《数学奥林匹克辅导丛书》之四

组合恒等式

史济怀

中国科学技术大学出版社 1989 · 合肥

内容简介

有关组合恒等式的题目常出现于国际、国内数学竞赛中,而且组合恒等式已成为组合数学中的一个研究方向,正越来越引起数学界的重视。本书是一本人门性小册子,是作者根据他在1986年全国中学数学教师署假讲习班上的讲稿整理而成的。

本书着重介绍了几个基本组合恒等式和证明组合恒等式的一些常用方法,如母函数方法、差分方法、复数方法等,并对组合数的性质以及组合恒等式的研究动态作了精辟阐述。全书还附有5套练习题及这些练习题的答案或提示。

本书可供中学生、中学数学教师使用,并可供有关组合恒等式研究者参考。

《数学奥林匹克辅导丛书》之四

组合恒等式

史济怀

责任编辑: 伍传平 封面设计: 罗 洪

*

中国科学技术大学出版社出版 (安徽省合肥市金寨路 98 号) 中国科学技术大学印刷厂印刷 安徽省新华书店发行

*

开本。787×1092/32 印张。4.25 字数。92 千1989年3月第1版 1989年3月第1次印刷印数。1-20000册 ISBN 7-312-00047-9/O·20 定价。1.15元

目前,有关中学生复习资料、课外辅导读物已经出版得很多了,甚至使一些中学生感到不堪负担,所以再要出版这类读物一定要注重质量,否则"天下文章一大抄",又无创新之见,未免有误入子弟之嫌。写这类读物如何才能确保质量呢?我想华罗庚老师的两句名言:"居高才能临下,深入才能浅出",应该成为写这类读物的指导思想,他本人生前所写的一系列科普读物,包括为中学生写的一些书,也可堪称是这方面的范本。

中国科学技术大学数学系的老师们,在从事繁重的教学与科研工作的同时,一向对中学数学的活动十分关注,无论对数学竞赛,还是为中学生及中学教师开设讲座,出版中学读物都十分热心,这也许是受华罗庚老师的耳濡目染的缘故,所以至今这仍然是中国科学技术大学数学系的一个传统和特色。

最近,他们编写了《数学奥林匹克辅导丛书》,我看了几本原稿,感到他们是按照华罗庚老师的教诲认真写作的,所以乐为之序。

龚 昇

1988 年 6 月 28 日 于中国科学技术大学

前言

1986年暑假,中国科学技术大学数学系在安徽屯溪,为全国中学数学教师举办了一次暑期讲习班,笔者在讲习班上以"组合恒等式"为题作了一次讲演。当时选择这个题目的目的,是希望中学数学教师在中学教材的基础上,对组合数的性质有进一步的了解;同时希望通过对一些组合恒等式的证明,以加深对数学中常用的一些证明技巧,例如归纳、递推、变换等方法的认识。鉴于在一些国际数学竞赛中,有时也出现证明组合恒等式或与组合数性质有关的题目,希望教师在对学生进行辅导时,增加一些这方面的题材,这是讲演的另一个目的。这本小册子便是在那次讲演的基础上写成的。

所谓组合恒等式,是指组合数 C_n^* 满足的一些关系 式,例如大家熟知的

$$C_n^k = C_n^{n-k}, C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$$

便是两个最简单的组合恒等式。由于组合数本身的含义以及它同时又是二项式定理中展开式的系数这一事实,使得在数学的许多领域中出现越来越多的组合恒等式。现在"组合恒等式"已成为组合数学中的一个研究方向,已经出版了若干本专著。特别是七十年代以来,单复变数函数和多复变数函数的残数理论被用来研究组合恒等式,使得很多组合恒等式的证明得到了统一的处理和简化。1977年苏联学者叶格里切夫把这方面的成果写成了一本专著《积分表示和组合和的

计算》,美国数学学会于 1984 年把这本专著翻译成英文出版,可见组合恒等式的研究正在引起人们的重视。

这本小册子介绍了证明组合恒等式的的几种常用的方法.我们只假定读者具有高中的数学水平,即掌握了一般的排列、组合、二项式定理、复数等项知识的读者就能阅读本书。由于规定了这样一个起点,有关用微积分证明组合恒等式的方法都没有涉及,当然更不可能介绍前面曾经提到的,用复变函数中残数理论和围道积分证明组合恒等式的方法了。

每节之后附的习题是本书的重要组成部分,通过这些习题,读者可以检查自己对书中介绍的方法掌握的程度。

这是一本入门性的小册子,除了前面提到的,希望对中学数学教师和高中生有用外,还希望能引起具有高中或高中以上文化程度的读者对研究组合恒等式的兴趣!

史济怀

1988 年 2 月

F中国科学技术大学

序·	龚昇	(i)
前言	······································	(iii)
1	几个基本的组合恒等式	(1)
2	母函数方法	(18)
3	组合变换的互逆公式	(46)
4	差分方法	(69)
5	复数方法	(86)
习題	· 解答或提示	(102)

.•

•

1 几个基本的组合恒等式

牛顿二项式公式

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n$$

的系数恰好是组合数 C_{*}^{0} , C_{*}^{1} , …, C_{*}^{n} , 所以组合数有时也称为二项式系数。组合数有许多有趣的关系式。例如在上式中分别取 x=1 和 x=-1, 就得到两个恒等式

$$C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n,$$

 $C_n^0 - C_n^1 + \cdots + (-1)^n C_n^n = 0,$

这是大家熟知的。组合数,作为二项式的系数以及它本身在组合学中的含义,使得在数学的很多领域中出现越来越多的各种不同的组合恒等式。1972年美国出版了一本组合恒等式的表,其中收集了500多个组合恒等式,当然这远不是人们知道的全部组合恒等式!

