微积分I

3学分、经管类外招

数学系王伟文

课程网页二维码

https://wangyuanhao.github.io/calculus_course_webpage/

第六节　函数的几种简单性质

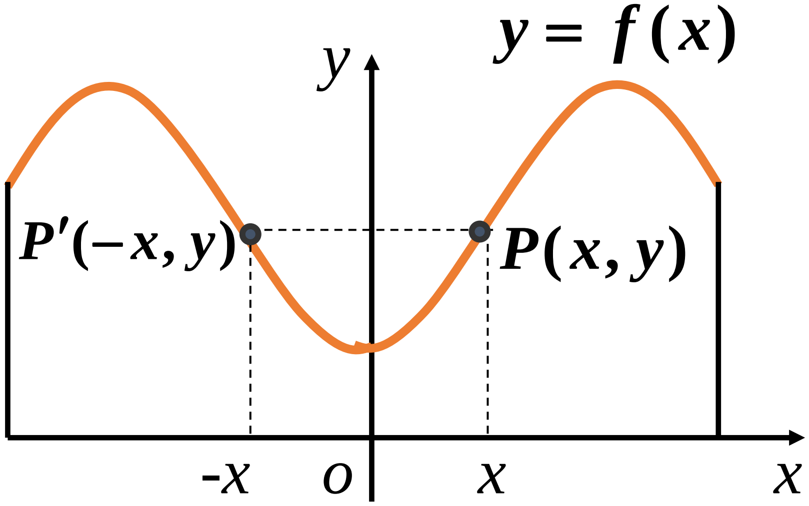
（一）函数的奇偶性

偶函数 设D关于原点对称，对于任意$x \in D$，有

$$f(-x) = f(x),$$

则称$f(x)$为偶函数

- 偶函数的图形关于y轴对称



偶函数

第六节　函数的几种简单性质

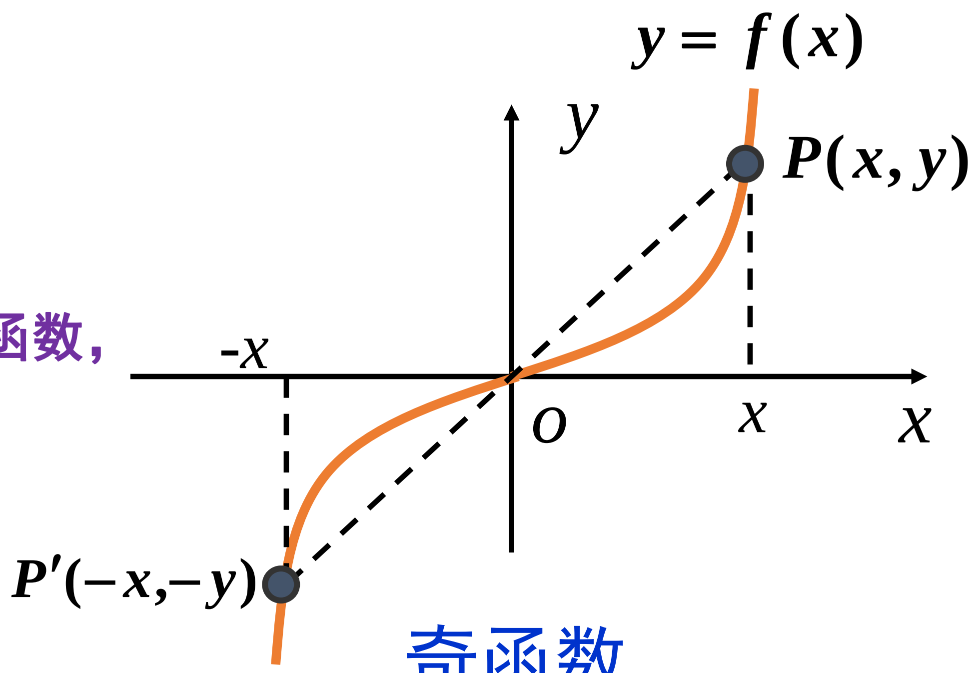
（一）函数的奇偶性

奇函数 **设D关于原点对称**，对于任意$x \in D$，有

$$f(-x) = -f(x),$$

则称$f(x)$为奇函数

- **奇函数的图形关于原点对称**
- **若奇函数在$x = 0$处有定义，则 $f(0) = 0$，即奇函数过原点**
- **既不是偶函数也不是奇函数的函数，可简称非奇非偶函数**



奇函数

随堂练习

- 请判断以下函数的奇、偶性

(1) $y = x^2$

(2) $y = \sqrt{(x+1)^2}$

(3) $y = x^2 + 2x$

(1)偶函数

(2) 非奇非偶函数

(3) 非奇非偶函数

(4) $y = |x|$

(5) $y = x^3$

(6) $y = -x^3 - x$

(4) 偶函数

(5)奇函数

(6) 奇函数

(7) $y = \frac{1}{x}$

(8) $y = \frac{x^2+1}{x}$

(9) $y = \frac{1}{x^2+1}$

(7) 奇函数

(8) 奇函数

(9) 偶函数

第六节　函数的几种简单性质

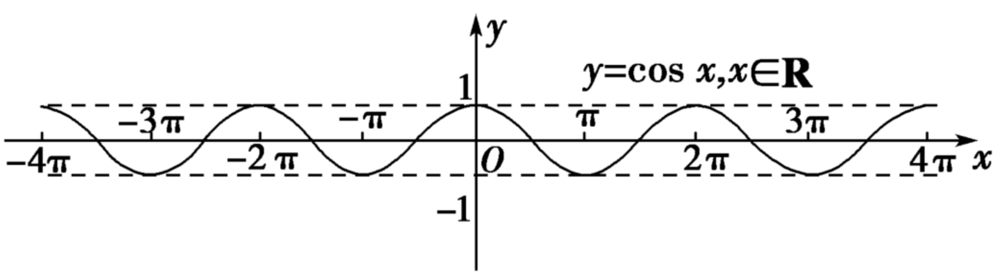
（二）函数的周期性

周期函数　设D为函数$f(x)$的定义域，若存在正常数T，对于任意$x \in D$，有

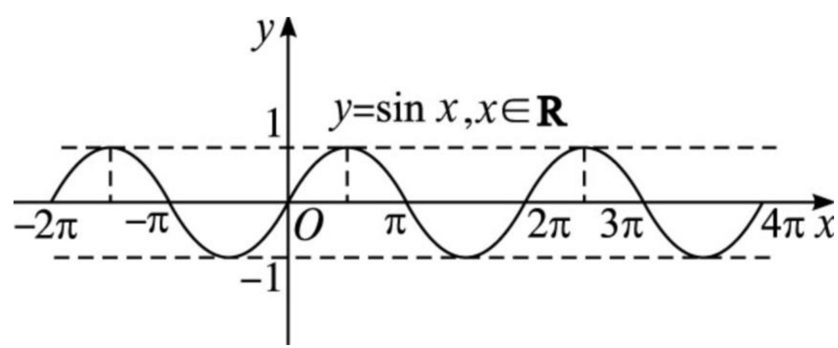
$$f(x+T)=f(x),$$

则称$f(x)$为周期函数，T称为函数的周期，满足上式的最小的T值称为最小正周期

$\cos(x_0+2\pi)=\cos x_0$



$\sin(x_0+2\pi)=\sin x_0$



第六节　函数的几种简单性质

（三）函数的单调性

单调增加　设函数$f(x)$的在区间(a,b)上有定义，若对于任意$x_1,x_2\in(a,b)$,

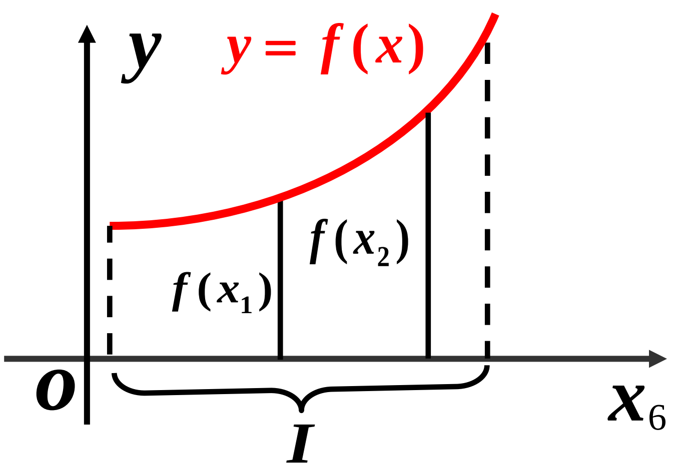
当$x_1<x_2$时，总有$f(x_1)<f(x_2)$,

则称$f(x)$在区间(a,b)上是单调增加的.

