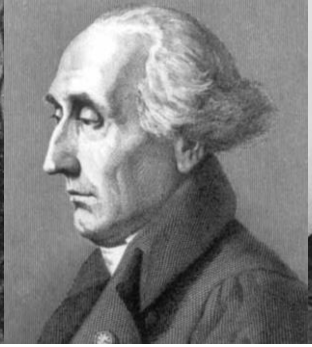


微积分I-中值定理及导数的应用

3学分、经管类外招

数学系王伟文

课程网页二维码

https://wangyuanhao.github.io/calculus_course_webpage/


暨南大學
JINAN UNIVERSITY

第一节 中值定理

罗尔中值定理 若函数$f(x)$满足以下3个条件：

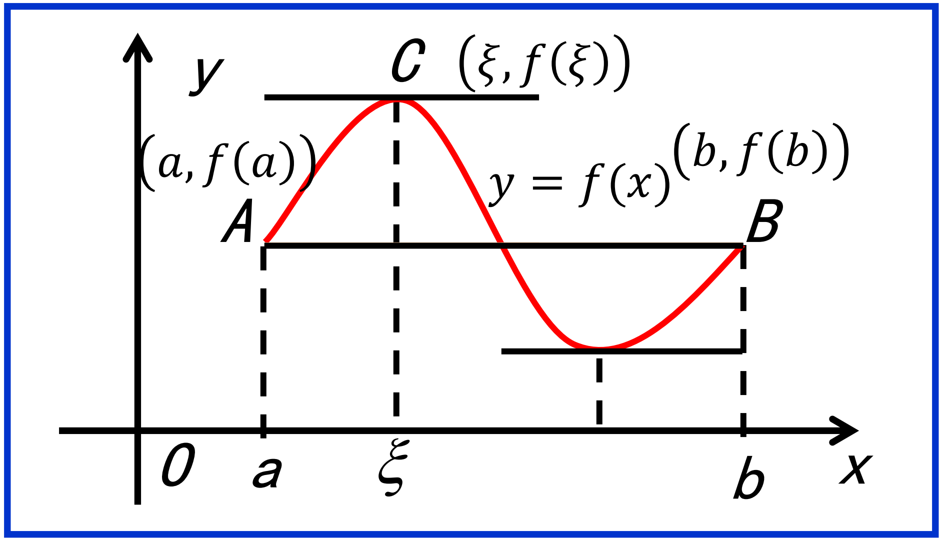
a. 在闭区间$[a,b]$上连续；

b. 在开区间(a,b)上可导；

c. 在区间的两个端点函数值相等，即$f(a)=f(b)$；

则至少存在一点$\xi \in (a,b)$，满足$f'(\xi)=0$

如果连续光滑曲线$y=f(x)$在点A、B处的纵坐标相等，那么在弧$\widehat{AB}$上至少有一点$C(\xi, f(\xi))$，曲线在C点的切线平行于x轴



第一节 中值定理

拉格朗日中值定理 若函数$f(x)$满足以下2个条件：

a. 在闭区间$[a,b]$上连续；

b. 在开区间(a,b)上可导；

则至少存在一点$\xi\in(a,b)$，满足

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

或等价地

$$f(b)=f(a)+f'(\xi)(b-a)$$

- 在上述两个条件的基础上，若在区间的两个端点函数值相等，即$f(a)=f(b)$，则有$f'(\xi)=0$，拉格朗日中值定理即为罗尔中值定理。

第一节 中值定理

拉格朗日中值定理的一个推论 若函数$f(x)$在区间(a,b)内任意一点的导数$f'(x)=0$，则函数$f(x)$在(a,b)内是一个常数

在区间内导数为0的函数，在这个区间上必然是一个常数

随堂练习

- 求下列函数是否满足罗尔定理的三个条件?

