微积分I

3学分、外招

第三章 导数与微分

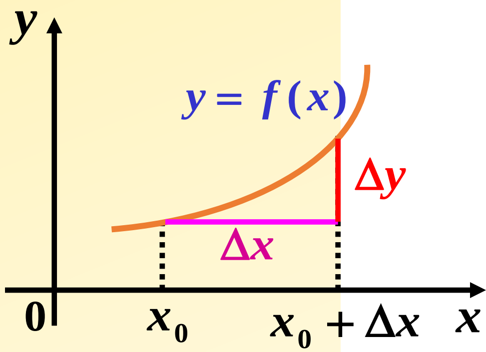
数学系王伟文

第一节 导数的概念

(一) 导数的定义

设函数$f(x)$在点x_0的某一邻域内有定义，当自变量在点x_0处取得**改变量$\Delta x(\neq 0)$**时，函数$f(x)$取得相应的改变量

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$$



如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此**极限为函数$f(x)$在点x_0处的导数。**

记为

$$f'(x_0) \qquad y'\big|_{x=x_0} \qquad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} \qquad \left.\frac{d}{dx}f(x)\right|_{x=x_0}$$

第一节 导数的概念

(三) 由导数定义的等价形式

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

令$x = x_0 + \Delta x$, 当$\Delta x \to 0$时，$x \to x_0$

因此有

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

第一节 导数的概念

(一) 导数的定义

- 如果函数$f(x)$在点x_0处有导数，则称函数$f(x)$在点x_0处可导，否则在点x_0处不可导
- 如果函数$f(x)$在某个区间(a,b)内每一点都可导，则称函数$f(x)$在区间(a,b)内可导
- 若函数$f(x)$在(a,b)内每一点都可导，则对于每一点$x \in (a,b)$，都存在其导数$f'(x)$与之对应，此时$f'(x)$构成定义在区间(a,b)上的导函数

第一节 导数的概念

（二）由导数定义求导步骤

求函数$y=f(x)$在x_0处的导数

（1） 求出对应于自变量改变量Δx的函数改变量

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

(2) 作出自变量改变量与函数改变量的比值

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

(3) 求$\Delta x\to 0$时， $\frac{\Delta y}{\Delta x}$的极限，即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

第一节 导数的概念

(二) 由导数定义求导步骤

课本例3 求函数$y=\frac{1}{x}$在$x=2$处的导数

解： 设自变量相对于$x=2$的改变量为Δx，此时相应的函数改变量Δy为

$$\Delta y=\frac{1}{2+\Delta x}-\frac{1}{2}=\frac{2-(2+\Delta x)}{(2+\Delta x)2}=\frac{-\Delta x}{(2+\Delta x)2}$$

计算函数改变量

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-\Delta x}{(2+\Delta x)2\cdot\Delta x}=-\frac{1}{(2+\Delta x)2}$$

算比值

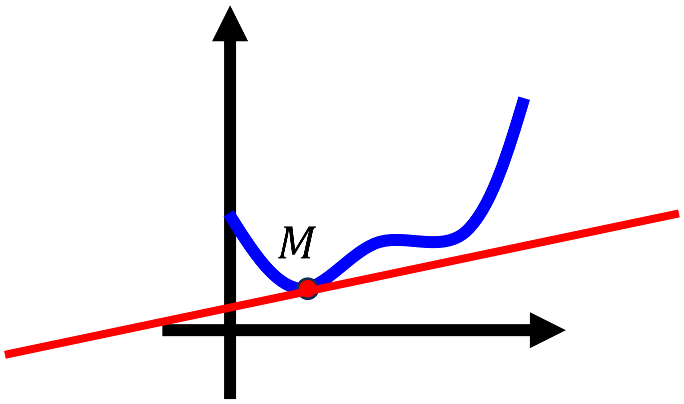
$$y'|_{x=2}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}-\frac{1}{(2+\Delta x)2}$$

$$=\frac{\lim\limits_{\Delta x\to 0}-1}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2+\Delta x)2}=-\frac{1}{4}$$

