数学分析与线性代数例题

佚名

2019 年 12 月 6 日

目录

1 微分中值定理及其应用

定理 1 (极值的第二充分条件) 设 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 可导且 $f'(x_0)=0$，又 $f''(x_0)$ 存在.

(1) 若 $f''(x_0)<0$ ，则 $f(x_0)$ 是严格极大值;

(2) 若 $f''(x_0)>0$ ，则 $f(x_0)$ 是严格极小值.

例1. 求 $y=\frac{1}{3}x^3\sqrt[3]{(x-5)^2}$ 的极值点与极值. [1]

解. 函数在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，当 $x\neq 5$ 时有

$$y'=\tfrac{1}{3}\left((x-5)^{\frac{2}{3}}+\tfrac{2x}{3}(x-5)^{-\frac{1}{3}}\right)=\tfrac{5(x-3)}{9(x-5)^{\frac{1}{3}}}(1)$$

令 $y'=0$ 得稳定点 $x=3$，现列表如下:

x	$(-\infty,3)$	3	$(3,5)$	5	$(5,\infty)$
y'	$+$	0	$-$	不存在	$+$
y	$\nearrow$	$\sqrt[3]{4}$	$\searrow$	0	$\nearrow$

从表中可见 $x=3$ 是极大值点，极大值为$f(3)=3\sqrt[3]{4}$; $x=5$ 为极小值点，极小值为 $f(5)=0$. 我们可以大致地画出函数的图形，如图1所示.

[1]原题摘自《数学分析简明教程》（上册）$P142$.

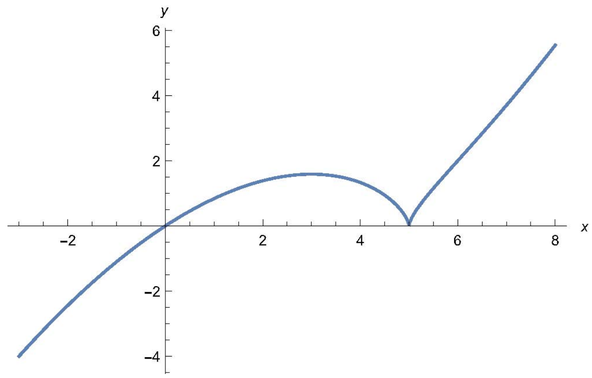

图 1: $y=\frac{1}{3}x\sqrt[3]{(x-5)^2}$ 的函数图像

2 行列式

例2. 若 $a,b\in\mathbb{R}^+$，求由方程为$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}=1$的椭圆为边界的区域 E 的面积. [2]

解. 断言 E 是单位圆盘 D 在线性变换 T 下的像. 这里 T 由矩阵$A=\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ 确定，这是因为若$u=\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix},x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$且 $x=Au$，则

$$u_1=\frac{x_1}{a},u_2=\frac{x_2}{b}$$

从而得 u 在此单位圆内，即满足 $u_1^2+u_2^2\leq 1$，当且仅当 x 在 E 内，即满足 $(x_1/a)^2+(x_2/b)^2\leq 1$. 进而

$$\begin{aligned} \{\text{椭圆的面积}\} &= \{T(D)\text{的面积}\} \\ &= |detA|\{D\text{的面积}\} \\ &= a\cdot b\cdot\pi\cdot(1)^2 \\ &= \pi\cdot a\cdot b \end{aligned} \tag{1}$$

[2]原题摘自《线性代数及其应用》（第三版）P183.