微积分I-中值定理及导数的应用

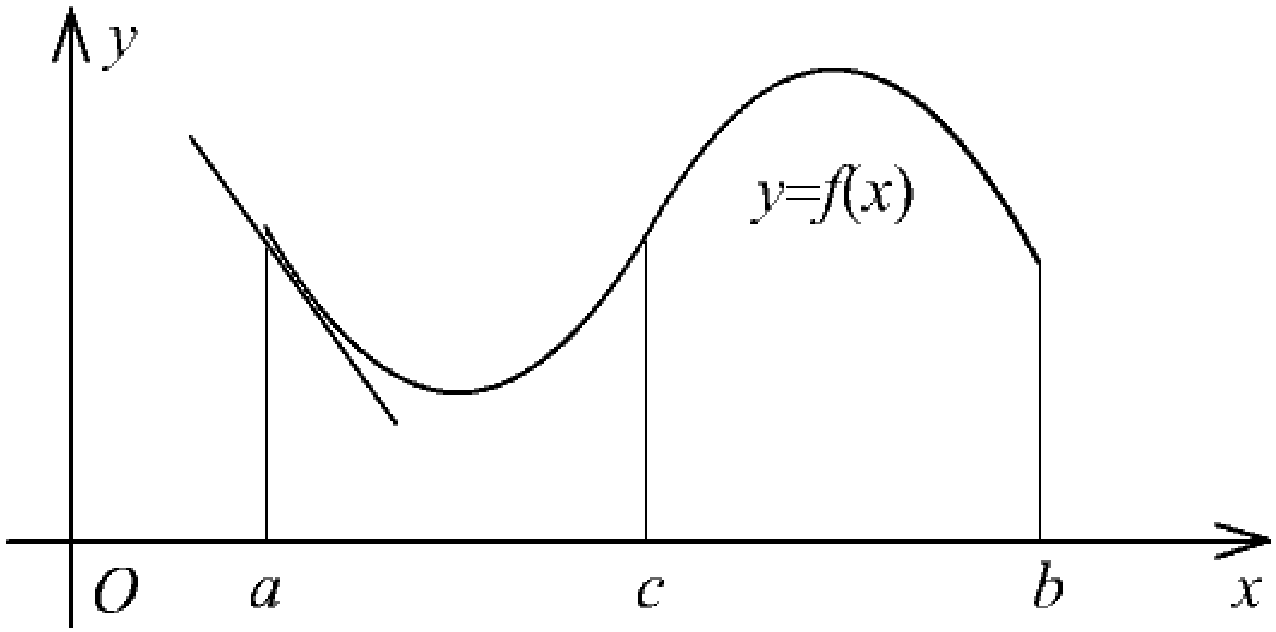
3学分、经管类外招

数学系王伟文

课程网页二维码

https://wangyuanhao.github.io/calculus_course_webpage/

第一节 曲线的凹向与拐点



- 观察函数曲线的切线在区间(a, c)、(c, b)与曲线的位置关系

  在区间(a, c)上曲线<u>总是在切线的上方</u>，在区间(c, b)上曲线<u>总是在切线的下方</u>

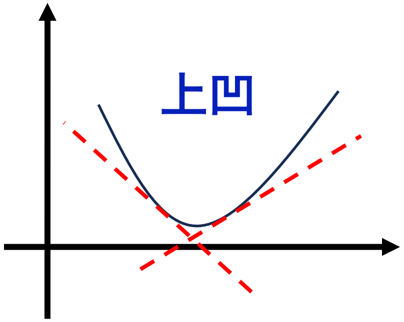
- 观察上述函数曲线在区间(a, c)、(c, b)的凹向；

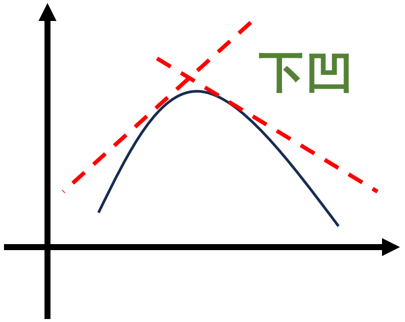