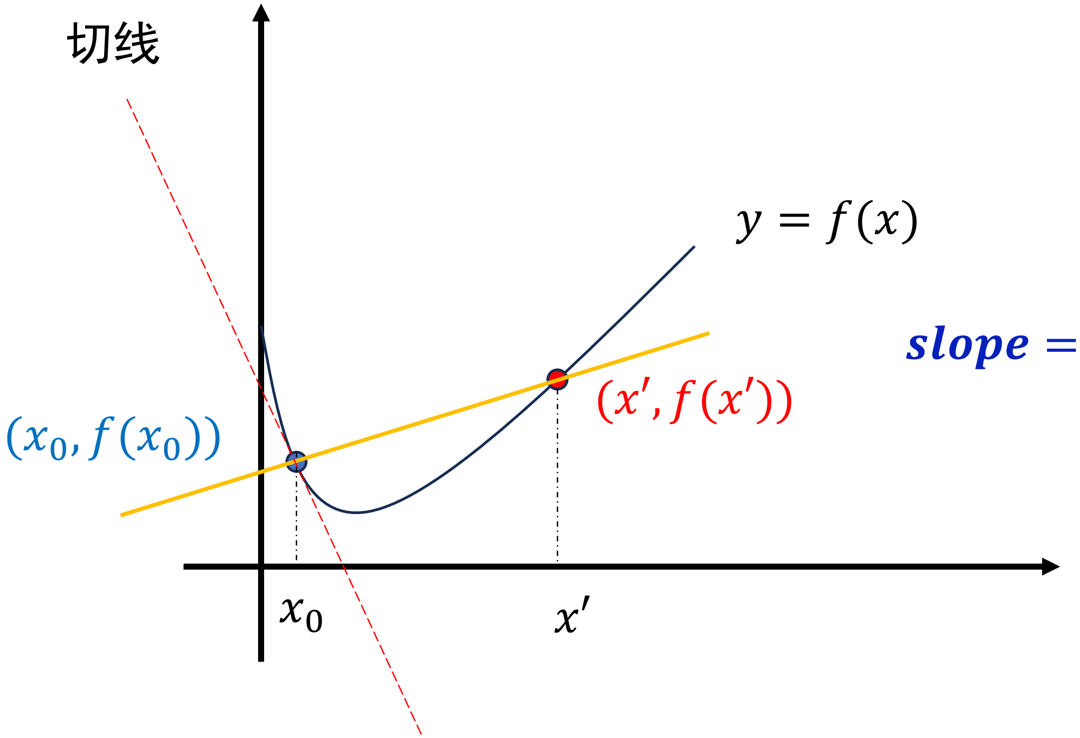
求极限

导数：即切线斜率

切线：与函数图像相交与点M，且斜率与函数在该点处导数相同的直线

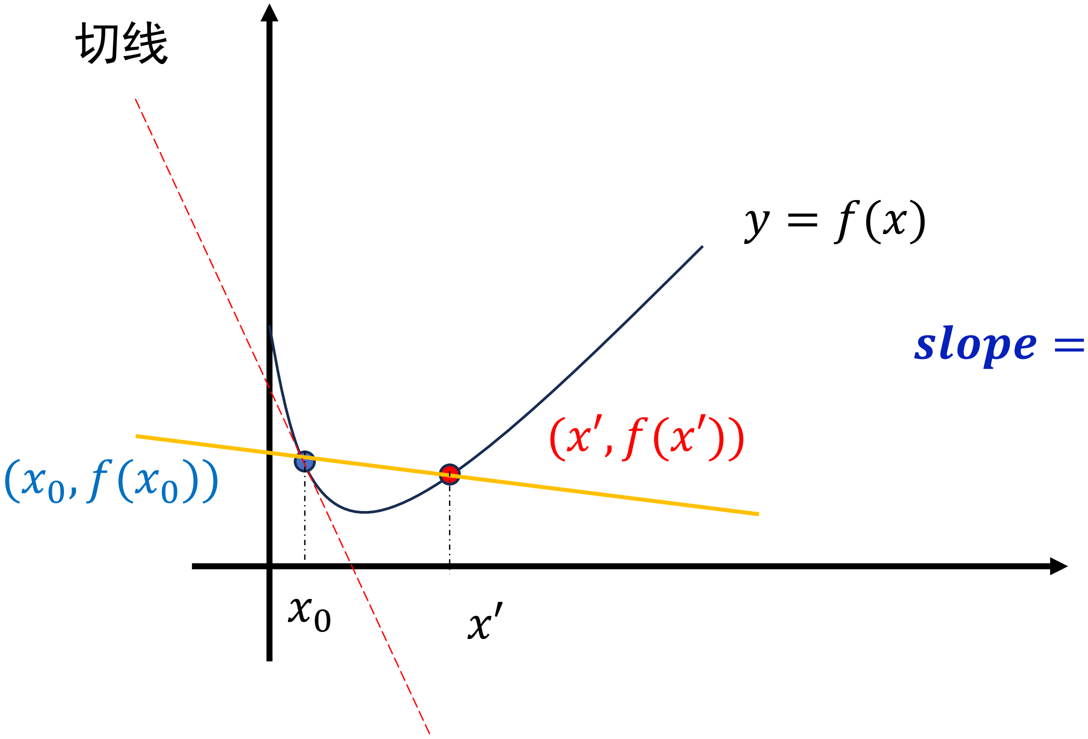