当$x_1<x_2$时，总有$f(x_1)\le f(x_2)$,

则称$f(x)$在区间(a,b)上是单调不减的.

- 若函数在整个定义域上是单调增加或单调不减的，则该函数可称为单调增加或单调不减函数



第六节　函数的几种简单性质

（三）函数的单调性

单调减少　设函数$f(x)$的在区间(a,b)上有定义，若对于任意$x_1, x_2 \in (a,b)$,

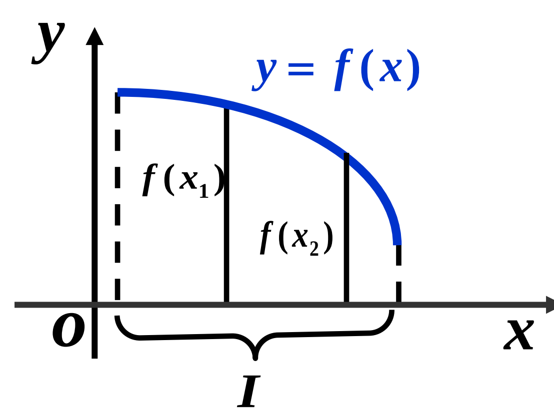
$$\text{当}x_1 < x_2\text{时，总有}f(x_1) > f(x_2),$$

则称$f(x)$在区间(a,b)上是单调减少的.

$$\text{当}x_1 < x_2\text{时，总有}f(x_1) \geq f(x_2),$$

则称$f(x)$在区间(a,b)上是单调不增的.

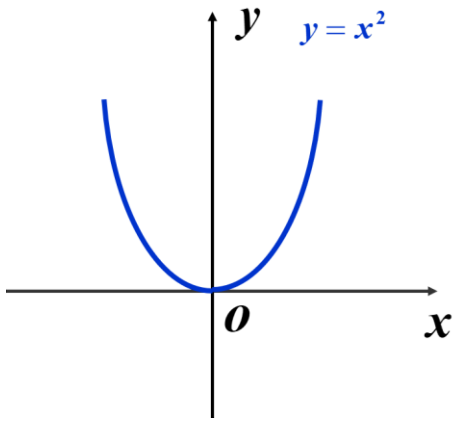
- 若函数在整个定义域上是单调减少或单调不增的，则该函数可称为单调减少或单调不增函数

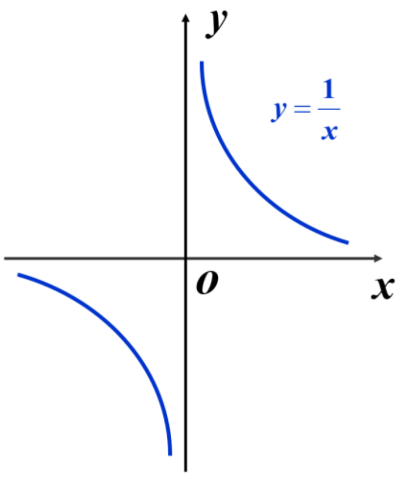


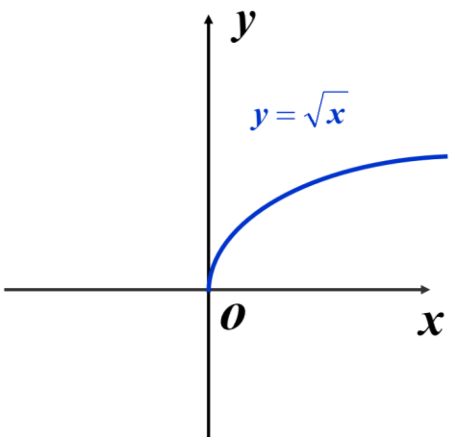
第六节　函数的几种简单性质

（三）函数的单调性

能不能给出一些关于函数单调性的例子？







随堂练习

- 请根据函数的单调性判断函数值的大小关系：≥ 、 ≤或无法判断

1、设$y = f(x)$是在定义域$(-\infty, +\infty)$为单调递增函数，则

(1) $f(1)\ \Omega\ f(2)$　　(2) $f(1)\ \Omega\ f(-1)$　　(3) $f(-1)\ \Omega\ f(-2)$

(1) $f(1) \le f(2)$　　(2) $f(1) \ge f(-1)$　　(3) $f(-1) \ge f(-2)$

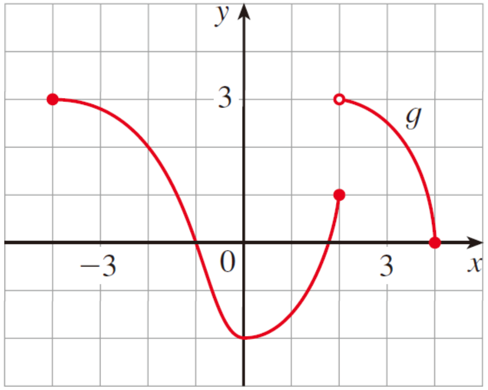
2、设$y = f(x)$是在定义域$(-\infty, +\infty)$为单调递减函数，则

(1) $f(1)\ \Omega\ f(2)$　　(2) $f(1)\ \Omega\ f(-1)$　　(3) $f(-1)\ \Omega\ f(-2)$

(1) $f(1) \ge f(2)$　　(2) $f(1) \le f(-1)$　　(3) $f(-1) \le f(-2)$

3、请根据右侧图像写出函数$y = g(x)$的单调递减区间，图中小方格长度为1

[-4, 0]U[2, 4]



第六节　函数的几种简单性质

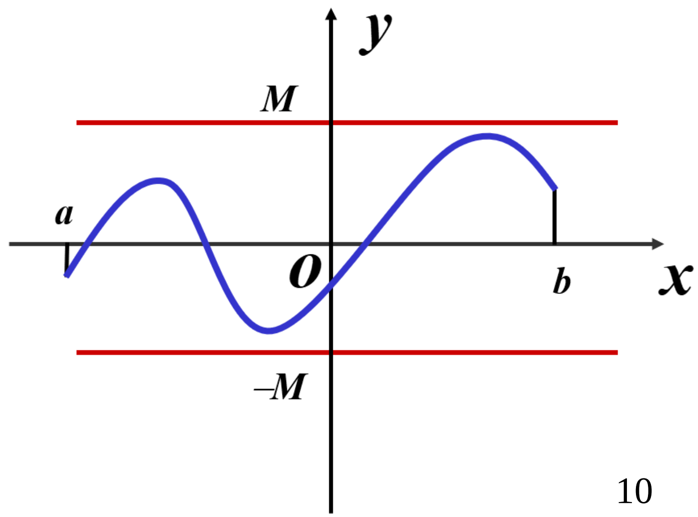
（四）函数的有界性

有界函数　设函数$f(x)$的在区间(a,b)上有定义，若存在一个正数M, 对于任意 $x\in(a,b)$,

$$|f(x)|\le M$$

则称$f(x)$**在**(a,b)**内有界**，如果不存在这样的M, 则称$f(x)$**在**(a,b)**内无界**

- 若函数在整个定义域上有界，则该函数可称为有界函数
- 正弦函数$y=\sin x$是有界函数：$|\sin x|\le 1$
- 余弦函数$y=\cos x$是有界函数：$|\cos x|\le 1$