  函数曲线在区间(a, c)上凹，在区间(c, b)下凹

第一节 曲线的凹向与拐点

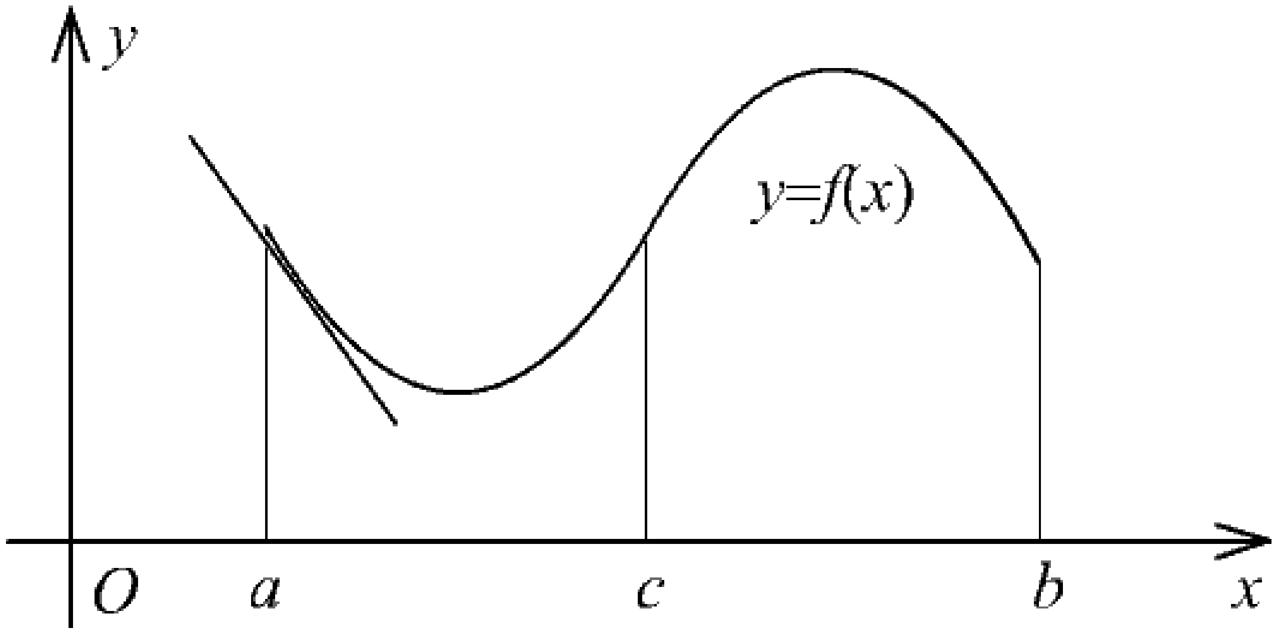
曲线凹向定义

- 如果在某个区间内，函数曲线位于其任意一点切线的上方，则称曲线在此区间内是上凹的；
- 如果在某个区间内，函数曲线位于其任意一点切线的下方，则称曲线在此区间内是下凹的；





第一节 曲线的凹向与拐点



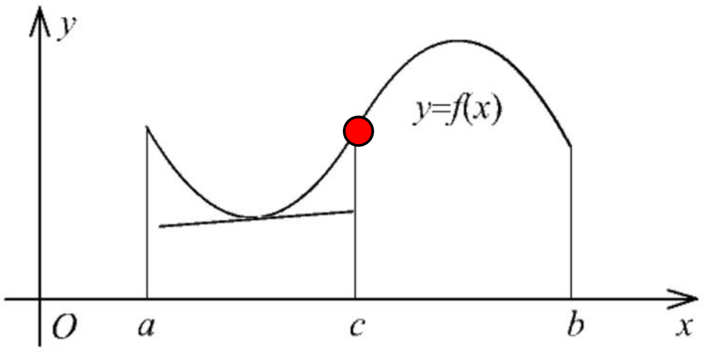
曲线凹向判定定理 设函数$f(x)$在区间(a,b)内具有二阶导数，则

- 如果当$x\in(a,b)$时，恒有$f''(x)>0$，则曲线$y=f(x)$在(a,b)内上凹；
- 如果当$x\in(a,b)$时，恒有$f''(x)<0$，则曲线$y=f(x)$在(a,b)内下凹。