一些复杂的组合恒等式往往是通过几个基本的组合恒等式,经过归纳、递推等方法得到的。这些基本的组合恒等式是

(i)
$$C_n^k = C_n^{n-k}$$
, (1)

(ii)
$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$$
, (2)

(iii)
$$C_n^k = \frac{n}{k} C_{n-1}^{k-1}$$
, (3)

(iv)
$$C_n^k C_k^m = C_n^m C_{n-m}^{k-m} = C_n^{k-m} C_{n-k+m}^m, m \le k \le n$$
, (4)

(v)
$$C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n$$
, (5)

(vi)
$$C_n^0 - C_n^1 + \dots + (-1)^n C_n^n = 0$$
. (6)

这六个基本恒等式中,前两个是大家熟知的,第三个是第四个的特例。只要在(4)的第一个等式中 取 m=1, 就得 $kC_n^*=nC_n^*=1$, 这就是等式(3)。

现在来证明等式(4)。事实上,按照计算组合数的公式

$$C_{\mu}^{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!},$$

可以写出

$$C_n^k C_k^m = \frac{n!}{k! (n-k)!} \frac{k!}{m! (k-m)!},$$

$$C_{n}^{m}C_{n-m}^{k-m}=\frac{n_{1}}{m_{1}(n-m)_{1}}\frac{(n-m)_{1}}{(k-m)_{1}(n-k)_{1}},$$

$$C_{n}^{k-n}C_{n-k+m}^{m} = \frac{n!}{(k-m)!(n-k+m)!} \frac{(n-k+m)!}{m!(n-k)!}$$

显然,这三个乘积是相等的,这就是等式(4)。

等式(5)和(6)就是本章开头提到的两个恒等式,只要在二项式定理中分别取 x=1和-1 就能得到。

下面我们将看到,这些基本恒等式虽然简单,但用它们可以证明或推导出一大批组合恒等式。

在给出具体的例子前,先介绍一下求和的记号。我们把和式 $C_1+C_2+\cdots+C_n$ 简记为 $\sum_{i=1}^n C_i$,这里 C_i 表示一般

项, Σ (读作"西格马")上下的数字表示:从1加到n, :是求和指标,只起辅助作用,也可以换成别的记号。例如

$$1 + 2 + \dots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \sum_{j=1}^{n} j,$$

$$1^{2} + 2^{2} + \dots + n^{2} = \sum_{k=1}^{n} k^{2} = \sum_{j=1}^{n} r^{2} = \sum_{i=1}^{n} i^{2},$$

$$\cos x + \cos 2x + \dots + \cos mx = \sum_{i=1}^{m} \cos jx.$$

利用这种记号,多项式 $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ 可以简记为

(5)、(6)可分别写为

$$\sum_{k=0}^{n} C_{n}^{k} = 2^{n}, \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} C_{n}^{k} = 0.$$

在下面的讨论中,有时需要更换求和指标,这必须注意 同时更换求和的上下限。例如

$$\sum_{n=0}^{s} a_n x^n = \sum_{n=2}^{s+2} a_{n-2} x^{n-2} = \sum_{k=1}^{s+1} a_{k-1} x^{k-1}.$$

下面是一系列利用六个基本恒等式来推导组合恒等式的例子。其中,我们约定, $C_n^n=1$,当 k>n 或 k 是负整数时, $C_n^k=0$ 。

例 1 计算
$$S_{n,n} = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_n^k$$
, $m \leq n$.

解 从等式(6)知道,当m=n时, $S_{n,n}=0$ 。现设m< n,利用基本恒等式(2), $S_{n,n}$ 可以写成

$$S_{n,m} = 1 + \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k} (C_{n-1}^{k} + C_{n-1}^{k-1})$$

$$= 1 - (C_{n-1}^{1} + C_{n-1}^{0}) + (C_{n-1}^{2} + C_{n-1}^{1}) \cdots + (-1)^{m} (C_{n-1}^{m} + C_{n-1}^{m-1})$$

$$= (-1)^{m} C_{n-1}^{m}.$$

这样, 就得到等式

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^{n} C_{n}^{k} = \begin{cases} 0, & m=n, \\ (-1)^{m} C_{n-1}^{m-1}, & m < n. \end{cases}$$

例 2 证明

$$\sum_{k=0}^{n} C_{2n}^{k} = 2^{2n-1} + \frac{1}{2} C_{2n}^{n}.$$

证 记
$$a_n = \sum_{k=0}^n C_{2n}^k$$
, $b_n = \sum_{k=n+1}^{2n} C_{2n}^k$, 则由等式 (5)

得

$$a_n + b_n = \sum_{k=0}^{2^n} C_{2n}^k = 2^{2n} \tag{7}$$

另一方面,对 b_n 的求和指标作变换: k=2n-1,得

$$b_{n} = \sum_{l=0}^{n-1} C_{2n}^{2n-l} = \sum_{l=0}^{n-1} C_{2n}^{l} = \sum_{l=0}^{n} C_{2n}^{i} - C_{2n}^{n} = a_{n} - C_{2n}^{n},$$

代入(7),即得

$$a_n = 2^{2n-1} + \frac{1}{2}C_{2n}^n,$$

这就是要证明的恒等式。

例 3 计算
$$p_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} C_n^k$$
, $q_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{k+1} C_n^k$.

