微积分I-函数连续性

3学分、经管类外招

数学系王伟文

课程网页二维码

https://wangyuanhao.github.io/calculus_course_webpage/

内容回顾

极限存在判定定理 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$成立的**充分必要条件**是

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = A$$

充分 P ⇄ Q **必要**

若$p(x)$为多项式则

$$\lim_{x\to x_0} p(x) = p(x_0)$$

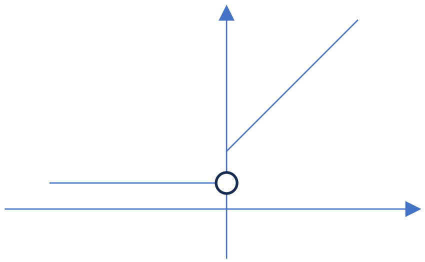
思考：对于任意函数$f(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$是否成立?

内容回顾

思考：对于任意函数$f(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$是否成立?

反例

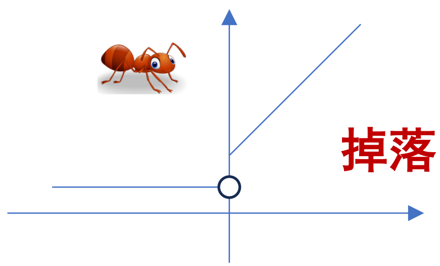
设函数$f(x)=\begin{cases}1, & x<0\\ x+2, & x\geq 0\end{cases}$，极限$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$是不存在，因此$\lim\limits_{x\to 0} f(x)\neq f(0)=0$

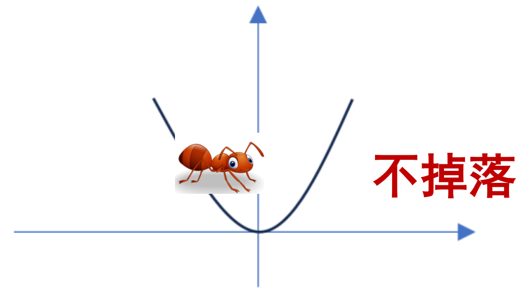


满足什么性质的函数可以保证公式$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$成立?

引例

对比函数 $f(x)=\begin{cases}1, & x<0\\ x+2, & x\geq 0\end{cases}$及函数$g(x)=x^2$的图像，想象一只小蚂蚁在$x=0$附近爬行时是否会掉落到图像的下方。





$\lim\limits_{x\to 0} f(x) \neq f(0)=0$　　　　$\lim\limits_{x\to 0} g(x) = g(0)=0$

猜测：小蚂蚁在$x=x_0$附近爬行时不会掉落到函数图像下方，

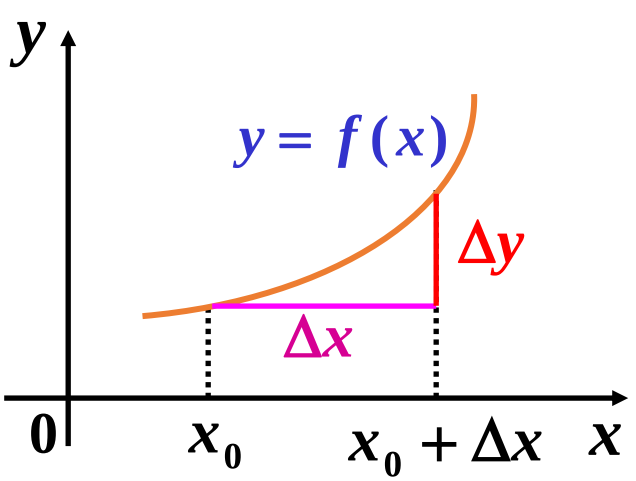
则$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$成立。

连续

函数的连续性

（一）函数的改变量

设函数$y=f(x)$在点x_0的某一邻域$U(x_0,\delta)$内有定义，对于任意$x\in\dot{U}(x_0,\delta)$, 称$\boldsymbol{\Delta x = x - x_0}$为自变量在$x_0$处的**改变量**，$\boldsymbol{\Delta y = f(x) - f(x_0)}$称为函数$f(x)$相应于$\Delta x$的**改变量**



