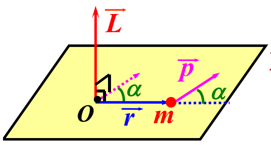
质点的角动量



质点 m 对惯性系中的固定点O 的角动量定义为：

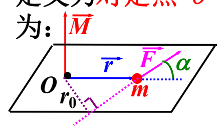
$$\boxed{\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}\times(m\vec{v})}$$

大小：$L=rp\sin\alpha=rmv\sin\alpha$，单位：$\mathrm{kg-m^2/s}$

方向：⊥于$\vec{r}$，$\vec{p}$（$\vec{v}$）决定的平面（右螺旋）

二. 质点的角动量定理，力矩

定义力对定点 O 的力矩（moment of force）为：



$$\boxed{\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}}$$

$M=rF\sin\alpha=r_0F$

$r_0=r\sin\alpha$ 称力臂

$$\boxed{\vec{M}=\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}}$$

— 质点角动量定理（微分形式）

$$\boxed{\mathrm{d}\vec{L}=\vec{M}\,\mathrm{d}t}$$

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}\cdot\mathrm{d}t=\vec{L}_2-\vec{L}_1}$$

—质点角动量定理（积分形式）

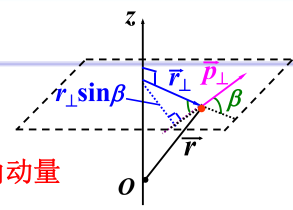
$\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}\,\mathrm{d}t$ 称冲量矩

——力矩对时间的积累作用

作用于质点的合外力对参考点 O 的力矩，等于质点对该点 O 的角动量随时间的变化率.

质点对轴的角动量

$$L_z=(\vec{r}_\perp\times\vec{p}_\perp)\cdot\vec{k}$$
$$=p_\perp r_\perp\sin\beta$$



—— 质点对轴的角动量

对轴的角动量定理

$$\vec{M}\cdot\vec{k}=\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{k}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{L}\cdot\vec{k})$$

即 $\boxed{M_z=\dfrac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t}}$ —— 质点对轴的角动量定理

角动量守恒定律

$\boxed{若\ \vec{M}=0，则\ \vec{L}=常矢量}$

— 质点角动量守恒定律

$\boxed{若M_z=0，则L_z=常量}$

—质点对轴的角动量守恒定律

质点系的角动量

$$\boxed{\vec{M}_{外}=\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}}$$

— 质点系角动量定理

$\boxed{若\ \vec{M}_{外}=0，则\ \vec{L}=常矢量}$

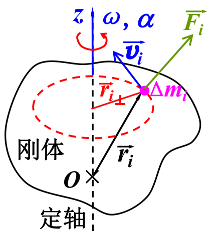
—质点系角动量守恒定律

小结：动量与角动量的比较

动量	角动量
$\vec{p}=\sum_i m_i\vec{v}_i$	$\vec{L}=\sum_i\vec{r}_i\times\vec{p}_i$
矢量	矢量
与固定点无关	与固定点有关
与内力无关	与内力矩无关
守恒条件 $\sum_i\vec{F}_i=0$	守恒条件 $\sum_i\vec{r}_i\times\vec{F}_i=0$

第五章 刚体定轴转动

—刚体的定轴转动定律



$$\vec{M}_{外} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} \quad (对\ O\ 点)$$

$$M_{外z} = \frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} \quad (对\ z\ 轴)$$

$$L_z = \sum_i L_{iz} = \sum_i \Delta m_i v_i r_{i\perp}$$

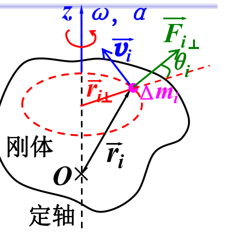
$$= (\sum_i \Delta m_i r_{i\perp}^2)\cdot\omega$$

令 $\boxed{J_z = \sum_i \Delta m_i r_{i\perp}^2}$ —转动惯量（对z轴）（rotational inertia）

则 $\boxed{L_z = J_z\cdot\omega}$

$$M_{外z} = \frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = J_z\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

即 $\boxed{M_{外z} = J_z\alpha}$ —转动定律



其中 $M_{外z} = \sum_i F_{i\perp} r_{i\perp}\cdot\sin\theta_i$

定轴情况下，可不写下标z，

记作： $\boxed{M = J\alpha}$

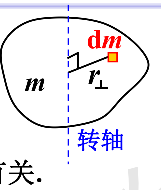
与牛顿第二定律相比，有：

M相应F， J相应m， α相应 a 。

转动惯量的计算

质点系 $J = \sum \Delta m_i r_{i\perp}^2$

连续体 $J = \int_m r_\perp^2\cdot\mathrm{d}m$



（1）与刚体的体密度 ρ 有关.

（2）与刚体的几何形状(及体密度ρ的分布)有关.

（3）与转轴的位置有关.