解 计算这两个和式的主要困难是在每个组合数 C_n^n 前有一个因子 $\frac{1}{h+1}$,若能通过变换把这个因子去掉,那么利用基本恒等式(5)和(6),就能得到所要求的和。事实上,把基本恒等式(3)改写为

$$\frac{1}{k+1} C_n^k = \frac{1}{n+1} C_{n+1}^{k+1},$$

并代入 p_n 和 q_n ,即得

$$p_{*} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} C_{n}^{k} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} C_{n+1}^{k+1} = \frac{1}{n+1} (2^{n+1} - 1),$$

$$q_{n} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} \frac{1}{k+1} C_{n}^{k} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} C_{n+1}^{k+1} = \frac{1}{n+1}.$$

例 4 计算
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 C_n^k$$
.

解 先利用基本恒等式(3),可得

$$\sum_{k=1}^{n} k^{2} C_{n}^{k} = n \sum_{k=1}^{n} k C_{n-1}^{k-1}$$

$$= n \sum_{k=1}^{n} (k-1) C_{n-1}^{k-1} + n \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1}$$

$$= n \sum_{k=2}^{n} (k-1) C_{n-1}^{k-1} + n 2^{n-1}.$$

这里我们已经利用了基本恒等式(5)。对上面右端的和式

再用一次基本恒等式(3)

$$(k-1)C_{n-1}^{k-1}=(n-1)C_{n-2}^{k-2}$$

得:

$$\sum_{k=1}^{n} k^{2} C_{n}^{k} = n(n-1) \sum_{k=2}^{n} C_{n-2}^{k-2} + n2^{n-1}$$

$$= n(n-1) 2^{n-2} + n2^{n-1}$$

$$= n(n+1) 2^{n-2},$$

这就是要算的结果。计算过程中用到的也就是基本恒等式(3)和(5)。

___例 5 证明
$$S_{mn} = \sum_{k=m}^{n} (-1)^k C_n^k C_n^m = (-1)^n \delta_{mn}, m \leq n.$$

这里
$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1, & m=n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

证 当m=n时,上面的和式只有一项 $S_{--}=(-1)^{m}C_{m}^{m}C_{m}^{m}=(-1)^{m}.$

故等式成立。现设m<n,利用基本恒等式(4),即得

$$S_{mn} = \sum_{k=m}^{n} (-1)^{k} C_{n}^{m} C_{n-m}^{k-m} = C_{n}^{m} \sum_{k=m}^{n} (-1)^{k} C_{n-m}^{k-m}.$$

对上式的求和指标k作变换k-m=1,则当k从m变到n时,1从0变到n-m,于是

$$S_{mn} = C_n^m \sum_{l=0}^{m-m} (-1)^{l+m} C_{n-m}^l = (-1)^m C_n^m \sum_{l=0}^{m-m} (-1)^l C_{n-m}^l = 0_e$$

最后一步利用了等式(6)。证明完毕。

证明这个恒等式的关键是基本恒等式(4),它把两个

因子都和变动指标 k 有关的乘积 C % C % 变成了只有一个因子与k有关的乘积 C % C % 二 % , 这样 , C % 就可作为公因子提出来,和式就化简了。这里利用 (4) 的目的和例 3 中利用 (3) 的目的是一样的,都是为了把和式化简。这个等式在下面的讨论中还要用到。

例 6 证明
$$\sum_{k=m}^{n} C_{n}^{k} C_{k}^{m} = 2^{n-m} C_{n}^{m}. \qquad m \leq n.$$

证 和证明例5的方法一样,利用基本恒等式(4)得

$$\sum_{k=m}^{n} C_{n}^{k} C_{n}^{m} = C_{n}^{m} \sum_{k=m}^{n} C_{n-m}^{k-m} = C_{n}^{m} \sum_{l=0}^{n-m} C_{n-m}^{l} = 2^{n-n} C_{n}^{m}.$$

最后一步利用了基本恒等式(5)。

例 7 证明
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \frac{m}{m+k} = (C_{m+n}^n)^{-1}$$
.

证 显然,当m=1时,这就是例 3中 q。的 结果, 但 现在例 3 中的方法已不能用。记上式左端为 b。, 利 用 基 本 恒等式 (2) 和 (3) 可得

$$b_n = \sum_{k=3}^{n} (-1)^k C_n^k \frac{m}{m+k}$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k (C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}) \frac{m}{m+k} + (-1)^n \frac{m}{m+n}$$

$$=b_{n-1}+\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k}C_{n-1}^{k-1}\frac{m}{m+k}$$

$$=b_{n-1}+\frac{m}{n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}C^{\frac{k}{n}}\frac{k}{m+k}$$

$$=b_{n-1} + \frac{m}{n} \left\{ \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \frac{m}{m+k} \right\}$$

$$=b_{n-1} - \frac{m}{n} b_n.$$
即 $b_n = \frac{n}{m+n} b_{n-1}$,从这个递推公式立刻可得
$$b_n = \frac{n}{m+n} b_{n-1} = \frac{n(n+1)}{(m+n)(m+n-1)} b_{n-2} = \cdots$$

$$= \frac{n!m!}{(n+m)!} b_0 = (C_{m+n}^n)^{-1}.$$

例 8 证明

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} C^{k} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}.$$
 (8)

证 看上去式 (8) 左端的和式与例 3的 q,差不多,但现在不能直接用式 (3)。不过容易想到通过等式 (2)来使用式 (3)。事实上,先用式 (2),再用式 (3)可得 $\frac{1}{b}C_{n}^{k}=\frac{1}{b}(C_{n-1}^{k}+C_{n-1}^{k-1})=\frac{1}{b}C_{n-1}^{k}+\frac{1}{n}C_{n}^{k}$.

