南开大学

力学

力学模型：质点、刚体和质点系

➢质点：只有质量而无大小的物体。

在下面两种情况下，可以把物体视为质点：

- 物体作平移的时候；
- 当物体的运动范围远远大于它自身的尺寸、忽略其大小对问题的性质无本质影响的时候。

➢质点系：由若干个质点组成的、有内在联系的系统。

➢刚体：有质量、不会变形的物体。

力学的总框架

力学 → 运动学

力学 → 动力学

动力学 → 牛顿定律

动力学 → 守恒定律 → 动量守恒定律、机械能守恒定律、角动量守恒定律

力学 → 最初模型为质点 → 质点系 → 特殊质点系（刚体）

质点系 → 质点之间的弹性力（振动） → 振动在介质中的传播（波动）

运动学的两类问题

1) 正问题： 已知运动方程，求质点的速度和加速度 → 求导数 $\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt},\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}$

2) 反问题： 已知质点的速度(或加速度)和初始条件，求质点运动方程及其它未知量

动力学：动力学研究物体的机械运动与作用在该物体上的力之间的关系。

在研究动力学问题中一般选取牛顿的运动三定律作为动力学的基础，并称之为牛顿定律或动力学基本定律。

变力问题的处理方法

（1）力随时间变化：F=f（t）

在直角坐标系下，以x方向为例，由牛顿第二定律

$$m\frac{dv_x}{dt}=f(t)$$

且：$t=t_0$ 时，$v_x=v_0$；$x=x_0$

则：

$$dv_x=\frac{1}{m}f(t)dt$$

直接积分得：

$$v_x=\int dv_x=\int\frac{1}{m}f(t)dt$$

$$=v(t)+c$$ 其中c由初条件确定。

由速度求积分可得到运动学方程：

$$x=\int v_x dt = x(t)+c_2$$

其中c_2由初条件确定。

例：飞机着陆时受到的阻力为F＝－ct（c为常数）且t＝0时，v＝v_0 。求：飞机着陆时的速度。

解： 根据牛顿第二定律：

－ct＝m dv / dt

$$v=\int dv=\int -\frac{c}{m}tdt$$

$$=-\frac{c}{2m}t^2+c_1$$

当t＝0时，v＝v_0，代入得：v_0＝c_1

$$v=v_0-\frac{c}{2m}t^2$$

(2)力随速度变化：F＝f（v）

直角坐标系中，x方向f（v）＝m dv/dt

经过移项可得：

$$dt=m\frac{dv}{f(v)}$$

等式两边同时积分得：

$$t-t_0=\int dt=\int\frac{m}{f(v)}dv=m\int\frac{1}{f(v)}dv$$

具体给出f（v）的函数试就可进行积分运算

例：质量为m的物体以速度v_0投入粘性流体中，受到阻力f＝－cv （c为常数）而减速，若物体不受其它力，求：物体的运动速度。

解：根据牛顿第二定律：

$$-cv=m\frac{dv}{dt}$$

移项变换： －c/m dt＝dv/v

积分得

$$\int-\frac{c}{m}dt=\int\frac{dv}{v}$$

$$-\frac{c}{m}t=\ln v+c_1$$

(3)力随位移变化：F＝f（x）

直角坐标系中，x方向：

$$f(x)=m\frac{dv}{dt}=m\frac{dx}{dt}\frac{dv}{dx}=mv\frac{dv}{dx}$$

经过移项可得：f（x）dx＝mv dv

等式两边同时积分得：

$$\int f(x)dx=\int mvdv=\frac{1}{2}m(v^2-v_0{}^2)$$

第三章 功和能 机械能守恒

第四章 动量和角动量

功 $dW=\vec{F}\bullet d\vec{r}=F\cos\theta\left|d\vec{r}\right|=F\cos\theta ds$

$$W=\int_a^b dW=\int_a^b\vec{F}\bullet d\vec{r}$$

$$W=\int_a^b(F_x dx+F_y dy+F_z dz)$$

当质点同时受到几个力作用时

$$\vec{F}=\sum_i F_i=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\cdots$$

$$A=\int_A^B\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_{r_A}^{r_B}(\vec{F}_1+\vec{F}_2+\cdots)\cdot d\vec{r}$$

$$=\int_{r_A}^{r_B}\vec{F}_1\cdot d\vec{r}+\int_{r_A}^{r_B}\vec{F}_2\cdot d\vec{r}+\cdots=A_1+A_2+\cdots$$

