南开大学

电磁学

（Electromagnetism）

电磁学内容共分七章：静电场、静电场中的导体和电介质、稳恒电流、稳恒磁场、磁介质、电磁感应、麦克斯韦电磁理论。

电磁学的内容按性质来分，主要有“场”和“路”两部分。

重点

- 1、静电场的电场强度和电势的概念以及电场强度和电势叠加原理。高斯定理和环路定理。
- 2、导体静电平衡的条件。静电平衡时导体的电荷分布。
- 3、毕奥—萨伐尔定律、磁场中的高斯定理、安培环路定理。
- 4、法拉第电磁感应定律。动生电动势和感生电场。

静电场

- 库仑定律。电场强度。电场强度叠加原理及其应用。电通量。静电场的高斯定理。电场力的功。静电场的环路定理。电势、电势叠加原理及其计算。电场强度与电势梯度的关系。导体的静电平衡。导体上的电荷分布。电容与电容器。电场能量。电介质的极化及其描述*。电位移矢量。有电介质时的高斯定理。

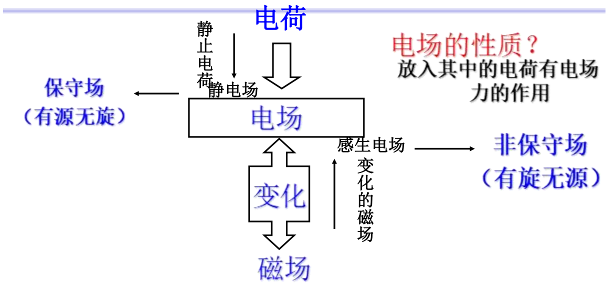
稳恒磁场

- 磁场，磁感应强度。磁通量，磁场中的高斯定理。毕奥—萨伐尔定律，磁感应强度的叠加原理。运动电荷的磁场。安培环路定理。安培定律。磁场对载流导线及线圈的作用。洛仑兹力。霍耳效应*。磁介质。磁场强度矢量。介质中的安培环路定理。铁磁质，磁滞现象，磁畴*。

电磁感应与电磁场

- 电源电动势。法拉第电磁感应定律。动生电动势。感生电动势。涡旋电场。自感、互感。磁场能量。磁场能量密度。位移电流。全电流定律。麦克斯韦方程组的积分形式。电磁波的产生及基本性质。麦克斯方程组的积分形式*。边界条件*。

基本结构



静电场和稳恒磁场的基本规律

静电场	稳恒磁场
$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}=\int_V \rho\cdot dV$	$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=0$
$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l}=0$	$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l}=\int_s \vec{j}\cdot d\vec{S}$

$E_{涡}$　　变　　I_d

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l}=-\int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

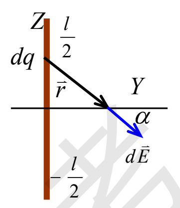
$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l}=\int_s\left(\vec{j}+\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{S}$$

例题1　求均匀带电细棒中垂面上一点的场强。

设棒长为 l，带电量 q，设电荷线密度为 η

解：由对称性可知，最好选用柱坐标，中垂面上一点的场强只有Y 方向的分量，在Z和X方向无分量。

$$dq=\eta dz \qquad dE=\frac{\eta\cdot dz}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$



$$E_y(p)=\int dE_y=\frac{\eta}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-l/2}^{l/2}\frac{\cos\alpha\cdot dz}{r^2}$$

$$\cos\alpha=\frac{y}{r};\quad r^2=y^2+z^2$$

利用公式：$\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}}=\frac{\pm x}{a^2\sqrt{x^2\pm a^2}}$

$$E_y(p)=\frac{\eta}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-l/2}^{l/2}\frac{y\cdot dz}{(y^2+z^2)^{3/2}}=\frac{2\eta}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{l/2}\frac{y\cdot dz}{(y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$=\frac{2\eta y}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{y^2\sqrt{y^2+z^2}}\Big|_{z=0}^{z=l/2}$$

$$\therefore E_y(p)=\frac{\eta\, l/2}{2\pi\varepsilon_0 y\sqrt{y^2+\left(l/2\right)^2}}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 y\sqrt{y^2+\left(l/2\right)^2}}$$

