第六章 振动

振动 $\begin{cases} \text{受迫振动} \longrightarrow \text{共振} \\ \text{自由振动} \begin{cases} \text{阻尼自由振动} \\ \text{无阻尼自由振动} \end{cases} \end{cases}$

无阻尼自由振动 $\begin{cases} \text{无阻尼自由非谐振动} \\ \text{无阻尼自由谐振动} \end{cases}$

（简谐振动）

本章重点：简谐振动

（理想化模型）

1. 简谐振动是某些实际振动的近似
2. 简谐振动可用来研究复杂振动

$x = A\cos(\omega t + \varphi)$

三. 描述谐振动的物理量

1. 振幅：A
2. 角频率：$\omega = \frac{k}{m}$
3. 频率：$\nu = \frac{\omega}{2\pi}$
4. 周期：$T = \frac{2\pi}{\omega}$
5. 相位：$\omega t + \varphi$
6. 初相位：φ

$x = A\cos(\omega t + \varphi)$

四. 谐振动中的速度和加速度

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$$

$$= v_m\cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi)$$

$$= a_m\cos(\omega t + \varphi \pm \pi)$$

一. 弹簧振子和弹性力（其他如单摆、复摆）弹性力：$\vec{f} = -k\vec{x}$

二. 谐振动的特征

1. 动力学特征：$\vec{f} = -k\vec{x}$ 且 $\vec{f} = \frac{d^2x}{dt^2}$
2. 运动学特征

特征方程：$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

方程的解：$x = A\cos(\omega t + \varphi)$ 谐振子的运动学方程

振动方程、振动函数

（2）令 $\omega^2 = \frac{k}{m}$

则 $\frac{dx^2}{dt^2} = -\omega^2 x$

其解为 $x = A\cos(\omega t + \varphi)$

证明该运动为简谐振动

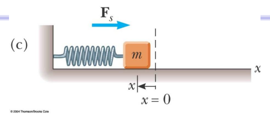
（3）系统的固有角频率为：

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

另一解法：也可选弹簧自然长度时重物位置为坐标原点

二. 简谐振动

1、弹簧谐振子

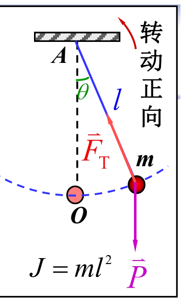


$$F = -kx = ma = m\frac{dv}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\therefore \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

2、单摆

摆线偏角以竖直方向向右为正



$$\vec{M}_z = [\vec{r}\times(m\vec{g}+\vec{T})]_Z = (\vec{r}\times m\vec{g})_z$$

$$= -mgl\sin\theta \approx mgl\theta$$

$\theta < 5^\circ$ 时, $\sin\theta \approx \theta$

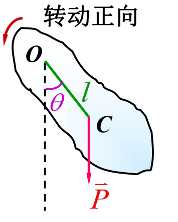
$\boxed{M_{外z} = J_z\alpha}$ —转动定律

$$-mgl\theta = J\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$-mgl\theta = ml^2\frac{d^2\theta}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0$$

$$\omega^2 = g/l \qquad \theta = \Theta\cos(\omega t + \varphi) \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

3、复摆 $(\theta < 5^\circ)$



（C点为质心）

$$\vec{M} = \vec{l}\times\vec{F}$$

$$M = -mgl\sin\theta$$

$$= J\beta = J\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

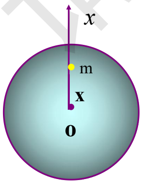
$$-mgl\,\theta = J\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

令 $\omega^2 = \frac{mgl}{J}$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2\theta$$

例. 设地球为密度均匀的球，密度为 ρ ，在其内沿直径隧道放一质点，若只考虑万有引力，求小质点作何种运动？

解：从动力学进行分析



（1）地球球心为坐标原点作ox轴，当质点处于某位置x时，其受力

$$F = -G\frac{M'm}{x^2}$$

式中 M'为半径为 x 的地球质量，若地球质量密度为 ρ，则

$$M' = \frac{4}{3}\pi x^3\rho$$

所以 $F = -G\dfrac{\frac{4}{3}\pi x^3\rho m}{x^2} = -Gm\rho\left(\frac{4}{3}\pi\right)x = -kx$