导数：即切线斜率



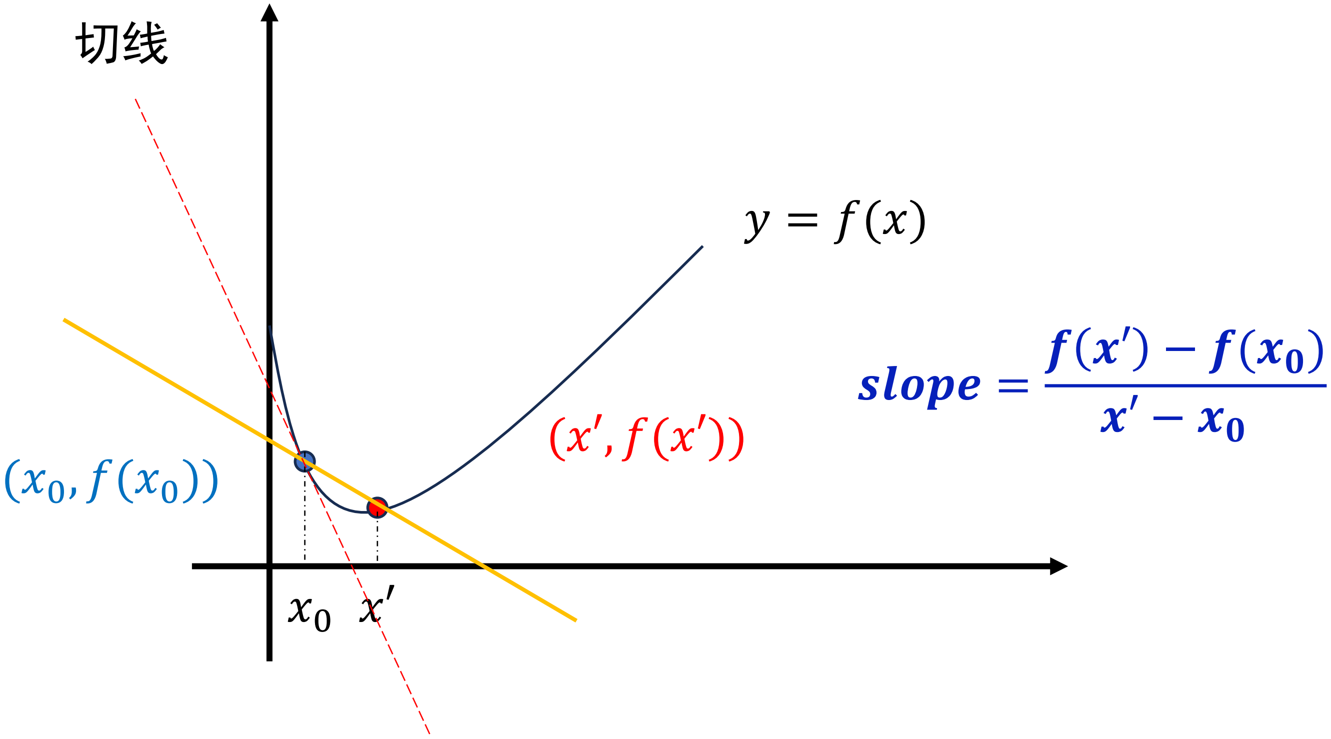
$$\boldsymbol{slope = \frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0}}$$