函数的连续性

（二）连续函数的概念

函数$y=f(x)$在x_0处连续

设函数$y=f(x)$在点x_0的某一邻域$U(x_0,\delta)$内有定义，若

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$$

则称**函数$y=f(x)$在点x_0处连续。**

令$x=x_0+\Delta x$，则$x\to x_0\,(\Delta x\to 0)$

故$\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=\lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=0$

函数$y=f(x)$在点x_0处连续 ⟹ $\boxed{\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)}$

函数的连续性

（二）连续函数的概念

函数$y = f(x)$在x_0处连续

设函数$y=f(x)$在点x_0的某一邻域$U(x_0,\delta)$ 内有定义，若极限$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$存在，且有

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

则称**函数$y=f(x)$在点x_0处连续。**

- **多项式$p(x)$总是连续的，所以**

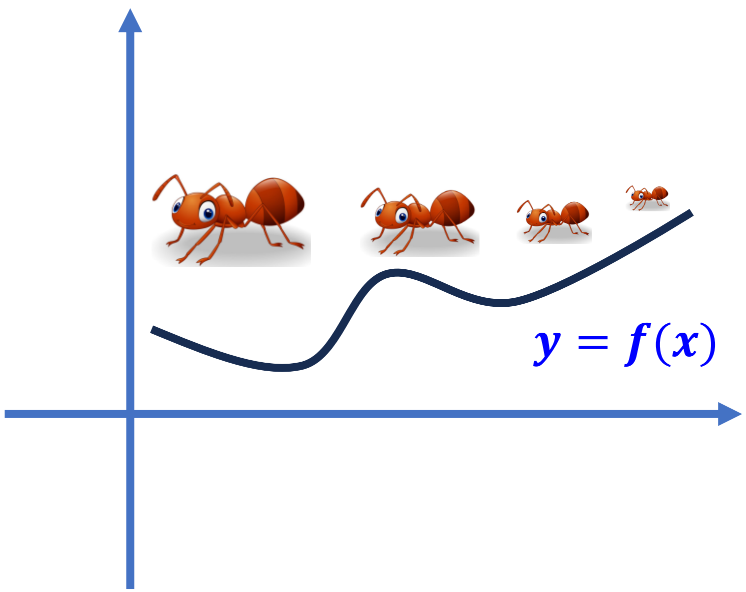
$$\lim_{x \to x_0} p(x) = p(x_0)$$

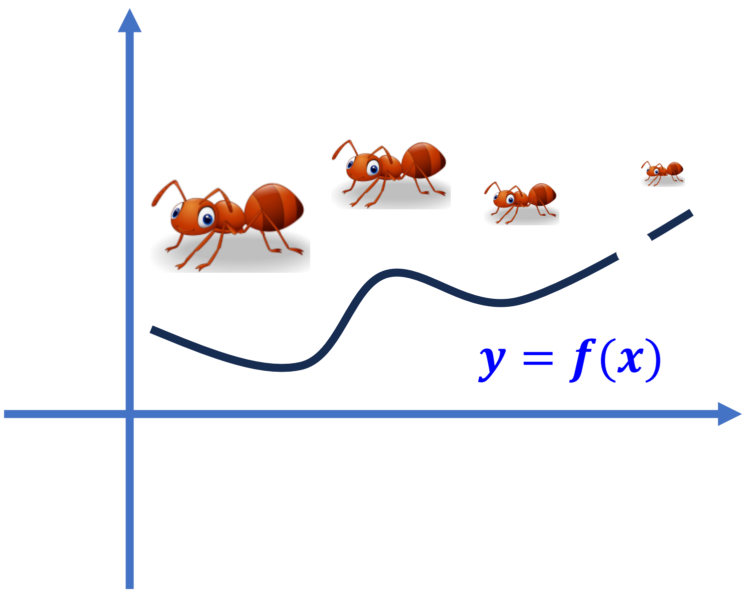
- **正弦、余弦函数总是连续的，所以**

$$\lim_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0 \qquad \lim_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$$

