南开大学

电磁学

（Electromagnetism）

稳恒电流的磁场

一. 磁力的规律及磁感应强度$\vec{B}$

1. 洛仑兹力-磁场对运动的电荷

$$\boxed{\vec{F}_m = q\vec{v}\times\vec{B}}$$

2. 安培力-磁场对电流

$$\boxed{d\vec{F} = I\,d\vec{l}\times\vec{B}}$$

均可用来定义磁感强度

3. 对圆电流圈（或任意平面电流线圈）

$$\boxed{\vec{M} = I\vec{S}\times\vec{B} = \vec{m}\times\vec{B}}$$

$\vec{M}$ 磁力矩　$\vec{m}$ — 磁矩

稳恒电流和电动势

电流的连续性方程 $\oiint_{(S)} \vec{j}\cdot d\vec{s} = -dq/dt$ 恒定条件 $\oiint_{(S)} \vec{j}\cdot d\vec{s} = 0$

欧姆定律微分形式　$\vec{j} = \sigma\vec{E}$

电动势定义

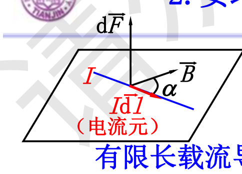
电动势：$\varepsilon = \int_{-\,(电源内)}^{+} \vec{K}\cdot d\vec{l}$

接触电势差与温差电动势

温差电效应有三个应用：测温、用作电源、电子制冷

霍尔效应的主要作用是：测磁场，电荷正负，载流子浓度等

2. 安培力-磁场对电流



对线电流：

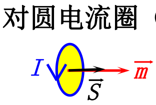
$$\boxed{d\vec{F} = I\,d\vec{l}\times\vec{B}}$$

有限长载流导线所受的安培力

$$\vec{F} = \int_L I\,d\vec{l}\times\vec{B}$$

均可用来定义磁感强度

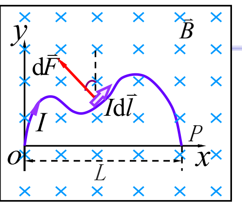
对圆电流圈（或任意平面电流线圈）：



$$\boxed{\vec{M} = I\vec{S}\times\vec{B} = \vec{m}\times\vec{B}}$$

$\vec{M}$ 磁力矩　$\vec{m}$ — 磁矩

求如图不规则的平面载流导线在均匀磁场中所受的力，已知$\vec{B}$和 I 。



解　取一段电流元 $Id\vec{l}$

$$d\vec{F} = Id\vec{l}\times\vec{B}$$

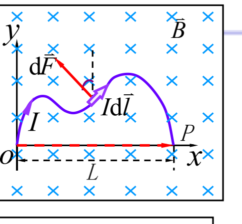
$$dF_x = dF\sin\theta = BIdl\sin\theta$$

$$dF_y = dF\cos\theta = BIdl\cos\theta$$

$$F_x = \int dF_x = BI\int_0^0 dy = 0$$

$$F_y = \int dF_y = BI\int_0^l dx = BIl$$

$$\vec{F} = \vec{F}_y = BIl\vec{j}$$



结论　任意平面载流导线在均匀磁场中所受的力，与其始点和终点相同的载流直导线所受的磁场力相同

二．磁场的规律

1. 毕—萨定律:电流元产生磁场

$$\boxed{\mathrm{d}\vec{B}=\frac{\mu_0 I\,\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{e}_r}{4\pi r^2}}$$

电流元不在自身方向上激发磁场。

2. 运动电荷产生磁场

$$\boxed{\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}\times\vec{e}_r}{r^2}}$$

- 磁通量

用磁力线的疏密表示磁场 $\vec{B}$ 的强弱，磁力线的切线方向表示磁场的方向。

$\vec{B}$ 可以看成是单位面积上的磁通量。单位[Wb/m²]

通过任意S面的磁通量 Φ_B，其数学表达式：

$$\Phi_B=\iint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}$$

磁通连续原理（$\vec{B}$的高斯定理）

$$\boxed{\oint_S \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=0}$$

这说明 $\vec{B}$ 线闭合，无头无尾，即磁场是无源场。

安培环路定理

$$\boxed{\oint_L \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\mu_o\sum I_{内}}$$