随堂练习

- 请判断以下函数是否为有界函数

(1) $y=x^2$ (2) $y=\cos x+1$ (3) $y=\frac{1}{x^2+1}$

(1) 无界函数 (2) 有界函数 (3) 有界函数

第七节　反函数与复合函数

（一）反函数

- UP主收入　　视频播放量
- BMI指数　　体重
- 超市利润　　成本

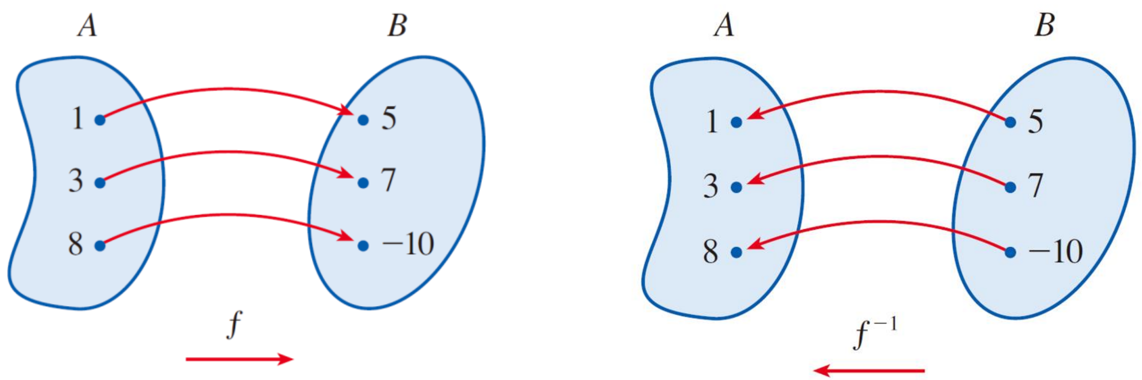
函数关系

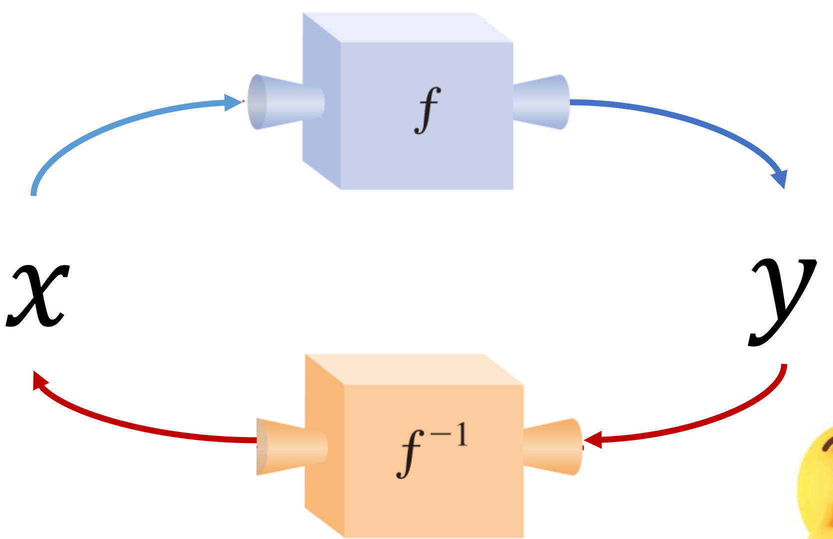
因变量　　自变量

反函数

第七节　反函数与复合函数

（一）反函数





互为唯一，即一一对应关系

[SCW]

第七节　反函数与复合函数

（一）反函数

反函数 设$y=f(x)$是定义在$D(f)$上的一个函数，值域为$Z(f)$，如果对每一个$y\in Z(f)$有一个确定且满足$y=f(x)$的$x\in D(f)$与之对应，其对应规则记作f^{-1}，称$x=f^{-1}(y)$为函数$y=f(x)$的**反函数**，其**定义域为$Z(f)$**

- **函数$y=f(x)$的反函数$x=f^{-1}(y)$**也是**一个函数，所以需要满足，存在唯一的x与y对应**

$$x \underset{x=f^{-1}(y)}{\overset{y=f(x)}{\rightleftarrows}} y$$

互为唯一，即一一对应关系

第七节　反函数与复合函数

（一）反函数

例 设$y = f(x)$存在反函数，若$f(1) = 3, f(2) = 5, f(-1) = 0$，请找出$f^{-1}(0), f^{-1}(5), f^{-1}(3)$的值

$$f^{-1}(0) = -1, f^{-1}(5) = 2,\ f^{-1}(3) = 1$$

第七节　反函数与复合函数

（一）反函数

例　求$y = 3x - 2$的反函数

第七节　反函数与复合函数

（一）反函数

例　求$y = 3x - 2$的反函数

解　由$y = 3x - 2$，知

$$x = \frac{y+2}{3}$$

故原函数的反函数为

$$x = \frac{y+2}{3}$$

求反函数的步骤

Step 1：将函数$y = f(x)$视为关于x的方程

Step 2：将y看作已知的，x看作未知的，从此方程求解出x

Step 3：解的表达式$x = f^{-1}(y)$即为反函数

Step 4：写出此时反函数的定义域即为原函数$y = f(x)$的值域，即y的取值范围

随堂练习

- 请求出下列函数的反函数, 注意要写明定义域, 若反函数不存在请指明理由

$(1)\ y = f(x) = x$

$(1)\ x = f^{-1}(y) = y, y \in \mathbb{R}$

$(2)\ y = f(x) = \frac{1}{x}$

$(2)\ x = f^{-1}(y) = \frac{1}{y}, y \neq 0$

$(3)\ y = f(x) = 2x + 1$

$(3)\ x = f^{-1}(y) = \frac{y-1}{2}, y \in \mathbb{R}$

$(4)\ y = f(x) = |x|$

(4) 反函数不存在，当$y = 1$时，$x = 1$或$x = -1$，也就是说，不存在唯一的x与y对应

$(5)\ y = f(x) = 1 - x^2, x \geq 0$

$(5)\ x = f^{-1}(y) = \sqrt{1-y}, y \leq 1$

第七节　反函数与复合函数

(一) 复合函数

$$y = \log_{10}(x^2 + 1)$$

$$y = e^{\sin x}$$

$$y = (x + 1)^2$$

一个复杂的函数是不是可以拆分成好几个简单函数依次计算?

$$x \longrightarrow \boxed{\blacksquare^2 + 1} \longrightarrow x^2 + 1 \longrightarrow \boxed{\log_{10} \blacksquare} \longrightarrow \log_{10}(x^2 + 1)$$

$$x \longrightarrow \boxed{\sin \blacksquare} \longrightarrow \sin x \longrightarrow \boxed{e^{\blacksquare}} \longrightarrow e^{\sin x}$$

第七节 反函数与复合函数

(一) 复合函数

任意的简单函数都能通过依次计算得到一个复杂的函数吗？

$$y = \log_{10}(-(x^2 + 1))$$

对数内真数小于0，不合法!!!

第七节　反函数与复合函数

(一) 复合函数

复合函数　设**外函数**$y=f(u)$的定义域为$D(f)$，**内函数**$u=\varphi(x)$的值域为$Z(\varphi)$，若$\boldsymbol{Z(\varphi)\cap D(f)\neq\emptyset}$，则称$y=f[\varphi(x)]$为**复合函数**。

内函数　　**外函数**

$\boldsymbol{\varphi(x)}$　　$\boldsymbol{f(u)}$　　$\boldsymbol{f[\varphi(x)]}$

$\boldsymbol{x} \longrightarrow \boxed{\blacksquare^2+1} \longrightarrow \boldsymbol{x^2+1} \longrightarrow \boxed{\log_{10}\blacksquare} \longrightarrow \boldsymbol{\log_{10}(x^2+1)}$

$$\boldsymbol{y=\log_{10}(x^2+1)=f[\varphi(x)]},\quad \boldsymbol{y=f(u)=\log_{10}u},\quad \boldsymbol{u=\varphi(x)=x^2+1}$$

第七节　反函数与复合函数

(一) 复合函数

例　已知$y = f(u) = \sqrt{u}$，$u = \varphi(x) = 1 - x^2, y = f[\varphi(x)]$是不是复合函数, 若是请写出复合函数的形式及定义域。

解

$$y = f(u) = \sqrt{u}，u = \varphi(x) = 1 - x^2$$

$$D(f) = [0, +\infty)，\qquad Z(\varphi) = (-\infty, 1], \qquad \boldsymbol{Z(\varphi) \cap D(f) \neq \emptyset}$$

$y = f[\varphi(x)]$是复合函数，此时$y = f[\varphi(x)] = \sqrt{1 - x^2}$。

$$1 - x^2 \geq 0，\quad x^2 \leq 1，即 -1 \leq x \leq 1$$

因此复合函数$y = f[\varphi(x)]$的定义域为$[-1,1]$

第七节　反函数与复合函数

(一) 复合函数

例　已知$y=f(u)=\sqrt{u}$，$u=\varphi(x)=-1-x^2, y=f[\varphi(x)]$是不是复合函数。

解

当$a=-1$时，$y=f(u)=\sqrt{u}$，$u=\varphi(x)=-1-x^2$

$$D(f)=[0,+\infty), \qquad Z(\varphi)=(-\infty,-1], \qquad \boldsymbol{Z(\varphi)\cap D(f)=\emptyset}$$

$y=f[\varphi(x)]$不是复合函数。

随堂练习

- 判断下列函数能否构成复合函数，若能写出复合函数$y=f[\varphi(x)]$及其定义域

(1) $y=f(u)=u^2, u=\varphi(x)=x+1$

(1)$y=f[\varphi(x)]=(x+1)^2, x\in\mathbb{R}$

(2) $y=f(u)=\frac{1}{u+1}, u=\varphi(x)=x^2-1$

(2)$y=f[\varphi(x)]=\frac{1}{x^2}, x\neq 0$

(3) $y=f(u)=\ln u, u=\varphi(x)=x^2+1$

(3)$y=f[\varphi(x)]=\ln\left(x^2+1\right), x\in\mathbb{R}$

(4) $y=f(u)=\sqrt{u-1}, u=\varphi(x)=x^2$

(4)$y=f[\varphi(x)]=\sqrt{x^2-1}, x\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$

