



微积分I

3学分、经管类外招

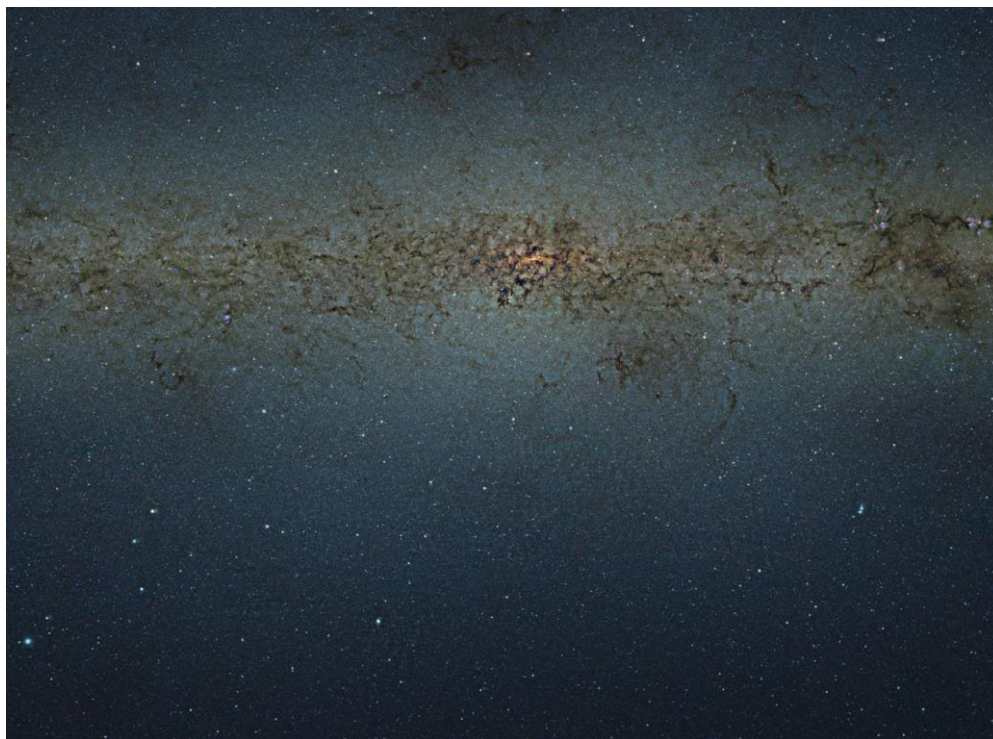
数学系王伟文



课程网页二维码

无限的概念

这张银河系中心部分的惊人景象是由 ESO 位于智利的帕拉纳尔天文台的 VISTA 巡天望远镜拍摄到的。这张巨大的图片大小为 108 200 x 81 500 像素，包含近 90 亿像素。



<https://www.eso.org/public/images/eso1242a/>

吾生也有涯，而知也无涯。以有涯随无涯，殆已！
一尺之锤，日取其半，万世不竭。



To infinity
and beyond...



第一节 数列的极限

(一) 数列

数列 一个定义在正整数集合上的函数 $y_n = f(n)$, 当自变量 n 按正整数 $1, 2, 3, \dots$ 依次增大的顺序取值时, 函数值按相应的顺序排成的一串数:

$$f(1), f(2), f(3), \dots, f(n), \dots$$

称为一个**无穷数列**, 简称**数列**, 其中的每一个数称为数列的一项, $f(n)$ 称为数列的**通项**, 数列可以简记为 $\{f(n)\}$

$$y_n = f(n) = 2^n : \{f(1), f(2), f(3), \dots, f(n), \dots\} = \{2, 4, 8, \dots, 2^n, \dots\}$$