  $(1)\ y = x^2, x \in [0,1]$　端点不等, No

  $(2)\ y = \dfrac{1}{\sqrt{(x-1)^2}}, x \in [0,2]$　$x = 1$处不连续, No

  $(3)\ y = x^2 - 5x + 6, x \in [2,3]$　连续、可导、端点相同, Yes

- 求出下列函数中满足拉格朗日中值定理的ξ

  $(1)\ y = f(x) = x^3 - x^2 + 2x, x \in [-1,1]$

$$f'(\xi) = 3\xi^2 - 2\xi + 2 = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = 3$$

$$\xi = 1(\text{舍弃}),\ \xi = -\frac{1}{3}$$

第二节 洛必达法则

洛必达法则是求这类未定式极限的一种重要方法

在函数商的极限中，如果分子分母同是无穷小或同是无穷大，那么极限可能存在，也可能不存在，这种极限称为**未定式**，记为

$$\frac{0}{0} \quad 及 \quad \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{x^2} \qquad \lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x^n}(n>0)$$

第二节 洛必达法则

设函数$f(x)$与$g(x)$满足条件：

（1） $\lim\limits_{x\to P} f(x)=\lim\limits_{x\to P} g(x)=0$ 或 $\lim\limits_{x\to P} f(x)=\lim\limits_{x\to P} g(x)=\infty$

（2） 在$x\to P$的某个邻域内可导，且$g'(x)\neq 0$

（3） $\lim\limits_{x\to P}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$（或$\infty$）

则必有

$$\lim_{x\to P}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to P}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A(\text{或}\infty)$$

- 洛必达法则表明，若满足洛必达法则的使用条件，求极限$\lim\limits_{x\to P}\dfrac{f(x)}{g(x)}$可以等价与求极限$\lim\limits_{x\to P}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

第二节 洛必达法则

课本例1 求$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x-2}$

解：

$$\text{原式}=\lim_{x\to 2}\frac{(x^4-16)'}{(x-2)'}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{4x^3}{1}$$

$$=\lim_{x\to 2}4x^3$$

$$=4\cdot 2^3=32$$

$\lim\limits_{x\to 2}(x^4-16)=\lim\limits_{x\to 2}(x-2)=0$

$f(x)=x^4-16$和$g(x)=x-2$均可导

且$g'(x)=1$在$x=2$的的某个空心邻域内不等于0

故符合洛必达法则的使用条件

第二节 洛必达法则

课本例10 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2}$

解：

原式$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(e^x)'}{(x^2)'}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{2x}$ $\quad\dfrac{\infty}{\infty}$

再次符合洛必达法则的使用条件

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(e^x)'}{(2x)'}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{2}$

$=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$

$f(x)=e^x$ 和$g(x)=x^2$均可导

且$g'(x)=2x$在$x\to+\infty$的过程中不等于0

故符合洛必达法则的使用条件

只要满足洛必达法则的使用条件都可以使用洛必达法则

第二节 洛必达法则

例 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\cos x}{x}$ $\qquad \dfrac{\infty}{\infty}$

解：

$$原式=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+\cos x)'}{(x)'}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\sin x}{1}$$

$$=\lim_{x\to\infty}(1-\sin x)$$

此极限不存在，不符合洛必达法则使用条件

解：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\cos x\right)=1$

第二节 洛必达法则

洛必达法则不是无所不能

- 若不是$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$的未定式，不能使用洛必达法则化简极限

$$\lim_{x\to 1}\frac{6x}{6x-2}$$

- 当$\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}$不是常数A且不为∞时，不能断言$\lim\frac{f(x)}{g(x)}$不存在，只能说明使用洛必达法则失效，需要使用其他的解决方法

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\cos x}{x}$$

随堂练习

- 使用洛必达法则求极限

$$(1)\ \lim_{x\to a}\frac{\cos x-\cos a}{x-a}$$

$$-\sin a$$

$$(2)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{\sin x}$$

$$2$$

$$(3)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^{2}-1}{\ln x}$$

$$2$$

$$(4)\ \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^{3}}$$

$$\frac{1}{6}$$

第三节 使用洛必达法则求其他类型的未定式

$$0 \cdot \infty \qquad \infty - \infty \qquad 0^0 \qquad 1^\infty \qquad \infty^0$$