刚体是连续分布的情况下，其质量亦是连续分布的

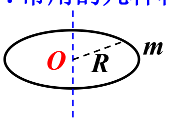
$$J_z = \lim_{N\to\infty}\sum_i m_i R_i^2 = \lim_{N\to\infty}\sum_i \Delta m_i R_i^2 = \int_V R^2 dm$$

体分布 $dm = \rho dv$

面分布 $dm = \sigma ds$

线分布 $dm = \lambda dl$

一. 常用的几种转动惯量表示式

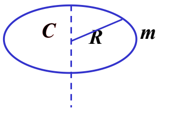


细圆环： $\boxed{J_O = mR^2}$

例. 质量为m ，半径为R的均匀平面圆环，

对垂直于平面的对称轴的转动惯量

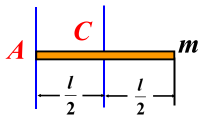
解：



$$dm = \lambda dl$$

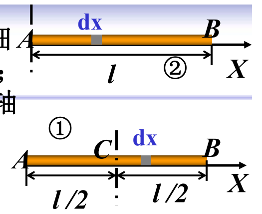
$$\therefore J_z = \int R^2 dm = \int_0^{2\pi R}\frac{m}{2\pi R}R^2 dl$$

$$= mR^2$$



均匀细杆：$\boxed{J_C = \dfrac{1}{12}ml^2}$ $\boxed{J_A = \dfrac{1}{3}ml^2}$

例 长为 l ，质量为 M 的细长均质均匀棒，绕①过质心；②过端点，而垂直于棒的轴的 。J

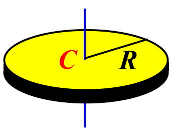


解：设其线密度为λ

① $dJ = x^2 dm = x^2 \lambda dx = x^2 \dfrac{M}{l} dx$

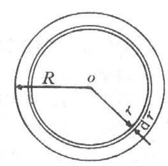
$$\therefore J_0 = \int_{-l/2}^{l/2} x^2 \frac{M}{l} dx = \frac{M}{l} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} = \frac{1}{12} Ml^2$$

② $J_0' = \int_0^l x^2 \dfrac{M}{l} dx = \dfrac{1}{3} Ml^2$



m 均匀圆盘：$\boxed{J_C = \dfrac{1}{2}mR^2}$

解：设其体密度为ρ



$$M = (\pi R^2 \cdot h)\rho$$

$$dm = 2\pi r h \rho dr$$

$$dJ = dm \cdot r^2 = 2\pi r h \rho r^3 dr$$

$$J = \int_0^R 2\pi\rho h r^3 dr = \frac{1}{2}\pi R^4 h \rho = \frac{1}{2} MR^2$$

讨论：

①若为实心圆柱体绕中心轴转动 $J = \dfrac{1}{2} MR^2$

②若一空心圆柱体绕中心轴转动

$$J = \int_{R_1}^{R_2} 2\pi h \rho r^3 dr = \frac{1}{2}(\pi R_2^2 h\rho)R_2^2 - \frac{1}{2}(\pi R_1^2 h\rho)R_1^2$$

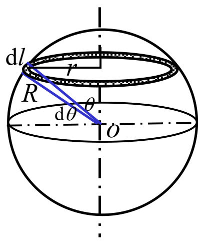
$$= \frac{1}{2}\pi h\rho(R_2^4 - R_1^4) = \frac{1}{2}\pi h\rho(R_2^2 - R_1^2)(R_2^2 + R_1^2)$$

$$= \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2) \qquad M = \pi(R_2^2 - R_1^2)h\rho$$

薄球壳绕直径的 $J = \dfrac{2}{3}mR^2$

实心球绕直径的 $J = \dfrac{2}{5}mR^2$

求质量 m，半径 R 的薄球壳对直径的转动惯量



解：取离轴线距离相等的点的集合为积分元

$$\mathrm{d}s = 2\pi r\mathrm{d}l = 2\pi R\sin\theta\cdot R\mathrm{d}\theta$$

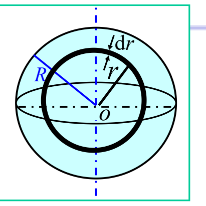
面密度 $\sigma = \dfrac{m}{4\pi R^2}$

$$\mathrm{d}m = \sigma\mathrm{d}s = \frac{1}{2}m\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{d}J = r^2\mathrm{d}m = (R\sin\theta)^2\mathrm{d}m = \frac{1}{2}mR^2\sin^3\theta\mathrm{d}\theta$$

$$J = \int\mathrm{d}J = \int_0^{\pi}\frac{1}{2}mR^2\sin^3\theta\mathrm{d}\theta = \frac{2}{3}mR^2$$