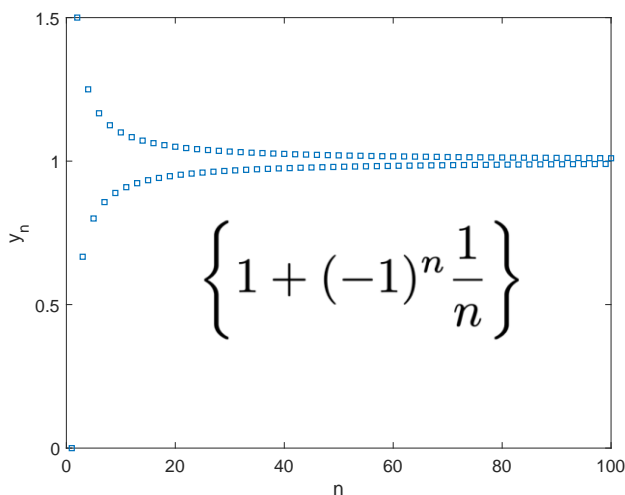
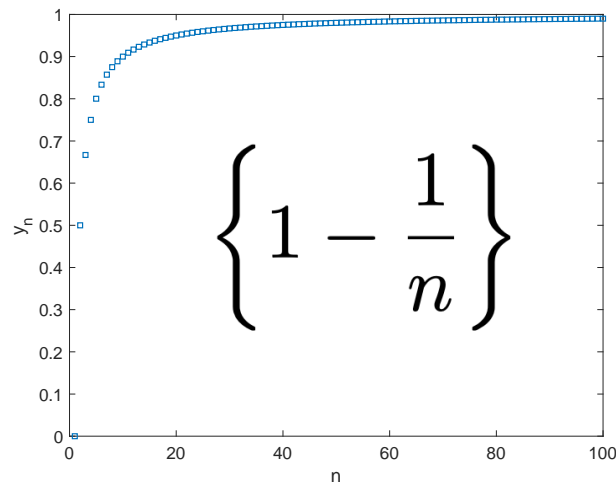
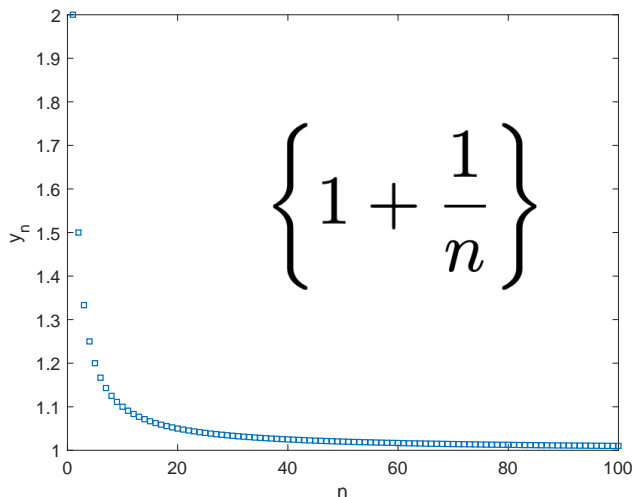
$$y_n = f(n) = 1/n : \{f(1), f(2), f(3), \dots, f(n), \dots\} = \{1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, \dots\}$$

第一节 数列的极限

(二) 数列的极限

这些无限的数列似乎都有一个终点!!!

数列中项随着 n 的变化情况



- 当 n 无限增大时, y_n 是否无限接近于某一确定的数值? 如果是, 如何确定?
- “无限接近”意味着什么? 如何用数学语言刻画它?



第一节 数列的极限

练习 考虑数列通项为 $y_n = 1 + \frac{1}{n}$ 的数列, 求

- $|y_n - 1| < \frac{1}{10}$ 时 n 的取值范围
- $|y_n - 1| < \frac{1}{100}$ 时 n 的取值范围
- $|y_n - 1| < \frac{1}{1000}$ 时 n 的取值范围

正数 ε	数列 下标	正整数 N	$ y_n - 1 = \frac{1}{n} < \varepsilon$
------------------	----------	------------	---

$\frac{1}{10}$	$n > 10$	$ y_n - 1 < \frac{1}{10}$
----------------	----------	----------------------------

$\frac{1}{100}$	$n > 100$	$ y_n - 1 < \frac{1}{100}$
-----------------	-----------	-----------------------------

$\frac{1}{1000}$	$n > 1000$	$ y_n - 1 < \frac{1}{1000}$
------------------	------------	------------------------------

