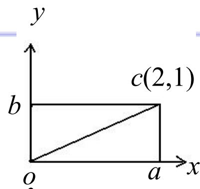
[例]已知 $\vec{F}=2y\vec{i}+4x^2\vec{j}$，$c$点坐标（2，1）求：$F$ 的功

（A）沿路径 oac

（B）沿路径 obc

（C）沿路径 oc



解：由 $A=\int\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int(F_x dx+F_y dy)=\int(2ydx+4x^2dy)$

$$(A)\quad A_{oac}=\int_{oa}(2ydx+4x^2dy)+\int_{ac}(2ydx+4x^2dy)$$

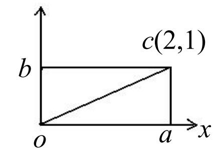
$$=\int_0^2 2ydx+\int_0^1 4x^2dy=16(\mathrm{J})$$

$$A=\int\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int(F_x dx+F_y dy)=\int(2ydx+4x^2dy)$$

$$(B)\quad A_{obc}=\int_{ob}4x^2dy+\int_{bc}2ydx=\int_0^2 2ydx=4(\mathrm{J})$$

$$(C)\quad A_{oc}=\int_{oc}(2ydx+4x^2dy)$$

$$=\int_0^2 2ydx+\int_0^1 4x^2dy$$



$x=2y$ 代入 $\quad A_{oc}=\int_0^2 xdx+\int_0^1 16y^2dy$

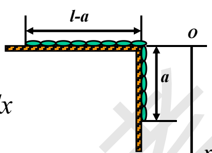
$$=2+5.33=7.33(\mathrm{J})$$

做功与路径有关

例、一链条总长为L，质量为m。放在桌面上并使其下垂，下垂的长度为a，设链条与桌面的滑动摩擦系数为μ，令链条从静止开始运动，则：（1）到链条离开桌面的过程中，摩擦力对链条做了多少功？（2）链条离开桌面时的速率是多少？

解：(1)建坐标系如图

$$f=\mu mg(l-x)/l$$



$$W_f=\int_a^l\vec{f}\bullet d\vec{r}=\int_a^l-\frac{\mu mg}{l}(l-x)dx$$

$$=-\left[\frac{\mu mg}{l}(lx-\frac{1}{2}x^2)\right]_a^l=-\frac{\mu mg}{2l}(l-a)^2$$

注意：摩擦力作负功！

(2)对链条应用动能定理：

$$\sum W=W_P+W_f=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2$$

$$\because v_0=0\ \therefore W_P+W_f=\frac{1}{2}mv^2$$

$$W_P=\int_a^l\vec{P}\bullet d\vec{r}=\int_a^l\frac{mg}{l}xdx=\frac{mg(l^2-a^2)}{2l}$$

前已得出： $W_f=-\frac{\mu mg(l-a)^2}{2l}$

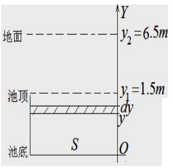
$$\therefore\frac{mg(l^2-a^2)}{2l}-\frac{\mu mg(l-a)^2}{2l}=\frac{1}{2}mv^2$$

得 $v=\sqrt{\frac{g}{l}}\left[(l^2-a^2)-\mu(l-a)^2\right]^{\frac{1}{2}}$

例3.4 一地下蓄水池，面积为$50m^2$，储水深度为$1.5m$，假定水平面低于地面的高度是$5.0m$，试求：(1)如果要将这池水全部吸到地面，需做功多少？