函数的连续性

（二）连续函数的概念





任意大小的蚂蚁在函数图像上爬行都不会掉到函数图像的下方

函数的连续性

(二) 连续函数的概念

函数$y=f(x)$在区间[a, b]上连续

如果函数$y=f(x)$在区间$[a,b]$上每一点都连续，则称**函数$y=f(x)$在区间$[a,b]$上连续**，并称$[a,b]$**是$f(x)$的连续区间**。

- **若函数$y=f(x)$在定义域上连续，则称该函数为连续函数**

函数的连续性

(二) 连续函数的概念

常数函数 $y = C$（C是常数）

幂函数 $y = x^{a}$（a为实数）

$\boldsymbol{y = x^{-1} = \frac{1}{x}}$，定义域为$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ **不是连续函数**

$y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$，定义域为$[0, +\infty)$

指数函数 $y = a^{x}$（$a > 0$且$a \neq 1$），其定义域为$(-\infty, +\infty)$

对数函数 $y = \log_{a} x$（$a > 0$且$a \neq 1$），其定义域为$(0, +\infty)$

三角函数

$$y = \sin x, y = \cos x$$

$$\boldsymbol{y = \tan x}$$

不是连续函数

反三角函数 $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \arctan x$

函数的连续性

（二）连续函数的概念

课本例2 证明函数$y = x^2$在给定x_0处连续

解 设在x_0处的自变量改变量为Δx， 则相应的函数改变量为

$$\Delta y = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$$

相应地

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} [2x_0 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2] = 2x_0 \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x + \left[\lim_{\Delta x \to 0} \Delta x\right]^2 = 0$$

由连续性的定义知$y = x^2$在给定x_0处连续

随堂练习

- 判断函数$f(x)$在$x=0$处是否连续

(1) $f(x)=\begin{cases}1, x<0\\ e^x, x\geq 0\end{cases}$

(2) $f(x)=\begin{cases}x, x<0\\ -x, x\geq 0\end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, x<0\\ e^x, x\geq 0\end{cases}$

(4) $f(x)=\begin{cases}x^2, x<0\\ x, x\geq 0\end{cases}$

(1) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} 1=1$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} e^x=1$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1=f(0)$，连续

(2) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} x=0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} -x=0$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0=f(0)$，连续

(3) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} e^x=1$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)\neq f(0)$，不连续

(4) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} x^2=0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x=0$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0=f(0)$，连续

函数的连续性

（三）函数的间断点

如果函数$y=f(x)$在点x_0处不满足连续条件，则称函数$f(x)$在点x_0处不连续，或称**函数$f(x)$在点x_0处间断**，点x_0称为$f(x)$的间断点。

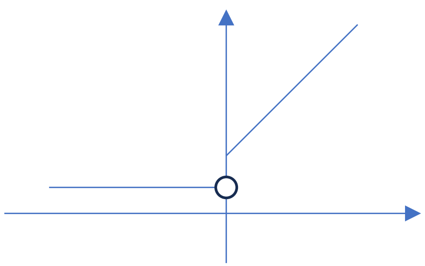
函数$f(x)$在点x_0处间断有三种情形

- **在点x_0处$f(x)$没有定义**

$$y=f(x)=\frac{1}{x}(x\neq 0)$$

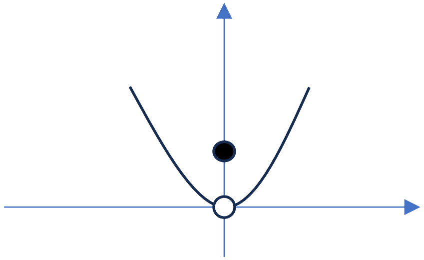
- **$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在**

$$f(x)=\begin{cases}1, & x<0\\ x+2, & x\geq 0\end{cases}$$



- **在点x_0处$f(x)$有定义，且$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在，但$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$**

$$f(x)=\begin{cases}x^2, x\neq 0\\ 1, x=0\end{cases}$$



函数的连续性

(四) 函数间断点的类型

- 如果函数$f(x)$在点$x = x_0$处左、右极限均为常数，但不全等于$f(x_0)$，则称点$x = x_0$为**第一类间断点**；
- 如果函数$f(x)$在点$x = x_0$处的左、右极限至少有一个不为常数，则称点$x = x_0$为**第二类间断点**

