}$

例 4

求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x$

解　令 $t=-x$,

$$\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-t}=\lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{-1}$$

例 4

求 $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}$

解　令 $t=-x$,

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-t} &= \lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{-1}\\ &= \left[\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)\right]^{-1}\\ &= \frac{1}{e}\end{aligned}$$

定理 (准则 II')

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个左邻域内单调且有界, 则 $f(x)$ 在 x_0 的左极限 $f(x_0^-)$ 必定存在.

随堂练习

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{x}$

随堂练习

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=2$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1$

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{x}=e^{\frac{1}{2}}$

作业

- 教材习题 1-6: 1(1)(6); 2(3)(4); 4(2).