求质量 m，半径 R 的球体对直径的转动惯量



解：以距中心 r，厚 $\mathrm{d}r$ 的球壳为积分元

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{d}V &= 4\pi r^2\mathrm{d}r\\ \rho &= \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3}\end{aligned}\right\}\mathrm{d}m = \rho\,\mathrm{d}V$$

$$\mathrm{d}J = \frac{2}{3}\mathrm{d}m\cdot r^2 = \frac{2mr^4\mathrm{d}r}{R^3}$$

$$J = \int\mathrm{d}J = \int_0^R\frac{2mr^4\mathrm{d}r}{R^3} = \frac{2}{5}mR^2$$

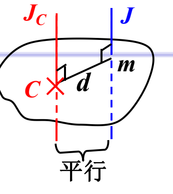
二. 计算转动惯量的几条规律

1. 对同一轴J具有可叠加性(如空心圆柱体)

$$\boxed{J = \sum J_i}$$

2. 平行轴定理

$$\boxed{J = J_C + md^2}$$

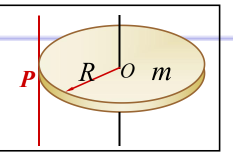


$$\therefore\quad J_C = J_{\min}$$

质量为m的刚体，如果对其质心轴的转动惯量为J_C，则对任一与该轴平行，相距为d 的转轴的转动惯量

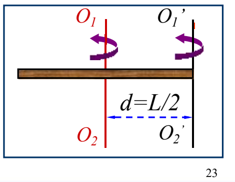
$$J = J_c + md^2$$

圆盘对P 轴的转动惯量



$$J_P = \frac{1}{2}mR^2 + mR^2$$

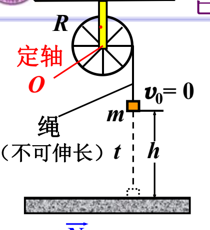
质量为m，长为L的细棒绕其一端的J



$$J_c = \frac{1}{12}mL^2$$

$$J = J_c + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}mL^2$$

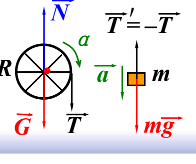
5.4 转动定律应用举例 $\boxed{M = J\alpha}$



已知：$R = 0.2\text{m}$，$m = 1\text{kg}$，$v_0 = 0$，$h = 1.5\text{m}$，绳轮间无相对滑动，下落时间 $t = 3\text{s}$。(轮的质量分布未知)

求：轮对 O 轴 $J = ?$

解：动力学关系：



对轮：$T\cdot R = J\cdot\alpha$ (1)

对m：$mg - T = ma$ (2)

运动学关系：$a = \alpha\cdot R$ (3)

$h = \dfrac{1}{2}at^2$ (4)

(1)~(4)联立解得： $J=(\frac{gt^2}{2h}-1)mR^2$

分析结果：

- 量纲对；
- h、m 一定，$J\uparrow\rightarrow t\uparrow$，合理；
- 若 $J=0$，得 $h=\frac{1}{2}gt^2$，正确。

代入数据：

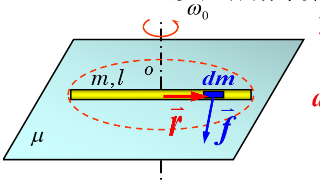
$$J=(\frac{9.8\times3^2}{2\times1.5}-1)\times1\times0.2^2=1.14\,\mathrm{kg\cdot m^2}$$

此为一种用实验测转动惯量的方法。

例2：如图杆长为 l ,质量为 m,摩擦系数为 μ 设开始时杆以角速度 ω_0 绕过中心 o 且垂直与桌面的轴转动

试求:（1）作用在杆的摩擦力矩

（2）经过多长时间杆才会停止转动



解 :(1) $dm=\frac{m}{l}dr$

任取 dm $f=\mu gdm$

$d\vec{M}=\vec{r}\times\vec{f}$ $(\vec{r}\perp\vec{f})$

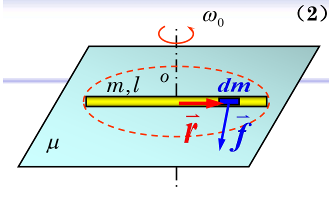
$\therefore dM=r\mu dmg$

$=\mu\frac{mg}{l}rdr$

$$M=\int dM=2\int_0^{l/2}\mu\frac{mg}{l}rdr=\frac{1}{4}\mu mgl$$

方向 $\vec{r}\times\vec{f}$ 竖直向下

（2）经过多长时间杆才会停止转动



(2)由转动定理：

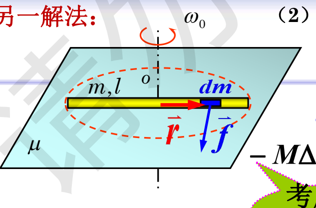
$$\boxed{M=J\alpha}$$

$$J=\frac{1}{12}ml^2$$

$\omega_0=\alpha t$ $\quad M=\frac{1}{4}\mu mgl$

$$\boxed{t=\frac{\omega_0 l}{3\mu g}}$$

另一解法： （2）经过多长时间杆才会停止转动



(2)由角动量定理：

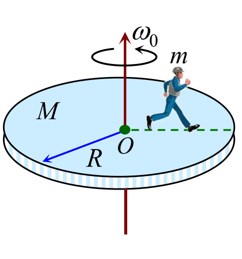
$$\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}dt=J_2\vec{\omega}_2-J_1\vec{\omega}_1$$

$$-M\Delta t=J\omega-J\omega_0=-J\omega_0$$

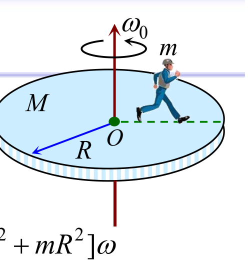
考虑方向

$$\left.\begin{array}{l}\Delta t=\frac{J\omega_0}{M}\\ J=\frac{1}{12}ml^2\\ M=\frac{1}{4}\mu mgl\end{array}\right\}\Rightarrow\boxed{\Delta t=\frac{\omega_0 l}{3\mu g}}$$