导数：即切线斜率

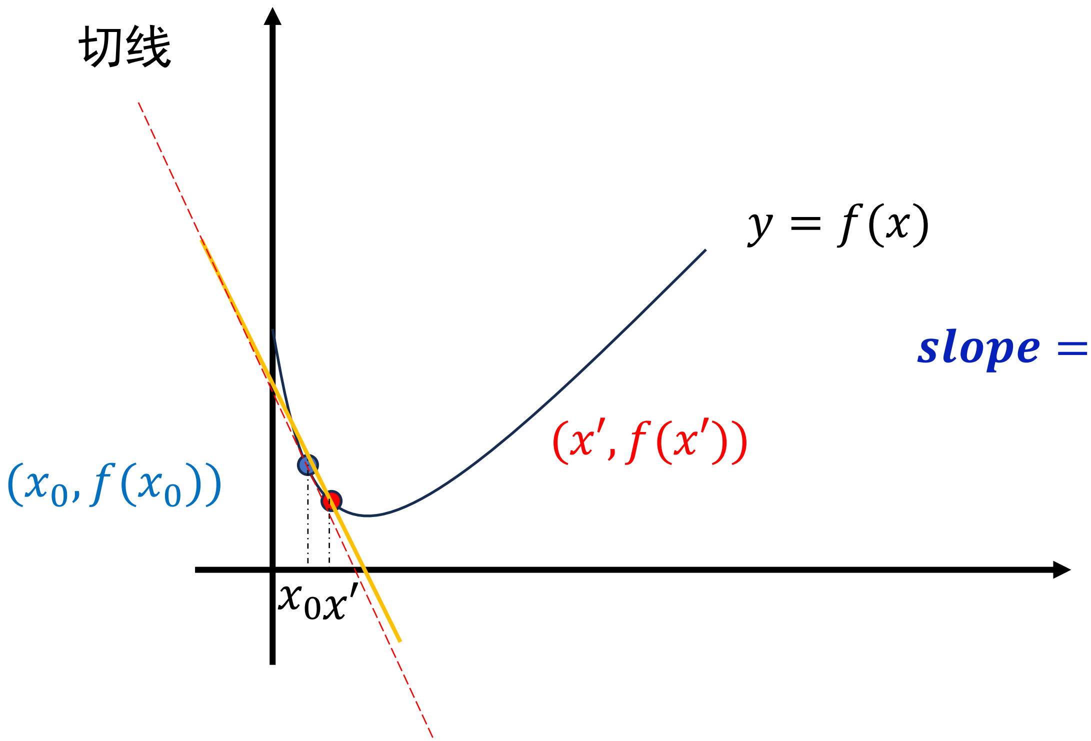


$$slope = \frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0}$$

导数：即切线斜率



导数：即切线斜率



$$slope = \frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0}$$

$$\lim_{x' \to x_0} \frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0} = f'(x_0)$$