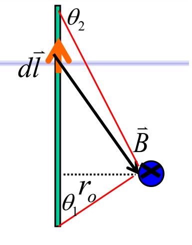
$I_{内}$ 流向与L绕向成右手关系时 $I_{内}$ 为正，

$I_{内}$ 流向与L绕向成左手关系时为负。

说明磁场为非保守场（涡旋场或有旋场）。

例题1：直线电流的磁场。

$$B=\int_L\frac{\mu_o I dl\sin\theta}{4\pi r^2}$$



因为各电流元产生的磁场方向相同，磁场方向垂直纸面向里所以只求标量积分。磁场方向垂直纸面向里。

$\because l=-r\cos\theta \quad \therefore l=-r_o ctg\theta$

$\because r_o=r\sin\theta \quad \therefore dl=r_o d\theta/\sin^2\theta$

$$B=\int_L\frac{\mu_o I\cdot r_o d\theta\cdot\sin\theta}{4\pi\sin^2\theta\cdot r_o^2/\sin^2\theta}=\frac{\mu_o I}{4\pi r_o}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sin\theta\cdot d\theta$$

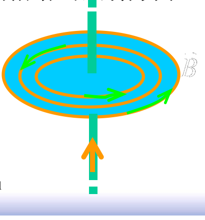
$$B=\int_L\frac{\mu_o I\cdot r_o d\theta\cdot\sin\theta}{4\pi\sin^2\theta\cdot r_o^2/\sin^2\theta}=\frac{\mu_o I}{4\pi r_o}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sin\theta\cdot d\theta$$

$$=\frac{\mu_o I}{4\pi r_o}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)$$

磁感应强度 $\vec{B}$ 的方向，与电流成右手螺旋关系，拇指表示电流方向，四指给出磁场方向

当 $\theta_1=0,\theta_2=\pi$ 时，

$$B=\frac{\mu_o I}{2\pi r_o}$$

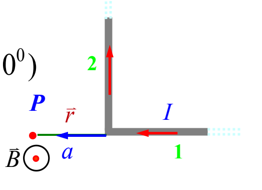


（2）对于任意形状直导线

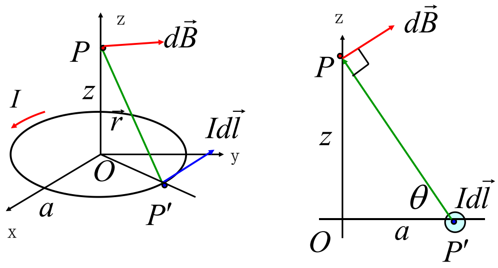
$$B_1=0$$

$$B_2=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\cos 90^0-\cos 180^0)$$

$$=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}$$



[例2] 求环状电流轴线上任意点P的磁场



(1) 微电流源的磁场

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{l}\times\vec{e}_r}{r^2}$$

分析场的对称性只沿Z轴

(2) 沿z方向的投影

$$dB_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dl\cos\theta}{r^2}$$

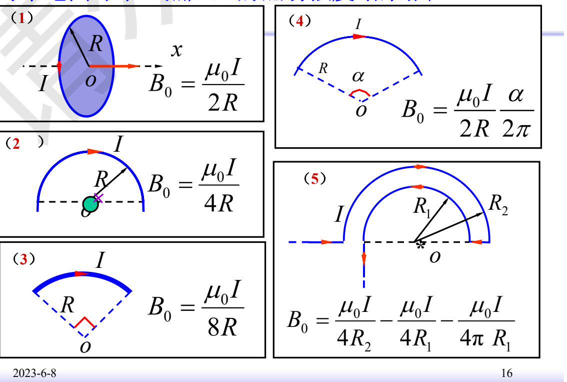
(3) 积分

$$B_z = \int_C dB_z = \int_C \frac{\mu_0 I\cos\theta}{4\pi r^2}dl$$

$$= \frac{\mu_0 I\cos\theta}{4\pi r^2}\int_C dl = \frac{\mu_0 I\cos\theta}{4\pi r^2}2\pi a$$

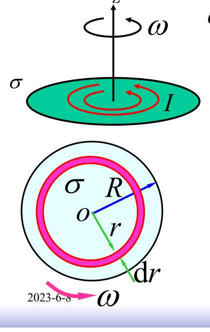
$$= \frac{\mu_0 I\cos\theta}{2r^2}a = \frac{\mu_0 I a^2}{2\left(z^2+a^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