功与功率

功： $A=\int_{s_1}^{s_2}\vec{f}\cdot d\vec{s}$

功率： $P=\dfrac{dA}{dt}=\vec{f}\cdot\vec{v}$

功与能：做功可以改变能量。

功是过程量，能是状态量。

动能：是运动状态的函数。$E_k=\dfrac{1}{2}mv^2$

势能：是位置的函数。

$E_p(r)=-\dfrac{GMm}{r}$　　$E_p(h)=mgh$

$E_p(x)=\dfrac{1}{2}kx^2$

功能原理

对质点系有：　$W_{外}+W_{内}=E_{k2}-E_{k1}$

$W_{内}=W_{内保}+W_{内非}=-(E_{p2}-E_{p1})+W_{内非}$

$W_{外}+W_{内非}=(E_{k2}+E_{p2})-(E_{k1}+E_{p1})$

引入系统的机械能 $\boxed{E=E_k+E_p}$

功能原理
$$\begin{cases}\boxed{W_{外}+W_{内非}=E_2-E_1} & （积分形式）\\ \boxed{\mathrm{d}W_{外}+\mathrm{d}W_{内非}=\mathrm{d}E} & （微分形式）\end{cases}$$

机械能守恒定律

机械能　动能和势能统称机械能.

$E_M=E_k+E_p$

机械能守恒定律　$E_M=E_k+E_p=const.$

保守力：　$\oint_l \vec{f}\cdot d\vec{s}=0$,或$\nabla\times\vec{f}=0$

保守系：所有非保守内力都不做功的系统。

保守系的机械能守恒，即若系统仅受保守力作用，则该系统机械能守恒。

若 $\mathrm{d}W_{外}=0$ 且 $\mathrm{d}W_{内非}=0$，则 $E=$常量

保守内力作功是系统势能与动能相互转化的手段和度量。

能量守恒定律：

$E=E_k+E_p+$内能$=$不变量

如果考虑各种物理现象，计及各种能量，则　一个孤立系统不管经历何种变化，系统所有能量的总和保持不变。

—— 普遍的能量守恒定律

机械能守恒定律是普遍的能量守恒定律在机械运动范围内的体现。

由势能函数求保守力

$$f_{保l}=-\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}l}$$

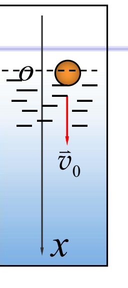
一维势能曲线

1. 保守力 f 指向势能下降的方向，大小正比于曲线的斜率：　$f=-dU(x)/dx$

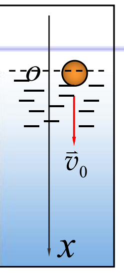
2. 只有势能低于总机械能的地段才可达到，二者的差值等于动能。

3. 势能曲线的极小值对应于稳定平衡点，势能曲线的极大值对应于不稳定平衡点。

例　一质量为 m 的小球竖直落入水中，刚接触水面时其速率为　v_0．设此球在水中所受的浮力与重力相等，水的阻力为　$F_r=-bv$　，b 为一常量．求阻力对球作的功与时间的函数关系．



解 建立如右图所示的坐标系



$$W=\int \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\int -bv\,\mathrm{d}x$$

$$=-\int bv\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=-b\int v^2\mathrm{d}t$$

$$\because \quad -bv=m\frac{dv}{dt}$$

对此式移相并积分，结合t=0, $v=v_0$

$$v=v_0\,\mathrm{e}^{-\frac{b}{m}t}$$

$$\therefore W=-bv_0^2\int_0^t \mathrm{e}^{-\frac{2b}{m}t}\mathrm{d}t \qquad W=\frac{1}{2}mv_0^2(\mathrm{e}^{-\frac{2b}{m}t}-1)$$