微积分I-微分与导数

3学分、经管类外招

数学系王伟文

课程网页二维码

https://wangyuanhao.github.io/calculus_course_webpage/

反函数求导公式

设函数$y=f(x)$在点x处有不等于零的导数$f'(x)$, 并且其反函数$x=f^{-1}(y)$在点x的对应点y处连续，则$[f^{-1}(y)]'$存在，并且

$$[f^{-1}(y)]'=\frac{1}{f'(x)}$$

或

$$f'(x)=\frac{1}{[f^{-1}(y)]'}$$

原函数$y=f(x)$与其反函数$x=f^{-1}(y)$的导数互为倒数

反函数求导公式

	原函数	反函数
	$y=\log_a x\,(a>0\text{且}a\neq 1)$	$x=a^y\,(a>0\text{且}a\neq 1)$
导数	$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$	$(a^y)'=a^y\cdot\ln a$

$$f'(x)=\frac{1}{[f^{-1}(y)]'}$$

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}=\frac{1}{a^y\cdot\ln a}=\frac{1}{(a^y)'}$$

隐函数的导数

如果一个已知的**二元方程$F(x,y)=0$**确定了一个函数$y=f(x)$，则称该函数为**隐函数**。

- 如$F(x,y)=x^2+xy+y^2-4=0$，确定了对应法则f未知（“隐”的含义）的一个函数 $y=f(x)$，称之为隐函数；注意不是说 $F(x,y)$ 是隐函数。
- 隐函数求导，即在对应法则f未知的情形下，利用已知的方程$F(x,y)=0$，求得导数$y'=f'(x)$

不知道函数表达式也能对函数求导？！

隐函数的导数

例 求由方程$x^2+y^2=a^2$所确定的隐函数$y=f(x)$的导数

解： 已知y可以表示为x的函数，即$y=f(x)$

因此，方程$x^2+y^2=a^2$可以改写为

$$x^2+[f(x)]^2=a^2$$

上述方程两端同时对x求导数

$$(x^2+[f(x)]^2)'=(a^2)'$$

等式两端同时对相同的变量求导不会改变等号

等式左边$=(x^2)'+\{[f(x)]^2\}'=2x+2f(x)\cdot f'(x)$

等式右边$(a^2)'=0$

即 $2x+2f(x)\cdot f'(x)=0$ 解得$f'(x)=-\frac{x}{f(x)}=-\frac{x}{y}$

隐函数的导数

课本例15 方程 $y = x\ln y$确定y是x的函数，求y的导数。

解： 已知y可以表示为x的函数

$$y = x \cdot \ln y$$

上述方程两端同时对x求导数

$$y' = [x \cdot \ln y]'$$

等式两端同时对相同的变量求导不会改变等号

等式左边$= y'$

等式右边$[x \cdot \ln y]' = (x)' \cdot \ln y + x \cdot [\ln y]' = \ln y + x \cdot \frac{1}{y} y'$

即

$$y' = \ln y + x \cdot \frac{1}{y} y'$$

解得$y' = \frac{y \cdot \ln y}{y - x}$

隐函数的导数

课本例15 方程 $y = x\ln y$确定y是x的函数，求y的导数。

解：已知y可以表示为x的函数，即$y = f(x)$

因此，方程可以$y = x\ln y$改写为

$$f(x) = x \cdot \ln f(x)$$

上述方程两端同时对x求导数

等式两端同时对相同的变量求导不会改变等号

$$[f(x)]' = [x \cdot \ln f(x)]'$$

等式左边= $[f(x)]' = f'(x)$

等式右边$[x \cdot \ln f(x)]' = (x)' \cdot \ln f(x) + x \cdot [\ln f(x)]' = \ln f(x) + x \cdot \frac{1}{f(x)} f'(x)$

即 $f'(x) = \ln f(x) + x \cdot \frac{1}{f(x)} f'(x)$ 解得$f'(x) = \frac{f(x) \cdot \ln f(x)}{f(x) - x} = \frac{y \cdot \ln y}{y - x}$