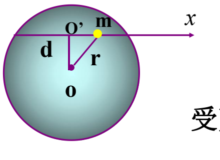
$\therefore$ 质点作简谐振动

振动周期及频率

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \omega^2 = \frac{Gm\rho\left(\frac{4}{3}\pi\right)}{m} = G\rho\left(\frac{4}{3}\pi\right)$$

如果隧道不是沿直径，而是沿一条弦，设想在离地心d距离处开一条内壁光滑的小孔道，则再解此题

解：从动力学进行分析



（1）地球球心为坐标原点作oo'垂直于弦， om距离为r, 设o'm为x时，

受万有引力为 $-\frac{4}{3}Gm\pi r\rho$

其x分量为: $-\frac{4}{3}Gm\pi r\rho\cdot\frac{x}{r} = -\frac{4}{3}\pi Gm\rho x$

x方向微分方程：$-\frac{4}{3}\pi Gm\rho x = m\frac{d^2x}{dt^2}$

质点作简谐振动 $\omega = \sqrt{4\pi G\rho/3}$

振动周期及频率

$T = \frac{2\pi}{\omega}$ $\omega^2 = \frac{Gm\rho\left(\frac{4}{3}\pi\right)}{m} = G\rho\left(\frac{4}{3}\pi\right)$

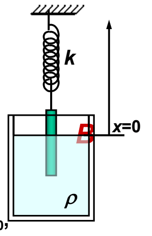
这种情况得到的周期与通过地心的情况相同

设 $t=0$ 时 $x = x_0$ $v = v_0$

$$\begin{cases} x_0 = A\cos\varphi \\ v_0 = -\omega A\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$$

$$tg\varphi = -\frac{v_0}{\omega x_0} \Rightarrow \varphi = tg^{-1}\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right)$$

如图,长方形物体B质量m,横截面积S ,放入密度为ρ 的液体中,同时由劲度系数为k的弹簧吊起, 使之部分露出液面.起始时B静止不动.现将沿竖直方向向下压x 后放手,求该系统是否为简谐振动，如果是求系统振动的角频率(忽略摩擦力, 取向上为 x 轴正方向).



解：设平衡时物体浸入水中长度为a,弹簧伸长为x_0,

$$mg - as\rho g - kx_0 = 0 \qquad (1)$$

取 x 轴向上为正，取液面为$x=0$ 由平衡位置向下压x

$$(a-x)s\rho g + k(x_0 - x) - mg = m\frac{d^2x}{dt^2} \qquad (2)$$

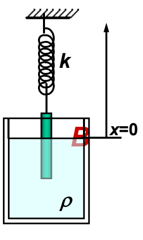
$$mg - as\rho g - kx_0 = 0 \qquad (1)$$

$$(a-x)s\rho g + k(x_0 - x) - mg = m\frac{d^2x}{dt^2} \qquad (2)$$

$$-(s\rho g + k)x = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

可知此方程符合简谐振动的线性微分方程形式，此系统为简谐振动系统。

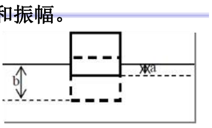
系统的振动角频率为：$\omega^2 = \frac{s\rho g + k}{m}$



一立方体木块浮于静水中，开始时浸入部分的高度为a。今用手指沿竖直方向将其慢慢压下，使其浸入部分的高度为b，然后放手任其运动. 若不计水对木块的粘滞阻力，试证明木块的运动是谐振动，并写出振动表达式，求出振动的周期和振幅。

解：已知木块作简谐振动，其回复力必取：

$f = -kx$ 的形式，回复力是重力和浮力的合力。



块的平衡条件为: $m_木 g = Sa\rho_水 g \quad \therefore m_木 = Sa\rho_水$

以静浮时下底面所在位置为坐标原点，x 轴向下为正，

当下底面有位移 x 时木块所受回复力为：

$$f = -S\rho_水(x+a)g + m_木 g = -S\rho_水 gx = -kx$$

其动力学方程为：

$$\therefore \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

$\omega^2 = g/a$

证明为谐振动

运动学方程

$$x = A\cos(\omega t + \phi)$$

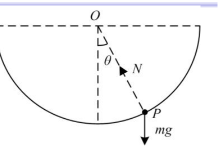
$$k = S\rho_水 g$$

$$\therefore T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{Sa\rho_水}{S\rho_水 g}} = 2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$$