于是若记
$$f_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{1}{k} C_n^k$$
, 则

$$f_{n} = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} C_{n}^{k} + (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} C_{n-1}^{k} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} C_{n}^{k} + (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

$$= f_{n-1} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} C_{n}^{k} = f_{n-1} + \frac{1}{n}.$$

这里最后的等式用了基本恒等式 (6)。从这个递推关系可

得

$$f_{n-1}=f_{n-2}+\frac{1}{n-1}$$
, ..., $f_2=f_1+\frac{1}{2}$, $f_1=1$,

所以

$$f_n = f_{n-1} + \frac{1}{n} = f_{n-2} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} = \dots = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$$

这就是要证明的等式(8)。

从证明例7和例8这两个等式的过程可以看出,我们不仅使用了基本恒等式(2)和(3),还使用了递推的办法,这是证明组合恒等式常用的手段。

例 9 证明恒等式

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} 2^{2n-2k} C_{2n-k+1}^{k} = n+1.$$
 (9)

证 记(9) 左端的和式为 a_n ,利用基本恒等式(2), a_n 可写为

$$a_{s} = 2^{2n} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k} 2^{2n-2k} (C_{2s-k}^{k} + C_{2n-k}^{k-1})$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} 2^{2n-2k} C_{2s-k}^{k} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k} 2^{2n-2k} C_{2n-k}^{k-1}.$$
(10)

[对上式第二个和式作指标变换 k=1+1得

$$\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k} 2^{2n-2k} C_{2n-k}^{k-1}$$

$$= \sum_{l=0}^{n-1} (-1)^{l+1} 2^{2(n-1)-2l} C_{2(n-1)-l+1}^{l} = -a_{n-1}.$$

如果命
$$b_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k 2^{2n-2k} C_{2n-k}^k$$
,则(10)可写为

$$b_{n} = a_{n} + a_{n-1}. \tag{11}$$

在 b. 中再用基本恒等式(2)得

$$b_{n} = 2^{2n} + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{\frac{1}{k}} 2^{2n-2k} (C_{2n-k-1}^{k} + C_{2n-k-1}^{k-1}) + (-1)^{n}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{\frac{1}{k}} 2^{2n-2k} C_{2n-k-1}^{k} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{\frac{1}{k}} 2^{2n-2k} C_{2n-k-1}^{k-1}$$

$$= 4 \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{\frac{1}{k}} 2^{2(n-1)-2k} C_{2(n-1)-k+1}^{k} +$$

$$\sum_{l=0}^{n-1} (-1)^{l+1} 2^{2(n-1)-2l} C_{2(n-1)-l}^{l} = 4a_{n-1} - b_{n-1}. \quad (12)$$

从(11)和(12)得。

$$a_n + a_{n-1} = 4a_{n-1} - b_{n-1} = 4a_{n-1} - a_{n-1} - a_{n-2}$$

由此得递推关系式

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} \tag{13}$$

显然 $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, 于是从 (13) 得

$$a_n - a_{n-1} = a_{n-1} - a_{n-2} = a_{n-2} - a_{n-3} = \dots = a_1 - a_0 = 1$$
,
由此得

$$a_n = a_{n-1} + 1 = a_{n-2} + 2 = \cdots = a_0 + n = n + 1$$

这就是要证明的等式(9).

从(9)和(11)又可得一新的恒等式

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} 2^{2n-2k} C_{2n-k}^{k} = 2n+1.$$
 (14)

如果把 (14) 中的流动指标 k 换成 n-1, 又得恒等式

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} 2^{2i} C_{n+i}^{2i} = 2n+1.$$

例 9 的恒等式证明起来有一定的难度,为了 算 出 a_* 的值,我们引进了 b_* ,通过 a_* 和 b_* 的关系,最后算出了 a_* 。这种方法在下面还将用到。

例 10 证明
$$\sum_{k=0}^{2^{n-1}} (-1)^{k+1} (k+1) (C_{2^n}^k)^{-1} = 0$$
 (15)

证 把上面左端的和式记为 y_n. 两次利用基本 恒 等 式 (3)得

$$\frac{k+1}{C_{2n}^k} = \frac{2n+1}{C_{2n+1}^{k+1}} = \frac{2n+1}{C_{2n+1}^{2n-k}} = \frac{2n-k}{C_{2n}^{2n-k-1}},$$

于是

$$y_n = \sum_{k=0}^{2^{n-1}} (-1)^{\frac{k+1}{2}} \frac{2n-k}{C_{2n}^{2^{n-k-1}}}.$$

$$y_{n} = \sum_{l=0}^{2n-1} (-1)^{2n-l} \frac{l+1}{C_{2n}^{l}} = \sum_{l=0}^{2n-1} (-1)^{l} \frac{l+1}{C_{2n}^{l}} = -y_{n},$$

由此即得 $y_n = 0$ 。

作为一个习题,请读者自己证明

$$\sum_{k=1}^{2^{n-1}} (-1)^{k-1} \frac{n-k}{C_{2n}^k} = 0.$$
 (16)

例 11 证明
$$\sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^{k-1} (C_2^k)^{-1} = \frac{1}{n+1}$$
.