第一节 曲线的凹向与拐点

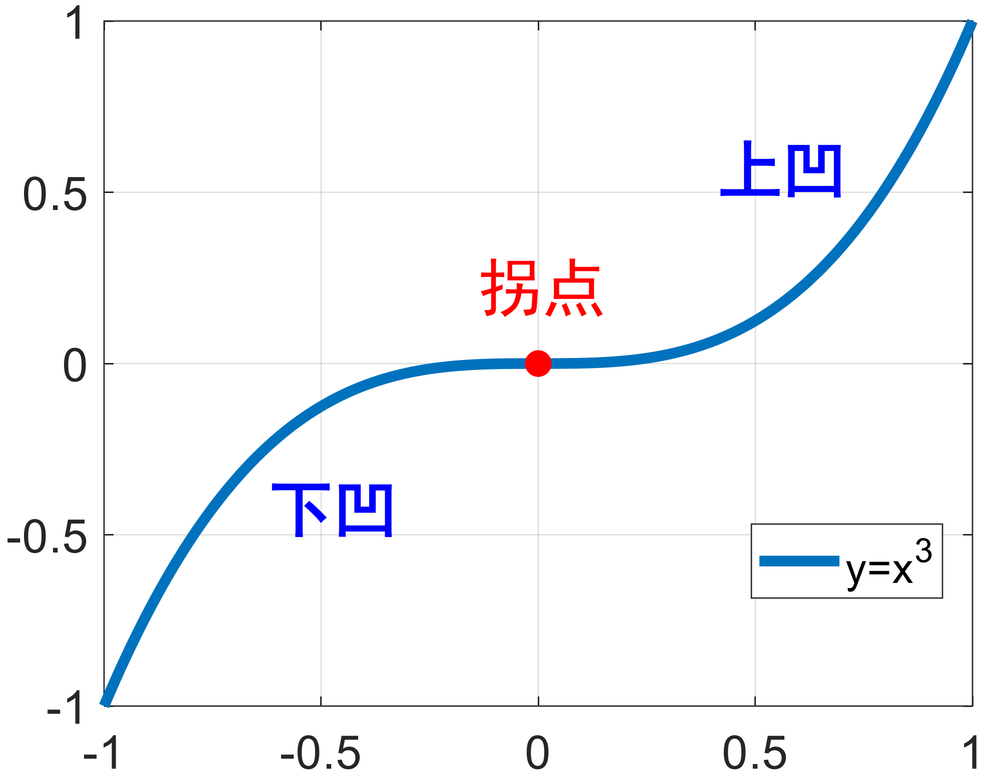
曲线拐点曲线上凹和下凹的分界点称为曲线的**拐点**

- **拐点是平面坐标上的一个点，必须包括横、纵坐标**
- **在拐点适当小的左右邻域 $f''(x)$ 必然异号，因而在拐点处要么$f''(x)=0$，要么$f''(x)$** 不存在



推论 **若拐点处二阶导数存在，则拐点处二阶导数必为0**

第一节 曲线的凹向与拐点



求拐点的步骤

求二阶导数$f''(x)=0$及$f''(x)$不存在**的点**

→

如果在该点的左右两侧二阶导数$f''(x)$**异号**

→

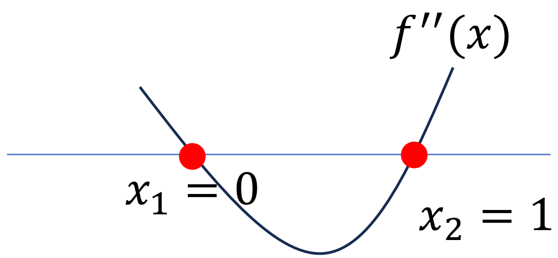
该点则为函数的**拐点的横坐标**

第一节 曲线的凹向与拐点

求曲线$f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$的凹向与拐点。

解： $f'(x) = 4x^3 - 6x^2$

$f''(x) = 12x^2 - 12x = 12x(x-1)$



令$f''(x) = 0$，解得$x_1 = 0$， $x_2 = 1$

没有二阶导数$f''(x)$不存在的点

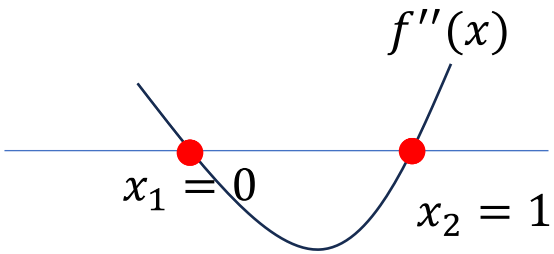
$x_1 = 0$和$x_2 = 1$将$(-\infty, +\infty)$划分为

$(-\infty, 0)$， $(0,1)$， $(1, +\infty)$， 三个区间

我们通过判断二阶导数$f''(x)$在这3个区间上的符号确定拐点

第一节 曲线的凹向与拐点

$$f''(x) = 12x^2 - 12x = 12x(x-1)$$



制作表格

x	$(-\infty, 0)$	$\mathbf{0}$	$(0, \mathbf{1})$	$\mathbf{1}$	$(1, +\infty)$
$f''(x)$	> 0	0	< 0	0	> 0
$f(x)$	上凹	拐点 $f(0) = 1$	下凹	拐点 $f(1) = 0$	上凹