有一小质点可以在半径为R的球形碗的底部无摩擦地自由滑动，如图所示。如果摆角小于5℃，求证此质点的是否做简谐运动，并求其振动的周期及等效摆长。

解：从动力学角度考虑此问题

以小球为研究对象，取逆时针方向的角位移为正。设任意时刻t，小球位于P点处，角位移为θ，依据牛顿运动定律，质点在轨迹的切线方向上的方程式为：



$$-mg\sin\theta = ma_t$$

式中，a_t 为质点的切向加速度,

$$a_t = \beta R = R\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

当振幅很小时，$\sin\theta \approx \theta$

$$-mg\theta = mR\frac{d^2\theta}{dt^2} \text{ 即 } \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{R}\theta = 0$$

$$\omega^2 = \frac{g}{R}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$$

由单摆振动周期

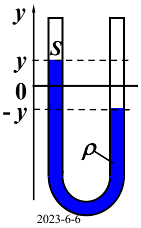
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

可知等效摆长为

$$l = R$$

另：可用之前讲的转动定律求解；还可以用能量求解（机械能守恒）

[例]已知：U形管内液体质量为m，密度为ρ，管的截面积为S。开始时，造成管两边液柱面有一定的高度差，忽略管壁和液体间的摩擦。试判断液体柱振动的性质。



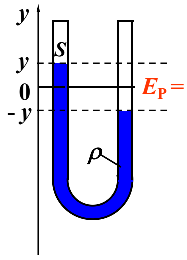
分析：方法一 ，分析受力规律

恢复力 $F=-2\rho gSy \overset{令}{=} -ky$

$k=2\rho gS=\text{const}$. } SHM

角频率 $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}=\sqrt{\dfrac{2g\rho S}{m}}$

方法二，分析能量



$E_p=(\rho gSy)\cdot y=\dfrac{1}{2}ky^2$

$k=2\rho gS$

无损耗 $E=\text{const}$. } SHM

角频率 $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}=\sqrt{\dfrac{2g\rho S}{m}}$

方法三，建立微分方程（自己完成）

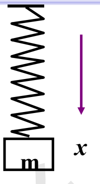
还有其他类型的简谐振动(作业题也要看）

一根原长为L，劲度系数为K的轻质弹簧竖直悬挂，下端系一质量为m的重物，如图所示。求：

（1）忽略空气阻力，写出系统振动的动力学方程；

（2）证明该系统为一简谐振动系统；

（3）求系统的固有角频率。



解：

（1）选重物的平衡位置为坐标原点，向下为正方向的x轴坐标系，设重物平衡时，弹簧的伸长量为X_0，则重物在X坐标处时：

$\text{mg}=\text{kx}_0$

$\text{m}\dfrac{dx^2}{dt^2}=\text{mg-k}(\text{x}_0+x)$

证明为简谐运动

即 $\text{m}\dfrac{dx^2}{dt^2}=\text{-kx}$

（2）令 $\omega^2=\dfrac{k}{m}$

则 $\dfrac{dx^2}{dt^2}=-\omega^2 x$

其解为 $\text{x=Acos}(\omega t+\varphi)$

证明该运动为简谐振动

（3）系统的固有角频率为：

$\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$

另一解法：也可选弹簧自然长度时重物位置为坐标原点

如图所示，已知轻弹簧的劲度系数为k，

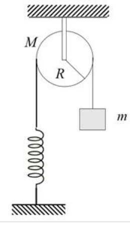
定滑轮可以看作质量为M，

半径为R的匀质圆盘，物体的质量为m，

若物体在外力作用下拉离平衡位置，然后释放。

证明之后物体的运动为简谐振动，

并计算简谐振动的周期。



解：设平衡位置为原点，向下为正，将物体拉至x处时：

对m： $mg-T_1=ma$

对滑轮 $(T_2-T_1)\text{R}=\dfrac{1}{2}MR^2\beta$

$T_2=k(l_0+x)$

$kl_0=mg,$

$a=R\beta$

$a+\left(\dfrac{k}{m+\frac{1}{2}M}\right)\text{x}=0$

解得：$\dfrac{d^2x}{dt^2}=-\left(\dfrac{k}{m+\frac{1}{2}M}\right)\text{x}$

因此，此运动为简谐振动。

振动的周期为：

$T=\dfrac{2\pi}{\omega}=\dfrac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{k}{m+\frac{1}{2}M}}}$