讨论

1. $y<<l$ 无限长均匀带电细棒的场强 $E\cong\frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0 y}$
   方向垂直于细棒。

2. $y>>l$ 相当于点电荷的场强。$E=\frac{\eta l/2}{2\pi\varepsilon_0\cdot y^2}$
   正负决定场强方向的正负。

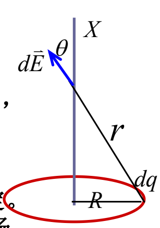
例题2　均匀带电圆环轴线上一点的场强。

设圆环带电量为 q，半径为 R

解：由对称性可知，p点场强只有X分量

$$E=\int_q dE_x=\int dE\cdot\cos\theta=\int_L\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta=\frac{\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\int_L dq$$

$$E=\frac{\cos\theta\cdot q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{qx}{4\pi\varepsilon_0(R^2+x^2)^{3/2}}$$



讨论：当所求场点远大于环的半径时，

$$E\cong\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$$

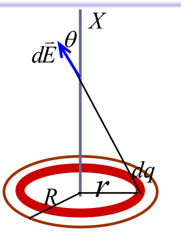
方向在X轴上，正负由 q 的正负决定。
说明远离环心的场强相当于点电荷的场。

例题3　均匀带电圆盘轴线上一点的场强。

设圆盘带电量为 q，半径为 R

解：带电圆盘可看成许多同心的圆环组成，取一半径为r，宽度为dr 的细圆环带电量

$$dq=\sigma 2\pi r\cdot dr$$



$$dE=\frac{dqx}{4\pi\varepsilon_0(r^2+x^2)^{3/2}}$$

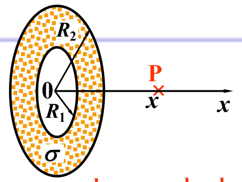
$$E_x(p)=\frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}\int_0^R\frac{rdr}{(r^2+x^2)^{3/2}}$$

$$=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1-\frac{x}{(R^2+x^2)^{1/2}}\right]$$

$x<<R$
$x>>R$　？

例题4 已知：均匀带电环面，σ，R_1，R_2

求：轴线上的场强$\vec{E}$

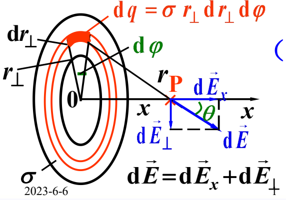


☆ 可有三种方法求解

叠加、圆盘、微元

解：（1）划分电荷元

$$\mathrm{d}q=\sigma\,\mathrm{d}s=\sigma\, r_\perp \mathrm{d}r_\perp\cdot \mathrm{d}\varphi$$



$$\mathrm{d}\vec{E}=\mathrm{d}\vec{E}_x+\mathrm{d}\vec{E}_\perp$$

（2）分析$\mathrm{d}\vec{E}$大小、方向：

$$\mathrm{d}E_x=\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot\cos\theta\,,$$

$$\mathrm{d}E_\perp=\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\sin\theta\,。$$

（3）积分求 $\vec{E}$

$$\vec{E}=\int_q \mathrm{d}\vec{E}=\vec{i}\int_q \mathrm{d}E_x=E_x\cdot\vec{i}$$

$$E_x=\int_q\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot\cos\theta=\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\sigma\, r_\perp \mathrm{d}r_\perp \mathrm{d}\varphi}{4\pi\varepsilon_0\cdot r^2}\cdot\cos\theta$$

$$=\frac{2\pi\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\int_{R_1}^{R_2}\frac{r_\perp\cdot \mathrm{d}r_\perp}{r^2}\cdot\frac{x}{r}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\cdot\int_{R_1}^{R_2}\frac{x\cdot r_\perp\cdot \mathrm{d}r_\perp}{(x^2+r_\perp^2)^{3/2}}$$

$$=\frac{\sigma\, x}{2\varepsilon_0}\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+R_1^2}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+R_2^2}}\right]$$

$$\therefore\quad \vec{E}=\frac{\sigma\, x}{2\varepsilon_0}\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+R_1^2}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+R_2^2}}\right]\cdot\vec{i}$$

