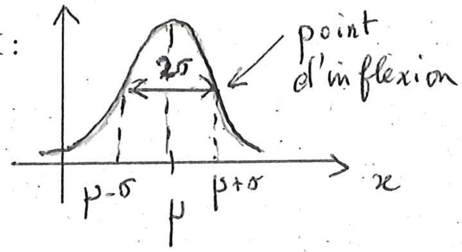
Test - Probabilités et Statistique

NOM / Prénom :

(Sur la loi normale) Soit X une variable aléatoire de loi normale $N(\mu, \sigma^2)$.

1. Donner l'expression analytique de la densité f(x) de la variable X :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \longrightarrow$$



2. Expression de la moyenne μ sous forme intégrale

$$\mu = \mathbf{EX} = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx$$

3. Expression de la variance σ^2 sous forme intégrale

$$\sigma^2 = \mathbf{Var(X)} = E(X-\mu)^2 = EX^2 - \mu^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)\, dx$$ (mesure de dispersion usuelle)

(Sur la loi binomiale) Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi de Bernoulli B(p) où $0 < p < 1$. On rappelle que $P(X_i = 1) = p$ et $P(X_i = 0) = 1 - p$.

1. Soit $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Expliciter la loi de S_n :

$$\mathbf{0 \le k \le n : \ P(S_n = k)} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{où } \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$ coeff. binomial

2. On considère $\overline{\mathbf{X}} = \frac{\mathbf{S_n}}{\mathbf{n}}$ l'estimateur usuel de p (estimateur de la moyenne). Rappeler les expressions de

$\mathbf{E\overline{X}} = p$ (pas de biais) ; $\mathbf{Var(\overline{X})} = \frac{p(1-p)}{n} \underset{n}{\longrightarrow} 0$ (estimateur convergent $\Leftrightarrow$ LGN)

Par quelle loi peut-on bien approcher la loi de $\overline{\mathbf{X}}$ si n est suffisamment grand ?

Réponse : loi normale $N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$

3. On suppose n grand. Donner un intervalle de confiance bilatéral sur p de niveau de confiance 95% (ou au risque $\alpha = 5\%$) $x_1, \ldots, x_n$ valeurs observées $\Rightarrow \bar{x}$ réalisation de $\overline{X}$

Réponse : $IC_{95\%} = \left[\bar{x} - 1.96\sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}} \ ; \ \bar{x} + 1.96\sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}}\right]$ (intervalle de WALD)

4. On teste l'hypothèse $H_0 : p = p_0$ avec $p_0 = 0.5$ contre l'hypothèse alternative $H_1 : p \ne p_0$. On rejette l'hypothèse H_0 au risque $\alpha = 5\%$ si l'écart $|\bar{x} - p_0|$ est supérieur à un seuil critique λ. Donner l'expression de λ :

$$\lambda = 1.96\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$$ car $\overline{X} - p_0 \approx N\left(0, \frac{p_0(1-p_0)}{n}\right)$ sous l'hypothèse H_0