证 若记

$$a_n = \sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^{k-1} (C_{2n}^k)^{-1}, b_n = \sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^{k-1} k (C_{2n}^k)^{-1},$$

则由例 10 知道

$$a_{n} + b_{n} = \sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^{k-1} (h+1) (C_{2n}^{k})^{-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^{k-1} (k+1) (C_{2n}^{k})^{-1} + 1 = 1.$$
(17)

从 (16) 又有

$$na_n - b_n = \sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^{k-1} (n-k) (C_n^k)^{-1} = 0. \quad (18)$$

(17) 和 (18) 相加, 即得 $a_n = \frac{1}{n+1}$,这就是要证明的恒等

式。从 (18) 又得 $b_n = na_n = \frac{n}{n+1}$ 。这样我们就得到了下廊

两个组合恒等式

$$\sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^{k-1} (C_{2n}^{k})^{-1} = \frac{1}{n+1},$$

$$\sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^{k-1} k (C_{2n}^{k})^{-1} = \frac{n}{n+1}.$$

其实,例11的等式还有一个更简单的证法。 根据组合数的计算公式直接计算可得

$$\frac{2n+2}{2n+1} \frac{1}{C_{2n}^k} = \frac{1}{C_{2n+1}^k} + \frac{1}{C_{2n+1}^{k+1}}.$$
 (19)

于是

$$\frac{2n+2}{2n+1} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} (C_{2n}^{k})^{-1} = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} \{ (C_{2n+1}^{k})^{-1} \}
+ (C_{2n+1}^{k+1})^{-1} \} = (C_{2n+1}^{1})^{-1} + (C_{2n+1}^{2})^{-1} - (C_{2n+1}^{2})^{-1}
- (C_{2n+1}^{3})^{-1} + \dots - (C_{2n+1}^{2n})^{-1} - (C_{2n+1}^{2n+1})^{-1}
= \frac{1}{2n+1} - 1 = \frac{-2n}{2n+1},$$

由此即得

$$\sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^{k-1} (C_{2n}^k)^{-1} = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} (C_{2n}^k)^{-1} + 1$$

$$= -\frac{n}{n+1} + 1 = \frac{1}{n+1}.$$

这个证明不需要 (15) 和 (16) 两个恒等式的帮助,而 仅仅利用了等式 (19),这是从组合数的计算公式直接得到的,但要想到这一点,只有对组合数的运算非常熟练才能办到。

数学归纳法自然是证明组合恒等式的一种重要方法,例如例7、例8都可用数学归纳法来证明。下面是一个稍为困难的例子。

例 12 证则

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(n-k)} C_{2(k-1)}^{k-1} C_{2(n-k-1)}^{n-k-1} = \frac{1}{n} C_{2(n-1)}^{n-1}, n = 2, 3, \dots$$

(20)

证 先把等式化简。注意

$$\frac{n}{k(n-k)}=\frac{1}{k}+\frac{1}{n-k},$$

(20) 的左端可以改写为

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{n}{k(n-k)} C_{2(k-1)}^{k-1} C_{2(n-k-1)}^{n-k-1}$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}C_{2(k-1)}^{k-1}C_{2(n-k-1)}^{n-k-1}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n-k}C_{2(k-1)}^{k-1}C_{2(n-k-1)}^{n-k-1},$$
(21)

在 (21) 右端的第二个和式中命 n-k=1得

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n-k} C_{2(k-1)}^{k-1} C_{2(n-k-1)}^{n-k-1} = \sum_{l=1}^{n-1} \frac{1}{l} C_{2(n-l-1)}^{n-l-1} C_{2(l-1)}^{l-1},$$

这说明(21)右端的两个和是相同的,因而有

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{n}{k(n-k)} C_{2(k-1)}^{k-1} C_{2(n-k-1)}^{n-k-1}$$

$$=2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}C_{2(k-1)}^{k-1}C_{2(n-k-1)}^{n-k-1}, \qquad (22)$$

这样一来, (20) 就变成

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} C_{2(k-1)}^{k-1} C_{2(n-k-1)}^{n-k-1} = \frac{1}{2} C_{2(n-1)}^{n-1}. \tag{23}$$

现在用数学归纳法证明 (23) 成立。n=2 时,等式显然成立。今设n=m 时, (23) 成立,要证n=m+1 时, (23) 也成立。当n=m+1 时, (23) 的左端为

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} C_{2(k-1)}^{k-1} C_{2(m-k)}^{m-k} = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k} C_{2(k-1)}^{k-1} C_{2(m-k)}^{m-k} + \frac{1}{m} C_{2(m-1)}^{m-1}, \qquad (24)$$

注意到

$$C_{2(m-k)}^{m-k} = \frac{(2m-2k)!}{((m-k)!)^2} = \frac{(2m-2k)(2m-2k-1)}{(m-k)^2}$$

$$\times \frac{(2m-2k-2)!}{((m-k-1)!)^2} = 2\left(2-\frac{1}{m-k}\right)C_{2(m-k-1)}^{m-k-1},$$