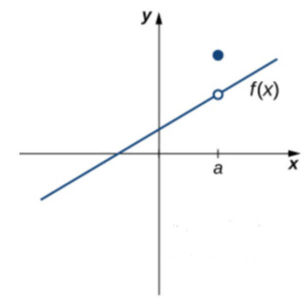
- 在第一类间断点中，若函数$f(x)$在$x = x_0$处左、右极限均为常数在且相等，但不等于$f(x_0)$，即

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq f(x_0)$$

或

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \text{ 存在且有 } \lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0),$$

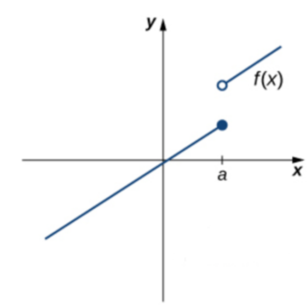
则称点$x = x_0$为**可去间断点**。



- 在第一类间断点中，若函数$f(x)$在$x = x_0$处左、右极限均为常数但不相等，即

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

则称点$x = x_0$为**跳跃间断点**。



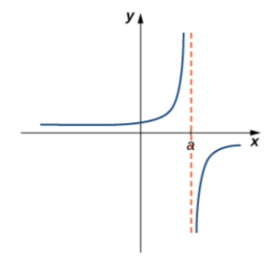
函数的连续性

(四) 函数间断点的类型

- 如果函数$f(x)$在点$x=x_0$处左、右极限均为常数，但不全等于$f(x_0)$，则称点$x=x_0$为**第一类间断点**；
- 如果函数$f(x)$在点$x=x_0$处的左、右极限至少有一个不为常数，则称点$x=x_0$为**第二类间断点**

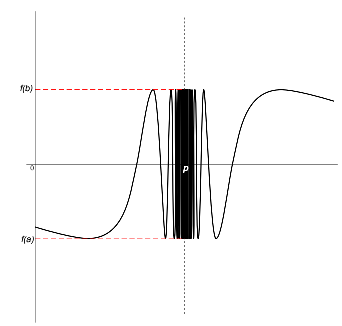
- 在第二类间断点中，如果$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$和$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$**至少有一个是**$\infty$, 则称点$x=x_0$为**无穷间断点**, e. g. ,

