



微积分I-微分与导数

3学分、经管类外招

数学系王伟文



课程网页二维码

反函数求导公式

设函数 $y = f(x)$ 在点 x 处有不等于零的导数 $f'(x)$, 并且其反函数 $x = f^{-1}(y)$ 在点 x 的对应点 y 处连续, 则 $[f^{-1}(y)]'$ 存在, 并且

$$[f^{-1}(y)]' = \frac{1}{f'(x)}$$

或

$$f'(x) = \frac{1}{[f^{-1}(y)]'}$$

原函数 $y = f(x)$ 与其反函数 $x = f^{-1}(y)$ 的导数互为倒数

反函数求导公式

原函数

反函数

$$y = \log_a x \ (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$$

$$x = a^y \ (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$$

导数

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(a^y)' = a^y \cdot \ln a$$

$$f'(x) = \frac{1}{[f^{-1}(y)]'}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} = \frac{1}{a^y \cdot \ln a} = \frac{1}{(a^y)'}$$

隐函数的导数

如果一个已知的二元方程 $F(x, y) = 0$ 确定了一个函数 $y = f(x)$, 则称该函数为隐函数。

- 如 $F(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 4 = 0$, 确定了对应法则 f 未知(“隐”的含义)的一个函数 $y = f(x)$, 称之为隐函数; 注意不是说 $F(x, y)$ 是隐函数。
- 隐函数求导, 即在对应法则 f 未知的情形下, 利用已知的方程 $F(x, y) = 0$, 求得导数 $y' = f'(x)$

不知道函数表达式也能对函数求导? !



隐函数的导数

例 求由方程 $x^2 + y^2 = a^2$ 所确定的隐函数 $y = f(x)$ 的导数

解： 已知 y 可以表示为 x 的函数，即 $y = f(x)$

因此，方程 $x^2 + y^2 = a^2$ 可以改写为

$$x^2 + [f(x)]^2 = a^2$$

上述方程两端同时对 x 求导数

$$(x^2 + [f(x)]^2)' = (a^2)'$$

等式两端同时对相同的变量求导不会改变等号

$$\text{等式左边} = (x^2)' + \{[f(x)]^2\}' = 2x + 2f(x) \cdot f'(x)$$

$$\text{等式右边} (a^2)' = 0$$

$$\text{即 } 2x + 2f(x) \cdot f'(x) = 0 \quad \text{解得 } f'(x) = -\frac{x}{f(x)} = -\frac{x}{y}$$

隐函数的导数

课本例15 方程 $y = x \ln y$ 确定 y 是 x 的函数，求 y 的导数。

解： 已知 y 可以表示为 x 的函数

$$y = x \cdot \ln y$$

上述方程两端同时对 x 求导数

$$y' = [x \cdot \ln y]'$$

等式两端同时对相同的变量求导不会改变等号

等式左边 = y'

等式右边 $[x \cdot \ln y]' = (x)' \cdot \ln y + x \cdot [\ln y]' = \ln y + x \cdot \frac{1}{y} y'$

即

$$y' = \ln y + x \cdot \frac{1}{y} y'$$

$$\text{解得 } y' = \frac{y \cdot \ln y}{y - x}$$

隐函数的导数

课本例15 方程 $y = x \ln y$ 确定 y 是 x 的函数，求 y 的导数。

解：已知 y 可以表示为 x 的函数，即 $y = f(x)$

因此，方程可以 $y = x \ln y$ 改写为

$$f(x) = x \cdot \ln f(x)$$

上述方程两端同时对 x 求导数

等式两端同时对相同的变量求导不会改变等号

$$[f(x)]' = [x \cdot \ln f(x)]'$$

$$\text{等式左边} = [f(x)]' = f'(x)$$

$$\text{等式右边} [x \cdot \ln f(x)]' = (x)' \cdot \ln f(x) + x \cdot [\ln f(x)]' = \ln f(x) + x \cdot \frac{1}{f(x)} f'(x)$$

$$\text{即 } f'(x) = \ln f(x) + x \cdot \frac{1}{f(x)} f'(x) \quad \text{解得 } f'(x) = \frac{f(x) \cdot \ln f(x)}{f(x) - x} = \frac{y \cdot \ln y}{y - x}$$