取$y = f(x)$代入原方程

对原方程两端同时关于x求导

求导后，将y的导数即$f'(x)$视未知数求解

在上述求解结果中再将$f(x)$替换为y

取对数求导法

求$y = x^x$的导数

取对数求导法

设函数$y = f(x)$，如果对应法则f很复杂，在求解导数y'(或$f'(x)$)的过程中，**可以先对函数左右两端取对数**，即

$$\ln y = \ln f(x)$$

然后通过隐函数求导的方法，求解y'(或$f'(x)$)，此方法称为**"取对数求导法"**

- **适用范围：用乘、除、根式表达比较复杂的函数以及幂指函数的情形$u(x)^{v(x)}$**

$$y = \frac{(x+1)\sqrt[3]{x-1}}{(x+4)^2 e^x} \qquad y = \sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}} \qquad y = x^x$$

对数公式

$$\ln a^b = b \cdot \ln a$$

$$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b \qquad \ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

取对数求导法

课本例20 求$y=x^x$的导数。

解： 对函数左右两端取自然对数，即

$$\ln y = \ln x^x$$
$$\ln y = x\ln x$$

两边对x求导

$$\frac{1}{y}y' = (x)'\cdot\ln x + x\cdot(\ln x)'$$
$$= 1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x} = \ln x + 1$$

解得

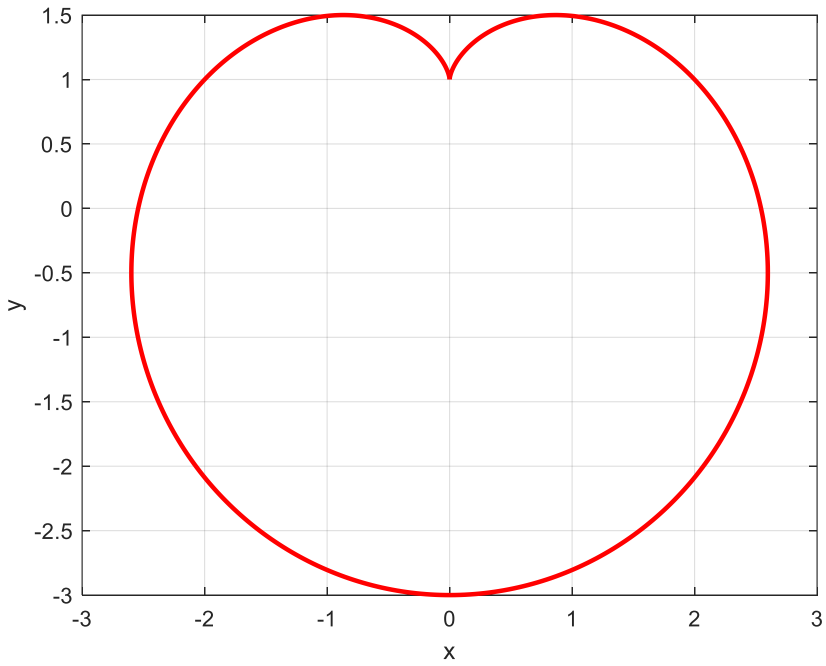
$$y' = y\cdot(\ln x + 1)$$

$$= x^x\cdot(\ln x + 1)$$

由参数方程所确定的函数导数

若参数方程$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$确定$y$是$x$的函数，则称此函数关系为由参数方程所确定的函数。

$$\begin{cases} x = 2(\sin t - \frac{1}{2}\sin 2t) \\ y = 2(\cos t - \frac{1}{2}\cos 2t) \end{cases}, (0 \le t \le 2\pi)$$



由参数方程所确定的函数导数

若**参数方程**$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$确定$y$是$x$的函数，则称此函数关系为由参数方程所确定的函数。

- 设$x=\varphi(t)$有连续的反函数$t=\varphi^{-1}(x)$, 同时$\varphi'(t)$和$\psi'(t)$存在，且$\psi'(t)\neq 0$, 由参数方程y与x构成复合函数$y=\psi[\varphi^{-1}(x)]$

利用反函数求导与复合函数求导法则，有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

由参数方程所确定的函数导数

课本例22 已知$\begin{cases} x = 2t \\ y = \ln(1+t) \end{cases}$，求$\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