由表格可知，$f(x)$在区间$(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$上凹，在$(0, \mathbf{1})$下凹，**拐点为(0, 1)和（1, 0）**

第一节 曲线的凹向与拐点

课本例2 求曲线$f(x)=(x-2)^{\frac{5}{3}}$的凹向与拐点。

解：

$$f'(x)=\frac{5}{3}(x-2)^{\frac{2}{3}}$$

$$f''(x)=\frac{10}{9}(x-2)^{-\frac{1}{3}}=\frac{10}{9}\frac{1}{\sqrt[3]{x-2}}$$

当$x=2$时，$f''(x)$不存在。

$x=2$将$(-\infty,+\infty)$划分为两个区间

$(-\infty,2)$ $(2,+\infty)$

我们通过判断二阶导数$f''(x)$在这两个区间上的符号确定拐点

第一节 曲线的凹向与拐点

课本例2 求曲线$f(x)=(x-2)^{\frac{5}{3}}$的凹向与拐点。

解：

$$f''(x)=\frac{10}{9}(x-2)^{-\frac{1}{3}}=\frac{10}{9}\frac{1}{\sqrt[3]{x-2}}$$

制作表格

x	$(-\infty,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f''(x)$	<0	不存在	>0
$f(x)$	下凹	拐点 $f(2)=0$	上凹

由表格可知，$f(x)$在区间$(-\infty,2)$下凹，在$(2,+\infty)$上凹，**拐点为(2, 0)。**

第二节 函数图像的作法

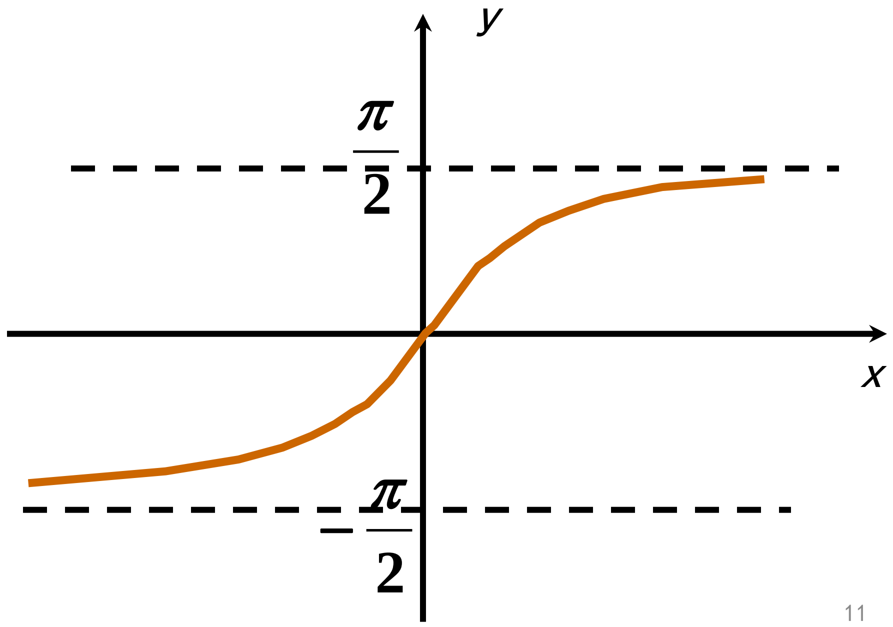
水平渐近线(平行于x轴) 如果 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$或 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$，这里$A$是常数，则称$y=A$是函数$f(x)$的一条水平渐近线

例如$f(x)=\arctan x$

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$$

故$f(x)=\arctan x$有两条水平渐近线$y=\frac{\pi}{2}$及$y=-\frac{\pi}{2}$



第二节 函数图像的作法

水平渐近线（平行于x轴） 如果$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$或$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$，这里$A$是常数，则称$y=A$是函数$f(x)$的一条水平渐近线