如图所示的装置中，一劲度系数为k的轻弹簧，一端固定在墙上，另一端连接一质量为 的物体A，置于光滑水平桌面上。现通过一质量为m，半径为R的定滑轮B（可视为匀质圆盘）用细绳连接另一质量为 的物体C。设细绳不可伸长，且与定滑轮间无相对滑动，证明该系统为简谐振动系统，并求系统振动的角频率。

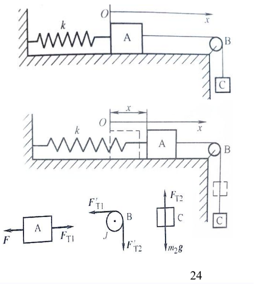
解：设系统处于平衡状态时，与物体A相连的弹簧一段所在的位置为坐标原点O，此时弹簧伸长 x_0 且 $kx_0=m_2g$

当弹簧沿ox轴正向从原点O伸长x时，

各点受力如图所示：其中

$$\vec{F}=-k(\text{x}+\text{x}_0)\vec{\text{i}}$$

$$F_{T1}-k(\text{x}+x_0)=\text{m}_1\dfrac{d^2x}{dt^2}$$



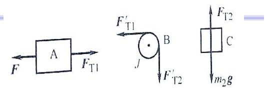
$$m_2 g - F_{T2} = m_2 \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$(F_{T2} - F_{T1})R = J\alpha$$

$$kx_0 = m_2 g$$

$$J = \frac{1}{2} mR^2$$

$$\alpha = \frac{1}{R}\frac{d^2x}{dt^2}$$

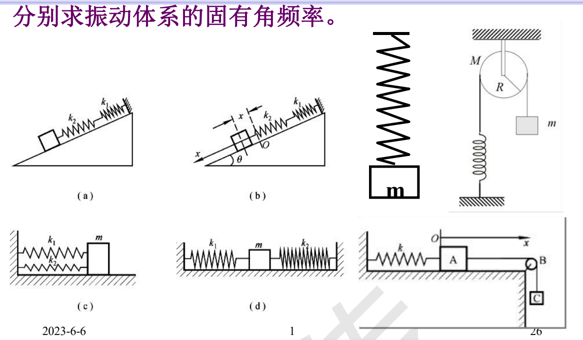


可以得出： $$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m_1 + m_2 + \frac{m}{2}}x = 0$$

可知此方程符合简谐振动的线性微分方程形式，此系统为简谐振动系统。系统的振动角频率为： $$\omega = \frac{k}{m_1 + m_2 + \frac{m}{2}}$$

该题还可以从能量角度求解（考虑弹性势能和转动动能）

两弹簧劲度系数都为 k，（1）串联后与质量为m的质点相连，（2）并联后与该质点相连，（3）将质点串在两弹簧中间。在坐标原点两弹簧正好无形变，分别求振动体系的固有角频率。



简谐振动，定义如下

（1）动力学定义：凡是受弹性力或准弹性力作用而引起的运动，是简谐振动。也是凡是运动微分方程为的运动

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

是简谐振动

（2）运动学定义：一个物理量随时间的变化规律为 $A\cos(\omega t + \varphi)$

其中 ω 由系统本身性质决定。则这个物理量描述的运动为简谐振动。

第七章 波动

一、产生机械波的条件

1、波源 2、 弹性媒质

二、机械波的分类

横波：质点的振动方向和波的传播方向垂直

特点：具有波峰和波谷（如绳子上的波）

纵波：质点的振动方向和波的传播方向平行

特点：具有疏密相间的区域（如声波）

波的特征量及其几何描述

特征量：波长 波的周期和频率 波速

1 波长 λ

波传播方向上相邻两振动状态完全相同的质点间的距离（一完整波的长度）.

2 周期 T

波传过一波长所需的时间，或一完整波通过波线上某点所需的时间

$$\boxed{T = \lambda / u}$$

3 频率 ν

单位时间内波向前传播的完整波的数目(s1 内向前传播了几个波长）

4 波速

波在介质中传播的速度

四个物理量的联系

$$\nu = 1/T \qquad u = \frac{\lambda}{T} = \lambda\nu \qquad \lambda = \frac{u}{\nu} = Tu$$