取 $y = f(x)$ 代入原方程

对原方程两端同时关于 x 求导

求导后，将 y 的导数即 $f'(x)$ 视未知数求解

在上述求解结果中再将 $f(x)$ 替换为 y

取对数求导法

求 $y = x^x$ 的导数

取对数求导法

设函数 $y = f(x)$ ，如果对应法则 f 很复杂，在求解导数 y' (或 $f'(x)$)的过程中，可以先对函数左右两端取对数，即

$$\ln y = \ln f(x)$$

然后通过隐函数求导的方法，求解 y' (或 $f'(x)$)，此方法称为“取对数求导法”

- 适用范围：用乘、除、根式表达比较复杂的函数以及幂指函数的情形 $u(x)^{v(x)}$

$$y = \frac{(x+1)\sqrt[3]{x-1}}{(x+4)^2 e^x}$$

$$y = \sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$$

$$y = x^x$$

对数公式

$$\ln a^b = b \cdot \ln a$$

$$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$$

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

取对数求导法

课本例20 求 $y = x^x$ 的导数。

解： 对函数左右两端取自然对数，即

$$\ln y = \ln x^x$$

$$\ln y = x \ln x$$

两边对 x 求导

$$\begin{aligned}\frac{1}{y}y' &= (x)' \cdot \ln x + x \cdot (\ln x)' \\ &= 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1\end{aligned}$$

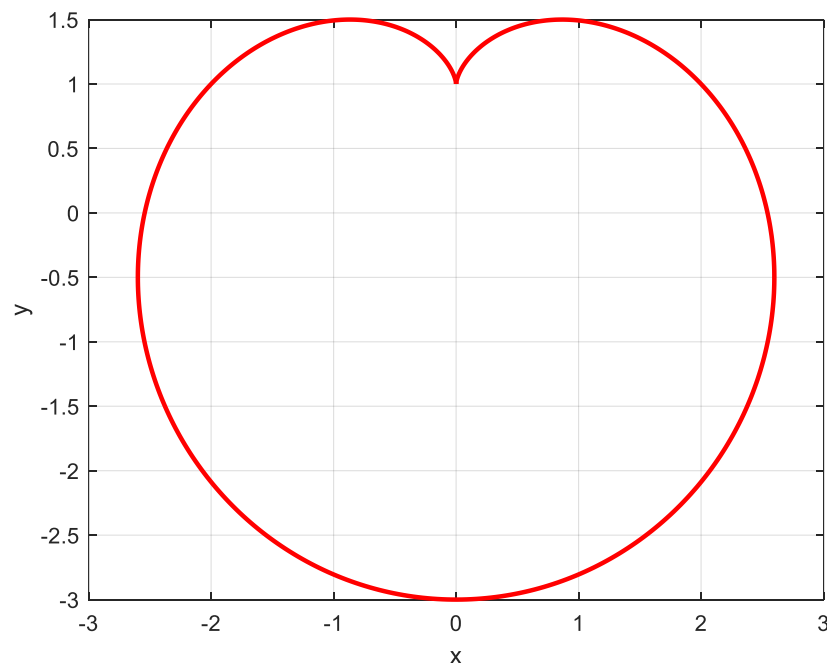
解得

$$\begin{aligned}y' &= y \cdot (\ln x + 1) \\ &= x^x \cdot (\ln x + 1)\end{aligned}$$

由参数方程所确定的函数导数

若参数方程 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ 确定 y 是 x 的函数，则称此函数关系为由参数方程所确定的函数。

$$\begin{cases} x = 2(\sin t - \frac{1}{2}\sin 2t) \\ y = 2(\cos t - \frac{1}{2}\cos 2t) \end{cases}, (0 \leq t \leq 2\pi)$$



由参数方程所确定的函数导数

若参数方程 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ 确定 y 是 x 的函数，则称此函数关系为由参数方程所确定的函数。

- 设 $x = \varphi(t)$ 有连续的反函数 $t = \varphi^{-1}(x)$ ，同时 $\varphi'(t)$ 和 $\psi'(t)$ 存在，且 $\psi'(t) \neq 0$ ，由参数方程 y 与 x 构成复合函数 $y = \psi[\varphi^{-1}(x)]$