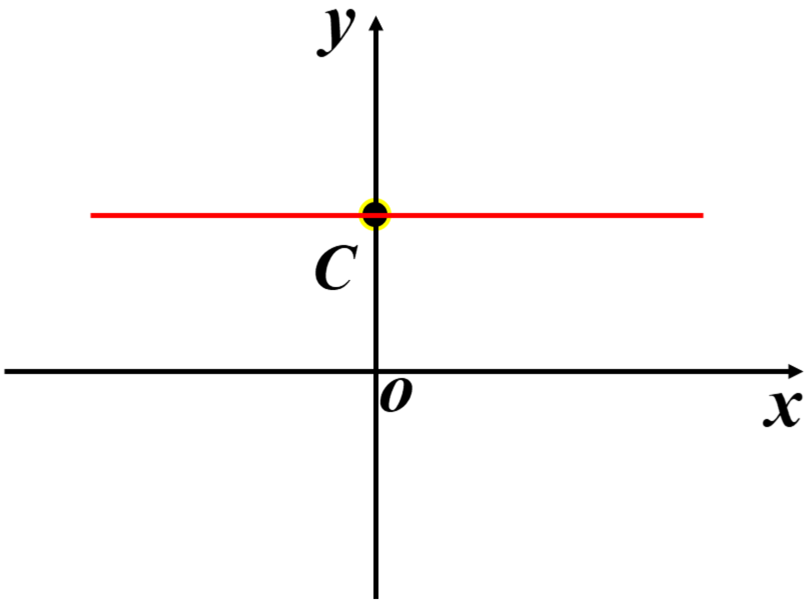
(5) $y=f(u)=\ln u, u=\varphi(x)=-x^2-1$

(5) 不能构成复合函数

第八节 初等函数

基本初等函数

常数函数 $y = C$（C是常数），其定义域为$(-\infty, +\infty)$



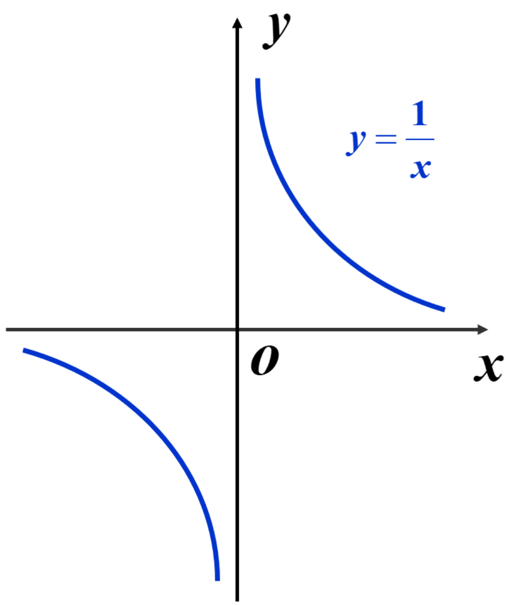
第八节 初等函数

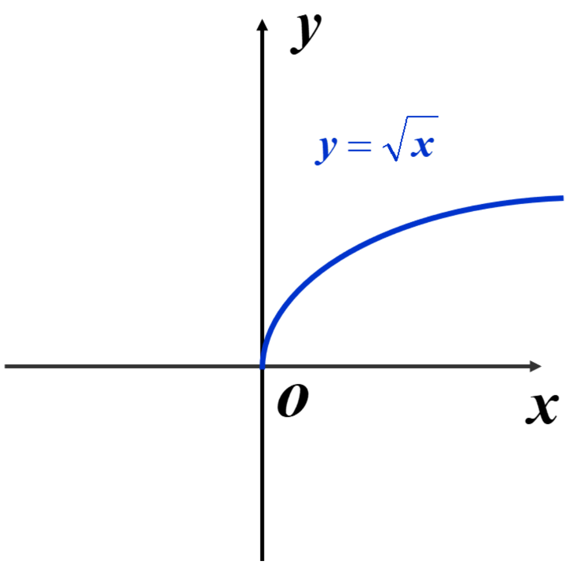
基本初等函数

幂函数 $y = x^a$ (a为实数)，其定义域由a的取值确定。

$a = -1$，$y = x^{-1} = \frac{1}{x}$，定义域为$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

$a = \frac{1}{2}$，$y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$，定义域为$[0, +\infty)$



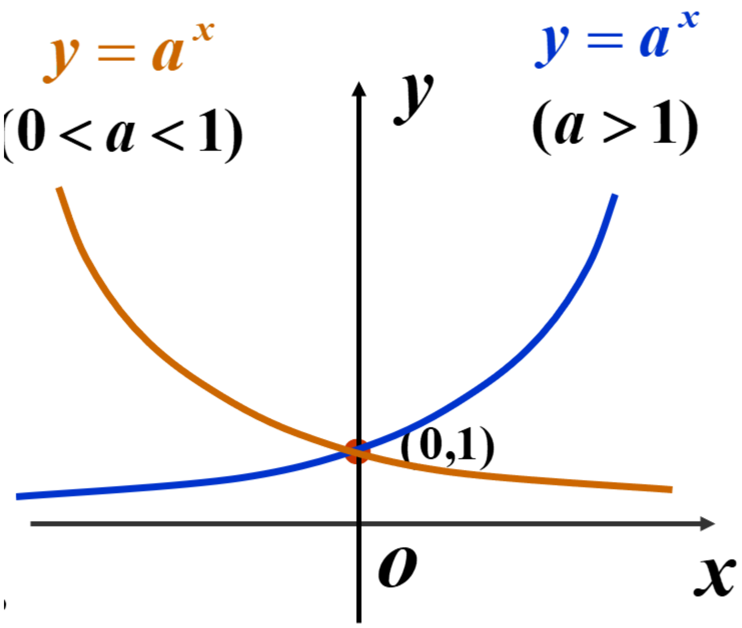


第八节 初等函数

基本初等函数

指数函数 $y = a^x\,(a > 0$且$a \neq 1)$，其定义域为$(-\infty, +\infty)$

- 无论a取何值，都通过点$(0,1)$，且y总大于0
- 当$a > 1$时，函数单调递增
- 当$0 < a < 1$时，函数单调递减

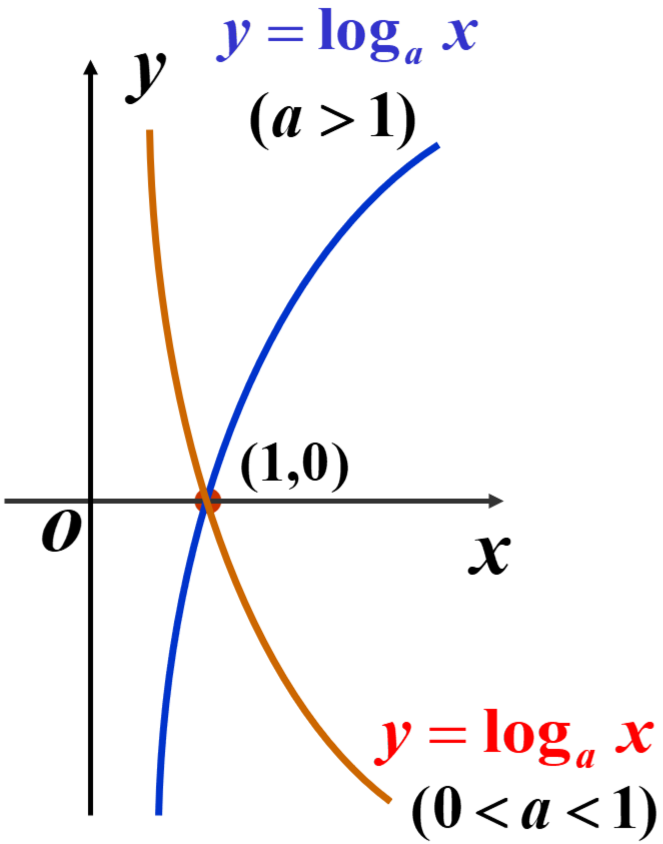


第八节 初等函数

基本初等函数

对数函数 $y = \log_a x$（$a > 0$且$a \neq 1$），其定义域为$(0, +\infty)$

- 无论a取何值，都通过点$(1, 0)$
- 当$a > 1$时，函数单调递增
- 当$0 < a < 1$时，函数单调递减
- 与指数函数互为反函数$x = a^y$



第八节 初等函数

基本初等函数

三角函数

$$y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x$$

$$y = \cot x, y = \sec x, y = \csc x$$

- $y = \cos x$是偶函数
- $y = \sin x, y = \tan x$是奇函数
- $y = \sin x, y = \cos x$是以2π为周期的函数，$y = \tan x$是以π为周期的函数
- $|\sin x| \leq 1$， $|\cos x| \leq 1$均为有界函数