$$f(x)=\frac{1}{x-1}\text{在}x=1\text{处}$$



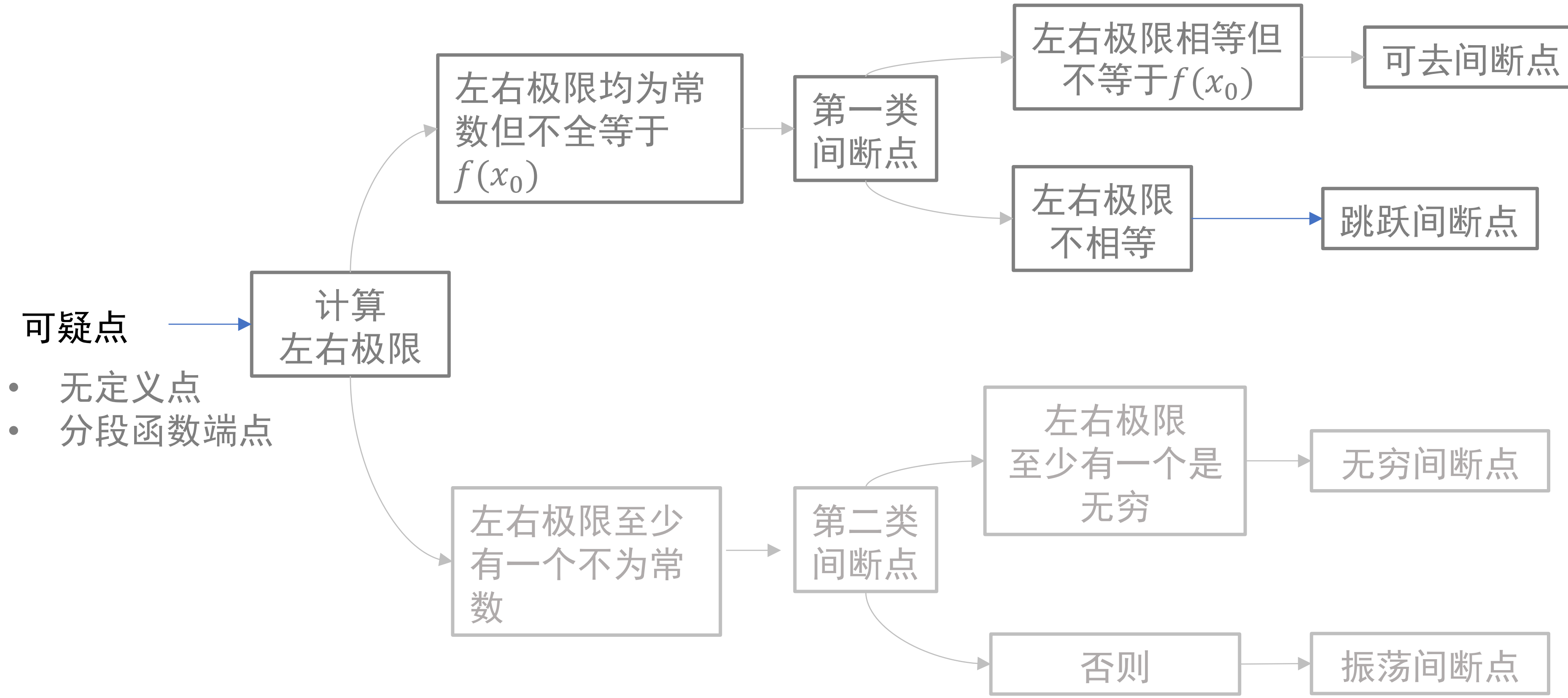
- 否则，则称点$x=x_0$为**振荡间断点**, e. g. ,

$$f(x)=\sin\frac{1}{x}\text{在}x=0\text{处}$$



函数的连续性

（四）函数间断点的类型



$f(x)=\sin\frac{1}{x}$在$x=0$处

随堂练习

- 判断$x=x_0$函数$f(x)$是否为函数的间断点，若是，请判断其间断点类型

(1) $f(x)=\begin{cases} x-1, x<0 \\ x+1, x\geq 0 \end{cases}$在点$x=0$处

(2) $f(x)=\frac{1}{x-1}$在点$x=1$处

（1） 跳跃间断点

（2） 无穷间断点

（3） $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\neq 1 \\ 1, & x=1 \end{cases}$在点$x=1$处

（3） 可去间断点

连续函数的运算法则

有限四则运算不改变函数的连续性：如果函数$f(x)$和$g(x)$在点x_0处连续，则这两个函数

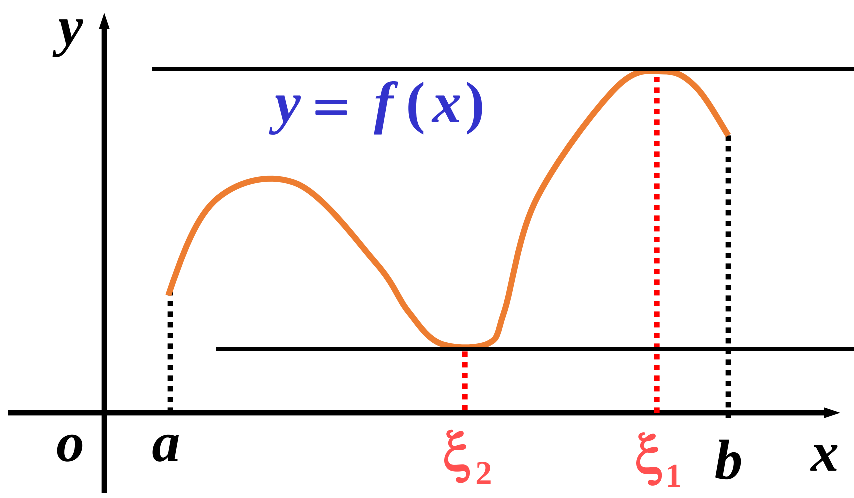
- **和：** $f(x)+g(x)$
- **差：** $f(x)-g(x)$
- **积：** $f(x)\cdot g(x)$
- **商：** $\frac{f(x)}{g(x)}\,(g(x_0)\neq 0)$