利用反函数求导与复合函数求导法则，有

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

由参数方程所确定的函数导数

课本例22 已知 $\begin{cases} x = 2t \\ y = \ln(1+t) \end{cases}$, 求 $\frac{dy}{dx}$

解:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{1+t}$$

$$\frac{dx}{dt} = 2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{1}{1+t}}{2} = \frac{1}{2(1+t)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

随堂练习

1. 设 y 是 x 的函数，由下列隐函数求导数 y'

$$(1) y^2 - 2xy + 4 = 0$$

$$y' = \frac{y}{y-x}$$

$$(2) (2x)^2 + (2y)^2 = 2$$

$$y' = -\frac{x}{2y}$$

2. 设参数方程 $\begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = e^t \end{cases}$ ，求导数 $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^t}{2t}$$

3. 设参数方程 $\begin{cases} x = t \sin t \\ y = \frac{\cos t}{t} \end{cases}$ ，求导数 $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-t \sin t - \cos t}{t^2(\sin t + t \cos t)}$$

高阶导数

设函数 $f(x) = x^4$ 则 $f'(x) = 4x^3$

$f'(x) = 4x^3$ 仍然是关于 x 的函数

这个函数再对 x 求导数

$$(f'(x))' = (4x^3)' = 12x^2$$

$(f'(x))'$ 可以记为 $f''(x)$ 或 $f^{(2)}(x)$, 称为**函数 $f(x)$ 关于 x 的二阶导数**

类似地, 对二阶导数进一步关于 x 求导数

$$[f^{(2)}(x)]' = (12x^2)' = 24x$$

$[f^{(2)}(x)]'$ 可以记为 $f'''(x)$ 或 $f^{(3)}(x)$, 称为**函数 $f(x)$ 关于 x 的三阶导数**

若对函数 $f(x)$ 上述求导过程重复 n 次, 即得到该函数 **n 阶导数**, 记作

$$f^{(n)}(x), y^{(n)} \quad \text{或} \quad \frac{d^n y}{dx^n}$$

高阶导数

求函数 $y = x^2 + 2x$ 的二阶导数

$$\begin{aligned}\text{解: } y' &= (x^2 + 2x)' \\ &= 2x + 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y^{(2)} &= (2x + 2)' \\ &= (2x)' + (2)' \\ &= 2 + 0 \\ &= 2\end{aligned}$$

随堂练习

1. 求下列函数的二阶导数

(1) $y = \ln x$ 在 $x = 1$ 处

$$y^{(2)} = -\frac{1}{x^2}$$

$$y^{(2)}|_{x=1} = -\frac{1}{1^2} = -1$$

(2) $y = xe^x$

$$y^{(2)} = 2e^x + xe^x$$

微分

设函数 $y = f(x)$ 定义在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 上。当给 x_0 的一个改变量 Δx , $x_0 + \Delta x \in U(x_0)$ 时, 相应的函数改变量 Δy 为

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

如果存在常数 A , 使得 Δy 能够表示为

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$$

则称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可微, 并称 $A \cdot \Delta x$ 为函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的微分, 记作

$$dy|_{x=x_0} = A \cdot \Delta x \quad \text{或} \quad df(x)|_{x=x_0} = A \cdot \Delta x$$

微分

微分与可导等价定理 函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可微的充分必要条件是函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可导, 且我们有

$$dy|_{x=x_0} = f'(x_0) \cdot \Delta x$$

- 若函数 $y = f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上每一点都可微, 则称 f 为 $[a, b]$ 上的可微函数, 函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上任意一点的微分记作

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x$$

- 特别地, 若 $y = x$

$$dy = dx = (x)' \cdot \Delta x = \Delta x$$

- 故函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上任意一点的微分记作

$$dy = f'(x)dx \quad (\text{重要公式})$$

微分与可导等价证明过程-充分性

设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可微, 则

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$$

等式两端同时除 Δx

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}$$

A 即为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$

取极限, 令 $\Delta x \rightarrow 0$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} \right)$$

又因为 $o(\Delta x)$ 是 Δx 的高阶无穷小, 即 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = 0$, 所以