第八节 初等函数

基本初等函数

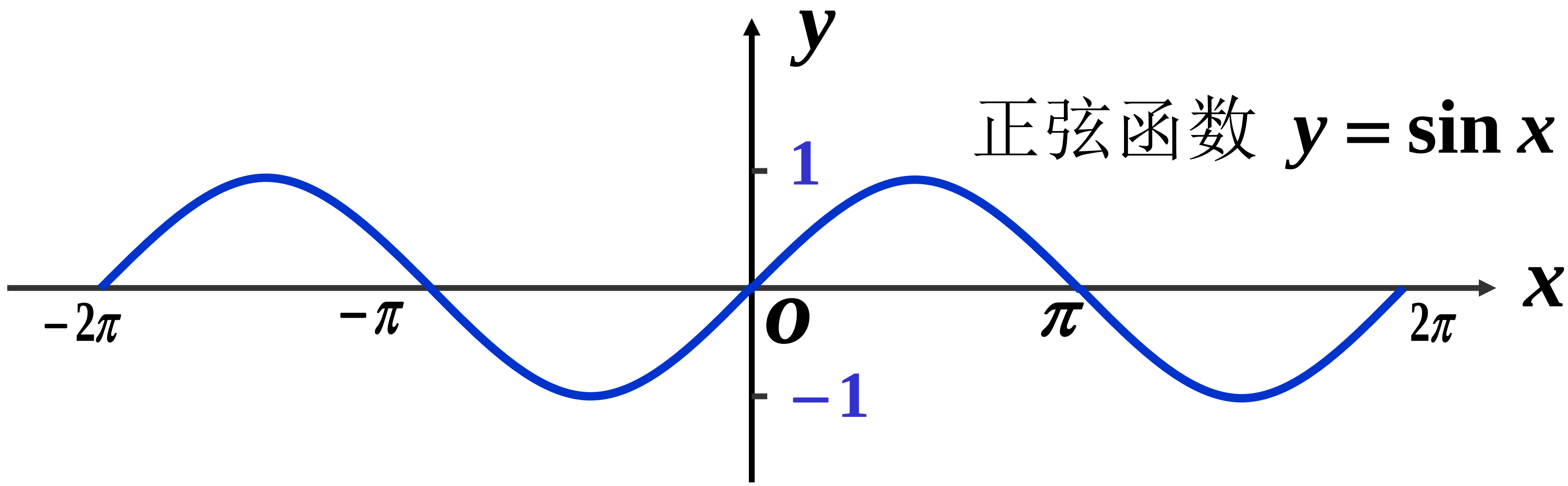
反三角函数

$$y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x$$

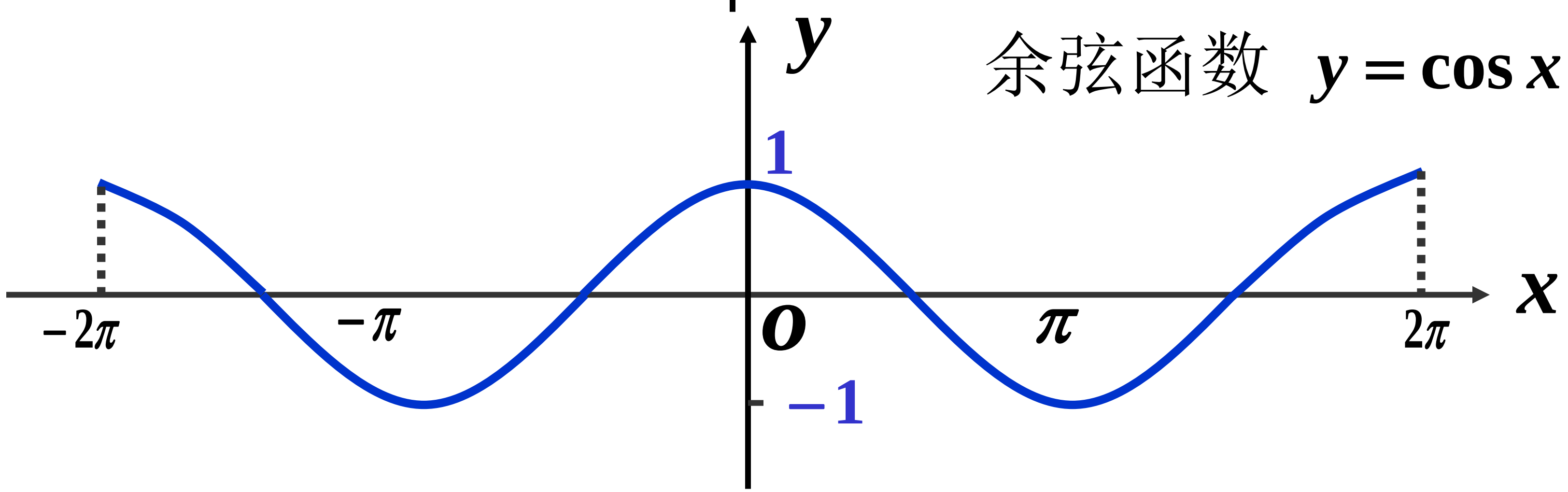
$$y=\operatorname{arccot} x, y=\operatorname{arcsec} x, y=\operatorname{arccsc} x$$

- $y=\arcsin x$, $x\in[-1,1], y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$
- $y=\arccos x$, $x\in[-1,1], y\in[0,\pi]$
- $y=\arctan x$, $x\in(-\infty,+\infty), y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