代入 (24) 得

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} C_{2}^{k-1} C_{2(k-1)}^{m-k} C_{2(m-k)}^{m-k}$$

$$=\sum_{k=1}^{m-1}\frac{2}{k}\left(2-\frac{1}{m-k}\right)C_{2(k-1)}^{k-1}C_{2(m-k-1)}^{m-k-1}+\frac{1}{m}C_{2(m-1)}^{m-1}$$

$$=4\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{k}C_{2(k-1)}^{k-1}C_{2(m-k-1)}^{m-k-1}$$

$$-2\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{k(m-k)}C_{2(k-1)}^{k-1}C_{2(mk-1)}^{m-k-1}+\frac{1}{m}C_{2(m-1)}^{m-1}.$$

利用 (22) 和归纳假定即得

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} C_{2(k-1)}^{k-1}, C_{2(m-k)}^{m-k} = 4 \left(1 - \frac{1}{m}\right) \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k} C_{2(k-1)}^{k-1}, C_{2(m-k-1)}^{m-k-1} + \frac{1}{m} C_{2(m-1)}^{m-1}$$

$$= 4 \left(1 - \frac{1}{m}\right) \frac{1}{2} C_{2(m-1)}^{m-1} + \frac{1}{m} C_{2(m-1)}^{m-1}$$

$$= \left(2 - \frac{1}{m}\right) C_{2(m-1)}^{m-1} = \frac{2m-1}{m} \frac{(2m-2)!}{((m-1)!)^{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{2m(2m-1)}{m^{2}} \frac{(2m-2)!}{((m-1)!)^{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{(2m)!}{(m!)^{2}} = \frac{1}{2} C_{2m}^{m}.$$

这就证明了 (23) 当 n=m+1 时也成立, 因而 (20) 成立。 归纳法证明完毕。 上面十二个例子都是通过六个基本恒等式来证明的,至于什么情况下用哪一个以及如何用,这就是证明 技 巧 之 所-在,要通过较多的练习才能逐步掌握。

习 题 一

证明下列恒等式:

1.
$$\sum_{k=0}^{n} 2^{k} C_{n}^{k} = 3^{n}.$$

$$2. \sum_{k=0}^{n} kC_{n}^{k} = n2^{n-1}.$$

3.
$$\sum_{k=0}^{n} (k+1)C_{n}^{k} = 2^{n-1}(n+2).$$

4.
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} k C_{n}^{k} = 0$$
, $(n>1)$.

$$5. \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} C_n^k x^k = \frac{(1+x)^{n+1}-1}{(n+1)x}.$$

6. 如果 n 为偶数,则 $C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^{n-1} = 2^{n-1}$. 如果 n 为奇数,则 $C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^{n-1}$.

7.
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k}}{(k+1)^{2}} C_{n}^{k} = \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n+1} \right).$$

8.
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} (C_{n}^{k})^{-1} = \frac{n+1}{n+2} (1+(-1)^{n}).$$

9.
$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k} \frac{1}{k+1} C_{n}^{k} C_{k}^{l} = \frac{(-1)^{l}}{n+1}.$$

$$10. \sum_{k=0}^{n-1} C_{2n-1}^{k} = 2^{2n-2}.$$

11.
$$\sum_{k=0}^{n} kC_{2n}^{k} = n2^{2n-1}.$$

12.
$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} C_{n}^{k} [1 - (1-x)^{k}]$$
$$= x + \frac{x^{2}}{2} + \dots + \frac{x^{n}}{n}.$$

13.
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k}}{2k+1} C_{n}^{k} = \frac{2^{2n}}{2n+1} (C_{2n}^{n})^{-1}.$$

14.
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k}}{1-2k} C_{n}^{k} = 2^{2n} (C_{2n}^{n})^{-1}.$$

15.
$$\sum_{k=0}^{n} kC_{2n+1}^{k} = (2n+1)2^{2n-1} - \frac{2n+1}{2}C_{2n}^{n}.$$

16.
$$\sum_{k=0}^{n} k C_{2n}^{n-k} = n C_{2n-1}^{n}$$

17.
$$\sum_{k=0}^{n} k C_{2n+1}^{n-k} = (2n+1) C_{2n-1}^{n} - 2^{2n-1}.$$

18.
$$\sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1} x^{k} = \frac{(1+\sqrt{x})^{2n+1} - (1-\sqrt{x})^{2n+1}}{2\sqrt{x}}$$

19.
$$\sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^{k-1} \frac{n-k}{C_{2n}^k} = 0.$$

20.
$$\sum_{k=1}^{n} C_{n}^{k} C_{k}^{i} x^{k} (1-x)^{n-k} = C_{n}^{!} x^{!}.$$

2 母函数方法

上面已经看到, 六个基本恒等式在证明各种组合恒等的 时起着重要的作用, 但必须在某种方法的 指导下恰当 地 使用它们, 才能得到所要的结果。下面介绍的母函数方法就是这种有效方法中的一种。

设 $\{a_n\}, k=0,1,...,n$ 是一个给定的数列,如果它恰好是某一个多项式p(x)的系数,即

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n,$$

就称p(x)是这个数列的母函数或生成函数. 意思是这个数列是由多项式p(x)产生的.