均在点x_0处连续

闭区间连续函数的性质

(一) 最大值与最小值定理

- 如果函数$y=f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则$f(x)$在这个区间上有界；
- 如果函数$y=f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则它在这个区间上一定有最大值与最小值

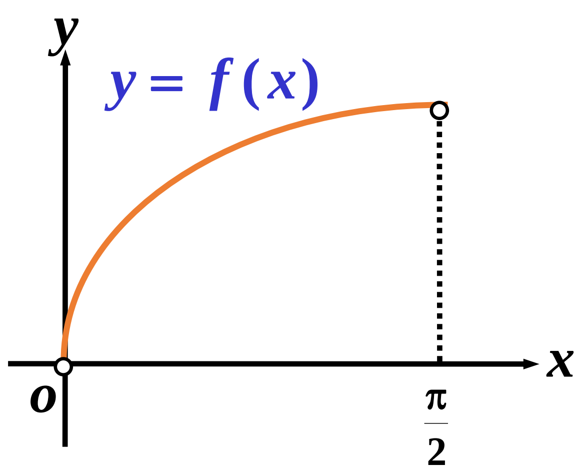


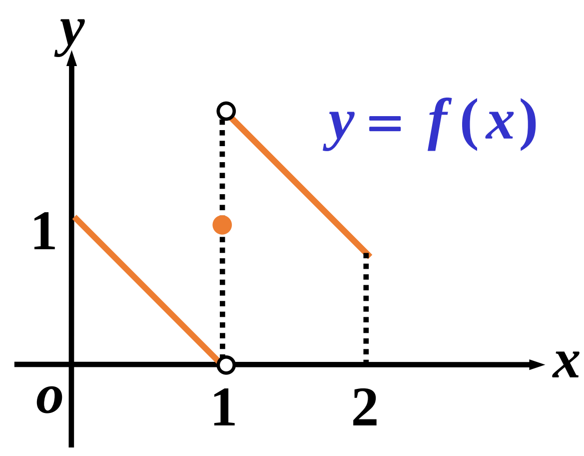
闭区间连续函数的性质

(一) 最大值与最小值定理

- 如果函数$y = f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续，则$f(x)$在这个区间上有界；
- 如果函数$y = f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续，则它在这个区间上一定有最大值与最小值