例3：一质量为*M*、半径为*R*的圆形水平转台可绕通过其中心的光滑竖直轴转动。质量为*m*的人站在转台上距转轴为*R*/2处，设开始时转台与人相对于地面以角速度ω_0匀速转动，求此人走到转台边缘时，人和转台一起转动的角速度ω



取人与转台为一系统，由于转台和人的重力以及转轴对转台的支承力都平行于转轴，这些力对转轴的力矩为零，所以该系统对转轴的角动量守恒



$$[\frac{1}{2}MR^2+m(\frac{R}{2})^2]\omega_0=[\frac{1}{2}MR^2+mR^2]\omega$$

$$\omega=\frac{2M+m}{2M+4m}\omega_0$$

例4：水平桌面上一均匀细棒，长l，质量M，可绕O点转动

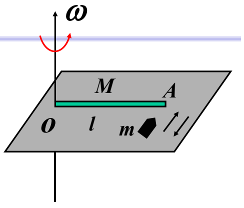
与桌面滑动摩擦系数为μ

小滑块质量m，水平速度υ_1

垂直棒的另一端A碰撞，

碰后速度υ_2，与υ_1方向相反。

求：细棒开始转动至停止需要时间？



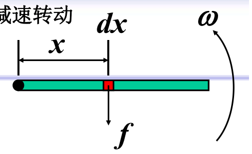
解：过程一：滑块与棒碰撞

滑块与棒碰撞，角动量守恒

设：细棒碰后转动角动量L 选正方向如图

$$0+m\upsilon_1 l = L - m\upsilon_2 l \Rightarrow L = ml(\upsilon_1+\upsilon_2)$$

过程二：细棒在摩擦力矩的作用下，减速转动



$$dm = \frac{M}{l}dx$$

$$f = \mu \cdot dmg$$

$$M_f = -\int_0^l \mu \cdot dmgx = -\frac{1}{2}\mu Mgl$$

由转动定理：$M_f = J\alpha$

又：$L = J\omega \quad \omega = \alpha t \quad J = \frac{1}{3}ml^2$

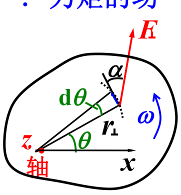
联立得：　　也可由：$Mt = J\omega$

$$\Rightarrow t = \frac{2m(\upsilon_1+\upsilon_2)}{\mu Mg}$$

$t = \frac{J\omega}{M}$ 求出

定轴转动中的功能关系

一、力矩的功



力矩的空间积累效应：

$$dW = F_\perp \cos\alpha (r_\perp d\theta)$$
$$= (F_\perp \cos\alpha \cdot r_\perp) d\theta$$
$$= M d\theta$$

力矩的功：$\boxed{W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M \cdot d\theta}$

二、定轴转动动能定理

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M\,d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} J\frac{d\omega}{dt}d\theta$$
$$= \int_{\omega_1}^{\omega_2} J\omega\,d\omega = \frac{1}{2}J\omega_2^2 - \frac{1}{2}J\omega_1^2$$

令转动动能：$\boxed{E_k = \frac{1}{2}J\omega^2}$　（$\omega\uparrow \rightarrow E_k\uparrow\uparrow$）（飞轮储能）

（可证：$\frac{1}{2}J\omega^2 = \sum\frac{1}{2}\Delta m_i v_i^2$）

刚体定轴转动动能定理：$\boxed{W = E_{k2} - E_{k1}}$

刚体定轴转动的角动量定理和角动量守恒定律

讨论力矩对时间的积累效应。

质点系：对点　$\vec{M}_{外} = \frac{d\vec{L}}{dt}$，$\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}_{外}dt = \vec{L}_2 - \vec{L}_1$

对轴　$\int_{t_1}^{t_2} M_{外z}dt = L_{2z} - L_{1z}$

刚体　$L_z = J_z\omega$

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} M_{外z}dt = J_z\omega_2 - J_z\omega_1}$$

—— 刚体定轴转动的角动量定理

刚体定轴转动的角动量守恒定律：

$\boxed{M_{外z} = 0，则\ J_z\omega = \text{const.}}$ $\begin{cases}大小不变\\ 正、负不变\end{cases}$

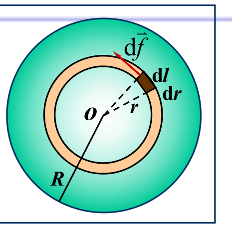
对刚体系，$M_{外z} = 0$ 时，$\sum J_{iz}\omega_i = \text{const.}$，