例如,由组合数构成的数列

$$C_{n}^{0}, C_{n}^{1}, \cdots C_{n}^{n},$$

的母函数是(1+x)", 这是因为由二项式定理可得

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + \dots + C_n^n x^n.$$

洞样道理, 数列

$$C_{2}^{0}$$
, C_{2}^{1} , ..., C_{2}^{2}

的母函数是(1+x) *"。

如果给定的是无穷数列,例如

$$C_{n}^{n}, C_{n+1}^{n}, C_{n+2}^{n}, \cdots, C_{n+k}^{n}, \cdots$$

它的母函数是什么呢? 一般来说, 无穷数列

$$a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots$$

的母函数应该是一个"无穷次多项式"。

$$a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + \cdots$$

我们把这种"无穷次多项式"叫做形式幂级数。这个名词是这样得来的:无穷个数相加的式子称为级数,而它的每项都是幂函数a.x",故称之为幂级数;所以要加上"形式"两字是因为我们这儿并不讨论它的收敛、发散等问题,而是把整个幂级数看作一个对象加以研究和使用,就好象把 a+bi 看一个整体——叫做复数——来研究和使用一样。

现在给出无穷数列(以下简称数列)的母函数的明确定义。

定义 1 设

$$a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots$$
 (25)

是一个给定的数列, 称形式幂级数

$$a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots \tag{26}$$

为数列(25)的母函数。

例如数列 1, 1,, 的母函数是 $1+x+\cdots+x^n+\cdots$, 数列 1, 2, 3, ...的母函数是 $1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}+\cdots$.

形式幂级数对我们来说是完全新的对象,什么是两个形式幂级数的和、差、积、商必须重新定义。

定义 2 两个形式幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

当且仅当

$$a_n = b_n$$
, $n = 0, 1, 2, \dots$

时才认为是相等的.

因此,数列{a.}和它的母函数之间是一一对应的,不同的数列,对应的母函数也不相同。

定义 3 两个形式幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

的和是一个以 $\{a_*+b_*\}$ 为系数的形式幂级数,即

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n.$$

定义 4 常数 α 和形式幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的乘积是一个 以

{aa.}为系数的形式幂级数,即

$$\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n) x^n.$$

从定义3,4得知

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (-b_n) x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) x^n.$$

定义 5 两个形式幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

的积定义为形式幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, 其中系数 c_n 为

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}, (27)$$

即

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_{n-k}\right) x^n$$

例 13 计算
$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)^2$$
.

解设

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n,$$

即 $a_n = b_n = 1$, $n = 0, 1, 2 \cdots$ 因而

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = n+1,$$

由此即得

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n.$$

例 14 计算
$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)$$

解 设
$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$
, 则 $b_n = 1$, $n = 0, 1, 2, \dots$ 于是

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^n a_k = a_0 + a_1 + \dots + a_n$$

所以

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 + a_1 + \dots + a_n) x^n.$$

这个例子告诉我们,如果数列

$$a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots$$

的母函数是f(x),那么数列

$$a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \dots, a_0 + a_1 + \dots + a_n, \dots$$

的母函数是 $f(x)\sum_{n=0}^{\infty}x^n$

有了乘法运算,就可定义除法运算。

定义 6 设

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, g = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, h = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

是三个形式幂级数,如果f = gh,就称f被g除的商是h,记为 $\frac{f}{g} = h$.

例 15 把 1-x 都看成形式幂级数,计算它们的商 $\frac{1}{1-x}$.

解 设商为
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$
,即

$$\frac{1}{1-\kappa} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \kappa^n.$$

按定义 6得

$$1 = (1 - x) \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$
 (28)

(28) 的右端可改写为

$$(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}c_{n}x^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}c_{n}x^{n}-\sum_{n=0}^{\infty}c_{n}x^{n+1}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}c_{n}x^{n}-\sum_{n=1}^{\infty}c_{n-1}x^{n}=c_{0}+\sum_{n=1}^{\infty}(c_{n}-c_{n-1})x^{n}.$$

代入 (28) 得

$$1 = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n - c_{n-1}) x^n.$$

比较两边同幂次的系数,得

$$c_0 = 1$$
, $c_n - c_{n-1} = 0$, $n = 1, 2, 3, \cdots$.

由此即得 $c_0 = c_1 = c_2 = \cdots = 1$. 因而得展开式

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^* + \dots \tag{29}$$

这个展开式在下面的讨论中将多次用到。

要注意的是 (29) 中的相等是形式幂级数的相等,在它的两边不能用x的具体数值代入。例如,若用x=2代入,就会得出

$$-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^n + \cdots$$

这样的荒謬结果。这是形式幂级数与多项式的本质差别。

用和例15同样的方法,可以证明

$$\frac{1}{1-rx} = 1 + rx + r^2x^2 + \dots + r^nx^n + \dots$$
 (30)

这里,是任意实数。

有了 (29) 就可给出 $\frac{1}{(1-x)}$ 的幂级数表达式了,这对

证明组合恒等式将是十分有用的.