对带电圆环中心点产生的磁场强度结果推广



[例3] 求绕轴旋转的圆盘轴线上的磁场（已知σ，ω）

$\sigma = Q/\pi R^2 \quad dQ = \sigma 2\pi r dr$



$$dI = \frac{dQ}{dt} = \frac{\sigma 2\pi r dr}{2\pi/\omega} = \boxed{\sigma\omega r}dr$$

$$dI = \sigma\omega r dr$$

利用带电圆环的结果：

$$dB_z = \frac{\mu_0 r^2 dI}{2\left(r^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{\mu_0\omega\sigma r^3 dr}{2\left(r^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

对r积分

$$B_z = \int_0^a \frac{\mu_0\omega\sigma r^3 dr}{2\left(r^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{\mu_0\omega\sigma}{2}\left.\frac{r^2+2z^2}{\sqrt{z^2+r^2}}\right|_0^a$$

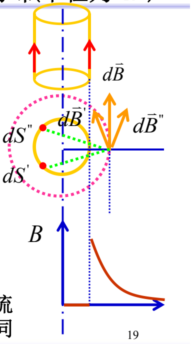
$$= \frac{\mu_0\omega\sigma}{2}\left(\frac{a^2+2z^2}{\sqrt{z^2+a^2}} - 2z\right)$$

[例3]

＊ 求无限长圆柱面电流的磁场分布(半径为 R)

✱分析场结构：有轴对称性

✱以轴上一点为圆心，取垂直于轴的平面内半径为 r 的圆为安培环路



$$\because \oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = 2\pi rB = \mu_o I$$

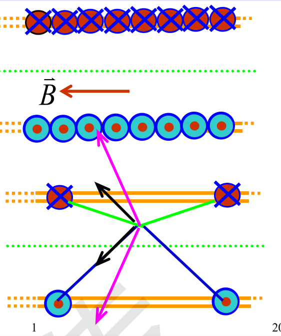
$$\therefore B = 0 \qquad r \le R$$

$$B = \frac{\mu_o I}{2\pi r} \qquad r \ge R$$

无限长圆柱面电流外面的磁场与电流都集中在轴上的直线电流的磁场相同

＊ 求载流无限长直螺线管内任一点的磁场

一个单位长度上有 n匝的无限长直螺线管。由于是密绕， ∴每匝视为圆线圈。

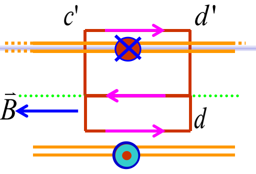


✱由对称性分析场结构

a. 只有轴上的分量；

b. 因为是无限长，在与轴等距离的平行线上磁感应强度相等。

✱取L矩形回路，ab 边在轴上，边cd与轴平行，另两个边垂直于轴。



因为无垂直于轴的磁场分量，又无电流穿过 L 回路，根据安培环路定理及轴上磁场得出，管内任一点的磁感应强度。

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = B_{ab}\cdot\overline{ab} - B_{cd}\cdot\overline{cd} = 0$$

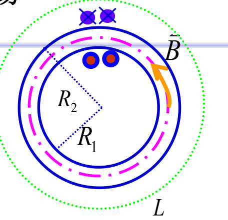
$$B_{ab} = B_{cd} = B = \mu_o nI$$

其方向与电流满足右手螺旋

同理可证，无限长直螺线管外任一点的磁场为零。选矩形回路$c'd'$边在管外。同学自行证明。

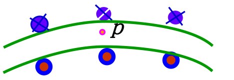
[例4] 求载流螺绕环内的磁场

设环很细，环的平均半径为R，总匝数为N，通有电流强度为 I



分析磁场结构，与长直螺旋管类似，环内磁场只能平行与线圈的轴线（即每一个圆线圈过圆心的垂线）。

根据对称性可知，在与环共轴的圆周上磁感应强度的大小相等，方向沿圆周的切线方向。磁力线是与环共轴的一系列同心圆。

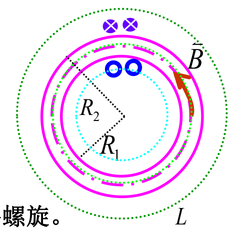


设螺绕环的半径为R_1, R_2，共有N匝线圈。以平均半径R 作圆为安培回路 L, 可得：

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = B2\pi R = \mu_o N\cdot I$$