此时角动量可在系统内部各刚体间传递，而却保持刚体系对转轴的总角动量不变。

例6　留声机的转盘绕通过盘心垂直盘面的轴以角速率 ω 作匀速转动．放上唱片后，唱片将在摩擦力作用下随转盘一起转动．设唱片的半径为R，质量为m，它与转盘间的摩擦系数为 μ ，求：(1)唱片与转盘间的摩擦力矩；(2)唱片达到角速度 ω 时需要多长时间；(3)在这段时间内，转盘的驱动力矩做了多少功？

解 (1) 如图取面积元$\mathrm{d}s = \mathrm{d}r\mathrm{d}l$，该面元所受的摩擦力为

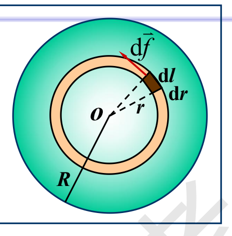
$$\mathrm{d}f = \frac{\mu mg}{\pi R^2}\mathrm{d}r\mathrm{d}l$$



此力对点o的力矩为

$$r\mathrm{d}f = \frac{\mu mg}{\pi R^2}r\mathrm{d}r\mathrm{d}l$$

于是，在宽为$\mathrm{d}r$的圆环上，唱片所受的摩擦力矩为



$$\mathrm{d}M = \frac{\mu mg}{\pi R^2}r\mathrm{d}r(2\pi r)$$

$$= \frac{2\mu mg}{R^2}r^2\mathrm{d}r$$

$$M = \frac{2\mu mg}{R^2}\int_0^R r^2\mathrm{d}r = \frac{2}{3}\mu Rmg$$

(2) 由转动定律求α，（唱片$J=mR^2/2$）

$$\alpha = \frac{M}{J} = \frac{4\mu g}{3R} \quad \text{（作匀加速转动）}$$

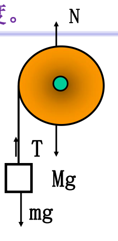
由$\omega = \omega_0 + \alpha t$可求得 $t = \dfrac{3\omega R}{4\mu g}$

(3) 由 $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta$ 可得在0到t的时间内，转过的角度为 $\theta = \dfrac{3\omega^2 R}{8\mu g}$

驱动力矩做的功为 $W = M\theta = \dfrac{1}{4}mR^2\omega^2$

还可用转动动能的动能定理 $W = \dfrac{1}{2}J\omega^2$

例7：均质园盘滑轮质量M，半径R，绕轻绳，绳的另一端系一质量m的物体，轴无摩擦，开始时系统静止。求：物体下降s时，滑轮的角速度和角加速度。



解：轴无摩擦，系统机械能守恒

	m动能	m势能	M动能
初：	0	mgs	0
终：	(1/2) mv^2	0	(1/2) $J_z\omega^2$

牵连关系：$v=\omega R$，$J_z=(1/2)MR^2$

$mgs=(1/2)mv^2+(1/2)J_z\omega^2$
$=(1/2)mR^2\omega^2+(1/4)MR^2\omega^2$

$$\therefore \quad \omega = \frac{2}{R}\sqrt{\frac{mgs}{2m+M}}$$

求角加速度：

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{2}{R}\sqrt{\frac{mgs}{2m+M}}\right) = \frac{2}{R}\sqrt{\frac{mg}{2m+M}}\frac{d}{dt}\sqrt{s}$$

$$= \frac{2}{R}\sqrt{\frac{mg}{2m+M}}\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{s}}\frac{ds}{dt} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{mg}{2m+M}}\frac{1}{\sqrt{s}}\omega R$$

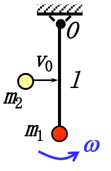
其中　$ds/dt=v=\omega R$，并将ω值代入得：

$$\beta = \sqrt{\frac{mg}{2m+M}}\frac{2}{R}\sqrt{\frac{mgs}{2m+M}}\frac{1}{\sqrt{s}} = \frac{2mg}{R(2m+M)}$$

还可以通过受力分析，转动定律求解

[例] 一长为l 的轻质杆端部固结一小球m_1 ，另一小球m_2以水平速度v_0碰杆中部并与杆粘合。

求：碰撞后杆的角速度ω



解： 选m_1（含杆）+ m_2为系统

碰撞时重力和轴力都通过O,对O 力矩为零，故角动量守恒。

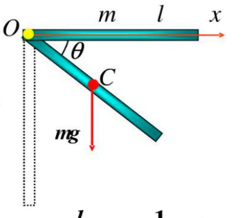
有 $$\frac{l}{2}m_2 v_0 = lm_1\omega l + \frac{l}{2}m_2\omega\frac{l}{2}$$

解得： $$\omega = \frac{2m_2}{4m_1+m_2}\cdot\frac{v_0}{l}$$

$\boxed{\text{思考}}$ 在转动过程中如果受到恒定阻力矩，则杆和小球转过的角度？

一根长为 l，质量为 m 的均匀细直棒，可绕轴 O 在竖直平面内转动，初始时它在水平位置.