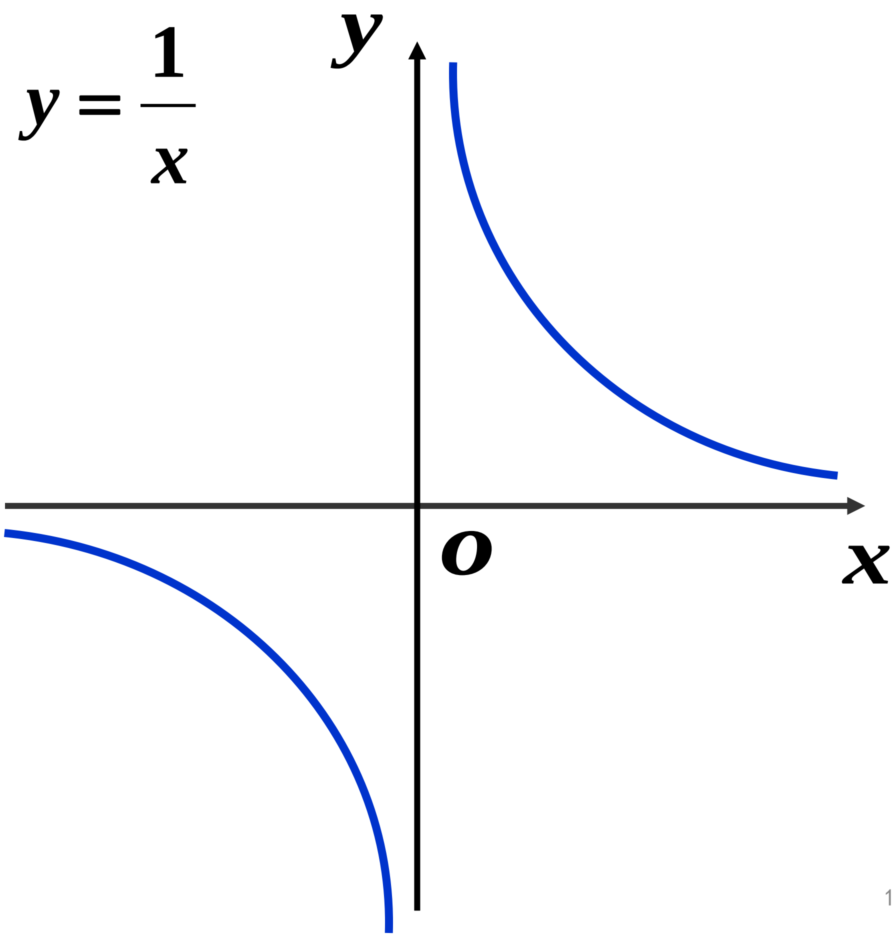
例如$f(x)=\frac{1}{x}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$$

故$f(x)=\frac{1}{x}$有 一条水平渐近线

$y=0$



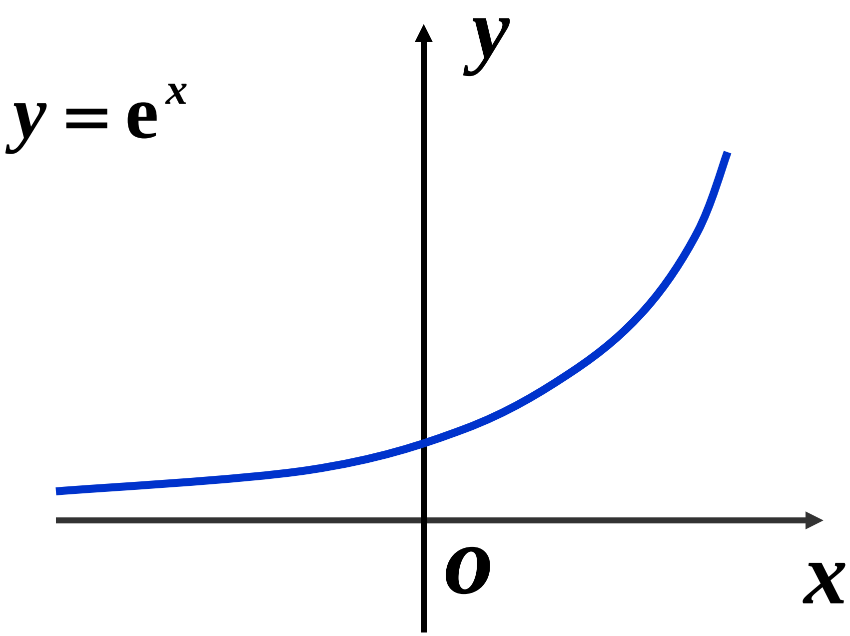
第二节 函数图像的作法

水平渐近线（平行于x轴） 如果 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$或$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$，这里$A$是常数，则称$y=A$是函数$f(x)$的一条水平渐近线

