微积分I

3学分、经管类外招

数学系王伟文

课程网页二维码

https://wangyuanhao.github.io/calculus_course_webpage/

第一节 极限的运算法则

（一）极限的四则运算

四则运算 设$\lim\limits_{x\to P} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to P} g(x)=B$，**且$A$和$B$均为常数**，则

- $\lim\limits_{x\to P}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to P} f(x)\pm\lim\limits_{x\to P} g(x)=A\pm B$
- $\lim\limits_{x\to P}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to P} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to P} g(x)=A\cdot B$
- $\lim\limits_{x\to P}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to P} f(x)}{\lim\limits_{x\to P} g(x)}=\dfrac{A}{B}(B\neq 0)$

- 四则运算一定注意要满足前提条件
- $\lim\limits_{x\to P}[f(x)\pm g(x)]$的极限存在不能推出$\lim\limits_{x\to P} f(x)$与$\lim\limits_{x\to P} g(x)$的存在

有限个无穷小量之和依然是无穷小量!!!

第一节 极限的运算法则

（一）极限的四则运算

四则运算 设$\lim\limits_{x\to P} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to P} g(x)=B$，**且$A$和$B$均为常数**, 则

- $\lim\limits_{x\to P}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to P} f(x)\pm\lim\limits_{x\to P} g(x)=A\pm B$
- $\lim\limits_{x\to P}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to P} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to P} g(x)=A\cdot B$
- $\lim\limits_{x\to P}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to P} f(x)}{\lim\limits_{x\to P} g(x)}=\dfrac{A}{B}\,(B\neq 0)$

- 四则运算一定注意要满足前提条件
- $\lim\limits_{x\to P}[f(x)\pm g(x)]$的极限存在不能推出$\lim\limits_{x\to P}f(x)$与$\lim\limits_{x\to P}g(x)$的存在

有限个无穷小量之和依然是无穷小量!!!

第一节 极限的运算法则

（一） 极限的四则运算

四则运算 设$\lim\limits_{x\to P} f(x) = A$，$\lim\limits_{x\to P} g(x) = B$，**且$A$和$B$均为常数**，则

- $\lim\limits_{x\to P}[f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to P} f(x) \pm \lim\limits_{x\to P} g(x) = A \pm B$
- $\lim\limits_{x\to P}[f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to P} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to P} g(x) = A \cdot B$
- $\lim\limits_{x\to P} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to P} f(x)}{\lim\limits_{x\to P} g(x)} = \dfrac{A}{B} (B \neq 0)$

- 四则运算一定注意要满足前提条件
- $\lim\limits_{x\to P}[f(x) \pm g(x)]$的极限存在不能推出$\lim\limits_{x\to P} f(x)$与$\lim\limits_{x\to P} g(x)$的存在

有限个无穷小量之和依然是无穷小量!!!

第一节 极限的运算法则

（一）极限的四则运算

四则运算 设$\lim\limits_{x\to P} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to P} g(x)=B$，**且$A$和$B$均为常数**，则

- $\lim\limits_{x\to P}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to P} f(x)\pm\lim\limits_{x\to P} g(x)=A\pm B$
- $\lim\limits_{x\to P}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to P} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to P} g(x)=A\cdot B$
- $\lim\limits_{x\to P}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to P} f(x)}{\lim\limits_{x\to P} g(x)}=\dfrac{A}{B}(B\neq 0)$

- **四则运算一定注意要满足前提条件**
- $\lim\limits_{x\to P}[f(x)\pm g(x)]$的极限存在不能推出$\lim\limits_{x\to P} f(x)$与$\lim\limits_{x\to P} g(x)$的存在

有限个无穷小量之和依然是无穷小量!!!

第一节 极限的运算法则

（一） 极限的四则运算

关于乘法的推论

$$\lim_{x\to P}[f(x)\cdot g(x)]=\lim_{x\to P}f(x)\cdot\lim_{x\to P}g(x)=A\cdot B$$

- 无穷小量的乘积仍然为无穷小量
- 常数因子与极限过程无关，即$\lim_{x\to P}C\cdot f(x)=C\cdot\lim_{x\to P}f(x)$
- $\lim_{x\to P}[f(x)]^{\alpha}=[\lim_{x\to P}f(x)]^{\alpha},(\alpha>0)$

第一节 极限的运算法则

（一）极限的四则运算

例1 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)$

解

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}$$

$$=\frac{1}{2}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}+\cdots+\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2}$$

$$=0+0+\cdots+0$$

$$=0.$$

有限个无穷小量之和依然是无穷小量！！！

第一节 极限的运算法则

（一） 极限的四则运算

例2 求$\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$

解 $$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} x \times \lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x} = 0$$

$\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在 ！！！

第一节 极限的运算法则

（二） 多项式的极限

n次多项式 形如函数$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$, 其中$a_0, a_2, \ldots, a_n$为给定的实数，$n$为已知的正整数，且$a_0 \neq 0$，称函数$p(x)$为**$n$次多项式**