切线斜率

第一节 导数的概念

(四) 导数的几何意义

在几何上，函数$y=f(x)$在点x_0处的**导数$f'(x_0)$**表示**曲线$y=f(x)$在点$M(x_0,f(x_0))$**处**的切线的斜率**，即$f'(x_0)=\tan\alpha$, 其中α为切线的倾角

经过点$M(x_0,f(x_0))$的切线方程为

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

经过点$M(x_0,f(x_0))$的法线方程为

$$y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$$

第一节 导数的概念

(四) 左、右导数

设函数$f(x)$在点x_0的某一邻域内有定义,

- 如果 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$存在，则称之为$f(x)$在点$x_0$处的**左导数**，记作$f'_-(x_0)$；

- 如果 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$存在，则称之为$f(x)$在点$x_0$处的**右导数**，记作$f'_+(x_0)$；

函数$f(x)$在点x_0处的导数存在，当且仅当$f(x)$在点x_0处的左、右导数存在且相等，即

$$f'(x_0)=A \iff f'_-(x_0)=f'_+(x_0)=A$$

(四) 可导与连续的关系

定理 如果函数$y=f(x)$在点x_0处可导，则它在点x_0处一定连续

- 在点x_0处可导，则必在点x_0处连续
- 在点x_0处不连续，则在点x_0处必不可导
- 在点x_0处连续，无法判断在点x_0处是否可导

熟记!!!

(四) 可导与连续的关系

课本例8 讨论函数$y = f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$在$x = 0$处的连续性及可导性

解：$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(-x) = \lim_{x\to 0}(-x) = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x = \lim_{x\to 0} x = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$$

因此函数$f(x)$在$x = 0$处连续

第一节 导数的概念

(四) 可导与连续的关系

课本例8 讨论函数$y=f(x)=|x|=\begin{cases}x, & x\geq 0\\ -x, & x<0\end{cases}$在$x=0$处的连续性及可导性

$$f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

解： 先考察左导数

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1$$

$$f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

再考察右导数

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1$$

$f'_+(0)\neq f'_-(0)$ 因此函数$f(x)$在$x=0$处不可导

综上所述，函数$f(x)$在$x=0$处连续，但不可导

随堂练习

1. 若$g(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$,判断$g(x)$在$x=0$处是否可导，若可导求出相应的导数

$$g'(0)=0$$

2. $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\leq 0 \\ x^{\frac{1}{3}}, & x>0 \end{cases}$, 计算 $f(x)$在$x=0$处的左、右导数

左导数$f'_-(0)=0$　　右导数$f'_+(0)=\infty$

第二节 导数的基本公式

(一) 基本初等函数的导数

熟记!!!

常数函数 $y = C$ $y' = (C)' = 0$

幂函数 $y = x^a$ $y' = (x^a)' = a \cdot x^{a-1}$

对数函数 $y = \log_a x \ (a > 0, a \neq 1)$ $y' = (\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x\ln a}$

特别地，若 $y = \ln x$ 则 $y' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$

指数函数 $y = a^x \ (a > 0, a \neq 1)$ $y' = (a^x)' = a^x \cdot \ln a$

特别地，若 $y = e^x$ 则 $y' = (e^x)' = e^x$

第二节 导数的基本公式

(一) 基本初等函数的导数

熟记!!!