求 它由此下摆 θ角时的 ω.



解：用机械能守恒定律

直棒竖直时的最低点为零势能点

因为只有保守内力作功，机械能守恒

$$E_1 = mgl$$

$$E_2 = \frac{1}{2}J\omega^2 + mg(l - \frac{l}{2}\sin\theta)$$

$$\because E_1 = E_2$$

$$\therefore mgl = \frac{1}{2}J\omega^2 + mg(l - \frac{l}{2}\sin\theta)$$

即 $mg\frac{l}{2}\sin\theta = \frac{1}{2}J\omega^2$

$$J = \frac{1}{3}ml^2$$

$$\omega = (\frac{3g\sin\theta}{l})^{1/2}$$

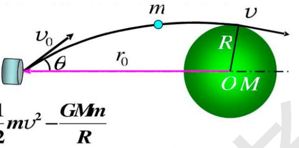
角加速度？

发射一宇宙飞船去考察一 质量为 M ,半径为 R 的行星.当飞船静止于空间距行星中心 $4R$ 时，以速度v_0发射一质量为 m 的仪器。要使该仪器恰好掠过行星表面。求 θ角及着陆滑行时的速度多大？

解 引力场（有心力）

系统的机械能守恒

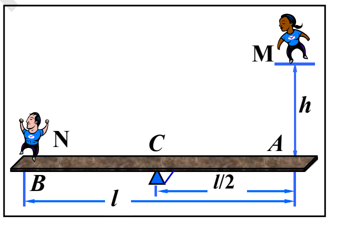
质点的角动量守恒



$$\begin{cases} \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 - \frac{GMm}{r_0} = \frac{1}{2}m\upsilon^2 - \frac{GMm}{R} \\ m\upsilon_0 r_0 \underline{\sin(\pi-\theta)} = m\upsilon R \end{cases} \Rightarrow \upsilon = \frac{\upsilon_0 r_0 \sin\theta}{R} = 4\upsilon_0\sin\theta$$

$$\sin\theta = \frac{1}{4}\left(1+\frac{3GM}{2R\upsilon_0^2}\right)^{1/2} \qquad \upsilon = \upsilon_0\left(1+\frac{3GM}{2R\upsilon_0^2}\right)^{1/2}$$

例1 一杂技演员M由距水平跷板高为h 处自由下落到跷板的一端A，并把跷板另一端的演员N弹了起来．问演员N可弹起多高?



设跷板是匀质的，长度为l，质量为 m'，跷板可绕中部支撑点C 在竖直平面内转动，演员的质量均为m. 假定演员M落在跷板上，与跷板的碰撞是完全非弹性碰撞.

解 碰撞前M落在 A点的速度

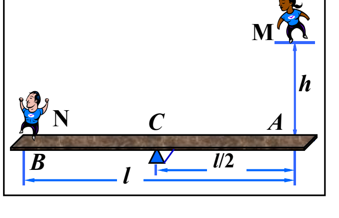
$$v_M = (2gh)^{1/2}$$

碰撞后的瞬间，M、N具有相同的线速度

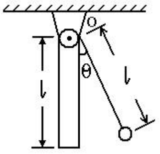
$$u = \frac{l}{2}\omega$$

M、N和跷板组成的系统，角动量守恒

$$mv_M\frac{l}{2} = J\omega + 2mu\frac{l}{2} = \frac{1}{12}m'l^2\omega + \frac{1}{2}ml^2\omega$$



例10.长为l质量为m匀质细杆可绕通过其上端的水平固定轴O转动，另一质量也为m的小球，用长为l的轻绳系于O轴上，如图。开始时杆静止在竖直位置，现将小球在垂直于轴的平面内拉开一定角度，然后使其自由摆下与杆端发生弹性碰撞，结果使杆的最大摆角为$\pi/3$，求小球最初被拉开的角度θ。



① 在小球下落过程中，对于小球与地球系统，只有重力做功，所以机械能守恒，设v为小球碰前速度，有:

$$mgl(1-\cos\theta)=\frac{1}{2}mv^2$$

②球与杆的碰撞过程极短暂，可认为杆的位置还来不及变化，因此球与杆系统的重力对定轴O无力矩，轴的支持力也无力矩，所以系统在碰撞过程中对轴的角动量守恒，

设v'为小球碰后的速度，ω为杆碰后的角速度，有：

$$mvl=mv'l+\frac{1}{3}ml^2\omega$$

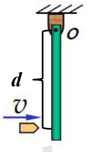
③弹性碰撞，故动能也守恒，有 $\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}mv'^2+\frac{1}{2}(\frac{1}{3}ml^2)\omega^2$