$-2x^3$　3次多项式

$-2x$　1次多项式

$x^2 + 2x + 1$　2次多项式

$x^4 + 2x^2 + 1$　4次多项式

若$p(x)$为多项式则

$$\lim_{x \to x_0} p(x) = p(x_0)$$

第一节 极限的运算法则

（二） 多项式的极限

若$p(x)$为多项式则

$$\lim_{x\to x_0} p(x) = p(x_0)$$

课本例1 求$\lim_{x\to 1} 3x^2 - 2x + 1$

解： $\lim_{x\to 1} 3x^2 - 2x + 1 = 3\cdot 1^2 - 2\cdot 1 + 1 + 1 = 2$

第一节 极限的运算法则

（二） 多项式的极限

若$p(x)$为多项式则

$$\lim_{x\to x_0} p(x) = p(x_0)$$

课本例2 求$\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2+x-5}{3x+1}$

解： 因为$\lim\limits_{x\to 2} 2x^2+x-5 = 2\cdot 2^2+2-5 = 5,$

$$\lim_{x\to 2} 3x+1 = 3\cdot 2+1 = 7 \neq 0$$

所以$\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2+x-5}{3x+1} = \frac{\lim\limits_{x\to 2} 2x^2+x-5}{\lim\limits_{x\to 2} 3x+1} = \frac{5}{7}$

第一节 极限的运算法则

（二） 多项式的极限

若$p(x)$为多项式则

$$\lim_{x\to x_0} p(x) = p(x_0)$$

课本例3 求$\lim\limits_{x\to 2}\frac{5x}{x^2-4}$

解： 因为$\lim\limits_{x\to 2} 5x = 10$,

$$\lim_{x\to 2} x^2-4 = 2^2-4=0$$

所以$\lim\limits_{x\to 2}\frac{5x}{x^2-4} \neq \frac{\lim\limits_{x\to 2} 5x}{\lim\limits_{x\to 2} x^2-4} = \frac{10}{0} = \infty$ ✖

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{5x} = \frac{\lim\limits_{x\to 2} x^2-4}{\lim\limits_{x\to 2} 5x} = \frac{0}{10} = 0$$

所以$\lim\limits_{x\to 2}\frac{5x}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to 2} {}^{1}\!/\!{}_{\frac{x^2-4}{5x}} = \infty$

第一节 极限的运算法则

（二）多项式的极限

若$p(x)$为多项式则

$$\lim_{x\to x_0} p(x) = p(x_0)$$

课本例4 求$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}$

$$\frac{0}{0}$$

解： 因为当$x\to 3$时，$x-3\neq 0$

所以

$$\frac{x-3}{x^2-9}=\frac{x-3}{(x-3)(x+3)}=\frac{1}{x+3}$$

因此

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{x+3}=\frac{\lim\limits_{x\to 3}1}{\lim\limits_{x\to 3}x+3}=\frac{1}{6}$$

第一节 极限的运算法则

（二）多项式的极限

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

课本例6 求 $\lim\limits_{x\to -2}\left(\frac{1}{x+2} - \frac{12}{x^3+8}\right)$ $\quad \infty - \infty$

解： 当$x \to -2$时， $x \neq -2$

$$\frac{1}{x+2} - \frac{12}{x^3+8} = \frac{1}{x+2} - \frac{12}{x^3-(-2)^3} = \frac{1}{x+2} - \frac{12}{[x-(-2)][x^2-2x+(-2)^2)]}$$

$$= \frac{1}{x+2} - \frac{12}{[x+2][x^2-2x+4]}$$

$$= \frac{x^2-2x+4}{(x+2)(x^2-2x+4)} - \frac{12}{(x+2)\ (x^2-2x+4)}$$

$$= \frac{x^2-2x-8}{(x+2)(x^2-2x+4)} = \frac{(x+2)(x-4)}{(x+2)(x^2-2x+4)}$$

$$= \frac{x-4}{x^2-2x+4}$$

第一节 极限的运算法则

（二） 多项式的极限

$$\lim_{x\to-2}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{12}{x^3+8}\right)=\lim_{x\to-2}\frac{x-4}{x^2-2x+4}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to-2} x-4}{\lim\limits_{x\to-2} x^2-2x+4}=\frac{-2-4}{(-2)^2-2\cdot(-2)+4}=-\frac{1}{2}$$

第一节 极限的运算法则

（三） 多项式分式的极限计算规则

$x \to \infty$时多项式比值的极限计算公式

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0 x^q + b_1 x^{q-1} + \cdots + b_q} = \begin{cases} \dfrac{a_0}{b_0}, n = q \\ 0, n < q \\ \infty, n > q \end{cases}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^3 + 1}{8x^2 + 7x} = \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{8x^2 + 7x}{2x^3 + 1} = 0$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^3 + 1}{8x^3 + 7x} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

只有当 $x \to \infty$ 时上述结论才成立！！！

随堂练习

- 计算以下极限

(1) $\lim\limits_{x \to 2}(x^2-4) = \mathbf{0}$

(2) $\lim\limits_{x \to 0}(x + 2024) = \mathbf{2024}$

(3) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^3 - x}{x^2 + 4x} = \infty$

(4) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x - 2}{x^2 - 4} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$

(5) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^2 - x}{x^2 + x} = \mathbf{3}$

(6) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{100x + 100}{x^2 + x} = \mathbf{0}$

(7) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{2}{x^2 - 1} - \dfrac{1}{x - 1} \right) = -\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$

(8) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{x - 1} = \infty$