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} \right) = A$$

$$\text{故 } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) = A$$

微分与可导等价证明过程-必要性

设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可导, 即 $f'(x_0)$ 存在, 则

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$

由极限存在的性质, 知

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha$$

其中 α 为 $\Delta x \rightarrow 0$ 的无穷小量。所以

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 即为微分式中的 A

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha \cdot \Delta x$$

又因为 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha = 0$, 故 $\alpha \cdot \Delta x$ 为 Δx 的高阶无穷小 ($\Delta x \rightarrow 0$), 记为 $o(\Delta x)$,

从而有

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$$

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$$

根据微分定义, 因此有

$$dy|_{x=x_0} = f'(x_0)\Delta x$$

微分

例 求函数 $y = \ln x$ 的微分在 $x = 2$ 处的微分

解： 函数 $y = \ln x$ 在 $x = 2$ 处的导数为

$$y'|_{x=2} = \frac{1}{2}$$

所以微分为

$$dy|_{x=2} = \frac{1}{2} \cdot dx$$

微分

$dy = f'(x)dx$ 表明函数的微分等于函数的导数与自变量微分的积，例如

$$d(x^a) = ax^{a-1}dx$$

$$d(\sin x) = \cos x dx$$

$$d(\ln x) = \frac{1}{x}dx$$

即对可微函数总有

$$dy = df(x) = f'(x)dx$$

微分

例 求函数 $y = x^2 + 2x$ 的微分

解： 函数 $y = x^2 + 2x$ 的导数为

$$y' = 2x + 2$$

所以微分为

$$dy = (2x + 2)dx$$

微分的运算法则

微分的四则运算法则与导数的四则运算法则一致

$$d[u(x) \pm v(x)] = du(x) \pm dv(x)$$

$$d[u(x) \cdot v(x)] = v(x) du(x) + u(x) dv(x)$$

$$d\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right) = \frac{v(x) du(x) - u(x) dv(x)}{[v(x)]^2}$$

$$d[f[g(x)]] = f'(g(x)) dg(x) = f'(g(x)) g'(x) dx$$

微分的运算法则

课本例2 设 $y = \sin(2x + 3)$, 求 dy

解:

$$\begin{aligned} dy &= d\sin(2x + 3) \\ &= \cos(2x + 3) d(2x + 3) \\ &= \cos(2x + 3) [d(2x) + d3] \\ &= \cos(2x + 3) [2dx + 0] \\ &= 2\cos(2x + 3) dx \end{aligned}$$

随堂练习

求下列函数的微分

(1) $y = x^3$ 在 $x = 1$ 处

$$dy|_{x=1} = dx^3|_{x=1} = 3 \cdot 1^2 dx = 3$$

(3) $y = \cos x + 2x$

$$dy = -\sin x dx + 2dx$$

(5) $y = \ln(1 + x)$

$$dy = \frac{1}{1+x} dx$$

(2) $y = xe^x$

$$dy = e^x dx + xe^x dx$$

(4) $y = \frac{\ln x}{x}$

$$dy = \frac{dx - \ln x dx}{x^2}$$

微分在近似计算中的应用

由微分的定义，如果函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处可微，则有

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$$

若 $|\Delta x|$ 很小，可忽略高阶无穷小量 $o(\Delta x)$ ，则有

$$\Delta y \approx f'(x_0)\Delta x$$

即

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$$

所以 $f(x_0 + \Delta x)$ 可以近似计算得到，

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

微分在近似计算中的应用

微分近似计算公式 设函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处可微, 若 $|\Delta x|$ 很小

则 $f(x_0 + \Delta x)$ 可以近似计算, 即

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

例 求 $\ln 1.01$ 的近似值

解: 原问题即为求函数 $y = f(x) = \ln x$ 在 $x = 1.01$ 处的近似值

由微分近似计算公式, 得到

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x = \ln x_0 + \frac{1}{x_0}\Delta x$$

取 $x_0 = 1$, $\Delta x = 0.01$ 代入上式

$$\ln 1.01 = f(1.01) = f(1 + 0.01) \approx \ln 1 + \frac{1}{1} \times 0.01 = 0.01$$