解：

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{1+t}$$

$$\frac{dx}{dt} = 2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{1}{1+t}}{2} = \frac{1}{2(1+t)}$$

随堂练习

1. 设y是x的函数，由下列隐函数求导数y'

$(1)y^2-2xy+4=0$

$$y'=\frac{y}{y-x}$$

$(2)(2x)^2+(2y)^2=2$

$$y'=-\frac{x}{2y}$$

2. 设参数方程$\begin{cases} x=t^2+1 \\ y=e^t \end{cases}$，求导数$\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{e^t}{2t}$$

3. 设参数方程$\begin{cases} x=t\sin t \\ y=\frac{\cos t}{t} \end{cases}$，求导数$\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-t\sin t-\cos t}{t^2(\sin t+t\cos t)}$$

高阶导数

设函数$f(x)=x^4$ 则$f'(x)=4x^3$

$f'(x)=4x^3$仍然是关于x的函数

这个函数再对x求导数

$$(f'(x))'=(4x^3)'=12x^2$$

$(f'(x))'$可以记为$f''(x)$或$f^{(2)}(x)$，称为**函数$f(x)$关于x的二阶导数**

类似地，对二阶导数进一步关于x求导数

$$[f^{(2)}(x)]'=\left(12x^2\right)'=24x$$

$[f^{(2)}(x)]'$可以记为$f'''(x)$或$f^{(3)}(x)$,称为**函数$f(x)$关于x的三阶导数**

若对函数$f(x)$上述求导过程重复n次，即得到该函数**n阶导数**，记作

$$\boldsymbol{f^{(n)}(x)，\ y^{(n)} \quad \text{或} \frac{d^n y}{dx^n}}$$

高阶导数

求函数$y = x^2 + 2x$的二阶导数

解： $y' = (x^2 + 2x)'$

$= 2x + 2$

$y^{(2)} = (2x + 2)'$

$= (2x)' + (2)'$

$= 2 + 0$

$= 2$

随堂练习

1. 求下列函数的二阶导数

(1) $y = \ln x$ 在 $x = 1$ 处

$$y^{(2)} = -\frac{1}{x^2}$$

$$y^{(2)}|_{x=1} = -\frac{1}{1^2} = -1$$

(2) $y = xe^x$

$$y^{(2)} = 2e^x + xe^x$$

微分

设函数$y=f(x)$定义在点x_0的某邻域$U(x_0)$上。当给x_0的一个改变量Δx，$x_0+\Delta x\in U(x_0)$时，相应的函数改变量Δy为

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

如果存在常数A，使得Δy能够表示为

$$\Delta y=A\cdot\Delta x+o(\Delta x)$$

则称函数$y=f(x)$在点x_0处可微，并称$A\cdot\Delta x$为函数$y=f(x)$在点x_0处的<u>微分</u>，记作

$$dy|_{x=x_0}=A\cdot\Delta x \quad \text{或} \quad df(x)|_{x=x_0}=A\cdot\Delta x$$

微分

微分与可导等价定理 函数$y=f(x)$在点x_0处可微的充分必要条件是函数$y=f(x)$在点x_0处可导，且我们有

$$dy|_{x=x_0}=f'(x_0)\cdot\Delta x$$

- 若函数$y=f(x)$在区间$[a,b]$上每一点都可微，则称f为$[a,b]$上的可微函数，函数$y=f(x)$在$[a,b]$上任意一点的微分记作

$$dy=f'(x)\ \cdot\Delta x$$

- 特别地，若$y=x$

$$dy=dx=(x)'\ \cdot\Delta x=\Delta x$$

- 故函数$y=f(x)$在$[a,b]$上任意一点的微分记作

$$dy=f'(x)dx$$ （重要公式）

微分与可导等价证明过程–充分性

设函数$y=f(x)$在点x_0处可微，则

$$\Delta y=A\cdot\Delta x+o(\Delta x)$$

A即为函数$f(x)$在点x_0处的导数$f'(x_0)$

等式两端同时除Δx

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=A+\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}$$

取极限，令$\Delta x\to 0$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(A+\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}\right)$$

又因为$o(\Delta x)$是Δx的高阶无穷小，即$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}=0$，所以

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(A+\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}\right)=A$$

