CORRIGÉ PARTIEL DU TD1

SUR LA LOI NORMALE

Exercice 1. Voir le corrigé donné en cours de l'exercice sur la loi du Chi deux. C'est le cas particulier d = 1…

Exercice 2. Pour la densité, on calcule la fonction de répartition puis la densité par dérivation… Ensuite, on trouve $EY = \exp(\mu + \sigma^2/2)$ en utilisant la formule de transfert. Utiliser enfin la formule $\mathrm{Var}(Y) = EY^2 - (EY)^2$ et le fait que

$$Y^2 = \exp(2X) \text{ avec } 2X \sim N(2\mu, 4\sigma^2)$$

pour en déduire sans calcul supplémentaire que $EY^2 = \exp(2\mu + 2\sigma^2)$.

Exercice 3. Pour la loi normale, $\gamma = \dfrac{E(X-\mu)^3}{\sigma^3} = 0$ par symétrie. Pour la loi log-normale, on a $\gamma > 0$ car la distribution est asymétrique vers la droite …

Exercice 4. Pour la loi normale, $\kappa = \dfrac{E(X-\mu)^4}{\sigma^4} = EU^4$ où U est N(0, 1). Par la formule de transfert et une intégration par parties, le calcul donne $\kappa = 3$.
En pratique, on considère plutôt $\kappa = \dfrac{E(X-\mu)^4}{\sigma^4} - 3$ car on prend la loi normale comme référence.

Exercice 5. Vu en cours…

SUR LE BRUIT BLANC GAUSSIEN $\varepsilon \sim N(0, I_d)$

Exercice 1. En se reportant au corrigé de l'exercice 2 (sur la densité du Khi deux), on a vu dans le cas d = 2 que $R^2 = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2$ est de loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1/2$ et θ de loi uniforme sur $[0, 2\pi]$ si (R, θ) désignent les coordonnées polaires du vecteur $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.
Soit maintenant U de loi uniforme sur [0, 1]. Pour $x \geq 0$, on a

$$P(-2\ln(U) \leq x) = P(U \geq \exp(-x/2)) = 1 - \exp(-x/2),$$

donc -2ln(U) est de loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1/2$. On en déduit le procédé de simulation dit de Box-Müller.

Exercice 2. Vu en cours…

Exercice 4. Cet exercice sera au cœur du cours sur la Régression et donc repris à ce moment-là…

Exercice 1.

1. Il faut que la matrice de covariance Γ de taille 2×2 soit inversible. La densité est de la forme suivante

$$\mathbf{x} \to \frac{1}{\sqrt{\det(\Gamma)} \times 2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2} < x - \mu, \Gamma^{-1}(x-\mu) > \right)$$

2. Soit (X, Y) de densité f : $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \to f(x, y) = \alpha \exp(-\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}xy - \frac{1}{4}y^2)$

(a) On voit que E(X) = E(Y) = 0 puis $\Gamma^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$. On en déduit

$$\Gamma = 2\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Donc, $\rho = \mathrm{Corr}(X, Y) = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Par ailleurs, α = constante de normalisation = $\frac{1}{2\sqrt{2}\,\pi}$.

(b) Loi de X = N(0, 1) et loi de Y = N(0, 3)

(c) Comme le vecteur (Y – X, X) est une transformation linéaire d'un VG, c'est un VG. Pour prouver l'indépendance de ses composantes, il suffit donc de montrer qu'elles sont non corrélées. Or,

$$\mathrm{Cov}(X - Y, X) = \mathrm{Var}(X) - \mathrm{Cov}(Y, X) = 1 - 1 = 0$$

Exercice 2.

1. D'après le cours, les lois marginales sont gaussiennes. Ainsi, X_1 de loi $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ et X_2 de loi $N(\mu_2,\sigma_2^2)$ en notant σ_1^2 et σ_2^2 leurs variances respectives.

2. La matrice de covariance Γ étant inversible, X admet la densité (dite bi-gaussienne) suivante

$$\mathbf{x} \to \frac{1}{\sqrt{\det(\Gamma)} \times 2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2} < x - \mu, \Gamma^{-1}(x-\mu) > \right)$$

sachant que $\Gamma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$ où $\rho = \frac{\mathrm{cov}(X_1,X_2)}{\sigma_1\sigma_2}$ est le coefficient de corrélation

linéaire entre les v.a. X_1 et X_2. Par hypothèse, $|\rho| < 1$ puisque Γ est inversible.