第一节 数列的极限

(二) 数列的极限

考虑通项为 $y_n = 1 + \frac{1}{n}$ 的数列

考察 y_n 与1的距离

$$|y_n - 1| = \frac{1}{n}$$

如果要使得这个距离小于某个正数 $\varepsilon > 0$, **ε 可以是任意大于0的实数!!!**
即

$$|y_n - 1| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

这要求

$$n > \frac{1}{\varepsilon}$$

取 $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$, $\lceil x \rceil$ 表示大于等于 x 的最小整数(向上取整)

$$\{y_1, y_2, y_3, \dots, y_{N-1}, y_N, y_{N+1}, \dots\}$$

$$n < N: |y_n - 1| \geq \varepsilon$$

$$n \geq N: |y_n - 1| < \varepsilon$$

正数 ε	数列下标 N	正整数 N	$ y_n - 1 = \frac{1}{n} < \varepsilon$
$\frac{1}{10}$	$n > 10$		$ y_n - 1 < \frac{1}{10}$
$\frac{1}{100}$	$n > 100$		$ y_n - 1 < \frac{1}{100}$
$\frac{1}{1000}$	$n > 1000$		$ y_n - 1 < \frac{1}{1000}$

对于数列 $\{y_n\} = \{1 + \frac{1}{n}\}$, **任意给定一个正数 $\varepsilon > 0$** , 总能通过求解下面的不等式

$$|y_n - 1| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

找到数列的某一个正整数 $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$, 使得当数列下标 $n > N$ 时, 保证不等式

$$|y_n - 1| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

成立。

第一节 数列的极限

练习 考虑数列通项为 $y_n = 1 + \frac{1}{n}$ 的数列, 求

- $|y_n - 1| < \frac{1}{10}$ 时 n 的取值范围
- $|y_n - 1| < \frac{1}{100}$ 时 n 的取值范围
- $|y_n - 1| < \frac{1}{1000}$ 时 n 的取值范围

可以想象 n 为无穷大时, $|y_n - 1|$ 将无穷小 (> 0)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$$

第一节 数列的极限

(二) 数列的极限

极限 如果对于任意给定的正数 ε , 总存在一个正整数 N , 当 $n > N$ 时,

$$|y_n - A| < \varepsilon$$

恒成立, 则称当 n 趋于无穷大时, 数列 y_n 以常数 A 为极限, 或称 y_n 收敛于常数 A , 记作

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = A \text{ 或 } y_n \rightarrow A (n \rightarrow \infty)$$

- 若数列有极限, 则称该数列是收敛的, 否则称它是发散的
- 上述定义只能用于验证数列的极限, 不能用于求解数列的极限

第一节 数列的极限

(二) 数列的极限

课本例5 利用定义证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n} = 2$

解 对于任意给定的正数 $\varepsilon > 0$, 要使不等式

$$\left| \frac{2n+1}{n} - 2 \right| = \left| \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

成立, 则要则 $n > \frac{1}{\varepsilon}$ 。

因此, 对于任意 $\varepsilon > 0$, 取正整数 $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$, 当 $n > N$ 时,

$$\left| \frac{2n+1}{n} - 2 \right| < \varepsilon$$

恒成立, 故 $y_n = \frac{2n+1}{n}$ 以2为极限

随堂练习

- 请判断是收敛或是发散

(1) $\{0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{6}, \dots, 0, \frac{1}{2n}, \dots\}$ (1) 收敛

(2) $\{1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \dots\}$ (2) 发散

(3) $\{1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \dots\}$ (3) 收敛

第二节 函数的极限

(一) 当 $x \rightarrow \infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限

函数极限 如果对于任意给定的正数 ε , 总存在一个正数 M , 当 $|x| > M$ 时,

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

恒成立, 则称当 x 趋于无穷大时, 函数 $f(x)$ 以常数 A 为极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A (x \rightarrow \infty)$$

极限 如果对于任意给定的正数 ε , 总存在一个正整数 N , 当 $n > N$ 时,

$$|y_n - A| < \varepsilon$$

恒成立, 则称当 n 趋于无穷大时, 数列 y_n 以常数 A 为极限, 或称 y_n 收敛于常数 A , 记作

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = A \text{ 或 } y_n \rightarrow A (n \rightarrow \infty)$$