（4）分析结果的合理性：

结果 $\vec{E}=\frac{\sigma\, x}{2\varepsilon_0}\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+R_1^2}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+R_2^2}}\right]\cdot\vec{i}$

① 量纲正确；

② 令 $x=0$，得 $\vec{E}=0$ ，合理；

③ 令 $x>>R_2$， 则：

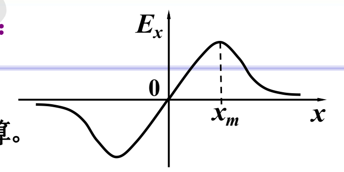
$$\frac{1}{\sqrt{x^2+R^2}}=\frac{1}{x\sqrt{1+R^2/x^2}}=\frac{1}{x}\left[\left(1+\frac{R^2}{x^2}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}\approx\frac{1}{x}\left(1-\frac{R^2}{2x^2}\right)$$

泰勒级数

$$E_x\approx\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\cdot\frac{R_2^2-R_1^2}{2x^2}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}\propto\frac{1}{x^2}\,，\quad 合理。$$

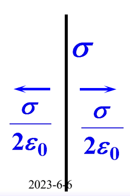
（5）对结果的讨论：

① E的分布：



x_m=?，自己计算。

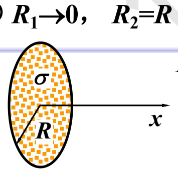
② $R_1\to 0$， $R_2\to\infty$，此为均匀带电无限大平面



$$E_x=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\cdot\frac{x}{|x|}\,,$$

$$E=|E_x|=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}=常量\begin{cases}与轴无关\\与\,x\,无关\end{cases}$$

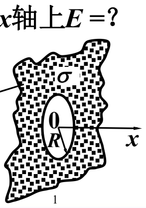
③ $R_1\to 0$， $R_2=R$ ，此为均匀带电圆盘情形



$$E_x=\frac{\sigma\, x}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{|x|}-\frac{1}{\sqrt{x^2+R^2}}\right]=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\cdot\frac{x}{|x|}\left[1-\frac{|x|}{\sqrt{x^2+R^2}}\right]$$

④ 思考 x轴上E=?

挖一圆孔的无限大均匀带电平面



利用高斯定理求解电场

对 Q 的分布具有某种对称性的情况下

常见的电量分布的对称性：

	球对称	柱对称	面对称
均匀带电的	球体	无限长	无限大
	球面	柱体	平板
	（点电荷）	柱面	平面
		带电线	

电势计算

例 计算均匀带电球面的内外电势

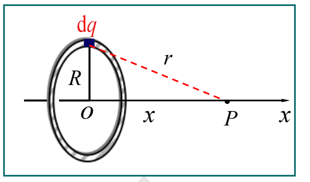
例 正电荷q均匀分布在半径为R的细圆环上. 求环轴线上距环心为x处的点P的电势.

例 通过一均匀带电圆平面中心且垂直平面的轴线上任意点的电势

例 正电荷q均匀分布在半径为R的细圆环上. 求环轴线上距环心为x处的点P的电势.