On calcule $\Gamma^{-1} = \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)} \begin{pmatrix} \sigma_2^2 & -\rho\sigma_1\sigma_2 \\ -\rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2 \end{pmatrix}$, ce qui donne au final

$$f_X(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2} Q(x_1, x_2)\right)$$

où $Q(x_1, x_2) = \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)} \left(\sigma_2^2(x_1-\mu_1)^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2) + \sigma_1^2(x_2-\mu_2)^2 \right).$

Noter que Q définit une forme quadratique positive et que ses courbes de niveau sont des ellipses centrées au point μ.

3. Dans cette question, on suppose

$$\Gamma = \sigma^2 \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \boldsymbol{\rho} \\ \boldsymbol{\rho} & \mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

Il s'agit maintenant de faire la décomposition spectrale de $\boldsymbol{\Gamma}$ (ou de $\boldsymbol{\Gamma}^{-1}$), ce qui revient encore à réduire la forme quadratique précédente ou les ellipses associées.
Pour cela, on remarque que

$$\Gamma\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} = \sigma^2(1+\rho) \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} \text{ en posant } \lambda_1 = \sigma^2(1+\rho)$$

Puisque Trace(Γ) = $2\sigma^2$, on en déduit que l'autre valeur propre est $\lambda_2 = \sigma^2(1-\rho)$ associée (par exemple) au vecteur propre $\begin{pmatrix} -\mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$. Reste à norrmer ces deux vecteurs propres (orthogonaux par ailleurs) pour obtenir

$$\boldsymbol{\Gamma = U\Sigma^2U^T , U^TU = I_2}$$

avec $\mathbf{U} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & -\mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ et $\boldsymbol{\Sigma}^2 = \sigma^2 \begin{pmatrix} \mathbf{1}+\boldsymbol{\rho} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}-\boldsymbol{\rho} \end{pmatrix}$.

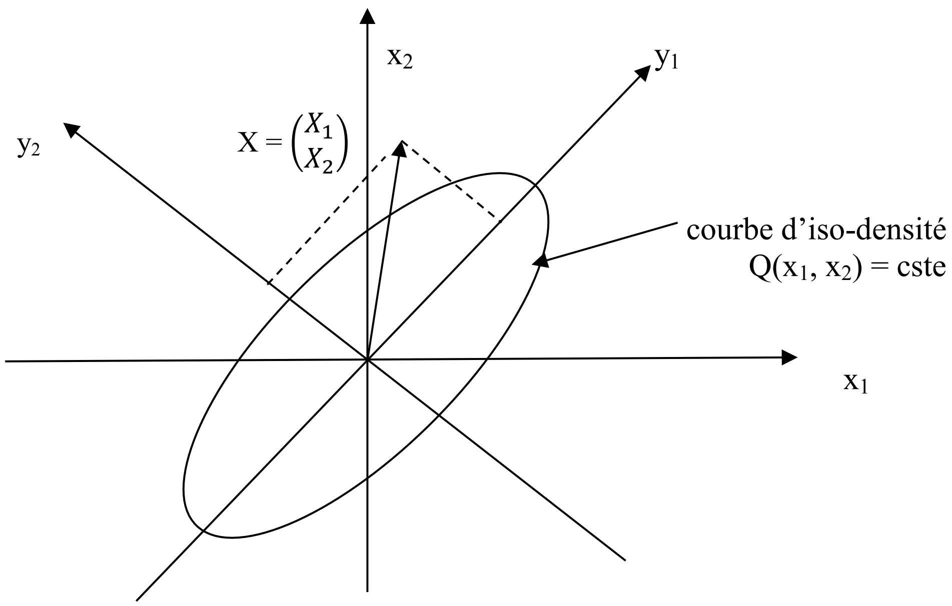
La décomposition de Mahalanobis du vecteur X s'écrit

$$\mathbf{X = \mu + U\Sigma\, \varepsilon \text{ avec } \varepsilon \sim N(0, I_2) \text{ VG standard}}$$

$$\textbf{et où } \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{pmatrix} \textbf{ en posant } s_1 = \sigma\sqrt{1+\rho}\ ;\ s_2 = \sigma\sqrt{1-\rho}$$

On remarque que si $\rho \neq 0$, alors s_1 et s_2 sont différents de σ (écart-type commun des variables initiales X_1 et X_2) bien que $s_1^2 + s_2^2 = Var(X_1) + Var(X_2)$ ($= 2\sigma^2$). On remarque aussi que U ne dépend pas des caractéristiques de la loi de X (σ^2 variance commune et ρ).