解:(1) 如图所示，厚度为dy的水层的质量：

$$dm=\rho Sdy$$



将此水层提升到地面需克服重力做功

$$dA=(dm)g(y_2-y)=\rho Sg(y_2-y)dy$$

将整池水提升到地面需做的总功

$$A=\int dA=\int_0^{y_1}\rho Sg(y_2-y)dy=\rho Sg(y_2y_1-\frac{1}{2}y_1^2)$$

$$=4.23\times10^6J$$

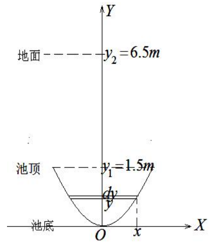
解法二：整池水的质心位置与地面间的高度距离为

$$h=(5.0+\frac{1.5}{2})m=5.75m$$

将整池水抽到地面需克服重力做功

$$A=mgh=\rho Sh_{水深}gh=1\times10^3\times50\times1.5\times9.8\times5.75J=4.23\times10^6J$$

补充例题：上题中设水池是以抛物线$y=x^2$绕y轴旋转而成的旋转抛物面，其它条件与上题相同，求：将整池水抽到地面需克服重力做的功.



解：如图所示，厚度为dy的水层的质量

$$dm=\rho\pi x^2dy=\rho\pi ydy$$

将此水层提升到地面需克服重力做功

$$dA=(dm)g(y_2-y)=\rho\pi g(y_2-y)ydy$$

将整池水提升到地面需做的总功

$$A=\int_0^{y_1}\rho\pi g(y_2-y)ydy=\rho\pi g(\frac{1}{2}y_1^2y_2-\frac{1}{3}y_1^3)$$

例3.5 风力F作用于向北运动的船，风力方向变化的规律是：θ＝BS，其中S为位移，B为常数，θ为F与S间的夹角。如果运动中，风的方向自南变到东，求：风力作的功

解：元功：

dA＝Fdscosθ；

其中θ＝BS

积分限：

风向由南变到东，则θ由0变到π/2；S由0变到π/2B

θ变

$$A=\int_0^{\frac{\pi}{2B}} F dS\cos\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2B}} F\cos(BS)d(BS)\frac{1}{B}$$

$$=\frac{F}{B}\sin(BS)\Big|_0^{\frac{\pi}{2B}}$$

$$=\frac{F}{B}\sin\frac{\pi}{2}$$

$$=\frac{F}{B}$$

动量与冲量

牛顿定律是瞬时的规律。

在有些问题中，如：碰撞（宏观）、散射（微观）… 我们往往只关心过程中力的效果——力对时间和空间的积累效应。

力在时间上的积累效应：

平动 ⟶ 冲量 ⟶ 动量的改变

转动 ⟶ 冲量矩 ⟶ 角动量的改变

力在空间上的积累效应

⟶ 功 ⟶ 改变能量

$$\vec F=\frac{\mathrm{d}(m\vec v)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\vec p}{\mathrm{d}t}$$

质点及质点系动量定理：

$\boxed{\mathrm{d}\vec I=\vec F\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}\vec p}$ （微分形式）

$\boxed{\vec I=\int_{t_1}^{t_2}\vec F\,\mathrm{d}t=\vec p_2-\vec p_1}$ （积分形式）

$$(\sum_i\vec F_i)\mathrm{d}t=\sum_i\mathrm{d}\vec p_i$$

$$\sum_i\vec F_i=\vec F_{外},\quad \sum_i\vec p_i=\vec P$$

系统总动量由外力的冲量决定，与内力无关。

用质点系动量定理处理问题可避开内力。

动量守恒定律

质点系所受合外力为零时，质点系的总动量不随时间改变。这就是质点系的动量守恒定律。

即 $\boxed{\vec F_{外}=0\text{ 时，}\vec P=\text{常矢量}}$

几点说明：

1. 动量守恒定律是牛顿第三定律的必然推论。
2. 动量定理及动量守恒定律只适用于惯性系。

3. 动量若在某一惯性系中守恒,则在其它一切惯性系中均守恒。
4. 若某个方向上合外力为零,则该方向上动量守恒，尽管总动量可能并不守恒。
5. 当外力<<内力,且作用时间极短时（如碰撞），可认为动量近似守恒。
6. 动量守恒定律是比牛顿定律更普遍、更基本的定律,它在宏观和微观领域均适用。
7. 用守恒定律作题，应注意分析 过程、系统和条件。