第二节 函数的极限

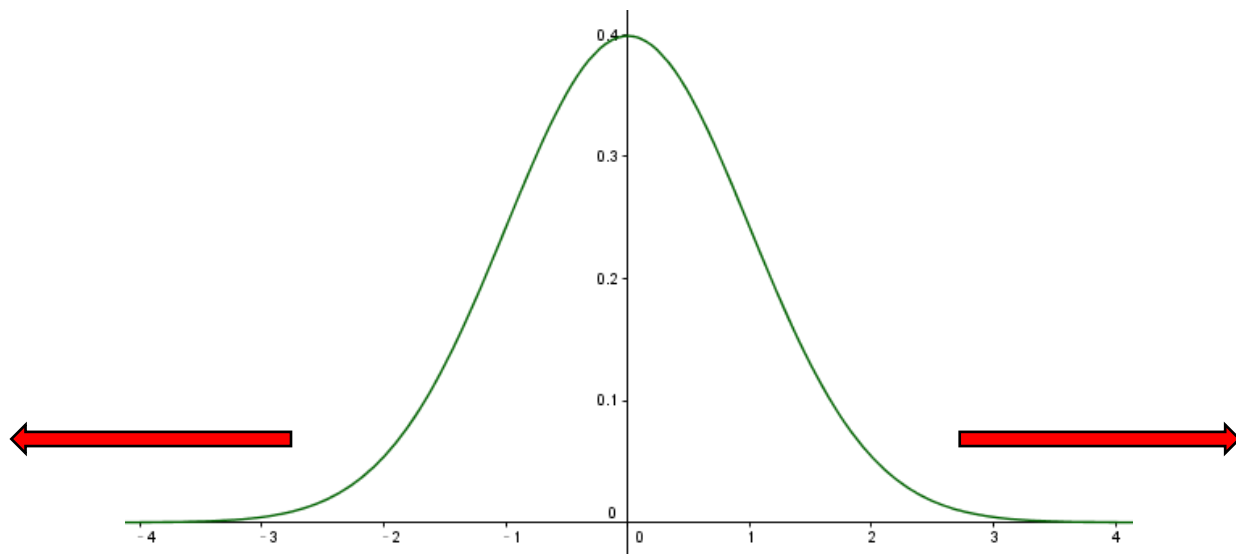
(一) 当 $x \rightarrow \infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限

函数极限 如果对于任意给定的正数 ε , 总存在一个正数 M , 当 $|x| > M$ 时,

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

恒成立, 则称当 x 趋于无穷大时, 函数 $f(x)$ 以常数 A 为极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A (x \rightarrow \infty)$$



第二节 函数的极限

(一) 当 $x \rightarrow \infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限

函数极限 如果对于任意给定的正数 ε , 总存在一个正数 M , 当 $|x| > M$ 时,

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

恒成立, 则称当 x 趋于无穷大时, 函数 $f(x)$ 以常数 A 为极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A (x \rightarrow \infty)$$

- 若 $x > M$ 则记作 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$
- 若 $x < -M$ 则记作 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$

第二节 函数的极限

(一) 当 $x \rightarrow \infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限

课本例1 利用定义证明 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$

解 对于任意给定的正数 $\varepsilon > 0$, 要使不等式

$$\left| \frac{1}{x} - 0 \right| = \left| \frac{1}{x} \right| < \varepsilon$$

成立, 则要则 $|x| > \frac{1}{\varepsilon}$ 。

因此, 对于任意 $\varepsilon > 0$, 取**正数** $M = \frac{1}{\varepsilon}$, 当 $|x| > M$ 时,

$$\left| \frac{1}{x} - 0 \right| < \varepsilon$$

恒成立, 故 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ 。

第二节 函数的极限

(二) 当 $x \rightarrow x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限

考虑函数 $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$ 在 $x = 1$ 附近的值

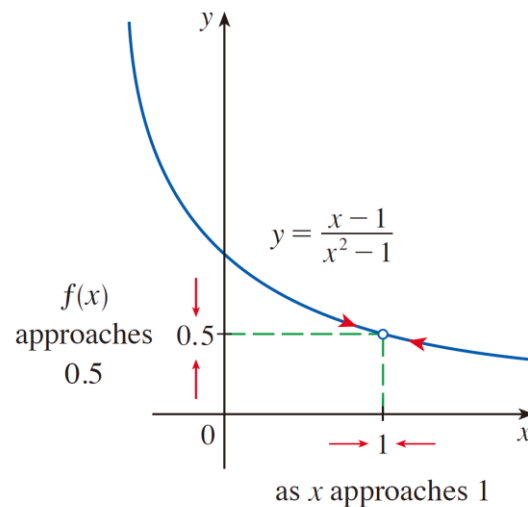
$x < 1$	$f(x)$	$x > 1$	$f(x)$
0.5	0.666667	1.5	0.400000
0.9	0.526316	1.1	0.476190
0.99	0.502513	1.01	0.497512
0.999	0.500250	1.001	0.499750
0.9999	0.500025	1.0001	0.499975