三角函数

$y=\sin x$ $\quad$ $y'=(\sin x)'=\cos x$

$y=\cos x$ $\quad$ $y'=(\cos x)'=-\sin x$

$y=\tan x$ $\quad$ $y'=(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$

反三角函数

$y=\arcsin x(-1<x<1)$ $\quad$ $y'=(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ (-1<x<1)$

$y=\arccos x(-1<x<1)$ $\quad$ $y'=(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ (-1<x<1)$

$y=\arctan x$ $\quad$ $y'=(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$

$y=\operatorname{arccot} x$ $\quad$ $y'=(\operatorname{arccot} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$

随堂练习

- 求下列函数的导数

(1) $y=x^2$的导函数及在$x=1$处的导数

$$y'=2x \qquad y'|_{x=1}=2$$

(2) $y=x$的导函数及在$x=2$处的导数

$$y'=1 \qquad y'|_{x=2}=1$$

(3) $y=2$的导数

$$y'=0$$

(4) $y=\sqrt{x}(x>0)$

$$y'=f'(x)=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$$

第二节 导数的基本公式

（二）函数四则运算的导数

代数和的导数　　设函数$f(x)$和$g(x)$均是可导函数，则$f(x) \pm g(x)$也是可导函数，且

$$[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \pm \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})]' = [\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})]' \pm [\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})]'$$

例　求函数$y = e^x + \frac{1}{x} - \sin x$的导数

解：
$$y' = \left(e^x + \frac{1}{x} - \sin x\right)'$$
$$= (e^x)' + \left(\frac{1}{x}\right)' - (\sin x)'$$
$$= e^x + (-1)x^{-1-1} - \cos x$$
$$= e^x - x^{-2} - \cos x$$

第二节 导数的基本公式

（二）函数四则运算的导数

乘积的导数

设函数$f(x)$和$g(x)$均是可导函数，则$f(x)\cdot g(x)$也是可导函数，且

$$[f(x)\cdot g(x)]'=[f(x)]'\cdot g(x)+f(x)\cdot[g(x)]'$$

特别地，若C为常数，则 $[C\cdot f(x)]'=C\cdot[f(x)]'$

例 求函数$y=\frac{1}{x}e^x$的导数

解：

$$y'=\left(\frac{1}{x}e^x\right)'=\left(\frac{1}{x}\right)'\cdot e^x+\frac{1}{x}\cdot(e^x)'$$

$$=(-1)x^{-1-1}\cdot e^x+\frac{1}{x}\cdot e^x$$

$$=-x^{-2}e^x+\frac{1}{x}\cdot e^x$$

第二节 导数的基本公式

（二）函数四则运算的导数

商的导数

设函数$f(x)$和$g(x)$均是可导函数，且$g(x)\neq 0$，则$\frac{f(x)}{g(x)}$也是可导函数，且

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{[f(x)]'\cdot g(x)-f(x)\cdot[g(x)]'}{[g(x)]^2}$$

例 求函数$y=\frac{\cos x}{x^2}$的导数

解：

$$y'=\left(\frac{\cos x}{x^2}\right)'=\frac{(\cos x)'\cdot x^2-\cos x\cdot(x^2)'}{(x^2)^2}$$

$$=\frac{-\sin x\cdot x^2-\cos x\cdot(2x^{2-1})}{(x^2)^2}$$

$$=\frac{-\sin x\cdot x^2-2x\cdot\cos x}{x^4}$$

随堂练习

- 求下列函数的导数

$(1)\ y=x\cdot\ln x$在$x=e$处的导数

$y'=\ln x+1 \quad y'|_{x=e}=\ln e+1=2$

$(2)\ y=2^x-\ln x$

$y'=2^x\ln 2-\frac{1}{x}$

$(3)\ y=(2x+2)\cdot(x+1)$

$y'=4x+4$

$(4)\ y=\dfrac{1+e^x}{x^2}$

$y'=\dfrac{e^x(x-2)-2}{x^3}$

$(5)\ y=\log_2 x-\sin x+3x^2$

$y'=\dfrac{1}{x\ln 2}-\cos x+6x$

$(6)\ y=x\cdot\cos x$

$y'=\cos x-x\sin x$

第三节 复合函数求导公式

设函数$y=f(u)$，$u=\varphi(x)$，y是x的一个复合函数$y=f[\varphi(x)]$。如果在点x处， $u=\varphi(x)$有导数

$$\frac{du}{dx}=\varphi'(x)$$

在x的对应点u处，$y=f(u)$有导数

$$\frac{dy}{du}=f'(u)$$

则复合函数$y=f[\varphi(x)]$在点x处导数$\frac{dy}{dx}$(或y_x')存在。

$$\frac{dy}{dx}=y_x'=f'(u)\cdot\varphi'(x)$$

$$=f'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$$

第三节 复合函数求导公式

$y = f[\varphi(x)]$ $\longrightarrow$ $\dfrac{dy}{dx} = y'_x = f'(u) \cdot \varphi'(x)$