$$\therefore B = \mu_o nI \quad R_1 \le r \le R_2$$

$$N = 2\pi Rn$$



n 为单位长度上的匝数。

其磁场方向与电流满足右手螺旋。

同理可求得 $\therefore B = 0$

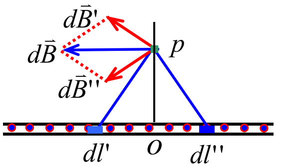
螺绕环管外磁场为零。

例5 ：无限大平板电流的磁场分布。设一无限大导体薄平板垂直于纸面放置，其上有方向垂直于纸面朝外的电流通过，面电流密度（即指通过与电流方向垂直的单位长度的电流）到处均匀, 大小为 j 。

解：视为无限多平行长直电流的场。

分析求场点p的对称性

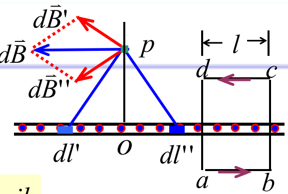
做 po 垂线，取对称的长直电流元，其合磁场方向平行于电流平面。



无数对称元在 p点的总磁场方向平行于电流平面。

因为电流平面是无限大，故与电流平面等距离的各点B的大小相等。在该平面两侧的磁场方向相反。

作一安培回路如图：bc和 da两边被电流平面等分。ab和cd 与电流平面平行, 则有



$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = B2l = \mu_o jl$$

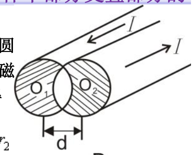
结论

$$\therefore B = \frac{\mu_o j}{2}$$ 方向如图所示。

在无限大均匀平面电流的两侧的磁场都为均匀磁场，并且大小相等，但方向相反。

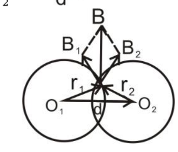
如图所示，两无限长平行放置的柱形导体通过等值，反向的电流I，电流在两个阴影所示的横截面内均匀分布。设两个导体横截面的面知皆为S，两圆柱轴线间距为d 。试求两导体中部分交叠部分的磁感强度。

解：重叠部分的磁感强度可视为两个长直截流的完整圆柱体在场点的磁感强度的叠加。每个长直圆柱电流的磁场 则分别具有对称性，并可用安培环路定理求得



$$B_1 = \frac{\mu_0}{2\pi r_1}\frac{I}{S}\pi r_1^2 = \frac{\mu_0 I}{2S}r_1 \qquad B_2 = \frac{\mu_0}{2\pi r_2}\frac{I}{S}\pi r_2^2 = \frac{\mu_0 I}{2S}r_2$$

取垂直纸面向外的单位矢量为$\vec{k}$、$\vec{d}$ 沿O_1O_2指向O_2，则



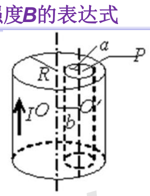
$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{2}\frac{I}{S}\vec{k}\times\vec{r}_1 \qquad \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{2S}(-\vec{k})\times\vec{r}_2$$

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{2}\frac{I}{S}\vec{k}\times(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \frac{\mu_0}{2}\frac{I}{S}\vec{k}\times\vec{d}$$

上式说明重叠部分空间的磁感强度与场点无关，即均匀分布的，其方向垂直O_1O_2向上，数值为$\frac{\mu_0}{2}\frac{Id}{S}$.

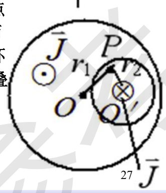
一无限长圆柱形直导体，横截面半径为***R***，在导体内有一半径为***a***的圆柱形孔，它的轴平行于导体轴并与它相距为***b***，设导体载有均匀分布的电流***I***，求孔内任意一点***P***的磁感强度***B***的表达式

思路：利用割补法，将管内空心部分看成同时通有相反方向的电流，且电流密度相同，则空间任一点的磁场可看成是这两个电流的磁场的迭加。



解：电流密度 $J = \frac{I}{\pi(R^2 - a^2)}$

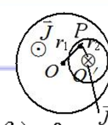
P点场强为充满圆柱并与***I***同向的电流I_1，及充满孔并与***I***反向的电流I_2的场叠加而成．取垂直于圆柱轴并包含***P***点的平面，令柱轴与孔轴所在处分别为***O***与O'，***P***点与两轴的距离分别为r_1与 r_2，并建立坐标如图．利用安培环路定理可知***P***点场强为与***I***同向的I_1和与***I***反向的I_2的场的叠加，且有