故$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)=A$

微分与可导等价证明过程–必要性

设函数$y=f(x)$在点x_0处可导，即$f'(x_0)$存在，则

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)$$

由极限存在的性质，知

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha$$

其中α为$\Delta x\to 0$的无穷小量。所以

函数$f(x)$在点x_0处的导数$f'(x_0)$即为微分式中的A

$$\Delta y=f'(x)\Delta x+\alpha\cdot\Delta x$$

又因为$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha\cdot\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\alpha=0$，故$\alpha\cdot\Delta x$为$\Delta x$的高阶无穷小（$\Delta x\to 0$），记为$o(\Delta x)$，

从而有

$$\Delta y=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x)$$

$$\Delta y=A\cdot\Delta x+o(\Delta x)$$

根据微分定义，因此有

$$dy|_{x=x_0}=f'(x_0)\Delta x$$

微分

例 求函数$y=\ln x$的微分在$x=2$处的微分

解： 函数$y=\ln x$在$x=2$处的导数为

$$y'|_{x=2}=\frac{1}{2}$$

所以微分为

$$dy|_{x=2}=\frac{1}{2}\cdot dx$$

微分

$dy = f'(x)dx$表明函数的微分等于函数的导数与自变量微分的积，例如

$$d(x^a) = ax^{a-1}dx$$

$$d(\sin x) = \cos x\, dx$$

$$d(\ln x) = \frac{1}{x}dx$$

即对可微函数总有

$$dy = df(x) = f'(x)dx$$

微分

例 求函数$y=x^2+2x$的微分

解：　函数$y=x^2+2x$的导数为

$$y'=2x+2$$

所以微分为

$$dy=(2x+2)dx$$

微分的运算法则

微分的四则运算法则与导数的四则运算法则一致

$$d[u(x) \pm v(x)] = du(x) \pm dv(x)$$

$$d[u(x) \cdot v(x)] = v(x)\, du(x) + u(x)dv(x)$$

$$d\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right) = \frac{v(x)du(x) - u(x)dv(x)}{[v(x)]^2}$$

$$d\big[f[g(x)]\big] = f'\big(g(x)\big)dg(x) = f'\big(g(x)\big)g'(x)dx$$

微分的运算法则

课本例2 设$y=\sin(2x+3)$，求dy

解：
$$dy = d\sin(2x+3)$$
$$= \cos(2x+3)\, d(2x+3)$$
$$= \cos(2x+3)\,[d(2x)+d3]$$
$$= \cos(2x+3)\,[2dx+0]$$
$$= 2\cos(2x+3)\,dx$$

随堂练习

求下列函数的微分

(1) $y = x^3$在$x = 1$处

$dy|_{x=1} = dx^3|_{x=1} = 3 \cdot 1^2\, dx = 3$

(2) $y = xe^x$

$dy = e^x dx + xe^x dx$

(3) $y = \cos x + 2x$

$dy = -\sin x\, dx + 2dx$

(4) $y = \dfrac{\ln x}{x}$

$$dy = \frac{dx - \ln x\, dx}{x^2}$$

(5) $y = \ln(1 + x)$

$$dy = \frac{1}{1 + x} dx$$

微分在近似计算中的应用

由微分的定义，如果函数$y = f(x)$在x_0处可微，则有

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$$

若$|\Delta x|$很小，可忽略高阶无穷小量$o(\Delta x)$，则有

$$\Delta y \approx f'(x_0)\Delta x$$

即

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$$

所以$f(x_0 + \Delta x)$可以近似计算得到，

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

微分在近似计算中的应用

微分近似计算公式 设函数$y=f(x)$在x_0处可微，若$|\Delta x|$很小

则$f(x_0+\Delta x)$可以近似计算，即

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$$

例 求$\ln 1.01$的近似值

解： 原问题即为求函数$y=f(x)=\ln x$在$x=1.01$处的近似值

由微分近似计算公式，得到

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x=\ln x_0+\frac{1}{x_0}\Delta x$$

取$x_0=1$，$\Delta x=0.01$代入上式

$$\ln 1.01=f(1.01)=f(1+0.01)\approx \ln 1+\frac{1}{1}\times 0.01=0.01$$