分别对应$y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x$的反函数



y
正弦函数 $y = \sin x$
1
x
-2π
$-\pi$
O
π
2π
-1

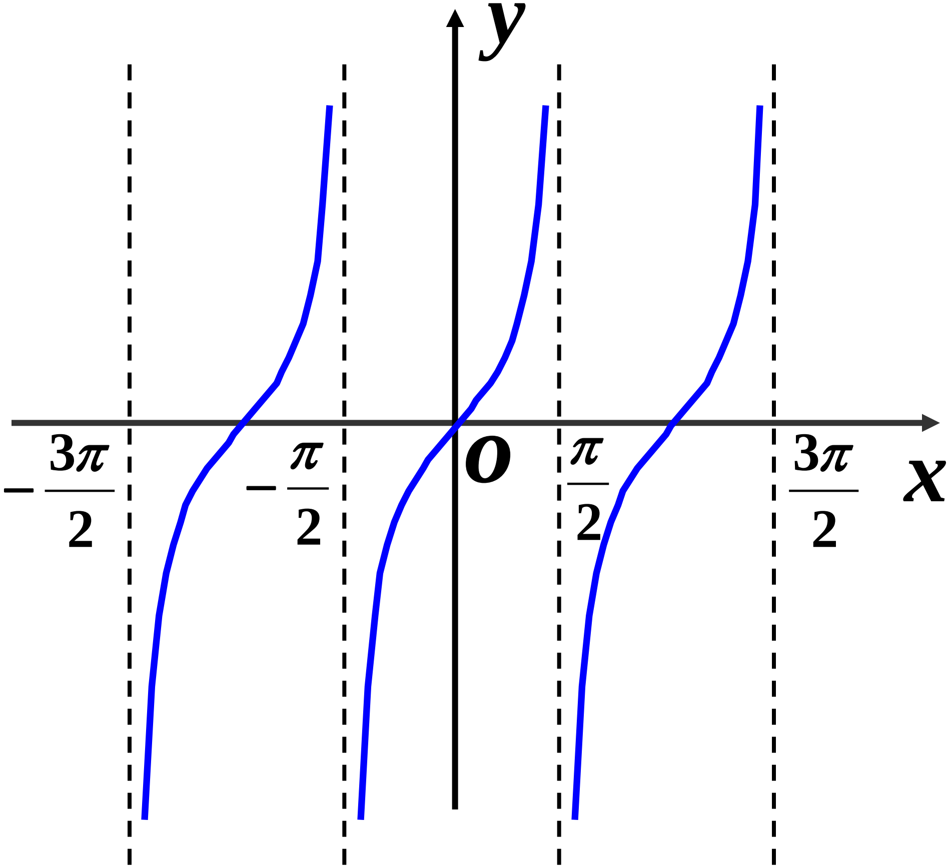


y
余弦函数 $y = \cos x$
1
x
-2π
$-\pi$
O
π
2π
-1

正切函数 $\boldsymbol{y = \tan x}$

定义域: $x \neq (2n+1)\pi/2$ 。

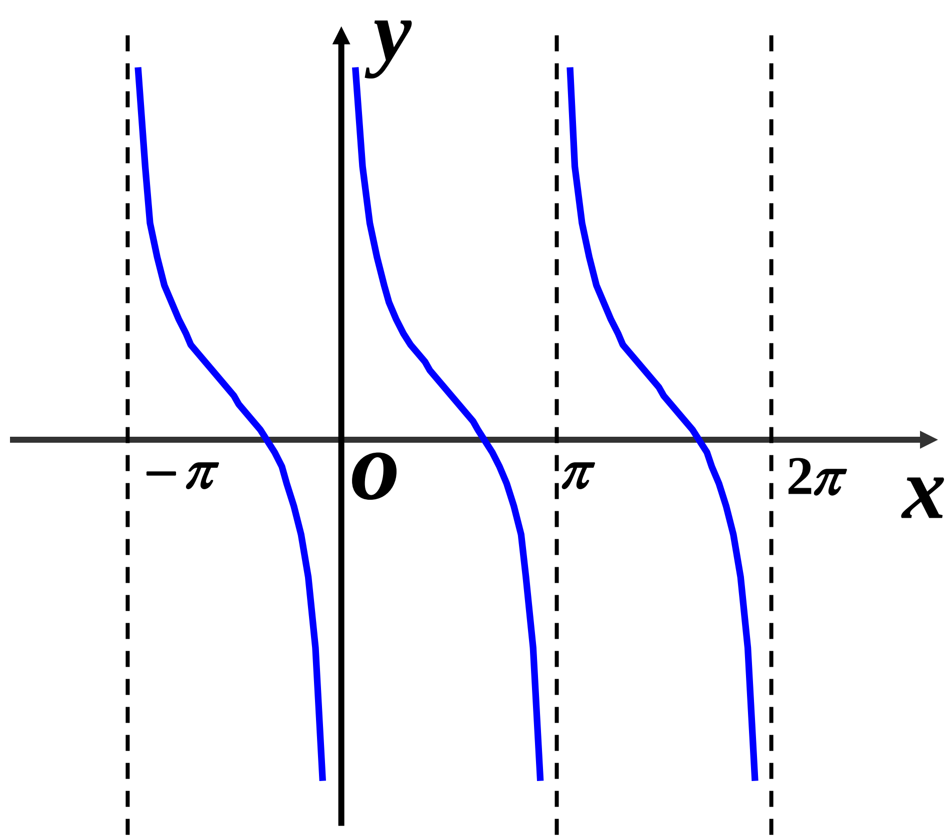
周期: π 。奇函数。



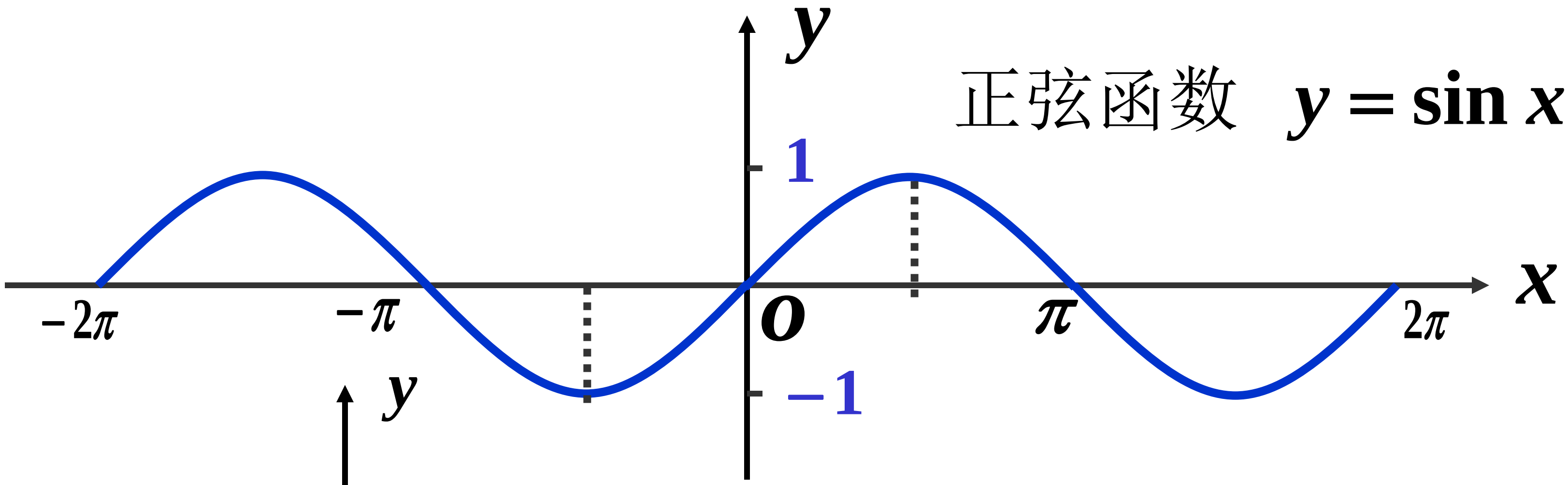
余切函数 $\boldsymbol{y = \cot x}$

定义域: $x \neq n\pi$。