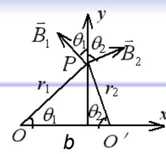


$$I_1 = J\pi r_1^2 \qquad I_2 = J\pi r_2^2$$

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_1} = \frac{\mu_0}{2}r_1 J \qquad B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_2} = \frac{\mu_0}{2}r_2 J$$

$\vec{B}_1$ $\vec{B}_2$方向如图所示．***P***点总场





$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$$

$$B_x = B_2\sin\theta_2 - B_1\sin\theta_1 = \frac{\mu_0}{2}J(r_2\sin\theta_2 - r_1\sin\theta_1) = 0$$

$$B_y = B_1\cos\theta_1 + B_2\cos\theta_2 = \frac{\mu_0}{2}J(r_1\cos\theta_1 + r_2\cos\theta_2)$$

$$B = B_y = \frac{\mu_0}{2}Jb = \frac{\mu_0 bI}{2\pi(R^2 - a^2)}$$

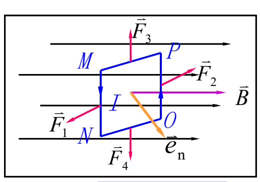
B与r_1， r_2无关，可知圆柱孔内为匀强场，即磁场方向与两轴组成的平面垂直，方向沿y轴正向。

另一解法：

P点相对于 点的矢径为 ，P点相对于 点的矢径为 ，点相对于点的矢径为 ，即 $\vec{b}$ $\vec{b} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$

9.4 磁力矩（磁场作用于载流线圈）

如图 均匀磁场中有一矩形载流线圈 $MNOP$



线圈平面垂直于磁场

$$MN = l_2 \quad NO = l_1$$

$$\boxed{\mathrm{d}\vec{F} = I\,\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{B}}$$

$$F_1 = BIl_2 \qquad \vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

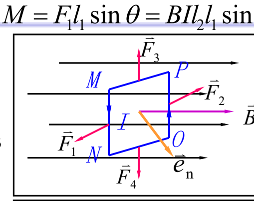
$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{4}\vec{F}_i = 0$$

$$F_3 = BIl_1 \qquad \vec{F}_3 = -\vec{F}_4$$

线圈面不垂直于磁场

$$MN = l_2 \quad NO = l_1 \qquad M = F_1 l_1\sin\theta = BIl_2 l_1\sin\theta$$

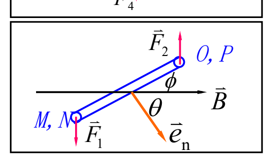
$$M = BIS\sin\theta$$



$$\vec{M} = \boxed{IS\vec{e}_n}\times\vec{B} = \boxed{\vec{m}}\times\vec{B}$$

线圈有N匝时

$$\vec{M} = NIS\vec{e}_n\times\vec{B}$$



➢ 结论：均匀磁场中，任意形状刚性闭合平面通电线圈所受的力和力矩为

$$\boxed{\vec{F}=0,\quad \vec{M}=\vec{m}\times\vec{B}}$$

$\vec{m}\,//\,\vec{B},\ \ \vec{M}=0$ $\begin{cases}\theta=0 & \text{稳定平衡}\\ \theta=\pi & \text{非稳定平衡}\end{cases}$

$\vec{m}\perp\vec{B},\ \ M=M_{\max}=mB,\ \ \theta=\pi/2$

➢ 磁矩 $\boxed{\vec{m}=NIS\,\vec{e}_{\rm n}}$ $\boxed{\vec{e}_{\rm n}\text{与}\ I\ \text{成右螺旋}}$