- 若区间是开区间，定理不一定成立；
- 若区间内有间断点，定理不一定成立。

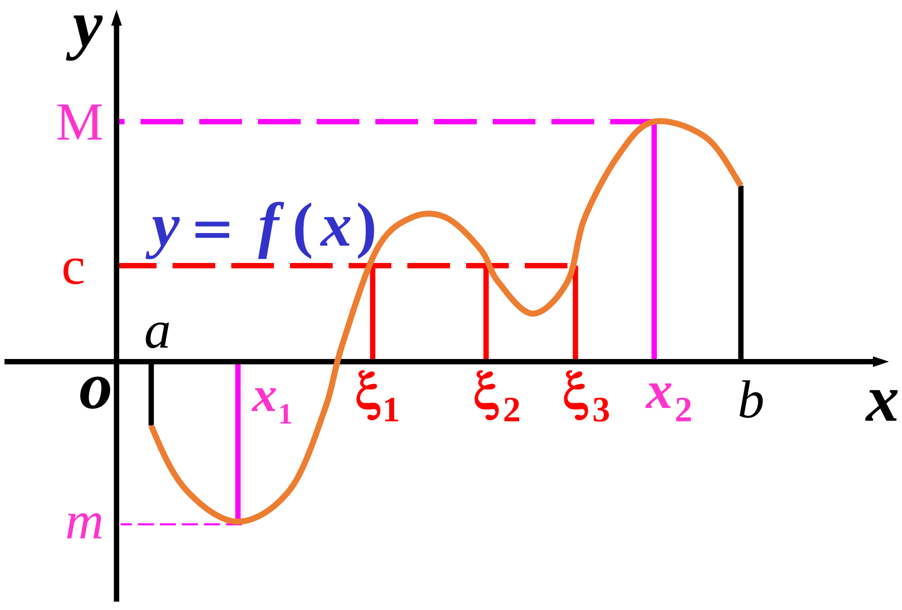




闭区间连续函数的性质

(一) 介值定理

- 如果函数$y=f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，m和M分别为$f(x)$在$[a,b]$上的最大值与最小值，则对介于m和M之间的任一实数c（即$m<c<M$），至少存在一点$\xi\in(a,b)$, 使得$c=f(\xi)$

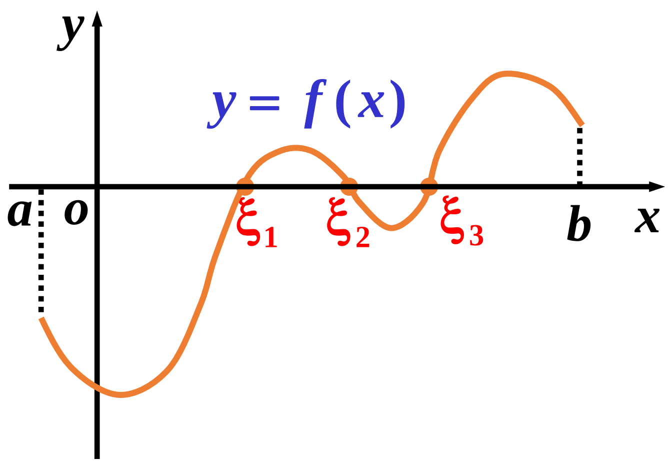


直线y $=c$与曲线$y=f(x)$至少存在一个交点

闭区间连续函数的性质

(一) 介值定理

- 如果函数$y = f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续，且$f(a)$与$f(b)$异号，则至少存在一点$\xi \in (a, b)$使得$f(\xi) = 0$.



连续曲线$y = f(x)$的两个端点分别位于x轴的两侧，则该曲线与x轴至少有一个交点

利用函数连续性求函数极限

(一) 连续函数与极限

函数$y = f(x)$在x_0处连续

设函数$y=f(x)$在点x_0的某一邻域$U(x_0,\delta)$ 内有定义，若极限$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在, 且有

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

则称**函数$y=f(x)$在点x_0处连续。**

若函数$y=f(x)$在点x_0处连续, 函数在该点的极限$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$就是函数在该点的取值$f(x_0)$

利用函数连续性求函数极限

(一) 连续函数与极限

函数$y=f(x)$在x_0处连续

设函数$y=f(x)$在点x_0的某一邻域$U(x_0,\delta)$内有定义，若极限$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在, 且有

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

则称**函数$y=f(x)$在点x_0处连续。**

若函数$y=f(x)$在点x_0处连续, 函数在该点的极限$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$就是函数在该点的取值$f(x_0)$

利用函数连续性求函数极限

(一) 连续函数与极限

若函数$y=f(x)$在点x_0处连续，则有

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

例 求$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{e^{x^2}\cos x}{x^2+1}$

解： $f(x) = \dfrac{e^{x^2}\cos x}{x^2+1}$在$x=0$处连续

所以$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{e^{x^2}\cos x}{x^2+1} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x^2}\cos x}{x^2+1} = f(0) = \dfrac{e^{0^2}\cos 0}{0^2+1} = 1$

利用函数连续性求函数极限

(一) 连续函数与极限

若函数$y=f(x)$在点x_0处连续, 则有

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) = f(\lim_{x\to x_0} x)$$

课本例12 求$\lim\limits_{x\to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$

解: $$\lim_{x\to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1$$

连续函数中极限符号与函数符号可以交换