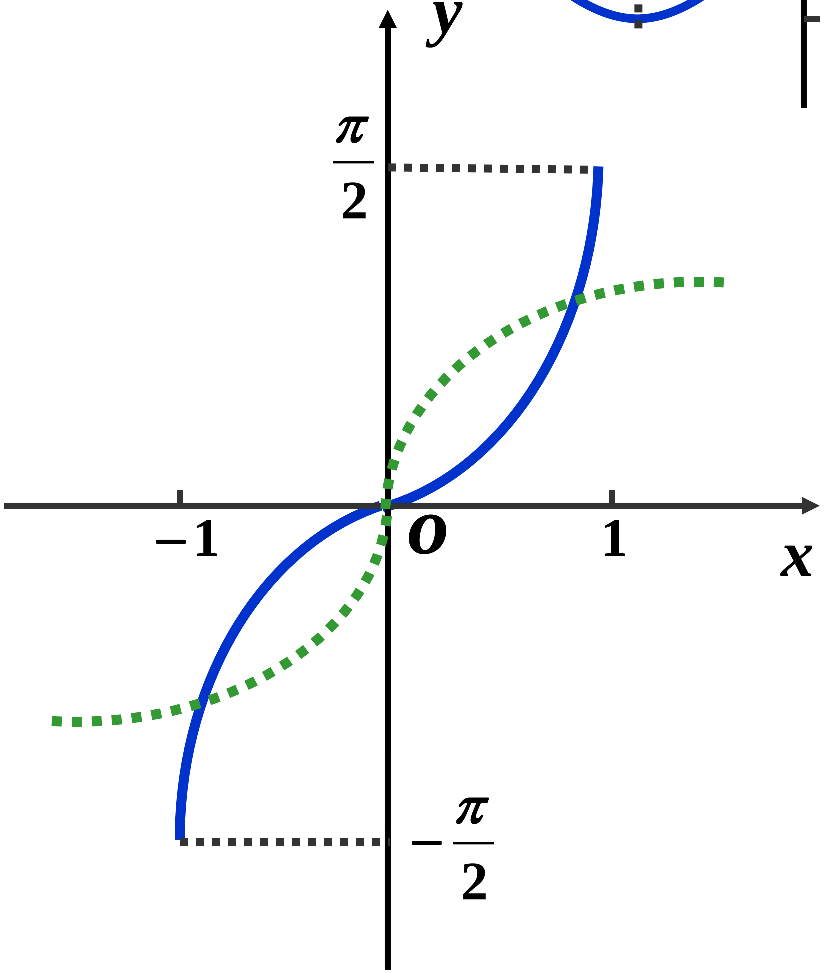
周期: π 。奇函数。

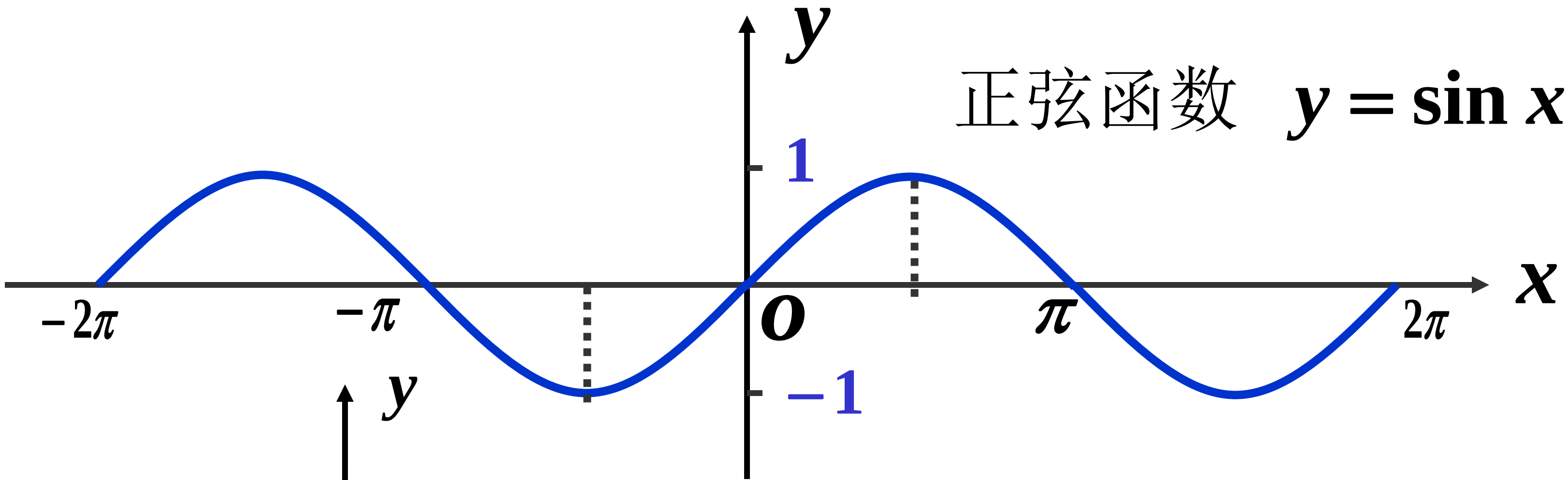


正弦函数 $y = \sin x$

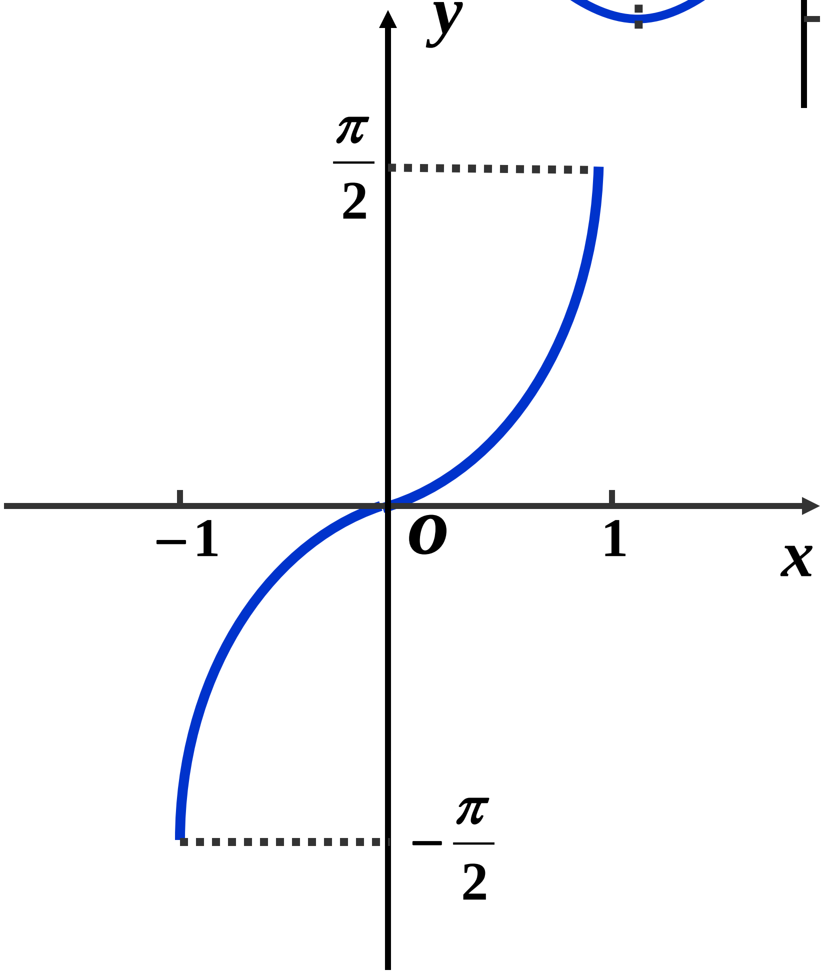


反正弦函数 $y = \arcsin x$





正弦函数 $y=\sin x$



反正弦函数 $y=\arcsin x$

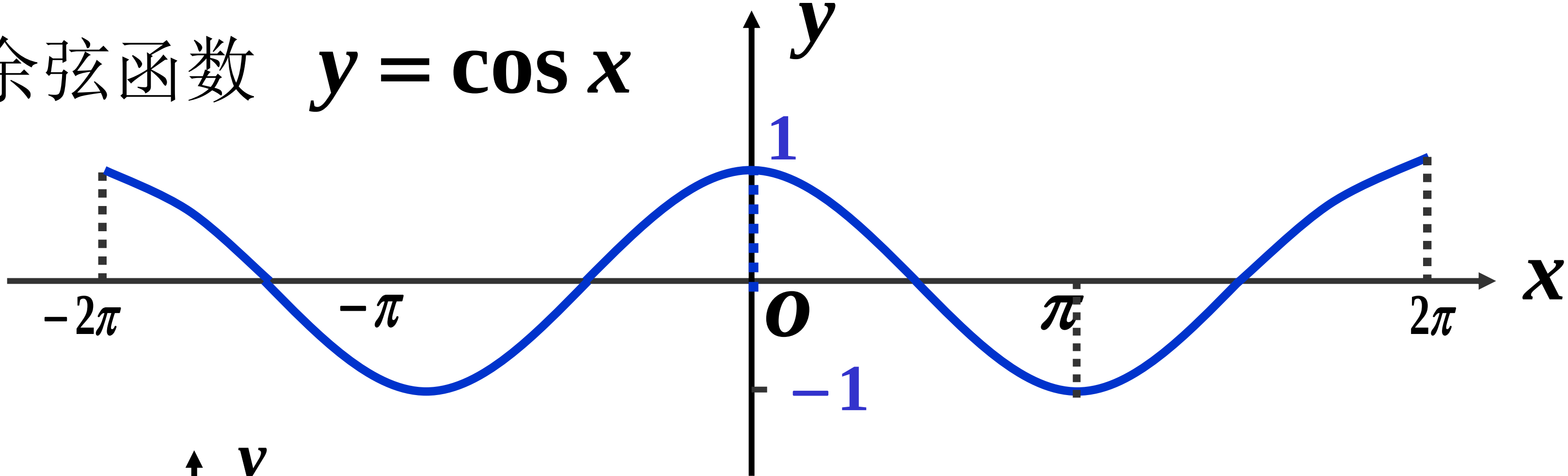
定义域：$[-1,1]$

值域：$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

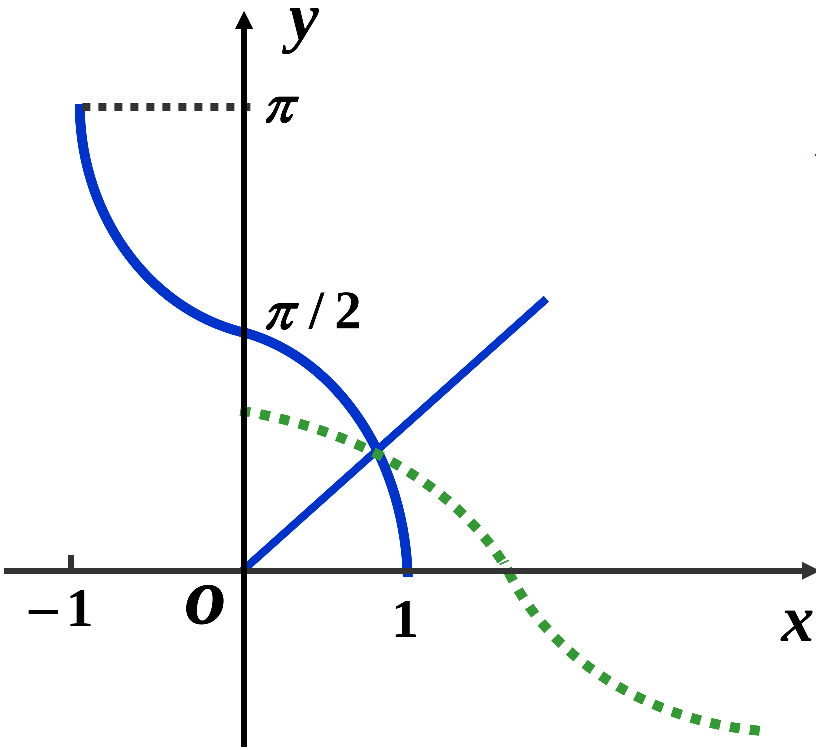
单调增加函数；

奇函数.