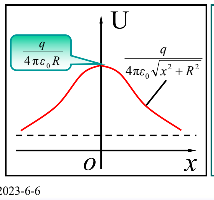
解 $$\mathrm{d}U_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{r}$$

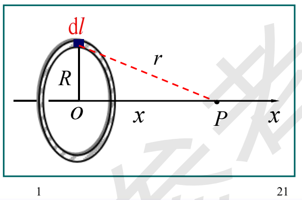
$$U_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\int \mathrm{d}q = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+R^2}}$$



讨 论 $$U_P = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+R^2}}$$

$$x=0,\ U_0 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} \qquad x>>R,\ U_P = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x}$$





利用电势求场强

$$\boxed{E_l = -\frac{\partial\varphi}{\partial l}}$$ —— φ 的方向导数

电场强度等于电势梯度的负值

例题：用电场强度与电势的关系，求均匀带电细圆环轴线上一点P的电场强度.

真空中静电场小结提纲

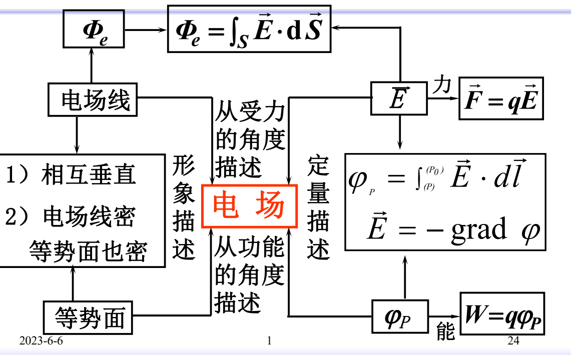
一. 线索（基本定律、定理）：

库仑定律
$\vec{E} = \vec{F}/q_0$
$\vec{E} = \sum \vec{E}_i$

$$\rightarrow \vec{E} = \sum_i \frac{q_i\vec{e}_{r_i}}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2} \rightarrow \begin{cases} \oint_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{s} = \dfrac{\sum q_{内}}{\varepsilon_0} \\ \oint_L \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = 0 \end{cases}$$

还有电荷守恒定律，它时刻都起作用。

二. 基本物理量之间的关系：



三、求场的方法：

1. 求$\vec{E}$

叠加法（补偿法）：$\vec{E}=\sum_i \vec{E}_i$，

$$\vec{E}=\int_q \frac{\vec{e}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,dq\text{；}$$

高斯定理法：$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s}=\frac{\sum q_{内}}{\varepsilon_0}$；

微分法：$\vec{E}=-\nabla\varphi$，$E_l=-\frac{\partial \varphi}{\partial l}$。

2.求φ

场强积分法：$\varphi_p=\int_{(P)}^{(P_0)}\vec{E}\cdot d\vec{l}$，

（$\vec{E}$分段，积分也要分段）；

叠加法：$\varphi=\sum_i \varphi_i$（零点要同）；

$$\varphi=\int_q \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}\text{，}\quad(\varphi_\infty=0)\text{。}$$

四. 几种典型电荷分布的场强和电势（自己总结）

点电荷；均匀带电薄球壳；均匀带电大平板；

均匀带电长直线；均匀带电长圆筒。

电介质

$$\boxed{\vec{P}=\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)\vec{E}=\varepsilon_0\chi_e\vec{E}}$$

$$\therefore P_n=\sigma'$$

$$\boxed{\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{s}=\sum q_{0内}}$$ —$\vec{D}$的高斯定理

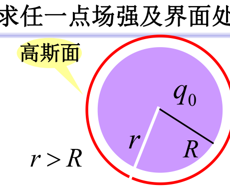
对各向同性介质

$$\therefore \quad \boxed{\vec{D}=\varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}=\varepsilon\vec{E}}$$

[例2]：一个金属球半径为R，带电量q_0，放在均匀的相对介电常数为ε_r 电介质中。求任一点场强及界面处σ'？

解：导体内场强为零。

q_0均匀地分布在球表面上，球外的场具有球对称性



$$\because \oint_S \vec{D}\bullet d\vec{S}=q_0 \quad \therefore \vec{D}=\frac{q_0}{4\pi r^2}\hat{r} \qquad r>R$$