④碰后杆上升过程，杆与地球系统的机械能守恒

$$\frac{1}{2}(\frac{1}{3}ml^2)\omega^2=\frac{1}{2}mgl(1-\cos\frac{\pi}{3})$$

联立求解，得：$\theta=\arccos{}^{2}\!/_{3}$

例12: 一长度为l, 质量为M的均质杆可 绕过一端的水平轴o自由转动. 设杆处于静止状态时, 一质量为m, 速度为v_0的子弹水平射向杆后为完全非弹性碰撞，随杆一起绕o转动, 子弹嵌入位置距o为d, 求子弹嵌入后杆的角速度及最大摆角θ 。



解:取杆和子弹为系统,对轴o所受合外力矩为零(包括二者的重力矩和轴对杆的作用力的力矩),所以系统角动量守恒,得

$$mv_0d=\left(md^2+\frac{1}{3}Ml^2\right)\omega \quad \therefore\omega=\frac{mv_0d}{md^2+Ml^2/3}$$

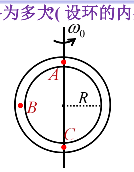
令轴o处为重力势能零点,设杆的最大摆角为θ,以杆、子弹和地球为系统,机械能守恒

$$\frac{1}{2}I\omega^2-mgd-Mg\frac{l}{2}=-mgd\cos\theta-Mg\frac{l}{2}\cos\theta$$

$$I=md^2+\frac{1}{3}Ml^2 \quad \therefore\theta=\arccos\left(1-\frac{I\omega^2/2}{mgd+Mgl/2}\right)$$

角动量守恒,机械能守恒,动量不守恒

例11： 空心圆环可绕光滑的竖直固定轴AC自由转动，转动惯量为I_0，环的半径为R，初始时环的角速度为ω_0．质量为m的小球静止在环内最高处A点，由于某种微小干扰，小球沿环向下滑动，问小球滑到与环心O在同一高度的B点和环的最低处的C点时，环的角速度及小球相对于环的速度各为多大?(设环的内壁和小球都是光滑的，小球可视为质点，环截面半径<<R.)



解：选小球和环为系统．运动过程中所受合外力矩为零，角动量守恒．对地球、小球和环组成的系统机械能守恒．取过环心的水平面为势能零点．

$$I_0\omega_0=(I_0+mR^2)\omega \qquad (1)$$

小球到B点时：

$$\frac{1}{2}I_0\omega_0^{\ 2}+mgR=\frac{1}{2}I_0\omega^2+\frac{1}{2}m\left(\omega^2R^2+\upsilon_B^2\right) \qquad (2)$$

式中υ_B表示小球在B点时相对于地面的竖直分速度，也等于它相对于环的速度．由式（1）得

$$\omega=I_0\omega_0/(I_0+mR^2)$$

代入式（2）得

$$\upsilon_B=\sqrt{2gR+\frac{I_0\omega_0^2R^2}{mR^2+I_0}}$$

当小球滑到C点时，由角动量守恒定律，系统的角速度又回复至ω_0，又由机械能守恒定律知，小球在C的动能完全由重力势能转换而来．即：

$$\frac{1}{2}m\upsilon_C^2=mg(2R)$$

$$\upsilon_C=\sqrt{4gR}$$

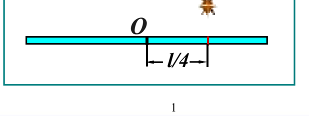
$$mv_{\rm M}\frac{l}{2}=J\omega+2mu\frac{l}{2}=\frac{1}{12}m'l^2\omega+\frac{1}{2}ml^2\omega$$

解得 $\omega=\dfrac{mv_{\rm M}l/2}{m'l^2/12+ml^2/2}=\dfrac{6m(2gh)^{1/2}}{(m'+6m)l}$

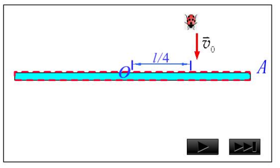
演员N以u起跳，达到的高度：

$$h'=\frac{u^2}{2g}=\frac{l^2\omega^2}{8g}=(\frac{3m}{m'+6m})^2h$$

例2 质量很小长度为l 的均匀细杆，可绕过其中心 O并与纸面垂直的轴在竖直平面内转动．当细杆静止于水平位置时，有一只小虫以速率v_0 垂直落在距点O为 $l/4$ 处，并背离点O 向细杆的端点A 爬行．设小虫与细杆的质量均为m．问：欲使细杆以恒定的角速度转动，小虫应以多大速率向细杆端点爬行?



解 虫与杆的碰撞前后，系统角动量守恒

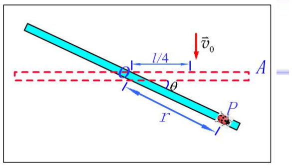


$$mv_0\frac{l}{4}=\left[\frac{1}{12}ml^2+m(\frac{l}{4})^2\right]\omega$$

$$\omega=\frac{12}{7}\frac{v_0}{l}$$

$$\omega=\frac{12}{7}\frac{v_0}{l}$$

由角动量定理



$$M=\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(J\omega)}{\mathrm{d}t}=\omega\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t}$$

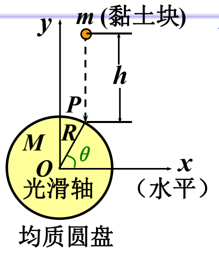
$$mgr\cos\theta=\omega\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{1}{12}ml^2+mr^2)=2mr\omega\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

考虑到 $\theta=\omega t$

得 $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\frac{g}{2\omega}\cos\omega t=\frac{7lg}{24v_0}\cos(\frac{12v_0}{7l}t)$

此即小虫需具有的爬行速率.