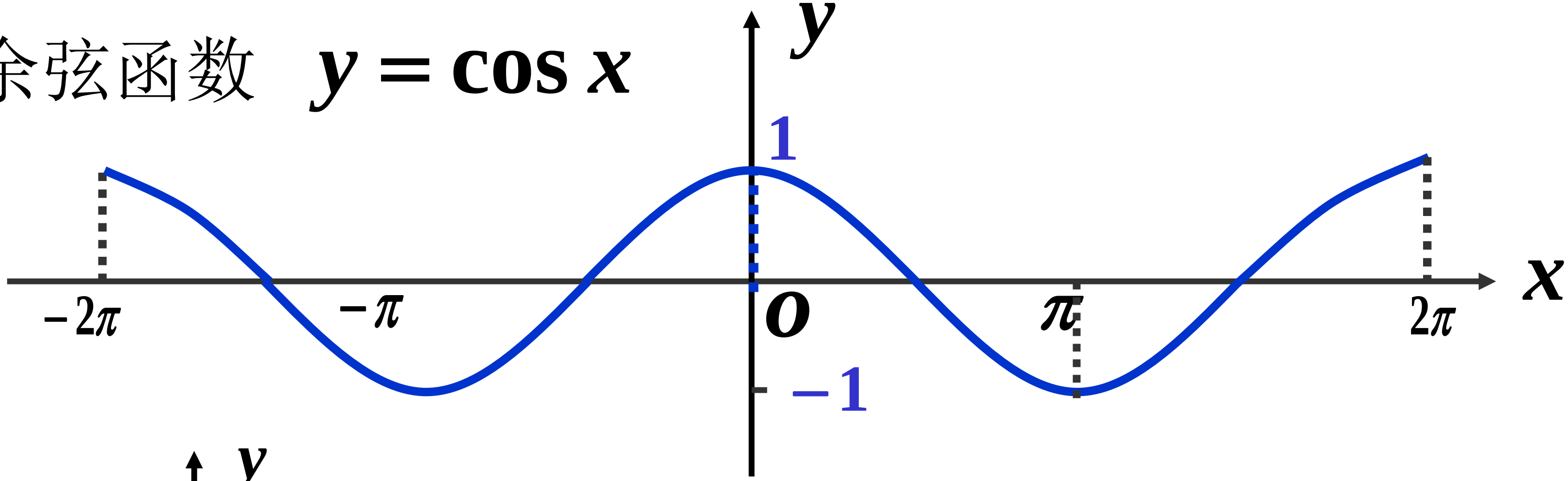
余弦函数 $y = \cos x$

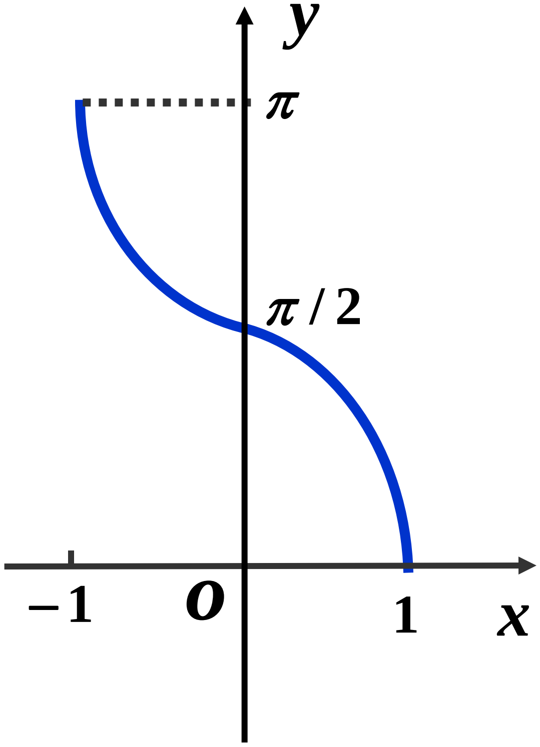


反余弦函数 $y = \arccos x$



余弦函数 $y = \cos x$





反余弦函数 $y = \arccos x$

定义域：$[-1, 1]$

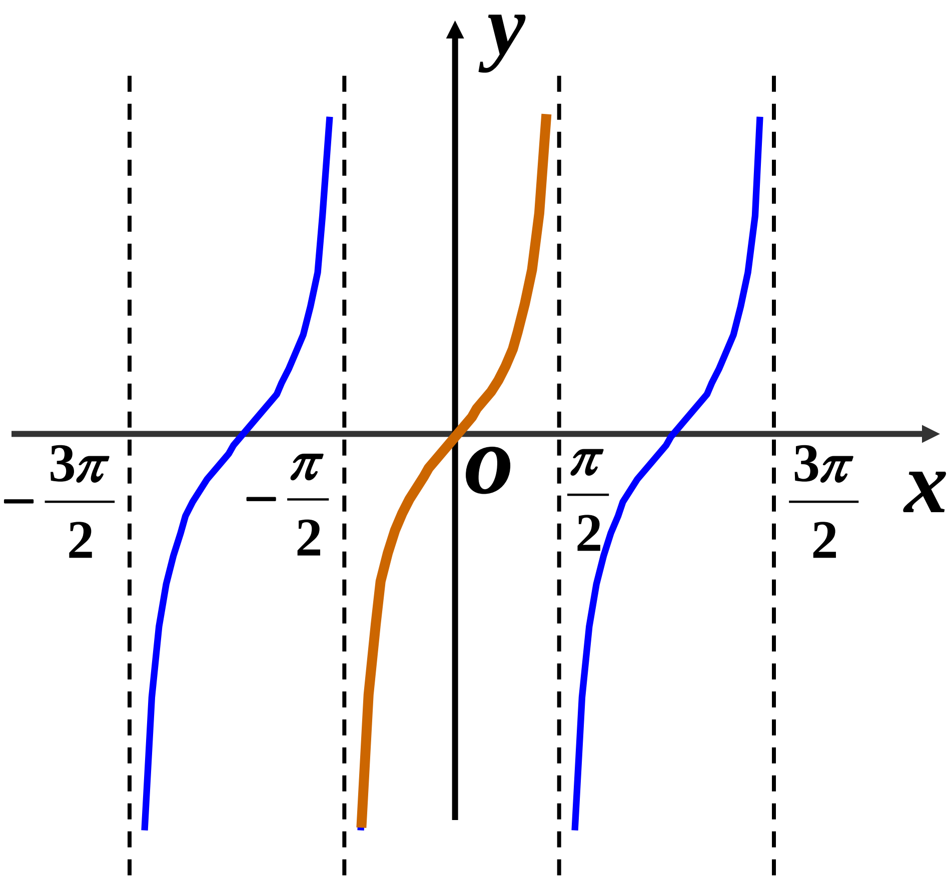
值域：$[0, \pi]$

单调减少函数；

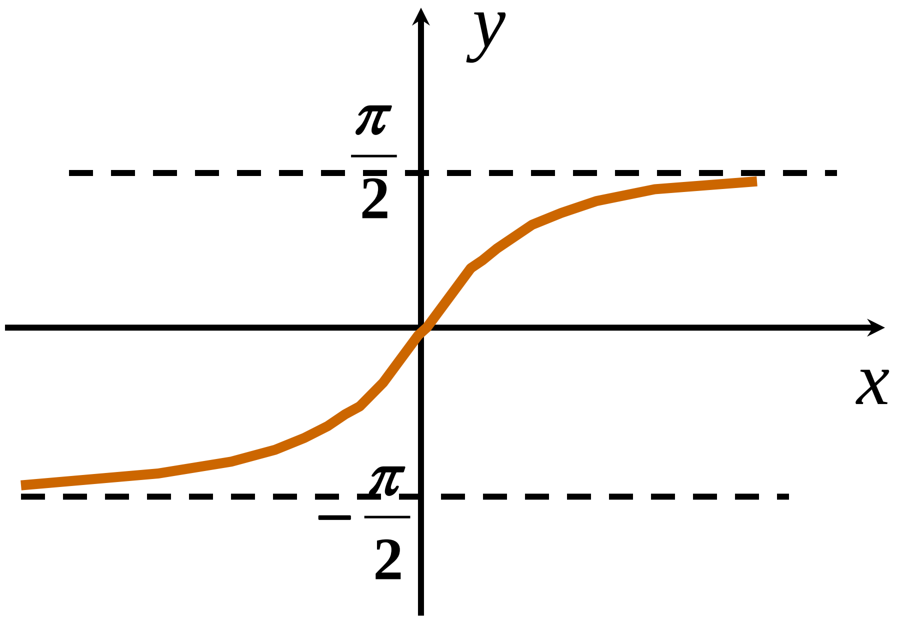
非奇非偶.

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$$

正切函数 $y = \tan x$



反正切函数 $y = \arctan x$



定义域: $(-\infty, +\infty)$

值域: $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

单调增加函数;

奇函数.

第八节 初等函数

初等函数

<u>初等函数</u> 由基本初等函数经过**有限次四则运算(加、减、乘、除)和复合运算**所构成的一切函数统称为**初等函数**