例如$f(x)=e^x$

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$

故$f(x)=e^x$有 一条水平渐近线$y=0$



第二节 函数图像的作法

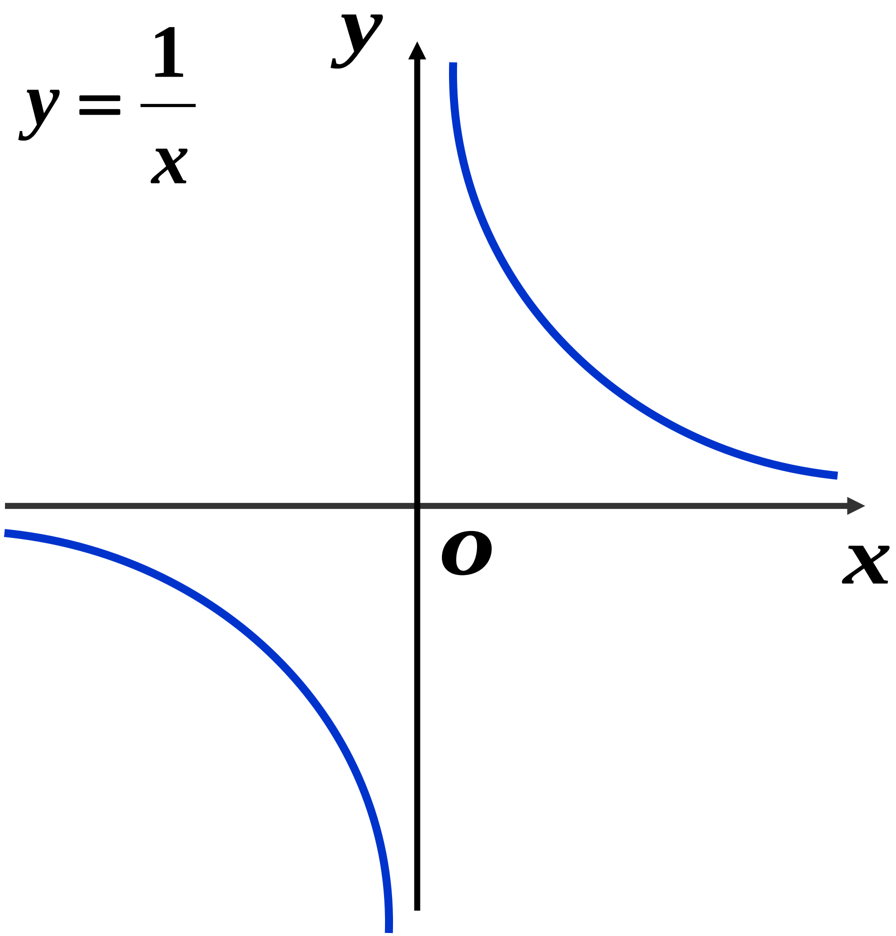
铅垂(垂直)渐近线(垂直于x轴) 如果$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$或$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\infty$，则称$x=a$是函数$f(x)$的一条<u>铅垂渐近线(或称垂直渐近线)</u>