$$= f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$$

课本例6 求函数$y = (1 + 2x)^2$的导数

解： 记$y = f(u) = u^2$，$u = \varphi(x) = 1 + 2x$

由复合函数求导公式

$$\frac{dy}{dx} = f'(u) \cdot \varphi'(x) = (u^2)' \cdot (1 + 2x)' = 2u \cdot 2$$

$$= 2(1 + 2x) \cdot 2$$

$$= 4 + 8x$$

第三节 复合函数求导公式

$$y = f[\varphi(x)] \longrightarrow \frac{dy}{dx} = y'_x = f'(u) \cdot \varphi'(x)$$

$$= f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$$

课本例7 求函数$y = \ln \sin x$的导数

解： 记$y = f(u) = \ln u$，$u = \varphi(x) = \sin x$

由复合函数求导公式

$$\frac{dy}{dx} = f'(u) \cdot \varphi'(x) = (\ln u)' \cdot (\sin x)' = \frac{1}{u} \cdot \cos x$$

$$= \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x$$

$$= \frac{1}{\tan x} = \cot x$$

第一节 复合函数求导公式

$$\frac{dy}{dx} = (f[\varphi(x)])' = f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$$

f对整体求导×整体对x求导

例 求函数$y = \sin 2x$的导数

解： $y' = \dfrac{dy}{dx} = (\sin 2x)' = \cos 2x \cdot (2x)' = 2\cos 2x$

随堂练习

- 利用复合函数求导法则求下列函数的导数

(1) $y = \cos 2x$

$y' = -2\sin 2x$

(2) $y = \sqrt{x^2 + 1}$

$y' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

(3) $y = e^{\sin x}$

$y' = e^{\sin x} \cdot \cos x$

(4) $y = \ln(2x + 1)$在 $x = 0$处的导数

$y'|_{x=0} = 2$

第一节 复合函数求导公式

$$\frac{dy}{dx} = (f[\varphi(x)])' = f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$$

f对整体求导×整体对x求导

求函数$y = \ln(1 + \sqrt{x^2})$ 的导数

解： $y' = \left[\ln\left(1 + \sqrt{x^2}\right)\right]' = \dfrac{1}{1 + \sqrt{x^2}} \cdot (1 + \sqrt{x^2})'$

第一次复合函数求导

$$= \frac{1}{1 + \sqrt{x^2}} \cdot [(1)' + (\sqrt{x^2})']$$

$$= \frac{1}{1 + \sqrt{x^2}} \cdot [0 + (\sqrt{x^2})']$$

第二次复合函数求导

$$= \frac{1}{1 + \sqrt{x^2}} \cdot [\frac{1}{2}(x^2)^{\frac{1}{2}-1} \cdot (x^2)']$$

$$= \frac{1}{1 + \sqrt{x^2}} \cdot [\frac{1}{2}(x^2)^{\frac{1}{2}-1} \cdot 2x]$$

$$= \frac{1}{1 + \sqrt{x^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2}}$$

第三节 复合函数求导公式

复合函数求导公式可以推广到有限次复合，例如

$$y = f(u)，u = \varphi(v)，v = \psi(x)$$

则复合函数$y = f\{\varphi[\psi(x)]\}$在点$x$处导数

$$\frac{dy}{dx} = f'(u) \cdot \varphi'(v) \cdot \psi'(x)$$