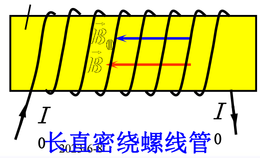
Δ 9.6.1 磁介质对磁场的影响

磁介质（magnetic medium）是能够影响磁场分布的物质。

传导电流 $I_0 \rightarrow \vec{B}_0$ 介质磁化→ $\vec{B}'$，

总磁感强度 $\vec{B}=\vec{B}_0+\vec{B}'$

均匀各向同性磁介质



长直密绕螺线管

均匀各向同性介质充满磁场所在空间时，

有：$\boxed{\vec{B}=\mu_r\vec{B}_0}$

μ_r —相对磁导率（relative permeability）

$$\vec{B}=\vec{B}_0+\vec{B}'$$

磁介质中的总磁感强度 真空中的磁感强度 介质磁化后的附加磁感强度

顺磁质 $\vec{B}>\vec{B}_0$（铝、氧、锰等）
抗磁质 $\vec{B}<\vec{B}_0$（铜、铋、氢等）} 弱磁质
铁磁质 $\vec{B}>>\vec{B}_0$（铁、钴、镍等）

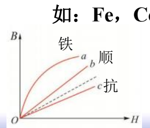
磁介质的分类：

▲ 弱磁质，$\mu_r\approx 1$

- 顺磁质（paramagnetic substance） $\mu_r>1$
  如：Mn，Al，O_2，N_2…
- 抗磁质（diamagnetic substance） $\mu_r<1$
  如：Cu，Ag，Cl_2，H_2…

▲ 铁磁质（ferromagnetic substance） $\mu_r>>1$

如：Fe，Co，Ni …



图中虚线为 $B=\mu_0H$ 关系曲线，其他三条曲线为三种不同材料的B-H关系曲线。(　) 曲线是顺磁质，(　) 曲线是抗磁质，(　)曲线是铁磁质。

无限长直载流导线与一个无限长薄电流板构成闭合回路，电流板宽为a，二者相距也为a(导线与板在同一平面内)，求导线与电流板间单位长度内作用力。

解：先求板电流在线电流处 的B

任取一细长条电流 $x\sim x+dx$

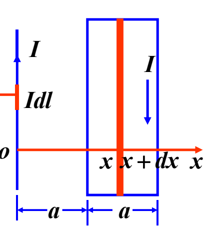
$dI=idx \qquad i=I/a$

$dB=\dfrac{\mu_0 dI}{2\pi x} \qquad \otimes$

$B=\int dB=\int_a^{2a}dB=\dfrac{\mu_0 i}{2\pi}\ln 2$

再求单位长度内作用力

$dF=BIdl \qquad \dfrac{dF}{dl}=BI=\dfrac{\mu_0 I^2}{2\pi a}\ln 2$

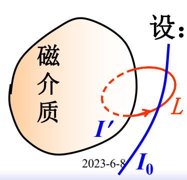


9.6.4 有磁介质时磁场的规律

真空中的规律 $\begin{cases}\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0\sum I_{\text{内}} & (1)\\ \oint_S \vec{B}\cdot d\vec{s}=0 & (2)\end{cases}$

考虑到磁化电流，（1）式则需要修改。

一. $\vec{H}$的环路定理



设：I_0— 传导电流，I' — 磁化电流

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0\sum(I_{0\text{内}}+I'_{\text{内}})$$

$$=\mu_0\sum I_{0\text{内}}+\mu_0\oint_L \vec{M}\cdot d\vec{l}$$

$\because \oint_L \left(\frac{\vec B}{\mu_0}-\vec M\right)\cdot d\vec l = \sum I_{0内}$

令 $\boxed{\vec H = \frac{\vec B}{\mu_0}-\vec M}$ —— 磁场强度（magnetic field intensity）

得：$\boxed{\oint_L \vec H\cdot d\vec l = \sum I_{0内}}$ —— $\vec H$ 的环路定理

▲ H 的单位：A/m （SI）；

奥斯特（Oersted） Oe（CGSM），$1\,\text{Oe} = \frac{10^3}{4\pi}\,\text{A/m}$。

▲ 真空：$\vec M = 0$，$\vec H = \frac{\vec B}{\mu_0}$

▲ 各向同性磁介质：

$\vec M \propto \vec H \longrightarrow \boxed{\vec M = (\mu_r - 1)\vec H = \chi_m \vec H}$