↓
1

↓
0.5

↓
1

↓
0.5



当 x 越接近1时（这并不意味着 $x = 1$ ）， $f(x)$ 越接近0.5

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} = 0.5$$

第二节 函数的极限

(二) 当 $x \rightarrow x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限

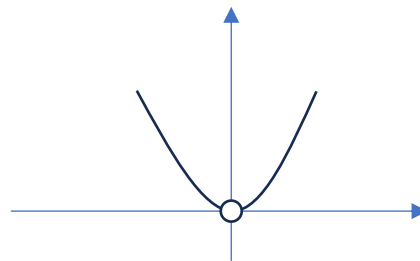
函数极限 如果对于任意给定的正数 ε , 总存在一个正数 δ , 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

恒成立, 则称当 x 趋于 x_0 , 函数 $f(x)$ 以常数 A 为极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0)$$

- 空心邻域 $\dot{U}(x_0, \delta) = \{x | 0 < |x - x_0| < \delta\}$ 一定包含在 $f(x)$ 的定义域中
- 函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 这一点不一定有定义



第二节 函数的极限

(二) 当 $x \rightarrow x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限

课本例5 利用定义证明 $\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 2) = 4$

解 对于任意给定的正数 $\varepsilon > 0$, 要使不等式

$$|(3x - 2) - 4| = |3x - 6| = 3|x - 2| < \varepsilon$$

成立, 则要则 $|x - 2| < \frac{\varepsilon}{3}$ 。

因此, 对于任意 $\varepsilon > 0$, 取正数 $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$, 当 $0 < |x - 2| < \delta$ 时,

$$|(3x - 2) - 4| < \varepsilon$$

恒成立, 故 $\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 2) = 4$ 。

第二节 函数的极限

(三) 左极限与右极限

右极限 如果对于任意给定的正数 ε , 总存在一个正数 δ , 当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时,

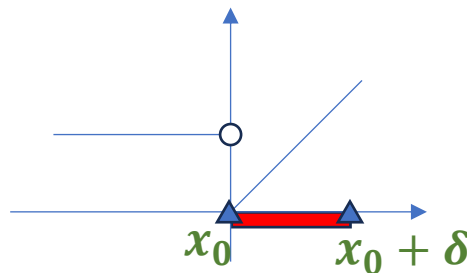
$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

恒成立, 则称当 x 趋于 x_0 , 函数 $f(x)$ 以常数 A 为**右极限**, 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A \text{ 或 } f(x+0) \rightarrow A (x \rightarrow x_0)$$

- 右邻域 $\dot{U}_+(x_0, \delta) = \{x | 0 < x - x_0 < \delta\}$ 一定包含在 $f(x)$ 的定义域中
- 函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 这一点不一定有定义

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$



第二节 函数的极限

(三) 左极限与右极限

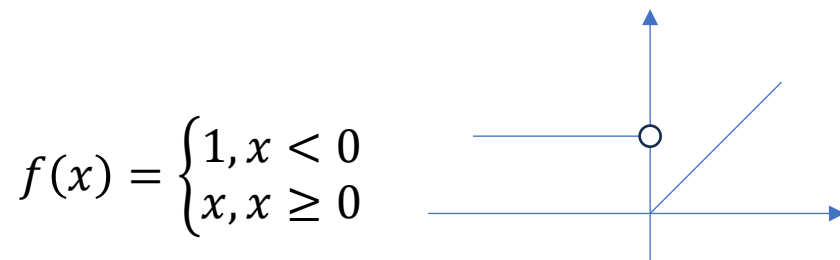
左极限 如果对于任意给定的正数 ε , 总存在一个正数 δ , 当 $-\delta < x - x_0 < 0$ 时,

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

恒成立, 则称当 x 趋于 x_0 , 函数 $f(x)$ 以常数 A 为**左极限**, 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A \text{ 或 } f(x-0) \rightarrow A (x \rightarrow x_0)$$

- 左邻域 $\dot{U}_-(x_0, \delta) = \{x | -\delta < x - x_0 < 0\}$ 一定包含在 $f(x)$ 的定义域中
- 函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 这一点不一定有定义



随堂练习

- 请观察函数大致的图像计算以下极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \ln x = 0$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 + 1 = 1$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = 1$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow 1^+} e^x = e$$