因为 $\vec{D}=\varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}$ $\quad \therefore \vec{E}=\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}\hat{r} \qquad r>R$

$$\because \vec{P}=\chi_e\varepsilon_0\vec{E} \quad \therefore \sigma'=P_n=\chi_e\varepsilon_0 E=(\varepsilon_r-1)\varepsilon_0 E$$

$$\therefore \sigma'=(1-\frac{1}{\varepsilon_r})\frac{q_0}{4\pi r^2}$$

电容器的电容

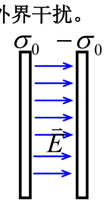
若两个导体分别带有等量异号的电荷q，周围没有其它导体带电；其间电位差U_{AB}，它们组成电容器的电容：

$$C\overset{def}{\equiv}\frac{q}{U_{AB}}$$

通常采用静电屏蔽或使场集中从而不受外界干扰。

1 平行板电容器：$S>>d^2$

平行板电容器间无电介质时：

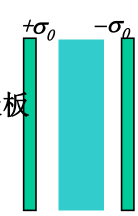


$$\because E=\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}=\frac{q/S}{\varepsilon_0} \qquad \therefore C_0=\frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

$$\because U_{AB}=Ed=\frac{qd}{\varepsilon_0 S}$$

$q=\sigma_0 S$

[例]：平行板电容器充电后，极板上面电荷密度 $\sigma_0=1.77\times10^{-6}C/m$，将两板与电源断电以后，再插入$\varepsilon_r=8$的电介质后计算空隙中和电介质中的 $\vec{E}$、$\vec{D}$、$\vec{P}$



解：因断电后插入介质，所以极板上电荷面密度不变。

电位移线垂直于极板，
根据高斯定律

$$(D_I + D_{II})\Delta S = \sigma_0 \Delta S$$

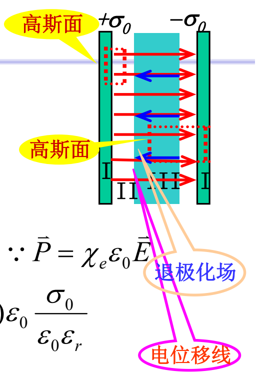
$$D_{II} = \sigma_0 \qquad E_{II} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$$

$$(D_I + D_{III})\Delta S = \sigma_0 \Delta S$$

$$D_{III} = \sigma_0 \qquad E_{III} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \qquad \because \vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}$$

$$\therefore P = \chi_e \varepsilon_0 E_{III} = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

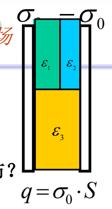
$$\therefore \sigma' = (1 - \frac{1}{\varepsilon_r})\sigma_0$$



平行板电容器间有电介质时：

$$\because U = Ed = \frac{qd}{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}$$

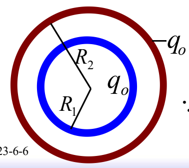
$$\therefore C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{d} \qquad \therefore C = \varepsilon_r C_0$$



插入电解质后极板上自由电荷面密度如何分布？

2 球形电容器：

两个同心的金属球壳带有等量异号电荷q_0



$$\vec{E} = 0 \qquad r \le R_1$$

$$\vec{E} = 0 \qquad r \ge R_2$$

$$\because \vec{E} = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} \qquad R_1 \le r \le R_2$$

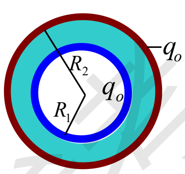
若两球壳间有电介质则，

$$\therefore E = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}$$

$$U_{12} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2} dr = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R_1} - \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R_2}$$

$$\because C = \frac{q_0}{U_1 - U_2}$$

$$\therefore C = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$



特别是当

$$\because R_2 \to \infty \qquad \therefore C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R_1$$

3 圆柱形电容器（同轴电缆）：

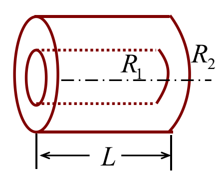
两个长为 L 的圆柱体，圆柱面上带有等量异号的电荷，其间距离 R_2–R_1<<L，充有相对介电常数为 ε_r 的介质，线电荷密度为η_e 。