χ_m — 磁化率（magnetic susceptibility）

$\chi_m = \mu_r - 1$

$\vec H = \frac{\vec B}{\mu_0} - \vec M = \frac{\vec B}{\mu_0} - \chi_m \vec H$

$\longrightarrow \boxed{\vec B = \mu_0(\chi_m + 1)\vec H = \mu_0\mu_r \vec H}$

令 $\boxed{\mu = \mu_0\mu_r}$ — 磁导率（permeability）

则有 $\boxed{\vec B = \mu \vec H}$ 真空：$\mu = \mu_0$

二. 环路定理的应用举例

［例1］证明在各向同性均匀磁介质内，无传导电流处，也无磁化电流。

证：介质中闭合回路L所套联的分子电流为：

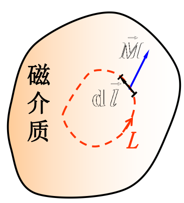
$I' = \oint_L \vec M\cdot d\vec l = \oint_L \chi_m \vec H\cdot d\vec l$

$= \chi_m \oint_L \vec H\cdot d\vec l = \chi_m \cdot \sum I_0$

若 $\sum I_0 = 0$，则 $I' = 0$

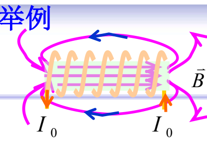
L可任取，且可无限缩小，

故 $I_0 = 0$ 处，$I' = 0$。

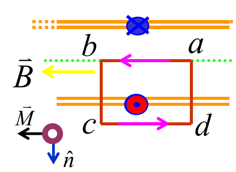


二. 环路定理的应用举例

例2：长直螺旋管内充满均匀磁介质(μ_r)，设励磁电流 I_0，单位长度上的匝数为 n。求管内的磁感应强度和磁介质表面的面束缚电流密度。



解：因管外磁场为零，取如图所示安培回路 $\because \oint_L \vec H\cdot d\vec l = \sum_L I$



$\therefore lH = nlI_0 \quad \therefore H = nI_0$

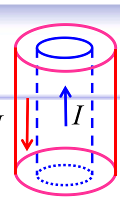
$\therefore B = \mu_0\mu_r H = \mu_0\mu_r n I_0$

$\because \vec H = \frac{\vec B}{\mu_0} - \vec M \quad \therefore M = (\mu_r - 1)nI_0$ 顺磁质 $\mu_r > 1, j' > 0$

$\because \vec j' = \vec M \times \hat n \quad \therefore j' = (\mu_r - 1)nI_0$ 抗磁质 $\mu_r < 1, j' < 0$

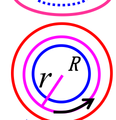
束缚电流与传导电流反向

例3：长直单芯电缆的芯是一根半径为R 的金属导体，它与外壁之间充满均匀磁介质，电流从芯流过再沿外壁流回。求介质中磁场分布及与导体相邻的介质表面的束缚电流。



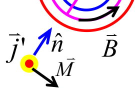
$\because \oint_L \vec H\cdot d\vec l = \sum_L I \quad \therefore H = \frac{I}{2\pi r}$

$\therefore B = \mu_0\mu_r H = \mu_0\mu_r \frac{I}{2\pi r}$ 方向沿圆的切线方向



$\because \vec H = \frac{\vec B}{\mu_0} - \vec M \quad \because \vec j' = \vec M \times \hat n$

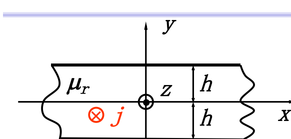
$\therefore j' = (\mu_r - 1)\frac{I}{2\pi R}$ 方向与轴平行



磁介质内表面的总束缚电流 $\therefore I' = 2\pi R j' = (\mu_r - 1)I$

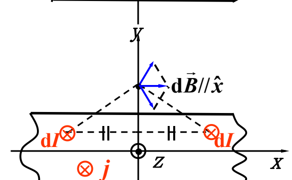
［例4］如图示，已知均匀载流无限大厚平板电流密度为 j（沿z），导体相对磁导率为μ_r，

求：$\vec B$ 和 $\vec j_S'$

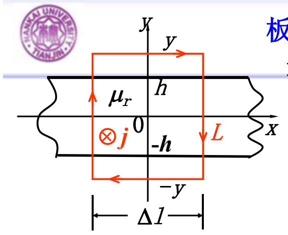


解：分析 $\vec B$ 的对称性，

有 $\vec B = \vec B(y)$



且 $\begin{cases} y > 0: & \vec B = B(y)\hat x \\ y < 0: & \vec B = -B(y)\hat x \end{cases}$