Limitation	Condition	Existence
$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = A$	$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+, \text{ if } n > N$ then $ y_n - A < \varepsilon$	Find $n \in \mathbb{N}_+$, such that $ y_n - A < \varepsilon$ and $N \triangleq n$
$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$	$\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0, \text{ if } x > M$ then $ f(x) - A < \varepsilon$	Find $M > 0$, such that $ f(x) - A < \varepsilon$ when $ x > M$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$	$\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0, \text{ if } x > M$ then $ f(x) - A < \varepsilon$	Find $M > 0$, such that $ f(x) - A < \varepsilon$ when $x > M$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$	$\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0, \text{ if } x < -M$ then $ f(x) - A < \varepsilon$	Find $M > 0$, such that $ f(x) - A < \varepsilon$ when $x < -M$
$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$	$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ if}$ $0 < x - x_0 < \delta$ then $ f(x) - A < \varepsilon$	Find $\delta > 0$, such that $ f(x) - A < \varepsilon$ when $0 < x - x_0 < \delta$
$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$	$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ if}$ $0 < x - x_0 < \delta$ then $ f(x) - A < \varepsilon$	Find $\delta > 0$, such that $ f(x) - A < \varepsilon$ when $0 < x - x_0 < \delta$
$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$	$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ if}$ $-\delta < x - x_0 < 0$ then $ f(x) - A < \varepsilon$	Find $\delta > 0$, such that $ f(x) - A < \varepsilon$ when $-\delta < x - x_0 < 0$

\forall : For every

\exists : There exists

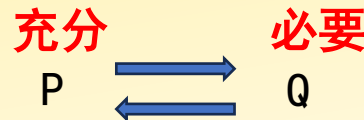
\mathbb{N}_+ : Positive natural numbers

第三节 关于极限的定理

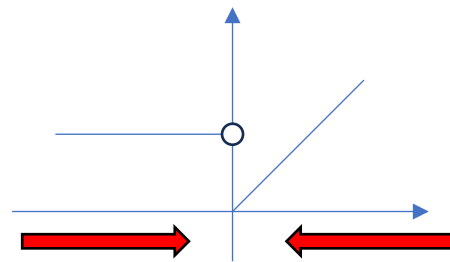
(一) 极限存在判定定理

极限存在判定定理 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 成立的充分必要条件是

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$$



课本例7 设函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$, 判定极限 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 是否存在.



$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$$



$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在

随堂练习

- 请观察以下函数大致的图像，计算 $x \rightarrow 0$ 时函数 $f(x)$ 的左、右极限，并判断 $x \rightarrow 0$ 时函数 $f(x)$ 的极限是否存在

$$(1) \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ e^x, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$(1) \quad \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = 1 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

$$(2) \quad f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ -x, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} -x = 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$(3) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x < 0 \\ e^x, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = 1 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ 不存在}$$

$$(4) \quad f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

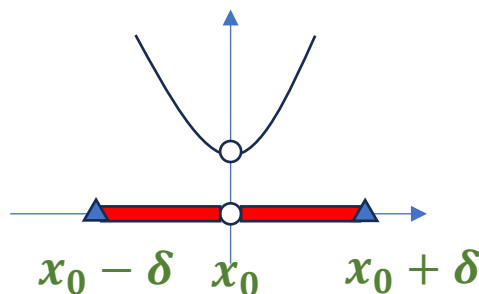
$$(4) \quad \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

第三节 关于极限的定理

(二) 极限局部保号性

极限保号性 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 且 $A > 0$ ($A < 0$), 则总存在一个正数 δ , 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时 $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$)



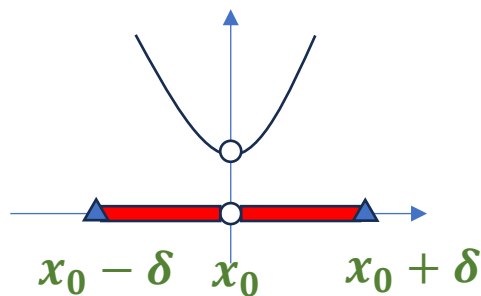
空心邻域的函数值符号总是和极限值的符号一致的!!!

第三节 关于极限的定理

(三) 极限局部保号性

极限保号性 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 且 $f(x) \geq 0$ ($f(x) \leq 0$), 则 $A \geq 0$ ($A \leq 0$)

- $f(x) \geq 0$ 意味着 x_0 的空心邻域上的函数值大于等于0 (非负)



空心邻域的函数值符号总是和极限值的符号一致的!!!