周期或频率只决定于波源的振动，

波速只决定于介质的性质

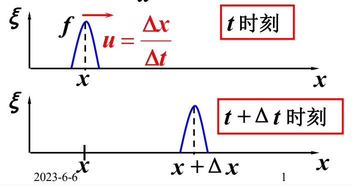
7.2 行波，简谐波

一、行波（travelling wave）

某种物理量的扰动的传播称为行波。

设 ξ 为传播的物理量，它沿 x 轴传播，则

$\xi = f(t - \frac{x}{u})$ 为沿 $+x$ 向传播的行波，u 为波速。



$$f(t+\Delta t-\frac{x+\Delta x}{u}) \overset{\Delta x = u\Delta t}{=\!=\!=} f(t-\frac{x}{u})$$

即 $\xi(x+\Delta x, t+\Delta t) = \xi(x, t)$

∴ $\xi = f(t-\frac{x}{u})$ 具有沿 $+x$ 向传播的性质。

同理，$\xi = f(t+\frac{x}{u})$ 具有沿 $-x$ 向传播的性质。

$\xi(x, t)$ 的函数形式称为波函数，它也就是波传播时，任意点媒质质元的运动函数

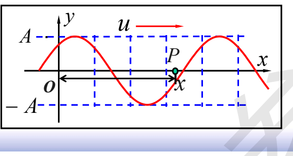
$\xi(x,t) = f(t \pm \frac{x}{u})$ 称为行波的波函数。

设有一平面简谐波沿 轴正方向传播，波速为 ，坐标原点 处质点的振动方程为

$$y_O = A\cos(\omega t + \varphi)$$

y_0 表示质点 O 在 t 时刻离开平衡位置的距离

考察波线上 P 点(坐标 x)，P 点比 O 点的振动落后 $\Delta t = \frac{x}{u}$，P 点在 t 时刻的位移是 O 点在 $t-\Delta t$ 时刻的位移，由此得



$$y_P = y_O(t-\Delta t) = A\cos[\omega(t-\Delta t)+\varphi]$$

$$= A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)+\varphi\right]$$

由于 P 为波传播方向上任一点，因此上述方程能描述波传播方向上任一点的振动，具有一般意义，即为沿 x 轴正方向传播的平面简谐波的波函数，又称波动方程

利用 $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$ 和 $\lambda = uT$

可得波动方程的几种不同形式：

$$y = A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)+\varphi\right]$$

$$= A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)+\varphi\right]$$

$$= A\cos\left[\omega t-\frac{2\pi x}{\lambda}+\varphi\right]$$

波函数

$$y = A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi]$$

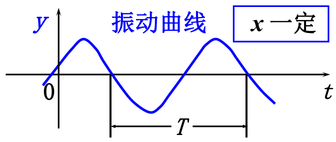
质点的振动速度，加速度

$$v = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega A\sin[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi]$$

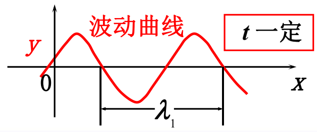
$$a = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi]$$

3. 波函数的意义 $y(x,t)=A\cos[(\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}x)+\varphi_0]$

（1） x 一定，$y\sim t$ 给出 x 点的振动方程。



（2） t 一定，$y\sim x$ 给出 t 时刻空间各点位移分布



2. 一维简谐波函数的几种常用的表示

$$y(x,t)=A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]$$
$$y=A\cos[2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})+\varphi_0]$$
$$y(x,t)=A\cos[(\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}x)+\varphi_0]$$

$$\begin{cases} u=\dfrac{\lambda}{T} \\ T=\dfrac{2\pi}{\omega} \end{cases}$$

说明：ωt $\quad \omega t-2\pi$ $\quad \omega t+\varphi(x)$

0 —λ— x

沿波传播方向每增加λ 的距离，相位落后2π。

$$\therefore \quad \varphi(x)=-\frac{x}{\lambda}2\pi$$

［例 1 ］：有一平面简谐波在介质中传播，波速 $u=100\ m\cdot s^{-1}$，波线上右侧距波源O（坐标原点）为75.0 m处的一点P的运动方程为

$$y_P=(0.30\ m)\cos[2\pi t+\frac{\pi}{2}]$$

求⑴波向x轴正方向传播时的波动表达式，
⑵波向x轴负方向传播的表达式

解1：⑴设以波源为原点O，沿x轴正向传播的波动方程为

$$y=A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]$$

传到P点的时间：75/100=0.75S

$$y_P=A\cos[\omega(t-0.75)+\varphi_0]$$

与已知的P点表达式比较

$$\boldsymbol{y_P=(0.30\ m)\cos[2\pi t+\frac{\pi}{2}]=0.3\cos[2\pi t+2\pi-\frac{3\pi}{2}]}$$
$$\boldsymbol{Y_p=0.3\cos[2\pi(t-\frac{3}{4})+2\pi]}$$

$$A=0.30\ m \quad \omega=2\pi \quad \varphi_0=2\pi$$

$$y=(0.30)\cos[2\pi(t-\frac{x}{100})]$$

⑵当沿x轴负向传播时

$$y=A\cos[\omega(t+\frac{x}{u})+\varphi_0]$$
$$y_P=A\cos[\omega(t+0.75)+\varphi_0]$$