例如$f(x)=\frac{1}{x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty$$

故$f(x)=\frac{1}{x}$有一条铅垂渐近线$x=0$

$$y=\frac{1}{x}$$



第二节 函数图像的作法

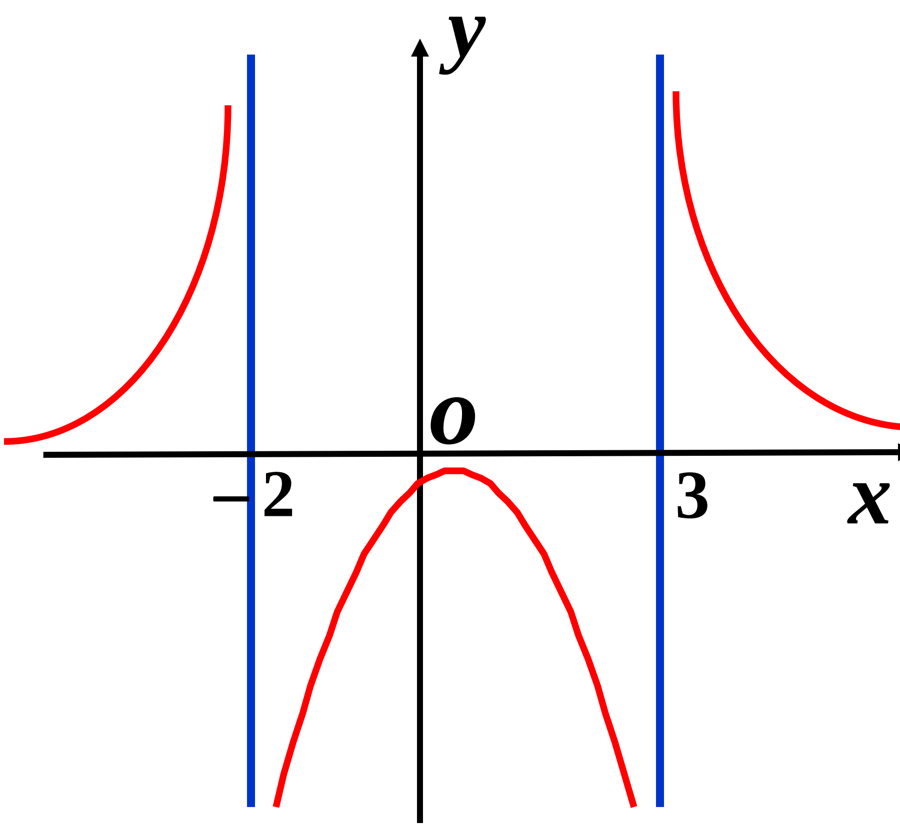
铅垂（垂直）渐近线（垂直于x轴） 如果 $\lim\limits_{x\to a^{+}} f(x)=\infty$或$\lim\limits_{x\to a^{-}} f(x)=\infty$，则称$x=a$是函数$f(x)$的一条铅垂渐近线（或称垂直渐近线）

例如$f(x)=\frac{1}{(x+2)(x-3)}$

$$\lim_{x\to -2}\frac{1}{(x+2)(x-3)}=\infty$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{1}{(x+2)(x-3)}=\infty$$

故$f(x)=\frac{1}{(x+2)(x-3)}$有两条铅垂渐近线$x=-2$、 $x=3$



第二节 函数图像的作法

例 求曲线$f(x)=\frac{2(x-2)(x+3)}{x-1}$的铅垂渐近线

解：

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{2(x-2)(x+3)}{x-1}=\infty$$

故$x=1$为$f(x)$的铅垂渐近线

第二节 函数图像的作法

例 求曲线$f(x)=\frac{1}{x-1}$的水平渐近线

解：

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x-1}=0 \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x-1}=0$$

故$y=0$为$f(x)$的水平渐近线

第三节 变化率及相对变化率在经济学中的运用

边际函数 设可导函数$y=f(x)$是一个经济函数(成本、需求、收益等)，则其**导函数$f'(x)$称为边际函数**，如边际成本、边际收益、边际需求等。

函数$f(x)$ 在点$x=x_0$处有一个改变量Δx，则相应的函数改变量为

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\cdot\Delta x$$

若$\Delta x=1$，则$\Delta y\approx f'(x_0)$

这说明$f(x)$ 在点$x=x_0$处，当x产生一个单位的改变时， **$f(x)$近似改变$f'(x_0)$个单位**。经济学家在应用时常忽略“近似”，而直接说$f'(x_0)$个单位，这就是边际函数值的含义。

第三节 变化率及相对变化率在经济学中的运用

边际函数 设可导函数$y = f(x)$是一个经济函数(成本、需求、收益等)，则其**导函数$f'(x)$称为边际函数，**如边际成本、边际收益、边际需求等。

- 设某产品成本函数$C = C(Q)$（C为总成本，Q为产量），其变化率（导数）$C' = C'(Q)$称为边际成本。
- $C'(Q_0)$称为当产量为Q_0时的边际成本。
- 经济学上可以解释为：当产量达到Q_0时，增加一个单位的产量所增加的成本为$C'(Q_0)$。

第三节 变化率及相对变化率在经济学中的运用

例 生产某产品x单位的总成本为$C(x) = 1100 + 0.002x^2$（百元），则生产1000单位时的边际成本为？

解： 边际成本函数为

$$C'(x) = 0.004x$$

生产1000单位时的边际成本为

$$C'(1000) = 0.004 \times 1000 = 4(\text{百元})$$

这表示当产量$x = 1000$时，每**增加一个单位产量**，**大约需要增加成本400元**

第三节 变化率及相对变化率在经济学中的运用

例 某商品的需求函数为$Q(P) = 75 - P^2$，求当$P = 4$时的边际需求

解：　边际需求函数为

$$Q'(P) = -2P$$

当$P = 4$时的边际需求为

$$Q'(4) = -2 \times 4 = -8$$

这表示当$P = 4$时，每**增加一个单位价格**，需求**大约减少8个单位。**

第三节 变化率及相对变化率在经济学中的运用

设C为总成本，C_1为固定成本，C_2为可变成本，$\bar{C}$为平均成本，C'为边际成本，Q为产量，则有

- **总成本函数：**$C = C(Q) = C_1 + C_2(Q)$
- **平均成本函数：**$\overline{C} = \overline{C}(Q) = \frac{C(Q)}{Q} = \frac{C_1}{Q} + \frac{C_2(Q)}{Q}$
- **边际成本函数：**$C' = C'(Q)$