第三节 关于极限的定理

(四) 极限局部有界性

极限局部有界 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则总存在一个正数 δ 和 M , 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时

$$|f(x)| < M$$

$$|f(x) - A| < \varepsilon \Rightarrow |f(x)| < A + \varepsilon \triangleq M$$

$$\delta \triangleq \delta(\varepsilon)$$

在 x_0 处收敛的函数必在 x_0 的空心邻域内有界!!!

随堂练习

- 请判断以下说法是否正确

若数列 $y_n \geq 0$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$, 则 $a \geq 0$.



第四节 无穷大量与无穷小量

(一) 无穷大量

无穷大量 如果 $\lim_{x \rightarrow P} f(x) = \infty (\infty, -\infty, +\infty)$, 则函数 $f(x)$ 为当 $x \rightarrow P$ 时的

无穷大量

- $x \rightarrow P$ 代指某一个取极限过程, 可以是 $x \rightarrow \infty$ 、 $x \rightarrow -\infty$ 、 $x \rightarrow +\infty$ 、 $x \rightarrow x_0^+$ 、 $x \rightarrow x_0^-$ 、 $x \rightarrow x_0$
- 无穷大量是一个变量, 不是一个绝对值很大的数
- 称函数是无穷大量, 必须指明其自变量的变化趋势

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

第四节 无穷大量与无穷小量

(一) 无穷大量

- 无穷或无限大，来自于拉丁文的“infinitas”，即“没有边界”的意思
- 无穷大量“ ∞ ”与莫比乌斯环



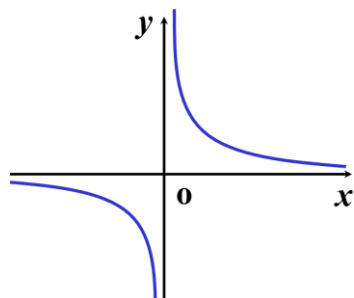
青年向禅师讨教，希望可以让他的女朋友没有缺点，只有优点。禅师微笑着，请青年为他找一张只有正面没有背面的纸。然后青年掏出了一个莫比乌斯环……

第四节 无穷大量与无穷小量

(一) 无穷大量

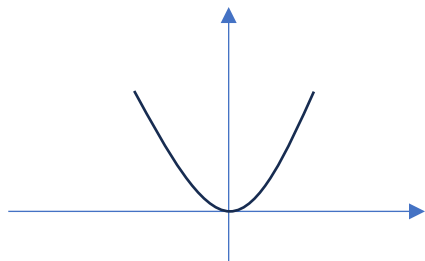
$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$: $\forall M > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x)| \geq M$

• $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$



$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$: $\forall M > 0, \exists A > 0$, 当 $|x| > A$ 时, 有 $|f(x)| \geq M$

• $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty$



第四节 无穷大量与无穷小量

(一) 无穷大量

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty: \forall M > 0, \exists A > 0, \text{ 当 } |x| > A \text{ 时, 有 } |f(x)| \geq M$$

- 无界变量: $\forall M > 0, \exists x, \text{ 有 } |f(x)| \geq M$

无穷大量必定是无界变量, 无界变量不一定是无穷大量

- $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin x \neq \infty$

海涅定理

第四节 无穷大量与无穷小量

(二) 无穷小量

无穷小量 如果 $\lim_{x \rightarrow P} f(x) = 0$, 则函数 $f(x)$ 为当 $x \rightarrow P$ 时的无穷小量

- $x \rightarrow P$ 代指某一个取极限过程, 可以是 $x \rightarrow \infty$ 、 $x \rightarrow -\infty$ 、 $x \rightarrow +\infty$ 、 $x \rightarrow x_0^+$ 、 $x \rightarrow x_0^-$ 、 $x \rightarrow x_0$
- 无穷小量是一个变量, 不是一个数, 但0是唯一可以作为无穷小量的数
- 称函数是无穷小量, 必须指明其自变量的变化趋势