转化为$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$型的未定式求解

第三节 使用洛必达法则求其他类型的未定式

课本例11 求 $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\cdot(1-\cos\frac{1}{x})$ $(\infty\cdot 0)$

解：

$$原式=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\cos\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} \qquad \frac{0}{0}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(1-\cos\frac{1}{x})'}{(\frac{1}{x^2})'}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = \frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{2}$$

第三节 使用洛必达法则求其他类型的未定式

例 求$\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right]$ $(\infty-\infty)$

解: 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\cdot\ln(1+x)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\cdot x}$$ 等价无穷小替换 $\frac{0}{0}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{x+1}}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2x(x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2(2x+1)}=\frac{1}{2}$$

第三节 使用洛必达法则求其他类型的未定式

例 求 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$ $\qquad (0^0)$

解： $$原式 = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}[\ln\ x^x]}$$

$$\lim_{x\to 0^+}[\ln\ x^x] = \lim_{x\to 0^+} x\ln x \qquad 0\cdot\infty$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \qquad \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)'}{(\frac{1}{x})'} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0$$

$$故原式 = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}[\ln\ x^x]} = e^0 = 1$$

第三节 使用洛必达法则求其他类型的未定式

课本例13 求$\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$ (1^{∞})

解： 原式 $= e^{\lim\limits_{x\to 1}[\ln x^{\frac{1}{1-x}}]}$

$$\lim_{x\to 1}[\ln x^{\frac{1}{1-x}}] = \lim_{x\to 1}\frac{1}{1-x}\ln x$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x} \qquad \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(\ln x)'}{(1-x)'}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{-1} = \lim_{x\to 1}-\frac{1}{x} = -1$$

故原式 $= e^{\lim\limits_{x\to 1}[\ln x^{\frac{1}{1-x}}]} = e^{-1}$

$f(x) = e^{\ln f(x)}$

e^x为连续函数

$\lim f(x) = \lim e^{\ln f(x)}$

$= e^{\lim[\ln f(x)]}$

要求$\lim f(x)$，先求$\lim[\ln f(x)]$

第三节 使用洛必达法则求其他类型的未定式

例 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+e^x)^{\frac{1}{x}}$ ∞^0

解： 原式 $= e^{\lim\limits_{x\to+\infty}[\ln(1+e^x)^{\frac{1}{x}}]}$

$$\lim_{x\to+\infty}[\ln(1+e^x)^{\frac{1}{x}}] = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{x} \qquad \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{[\ln(1+e^x)]'}{x'}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1+e^x} \qquad \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(1+e^x)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x} = 1$$

故原式 $= e^{\lim\limits_{x\to+\infty}[\ln(1+e^x)^{\frac{1}{x}}]} = e^1 = e$

第三节 使用洛必达法则求其他类型的未定式

转化为$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$型的未定式求解

$$0 \cdot \infty \longrightarrow \frac{1}{\infty} \cdot \infty \longrightarrow \frac{\infty}{\infty}$$

$$0 \cdot \infty \longrightarrow 0 / \frac{1}{0} \longrightarrow \frac{0}{0}$$

$$\infty - \infty \longrightarrow \frac{1}{0} - \frac{1}{0} \longrightarrow \frac{0-0}{0}$$

第三节 使用洛必达法则求其他类型的未定式

转化为$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$型的未定式求解

$$\left.\begin{array}{l} 0^0 \\ 1^\infty \\ \infty^0 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{取对数}} \left\{\begin{array}{l} 0\cdot\ln 0 \\ \infty\cdot\ln 1 \\ 0\cdot\ln\infty \end{array}\right. \Rightarrow 0\cdot\infty.$$

随堂练习

- **使用洛必达法则求极限**

(1) $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x$

$\mathbf{0}$

(2) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$

$\mathbf{\frac{1}{2}}$