与已知的P点表达式比较

$$\boldsymbol{y_p=0.3\cos[2\pi(t+0.75)-\pi]}$$

$$A=0.30\ m \quad \omega=2\pi \quad \varphi_0=-\pi$$

$$y=(0.30)\cos[2\pi(t+\frac{x}{100})-\pi]$$

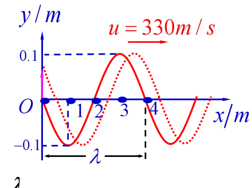
［例2］. 图为$t=T/4$ 时一平面简谐波的波形曲线，求其波的表达式

解：设波的表达式为

$$y=A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi]$$

确定角频率：由图可知

$$\lambda=4m \quad u=330m/s$$



$$\therefore T=\frac{\lambda}{u}=\frac{4}{330}(\leftarrow u=\lambda\nu=\frac{\lambda}{T})$$

可得 $\omega=\dfrac{2\pi}{T}=\dfrac{2\pi}{4/330}=165\pi$

确定初相位：

由图可知，$t=T/4$ 时，0点处（x=0）质点的位移 $y_o=0$ ，即

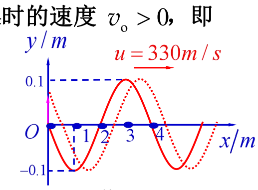
$$y_o = 0.1\cos(\omega t+\varphi) = 0.1\cos(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{4}+\varphi)=0$$

$$\therefore \cos(\frac{\pi}{2}+\varphi)=0 \rightarrow \frac{\pi}{2}+\varphi=\pm\frac{\pi}{2}$$

由图可知，0点处质点在T/4时的速度 $v_o>0$，即

$$v_o=-\omega A\sin(\frac{\pi}{2}+\varphi)>0$$

$$\therefore \sin(\frac{\pi}{2}+\varphi)<0 \rightarrow \frac{\pi}{2}+\varphi=-\frac{\pi}{2}$$



可得 $\varphi=-\pi$

则波的表达式为 $y=0.1\cos[165\pi(t-\frac{x}{330})-\pi]\ m$

[例3] 一平面简谐波沿 Ox 轴正方向传播，已知振幅 $A=1.0$ m，$T=2.0$ s，$\lambda=2.0$ m ．在t=0时坐标原点处的质点在平衡位置沿Oy 轴正向运动．求：(1)波动方程；(2)$t=1.0$ s波形图；

(3) $x=0.5$ m 处质点的振动规律并作图

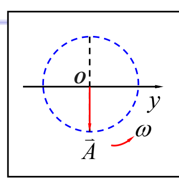
解 (1) 写出波动方程的标准式

$$y=A\cos[2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})+\varphi_0]$$

$$y=A\cos[2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})+\boxed{\varphi_0}]$$

$t=0 \quad x=0$

$$y=0, v=\frac{\partial y}{\partial t}>0 \quad \boxed{\varphi_0=-\frac{\pi}{2}}$$



$$y=\cos[2\pi(\frac{t}{2.0}-\frac{x}{2.0})-\frac{\pi}{2}]\ \textbf{(m)}$$

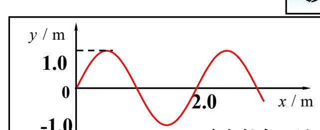
(2) 求 $t=1.0$s 波形图

$$y=1.0\cos[2\pi(\frac{t}{2.0}-\frac{x}{2.0})-\frac{\pi}{2}]$$

$$y=1.0\cos[\frac{\pi}{2}-\pi x]$$

$$=\sin\pi x\ \textbf{(m)}$$

$t=1.0$ s 波形方程



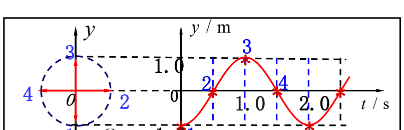
$t=1.0$ s 时刻波形图

(3) $x=0.5$m 处质点的振动规律并作图

$$y=1.0\cos[2\pi(\frac{t}{2.0}-\frac{x}{2.0})-\frac{\pi}{2}]$$

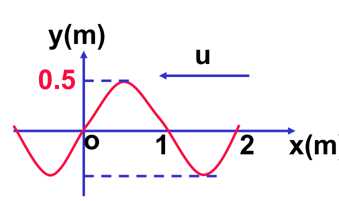
$x=0.5$m 处质点的振动方程

$y=\cos[\pi t-\pi]$ (m)