解：$\because 2\pi r D = \eta_e \qquad R_2 < r < R_1$

$$\therefore E = \frac{\eta_e}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r}$$

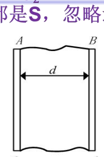
$$\therefore U = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\eta_e}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r} dr$$

$$= \frac{\eta_e}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \ln\frac{R_2}{R_1}$$



$$C = \frac{\eta_e L}{U} = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L}{\ln\frac{R_2}{R_1}}$$

一平行板电容器，两极板间充满电介质，如图所示，相对介电系数沿垂直于极板面方向作线性变化（随离A板的距离做正比变化），靠近A，B两极板处介质的相对介电常数分别为ε_{r_1}和ε_{r_2}，A，B两板的距离为d，所带电量分别为Q和-Q，极板面积都是S，忽略边缘效应，求：（1）A，B两板间的电势差。
（2）该电容器的电容。

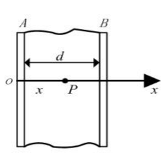


解：（1）考察距A板为x的任意一点P，根据题意，P点的相对介电常数 $\varepsilon_r = \varepsilon_{r_1} + kx$

当x = d，$\varepsilon_r = \varepsilon_{r_2}$时，有$\varepsilon_{r_2} = \varepsilon_{r_1} + kd$，由此可得

$$k = \frac{\varepsilon_{r_2} - \varepsilon_{r_1}}{d},$$

故：$\varepsilon_r = \varepsilon_{r_1} + \frac{\varepsilon_{r_2} - \varepsilon_{r_1}}{d} x = \frac{\varepsilon_{r_1} d + (\varepsilon_{r_2} - \varepsilon_{r_1}) x}{d}$

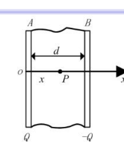


P点的场强，由高斯定理有：

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r S} = \frac{Qd}{\varepsilon_0 S[\varepsilon_{r_1} d + (\varepsilon_{r_2} - \varepsilon_{r_1}) x]}$$

P点的场强，由高斯定理有：

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r S} = \frac{Qd}{\varepsilon_0 S[\varepsilon_{r_1} d + (\varepsilon_{r_2} - \varepsilon_{r_1}) x]}$$



A，B两板间电势差为：

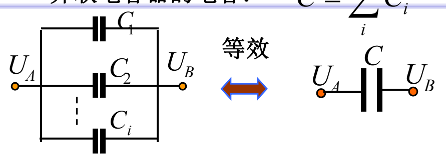
$$U_{AB} = \int_A^B E\mathrm{d}l = \int_0^d \frac{Qd}{\varepsilon_0 S[\varepsilon_{r_1} d + (\varepsilon_{r_2} - \varepsilon_{r_1}) x]} \mathrm{d}x = \frac{Qd}{\varepsilon_0 S(\varepsilon_{r_2} - \varepsilon_{r_1})} \ln\frac{\varepsilon_{r_2}}{\varepsilon_{r_1}}$$

(2)该电容器的电容为：

$$C = \frac{Q}{U_{AB}} = \frac{\varepsilon_0 S(\varepsilon_{r_2} - \varepsilon_{r_1})}{d \ln\frac{\varepsilon_{r_2}}{\varepsilon_{r_1}}}$$