第三节 变化率及相对变化率在经济学中的运用

某商品的成本函数为$C=C(Q)=100+\frac{Q^2}{4}$，（1）求当$Q=10$时的总成本、平均成本及边际成本；(2) 当产量Q为多少时，平均成本最小？

解： (1) 平均成本函数$\bar{C}(Q)=\frac{C(Q)}{Q}=\frac{100}{Q}+\frac{Q}{4}$

边际成本函数$C'(Q)=\frac{Q}{2}$

当$Q=10$时

总成本$C(10)=125$

平均成本$\bar{C}(10)=\frac{100}{10}+\frac{10}{4}=10+2.5=12.5$

边际成本$C'(10)=\frac{10}{2}=5$

第三节 变化率及相对变化率在经济学中的运用

某商品的成本函数为$C=C(Q)=100+\frac{Q^2}{4}$（$Q>0$），（1）求当$Q=10$时的总成本、平均成本及边际成本；(2) 当产量Q为多少时，平均成本最小？

解： (2) 平均成本函数$\bar{C}(Q)=\frac{C(Q)}{Q}=\frac{100}{Q}+\frac{Q}{4}$

$$\bar{C}'(Q)=-\frac{100}{Q^2}+\frac{1}{4} \qquad \bar{C}''(Q)=\frac{200}{Q^3}$$

令$\bar{C}'(Q)=0$，即 $-\frac{100}{Q^2}+\frac{1}{4}=0$

解得$Q=20$， 无不可导点 且$\bar{C}''(20)=\frac{1}{40}>0$

故当$Q=20$时，$\bar{C}(10)=10$为函数$\bar{C}(Q)$的唯一极小值，且无极大值，因此$\bar{C}(10)$为函数$\bar{C}(Q)$在区间（0，$+\infty$）上的最小值。

即产量$Q=20$时，平均成本最小。

第三节 变化率及相对变化率在经济学中的运用

设P为商品价格，Q为商品数量，R为总收益，$\bar{R}$为平均收益，R'为边际收益，则有

- **需求（价格）函数：$P=P(Q)$**
- **总收益函数：$R=R(Q)=Q\cdot P(Q)$**
- **平均收益函数：$\bar{R}=\frac{R(Q)}{Q}=P(Q)$**
- **边际收益函数：　$R'=R'(Q)$**
- **利润函数：$L=L(Q)=R(Q)-C(Q)$**

第三节 变化率及相对变化率在经济学中的运用

设某产品产量为$Q(Q>0)$，其需求函数为$P(Q)=10-\frac{Q}{5}$，成本函数为$C(Q)=50+2Q$，则产量为多少时利润L最大?

解： 总收益函数为 $R(Q)=Q\cdot P(Q)=10Q-\dfrac{Q^2}{5}$

利润函数为 $L(Q)=R(Q)-C(Q)=10Q-\dfrac{Q^2}{5}-50-2Q$

$$=8Q-\frac{Q^2}{5}-50$$

$L'(Q)=8-\dfrac{2}{5}Q$ $\qquad L''(Q)=-\dfrac{2}{5}$

令$L'(Q)=8-\frac{2}{5}Q=0$，解得驻点为$Q=20$，又因为$L''(20)=-\frac{2}{5}<0$

且无不可导点。故 $Q=20$ 时， $L(20)$ 为唯一极大值点，且无极小值，

即$L(20)$为最大值。产量$Q=20$时，利润最大。

第三节 变化率及相对变化率在经济学中的运用

设某产品产量为$Q(Q>0)$，其需求函数为$P(Q)=10-\frac{Q}{5}$，成本函数为$C(Q)=50+2Q$，则产量为多少时利润L最大?

利润函数：$L(Q)=R(Q)-C(Q)$

$$L'(Q)=R'(Q)-C'(Q)$$

利润L最大时 $L'(Q)=R'(Q)-C'(Q)=0$

即$R'(Q)=C'(Q)$：边际收益等于边际成本