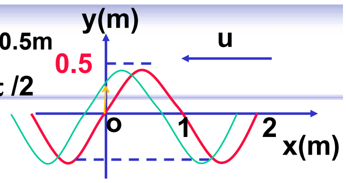
$x=0.5$ m 处质点的振动曲线

[例4] 一平面简谐波以波速u=0.5m/s沿x轴负方向传播，t=2s时刻的波形如图所示，求波动方程.



解: 由图可得:λ=2m, A=0.5m

ω=2π/T= 2πu/ λ= π /2



设O点的振动方程:

$$y = 0.5\cos(\frac{\pi}{2}t + \varphi_0)$$

判断初位相：由t=2,x=0,y=0,V>0 得:

$$\upsilon_o = -\omega A\sin(\frac{\pi}{2}t + \varphi_0) > 0 \qquad \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$$

得：$y = 0.5\cos(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{2})$

波动方程为: $y = 0.5\cos(\frac{\pi}{2}t + \pi x + \frac{\pi}{2})(m)$

[例5] 已知波沿 x 轴正方向传播，角频率为 ω，振幅为A，t=0时刻波形如图。求：1）O点振动的初相位； 2）P点振动的初相位； 3）波的表达式

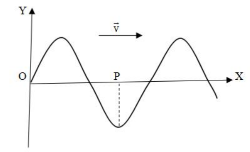
解：1) 设O点振动为:

$y = A\cos(\omega t + \phi)$

$\because t = 0$时，$y = 0$

$\therefore 0 = A\cos\phi$

$\phi = \pm\frac{\pi}{2}$



因为Δt后，y<0，故 $\varphi = \frac{\pi}{2}$

2) O与P的相位差为

$$\Delta\varphi = \frac{x_2 - x_1}{\lambda}2\pi = \frac{\frac{3}{4}\lambda}{\lambda}\cdot 2\pi = \frac{3}{2}\pi \qquad \varphi_P = \varphi_o - \frac{3}{2}\pi = \frac{\pi}{2} - \frac{3}{2}\pi = -\pi$$

$\therefore \varphi_o - \varphi_P = \frac{3}{2}\pi$

3) $y = A\cos[\omega(t - \frac{x}{v}) + \frac{\pi}{2}]$

[例6] 平面简谐波以v=300 m·s⁻¹的波速，沿x轴正向传播，轴上A，B，C三点间距AB=150 m，BC=150 m，已知B点质元振动表达式为：$y = 6\sin \pi t(cm)$ 试写出

（1）以B为原点的波动表达式

（2）以A为原点的波动表达式

（3）以C为原点的波动表达式

解：（1）B点 的振动方程 $y_B = 6\sin\pi t = 6\cos(\pi t - \frac{\pi}{2})$

B为原点的波动：$y_B = 6\cos[\pi(t - \frac{x}{300}) - \frac{\pi}{2}]$

（2）A的振动超前B 1/2s

$$y_A = 6\cos[\pi(t + \frac{1}{2}) - \frac{\pi}{2}] = 6\cos\pi t$$

A为原点波动表达式 $y_A = 6\cos\pi(t - \frac{x}{300})$

(3) C的振动落后A 1s $y_C = 6\cos\pi(t - 1)$

C为原点波动表达式 $y_C = 6\cos[\pi(t - \frac{x}{300}) - \pi]$

7. 4 波的能量

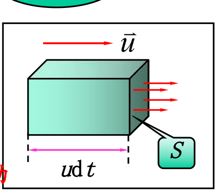
能流密度（波的强度）I:

通过垂直于波传播方向的单位面积的平均能流.

$$\overline{P} = \overline{w}uS$$

$$I = \frac{\overline{P}}{S} = \overline{w}u$$

$$\boxed{I = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 u}$$



推广：任何形式的周期性波动其能量正比于振幅A²和速度u