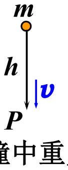
[例3] 如图示,已知：h，R，$M=2m$，$\theta=60°$



求：碰撞后的瞬间盘 $\omega_0=?$

P 转到 x 轴时盘 $\omega=?$，$\alpha=?$

解： m 下落：



$$mgh=\frac{1}{2}mv^2$$

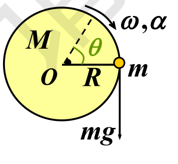
$$v=\sqrt{2gh} \qquad (1)$$

对（m+盘），碰撞中重力对O 轴力矩可忽略,

系统角动量守恒: $mvR\cos\theta=J\omega_0$ (2)

（m+盘）角动量 $J=\frac{1}{2}MR^2+mR^2=2mR^2$ (3)

由(1)(2)(3)得: $\omega_0=\frac{\sqrt{2gh}}{2R}\cos\theta$ (4)



对（m + M +地球）系统，

只有重力作功，E守恒。

令P、x 重合时 $E_P=0$，则：

$$mgR\sin\theta+\frac{1}{2}J\omega_0^2=\frac{1}{2}J\omega^2 \qquad (5)$$

(3)(4)(5)得:

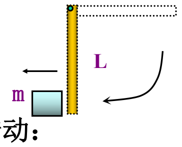
$$\omega=\sqrt{\frac{gh}{2R^2}\cos^2\theta+\frac{g}{R}\sin\theta}=\frac{1}{2R}\cdot\sqrt{\frac{g}{2}(h+4\sqrt{3}R)}$$

$(\theta=60°)$

$$\alpha=\frac{M_外}{J}=\frac{mgR}{2mR^2}=\frac{g}{2R}$$

例4：长为L，质量为M的均匀杆，一端悬挂，由水平位置无初速度地下落，在铅直位置与质量为m的物体A做完全非弹性碰撞，碰后，物体A沿摩擦系数为μ的水平面滑动。

求：物体A滑动的距离。



解：整个过程分为三个阶段

1、杆由水平位置绕端点的轴转动：机械能守恒

2、与A作完全非弹性碰撞：角动量守恒

3、A滑动：动能被摩擦力耗散掉。

第一阶段：机械能守恒

	动能	势能
初：	0	Mg（L/2）
终：	（1/2）$J_z\omega^2$	0

∴ （1/2）$J_z\omega^2$=Mg（L/2）

其中J_z=(1/3)ML^2

∴ ω^2=3g/L

第二阶段：角动量守恒

初： $J_z\omega$

终： $J_z\omega' + mL^2\omega'$

∴ $J_z\omega = J_z\omega' + mL^2\omega'$

代入J_z和ω值得：

$$\frac{1}{3}ML^2\sqrt{\frac{3g}{L}} = \frac{1}{3}ML^2\omega' + mL^2\omega'$$

$$\omega' = \frac{M\sqrt{\frac{3g}{L}}}{M+3m}$$

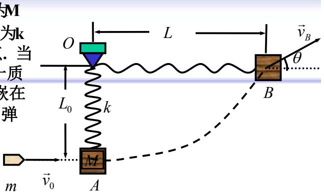
第三阶段，动能定理

A的速度：ω'L ；摩擦力mgμ

$$\frac{1}{2}m(l\omega')^2 = mg\mu s$$

$$s = \frac{3LM^2}{2\mu(M+3m)^2}$$

例18 光滑水平桌面上放着一质量为M的木块，木块与一原长为L_0，劲度系数为k的轻弹簧相连，弹簧另一端固定于O点．当木块静止于A处时，弹簧保持原长，设一质量为m的子弹以初速v_0水平射向M并嵌在木块中．当木块运动到B (OB⊥OA)时，弹簧的长度为L．
求木块在B点的速度v_B的大小和方向.



解：(1) m和M相撞时，系统的动量守恒

$$mv_0 = (m+M)v_A$$

(2) A→B，只有弹力作功，机械能守恒

$$\tfrac{1}{2}(m+M)v_A^2 = \tfrac{1}{2}(m+M)v_B^2 + \tfrac{1}{2}k(L-L_0)^2$$

(3) A→B，弹力对O点的力矩为零，对O点角动量守恒

$$(m+M)v_A L_0 = (m+M)v_B L\sin\theta$$

$$v_B = \left[\frac{m^2}{(m+M)^2}v_0^2 - \frac{k(L-L_0)^2}{m+M}\right]^{1/2} \qquad \theta = \arcsin\frac{mL_0v_0}{L}\left[m^2v_0^2 - k(L-L_0)^2(M+m)\right]^{-1/2}$$