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$$

数列 $\{\frac{(-1)^n}{n}\}$ 是当 $n \rightarrow \infty$ 时的无穷小量

第四节 无穷大量与无穷小量

(二) 无穷小量

无穷小量与有界量的乘积依然是无穷小量

如果 $\lim_{x \rightarrow P} f(x) = 0$ ，且 $g(x)$ 在 $x \rightarrow P$ 时有界，则

$$\lim_{x \rightarrow P} g(x) \cdot f(x) = 0$$

- 无穷小量与常量的乘积依然是无穷小量（常量必然是有界量）

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin \frac{1}{x} = ?$$

随堂练习

- 请判断在函数 $f(x)$ 在 $x \rightarrow P$ 时是无穷大量或是无穷小量，抑或两者均不是

$$(1) f(x) = x \quad (x \rightarrow 0)$$

无穷小量

$$(2) f(x) = \frac{1}{x} \quad (x \rightarrow 0)$$

无穷大量

$$(3) f(x) = e^x \quad (x \rightarrow 0)$$

非无穷小非无穷大

$$(4) f(x) = e^x - 1 \quad (x \rightarrow 0)$$

无穷小量

$$(5) f(x) = \ln x \quad (x \rightarrow 0^+)$$

无穷大量

$$(6) f(x) = e^x \quad (x \rightarrow \infty)$$

无穷大量

$$(7) f(x) = \frac{1}{x} \quad (x \rightarrow \infty)$$

无穷小量

$$(8) f(x) = \sqrt{x} + 0.000001 \quad (x \rightarrow 0^+)$$

非无穷小非无穷大

第四节 无穷大量与无穷小量

(三) 无穷小量与无穷大量的关系

- $\lim_{x \rightarrow P} f(x) = \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow P} \frac{1}{f(x)} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow P} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow P} \frac{1}{f(x)} = \infty$ ($x \rightarrow P$ 时 $\frac{1}{f(x)}$ 合法)

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x \cdot \sin \frac{1}{x}} = \infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0.$$

$$(\text{因为 } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = \infty)$$

第四节 无穷大量与无穷小量

(四) 无穷小量的阶

- $\lim_{x \rightarrow 0} x = \lim_{x \rightarrow 0} 2x = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = 0$ x^2 要比 x 快
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x} = 2$ $2x$ 与 x 差不多
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2} = \infty$ x 比 x^2 慢得多

同一极限过程两个无穷小量的比值反映两者趋于“零”速度快慢的差异!!!

第四节 无穷大量与无穷小量

(四) 无穷小量的阶

设 $\lim_{x \rightarrow P} f(x) = \lim_{x \rightarrow P} g(x) = 0$

- $x \rightarrow P$ 时, $g(x)$ 是 $f(x)$ 的 **高阶无穷小**, 若

$$\lim_{x \rightarrow P} \frac{g(x)}{f(x)} = 0, \text{ 记作 } g(x) = o(f(x))$$

- $x \rightarrow P$ 时, $g(x)$ 是 $f(x)$ 的 **同阶无穷小**, 若

$$\lim_{x \rightarrow P} \frac{g(x)}{f(x)} = c (c \neq 0),$$

若 $c = 1$, 则称为 **等价无穷小**, 记作 $g(x) \sim f(x)$

- $x \rightarrow P$ 时, $g(x)$ 是 $f(x)$ 的 **低阶无穷小**, 若

$$\lim_{x \rightarrow P} \frac{g(x)}{f(x)} = \infty$$

第四节 无穷大量与无穷小量

(四) 无穷小量的阶

- $\lim_{x \rightarrow 0} x = \lim_{x \rightarrow 0} 2x = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = 0$ x^2 要比 x 快 当 $x \rightarrow 0$ 时 x^2 是 x 的高阶无穷小，记作 $x^2 = o(x)$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x} = 2$ $2x$ 与 x 差不多 当 $x \rightarrow 0$ 时 $2x$ 是 x 的同阶无穷小，记作 $2x \sim x$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2} = \infty$ x 比 x^2 慢得多 当 $x \rightarrow 0$ 时 x 是 x^2 的低阶无穷小

随堂练习

- 下列无穷小量在给定的变化过程中与 x 相比是什么阶的无穷小量

(1) $x \cdot \cos x$ ($x \rightarrow 0$) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ (等价无穷小)

(2) $1000x$ ($x \rightarrow 0$) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1000x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 1000 = 1000$ (同阶无穷小)

(3) $\frac{1}{1000}x$ ($x \rightarrow 0$) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1000x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1000} = \frac{1}{1000}$ (同阶无穷小)

(4) $2x^2$ ($x \rightarrow 0$) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0$ (高阶无穷小)

(5) \sqrt{x} ($x \rightarrow 0^+$) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = \infty$ (低阶无穷小)