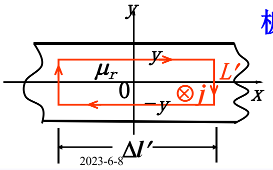
板外：对图示矩形回路 L，

有 $\oint_L \vec H\cdot d\vec l = j\cdot(\Delta l\cdot 2h)$

$$2H_{外}\cdot\Delta l = 2jh\cdot\Delta l$$

$$H_{外}=jh \to \vec H_{外} = jh\frac{y}{|y|}\hat x$$

$$\vec B_{外}=\mu_0\vec H_{外} = \mu_0 jh \frac{y}{|y|}\hat x$$



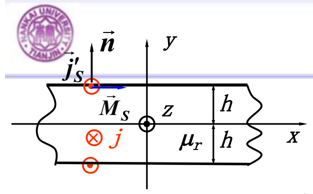
板内：对图示矩形回路 L'，

有 $\oint_{L'} \vec H_{内}\cdot d\vec l = j\cdot(\Delta l'\cdot 2y)$

$$2H_{内}\cdot\Delta l' = 2jy\cdot\Delta l'$$

$$\vec B_{内}=\mu_0\mu_r\vec H_{内}=\mu_0\mu_r jy\hat x$$

求磁化面电流密度



$$\vec j'_S=\vec M_S\times\vec e_n$$

$$\vec M_S=\chi_m\vec H_{内S}$$
$$=(\mu_r-1)\vec H_{内S}$$

上表面：$\vec e_n=\hat y$，$\vec M_S=(\mu_r-1)(jh\hat x)$

$$\vec j'_S=(\mu_r-1)jh\hat z=-(\mu_r-1)h\cdot\vec j$$

电流密度

下表面：$\vec e_n=-\hat y$，$\vec M_S=(\mu_r-1)(-jh\hat x)$

$$\vec j'_S=-(\mu_r-1)h\cdot\vec j$$（同上表面）

磁介质中的安培环路定理

$$\oint_L \vec B\cdot d\vec l=\mu_0\sum_L I+\mu_0\sum_L i'$$

$$\oint_L \vec B\cdot d\vec l=\mu_0\sum_L I+\mu_0\oint_L \vec M\cdot d\vec l$$

$$\oint_L\left(\frac{\vec B}{\mu_0}-\vec M\right)\cdot d\vec l=\sum_L I$$

$$\vec H \overset{def}{\equiv} \frac{\vec B}{\mu_0}-\vec M$$

$$\oint_L \vec H\cdot d\vec l=\sum_L I$$

电介质中的高斯定理

$$\oiint_S \vec E\cdot d\vec S=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_S(q_0+q')$$

$$\oiint_S \vec E\cdot d\vec S=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_S q_0-\frac{1}{\varepsilon_0}\oiint_S \vec P\cdot d\vec S$$

$$\oiint_S(\varepsilon_0\vec E+\vec P)\cdot d\vec S=\sum_S q_0$$

$$\vec D \overset{def}{\equiv} \varepsilon_0\vec E+\vec P$$

$$\oiint_S \vec D\cdot d\vec S=\iiint_V \rho_e dV$$

- $\vec B,\vec H,\vec M$ 之间的关系

$$\vec M=\chi_m\vec H$$

$$\vec H \overset{def}{\equiv} \frac{\vec B}{\mu_0}-\vec M$$

$$\vec B=\mu_0(1+\chi_m)\vec H$$

$$\mu_r=(1+\chi_m)$$

$$\vec B=\mu_0\mu_r\vec H=\mu\vec H$$

μ_r 称为相对磁导率

$\mu=\mu_0\mu_r$ 磁导率

$|\vec M|=j_s$ $\boxed{\vec j'_S=\vec M\times\vec e_n}$

实验规律

量纲

电磁场的本构方程

描述真空中电磁场和介质中电磁场的关系式

- $\vec P$、$\vec D$、$\vec E$ 之间的关系：

$$\vec P=\chi_e\varepsilon_0\vec E$$

$$\vec D \overset{def}{\equiv} \varepsilon_0\vec E+\vec P$$

$$\vec D=(1+\chi_e)\varepsilon_0\vec E$$

$$\varepsilon_r=(1+\chi_e)$$

$$\vec D=\varepsilon_r\varepsilon_0\vec E=\varepsilon\vec E$$

ε_r 称为相对电容率或相对介电常量。

$$\therefore P_n=\sigma'$$