三、电容器的串联和并联

• 并联电容器的电容： $C=\sum_i C_i$



令 $U=U_A-U_B$

$q_1=C_1U$

$q_2=C_2U$

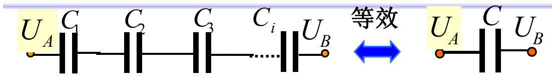
$q_i=C_iU$

$\because C=\dfrac{q_1+q_2+\cdots q_i}{U}$

$\therefore C=C_1+C_2+\cdots+C_i$

三、电容器的串联和并联

串联电容器的电容：

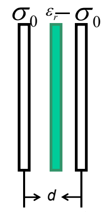


令 $U=U_A-U_B$　　$U=U_1+U_2+U_3\cdots+U_i$

$C_1=\dfrac{q}{U_1}$　$C_2=\dfrac{q}{U_2}$ .... $C_i=\dfrac{q}{U_i}$

$\because C=\dfrac{q}{U}=\dfrac{q}{U_1+U_2+\cdots+U_i}$

$\therefore \dfrac{1}{C}=\dfrac{U_1}{q}+\dfrac{U_2}{q}+\cdots+\dfrac{U_i}{q}$ → $\dfrac{1}{C}=\sum_i\dfrac{1}{C_i}$



$C\rightarrow C'$?

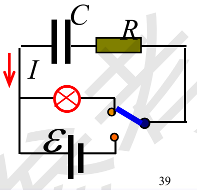
Δ8.23 电容器的能量、有介质时的电场能量

两种观点：电荷是能量的携带着。

电场是能量的携带着—近距观点。

这在静电场中难以有令人信服的理由，在电磁波的传播中，如通讯工程中能充分说明场才是能量的携带者。

这里我们从电容器具有能量，静电系统具有能量做形式上的推演来说明电场的能量。



电容器充放电的过程是能量从电源到用电器，（如灯炮）上消耗的过程。

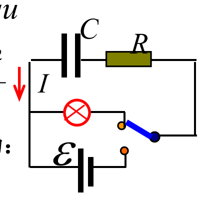
Δ8.23 电容器的能量、有介质时的电场能量

电容器放电过程中，电量 $-dq$ 在电场力的作用下，从正极板到负极板，这微小过程中电场力作功为：

因为 $-dq>0$　表示极板上的电量随放电而减少

$dA=-dq(u_+-u_-)=-dqu$

$A=\int dA=-\int udq=-\int_Q^0\dfrac{q}{C}dq=\dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{C}$



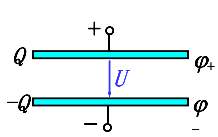
所以储存在电容器中的能量为：

$W=\dfrac{Q^2}{2C}=\dfrac{1}{2}CU^2=\dfrac{1}{2}QU$

或：　电容器由电源冲入电荷过程中储存的能量

一.　电容器的能量

总电能 $W=\dfrac{1}{2}\int_q\varphi\,\mathrm{d}q$



$=\dfrac{1}{2}Q(\varphi_+-\varphi_-)$

$=\dfrac{1}{2}QU$

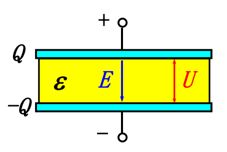
$=\dfrac{1}{2}CU^2$

$U=\varphi_+-\varphi_-$ — 极间电压

假如插入电介质时，外力所做的功等于什么？　电容器能量的增量

二. 有介质时静电场的能量密度

以平板电容器为例来分析：



$W=\dfrac{1}{2}CU^2=\dfrac{1}{2}\dfrac{\varepsilon S}{d}\cdot(Ed)^2$

$=\dfrac{1}{2}\varepsilon E^2\cdot(S\cdot d)$

电场能量密度：$w_e=\dfrac{W}{Sd}$

$$\boxed{w_e=\dfrac{1}{2}\varepsilon E^2=\dfrac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}}$$

可以证明，$w_e=\frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}$ 对所有线性极化介质（包括各向异性的线性极化介质）都成立。

在空间任意体积V内的电场能：

$$W=\int_V w_e\,\mathrm{d}V=\int_V \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}\,\mathrm{d}V$$

对各向同性介质：$W=\int_V \frac{1}{2}\varepsilon E^2\cdot\mathrm{d}V$

在真空中：$W=\int_V \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\cdot\mathrm{d}V$

静电场的能量

静电能表示式 $W=\frac{1}{2}\int_q \varphi\,\mathrm{d}q$

电场能量密度 $\boxed{w_e=\frac{\delta W}{\delta V}=\frac{1}{2}\varepsilon E^2=\frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}}$