C'est assez intuitif puisque, dans ce cas particulier, on peut échanger les rôles de X_1 et X_2 sans que cela change la loi du couple, donc les courbes d'iso-densité doivent être symétriques par rapport à la droite $x_2 = x_1$. **Illustrons tout ceci dans le cas $\rho > 0$ et $\mu = 0$** :



Le vecteur gaussien X représenté dans le nouveau repère (y_1, y_2) définit deux nouvelles coordonnées qui sont indépendantes et de variances respectives $\sigma_1^2(1+\rho)$ et $\sigma_2^2(1-\rho)$. Ce vecteur de nouvelles coordonnées s'écrit matriciellement avec les notations précédentes

$$U^T (X - \mu) = \boldsymbol{\Sigma}\, \boldsymbol{\varepsilon}$$

puisque $\mathbf{X = \mu + U\Sigma\, \varepsilon}$. Cette analyse est l'analogue « théorique » de l'analyse en composantes principales (ACP) qui sera étudiée dans le cadre du cours d'Analyse de Données.

Pour déterminer une région de confiance à 95%, il est naturel de choisir l'ellipse $\mathbb{E}$ qui contient 95% de la masse de probabilité du vecteur X. Vu ce qui précède, elle est d'équation dans le repère (y_1, y_2) :

$$\frac{y_1^2}{s_1^2} + \frac{y_2^2}{s_2^2} = c$$ **où c est une constante > 0 à déterminer (analogue d'un quantile).**

Or $\quad \mathbf{P(X \in \mathbb{E}) = P(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 \leq c)}$

On sait maintenant (cf. exercice 2 sur le Khi deux) que $\boldsymbol{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}$ est de loi exponentielle de paramètre 1/2 (la loi du Khi deux à deux degrés de liberté). Il nous reste plus qu'à déterminer le quantile q à 95% de cette loi, ce qui conduit à l'équation

$$1 - \exp(- q/2) = 0.95$$

et la valeur $q = c \approx 6 \quad (q = 5.9915\ldots)$.

Dans le plan (x_1, x_2), la région de confiance recherchée est donc de la forme (ellipse dite de concentration de masse de probabilité, ici 95%)

$$\| \boldsymbol{\Sigma}^{-1} U^T (x - \mu) \|^2 \leq 6$$

4. Il faut écrire

$$\boldsymbol{\Gamma = SS^T} \textbf{ avec S de la forme } \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & b \end{pmatrix}$$ (S dite triangulaire inférieure)

sachant que $\Gamma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$ (**attention**, σ_1^2 et σ_2^2 désignent à nouveau ici les variances des variables initiales X_1 et X_2).

Par identification, on obtient facilement (commencer par identifier a, puis c et enfin b)

$$\mathbf{a = \sigma_1 \,;\, c = \rho\sigma_2 \text{ et } b = \sqrt{1-\rho^2}\ \sigma_2}$$

D'après le cours, on en déduit l' « algorithme » suivant de simulation d'un vecteur gaussien bidimensionnel quelconque :

$$\mathbf{X_1 = \mu_1 + \sigma_1\, \varepsilon_1}$$
$$\mathbf{X_2 = \mu_2 + \rho\sigma_2\, \varepsilon_1 + \sqrt{1-\rho^2}\, \sigma_2\, \varepsilon_2}$$

où ε_1 et ε_2 sont deux nombres normaux indépendants. On vérifie directement qu'un tel procédé fournit bien $X \sim N(\mu, \Gamma)$.

5. Considérons le cas Γ dégénéré. Le cas $\sigma_1 = 0$ signifie que X est sur la droite verticale d'abscisse $x_1 = \mu_1$. Supposons $\sigma_1 > 0$ mais aussi $\sigma_2 > 0$. Alors, le coefficient ρ est bien défini et vaut soit +1, soit – 1 puisque $\det(\Gamma) = 0$.

Le cas $\rho = +1$ correspond à $X_2 - \mu_2 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}(X_1 - \mu_1)$, i.e. le vecteur X est sur la droite d'équation $x_2 = \mu_2 + \frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x_1 - \mu_1)$.

Enfin, le cas $\rho = -1$ correspond à $X_2 - \mu_2 = -\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(X_1 - \mu_1)$, i.e. le vecteur X est sur la droite d'équation $x_2 = \mu_2 - \frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x_1 - \mu_1)$.