例 16 证明

$$\frac{1}{(1-x)^n} = C_{n-1}^{n-1} + C_n^{n-1}x + C_{n+1}^{n-1}x^2 + \dots + C_{n+k-1}^{n-1}x^n + \dots$$
(31)

23

证 用数学归纳法证明 (31) 成立。n=1时, (31) 就是 (29), 今设n=k时, (31) 成立,即

$$\frac{1}{(1-x)^{k}} = \sum_{l=0}^{\infty} C_{k+l-1}^{k-1} x^{l},$$

于是当 n=k+1 时,

$$\frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{k+1}}} = \frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{k}}} \frac{1}{1-x} = \left(\sum_{l=0}^{\infty} C_{k+l-1}^{k-1} x^{l}\right) \left(\sum_{l=0}^{\infty} x^{l}\right)$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{l} C_{k+j-1}^{k-1}\right) x^{l}. \tag{32}$$

利用基本恒等式(2)可得

$$\sum_{j=0}^{l} C_{k+j-1}^{k-1} = C_{k-1}^{k-1} + C_{k}^{k-1} + C_{k+1}^{k-1} + \dots + C_{k+l-1}^{k-1}$$

$$= (C_{k}^{k} + \tilde{C}_{k}^{k-1}) + C_{k+1}^{k-1} + \dots + C_{k+l-1}^{k-1}$$

$$= C_{k+1}^{k} + C_{k+1}^{k-1} + C_{k+2}^{k-1} + \dots + C_{k+l-1}^{k-1}$$

$$= C_{k+2}^{k} + C_{k+2}^{k-1} + \dots + C_{k+l-1}^{k-1} = \dots = C_{k+2}^{k}$$

代入 (32) 即得

$$\frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{l=0}^{\infty} C_{k+l}^{k} x^{l}.$$

这就证明了(31) 当 n=k+1 时也成立。根据归纳法原理, (31) 对所有自然数 n 成立。

(31) 告诉我们一个重要的事实,数列 C",C",+1,C",+2,···,C",+4,

的母函数是 $\frac{1}{(1-x)^{s+1}}$,这个事实在证明某些组合恒等式时

将起重要作用。

根据形式幂级数的乘法运算,还可定义形式幂级数的开方运算。

定义 7 设

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$
, $a_0 > 0$; $g = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, $b_0 > 0$

是两个形式幂级数,如果 $f^2 = g$, 就称 $f \in g$ 的平方根,记为 $f = \sqrt{g}$.

作为一个重要的例子,我们来计算形式幂级数1+x的平方根。

例 17 证明

$$\overline{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n2^{2n-1}} C_{2n-2}^{n-1} x^{n}. \tag{33}$$

证 记
$$a_0 = 1$$
, $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n2^{2n-1}} C_{2n-2}^{n-1}$, 要证明的 (33)

可写为

$$\sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n . \tag{34}$$

按照定义,要证明(34)成立,只要证明

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)^2 = 1 + x. \tag{35}$$

根据乘法的定义有

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n, \quad d_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}.$$

显然 $d_0 = a_0^2 = 1$, $d_1 = a_0 a_1 + a_1 a_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, 如果能证

明 $d_n = 0$ ($n = 2, 3, \cdots$), 那么 (35) 成立,即 (33) 成立.根据 a_n 的表达式,当 $n \ge 2$ 时有

$$d_{n} = \sum_{k=0}^{n} a_{k} a_{n-k} = a_{0} a_{n} + \sum_{k=1}^{n-1} a_{k} a_{n-k} + a_{n} a_{0}$$

$$= 2a_{n} + \sum_{k=1}^{n-1} a_{k} a_{n-k}$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{n2^{2n-2}} C_{2(n-1)}^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{n-2}}{2^{2n-2}} \frac{1}{k(n-k)}$$

$$C_{2(k-1)}^{k-1} C_{2(n-k-1)}^{n-k-1}$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-2}} \left\{ \frac{1}{n} C_{2(n-k-1)}^{n-1} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(n-k)} \right\}$$

$$C_{2(k-1)}^{k-1} C_{2(n-k-1)}^{n-k-1} \right\}.$$

由例12证明的恒等式 (20) 知道,上面花括弧中的值为 0,因而 $d_n=0$, $n=2,3,\cdots$ 因而 (33) 成立。

但对我们来说更重要的是要证明下面的 $\frac{1}{\sqrt{1-4x}}$ 的展开式。

例 18 证明

$$\frac{1}{\sqrt{1-4x}} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{2,n}^{n} x^{n}. \tag{36}$$

证 在 (33) 中用 - 4x代替 x, 就得

$$\sqrt{1-4x} = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k} C_{2k-2}^{k-1} x^{k}.$$

记
$$a_0 = 1$$
, $a_k = -\frac{2}{k}C_{2k-2}^{k-1}$, $k = 1, 2, \dots, b_k = C_{2k}^k$, $k = 0, 1, \dots$

只要能证明 $\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k\right) = 1$, 按照幂级数除法的定

义,要证明的等式成立。记

$$d_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k},$$

已知 $d_o = a_o b_o = 1$,剩下要证明的是

$$d_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = 0, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

$$d_n = a_0 b_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k} + a_n b_0$$

$$=C_{2n}^{n}-\frac{2}{n}C_{2n-2}^{n-1}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2}{k}C_{2k-2}^{k-1}C_{2n-2k}^{n-k},$$

这样,要证 $d_{\bullet} = 0$ 归结为证明

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} C_{2k-2}^{k-1} C_{2n-2k}^{n-k} = \frac{1}{2} C_{2n}^{n} - \frac{1}{n} C_{2n-2}^{n-1} = 2 \left(1 - \frac{1}{n}\right) C_{2n-2}^{n-1}.$$

(37)

由于
$$C_{2n-2k}^{n-k} = 2\left(2-\frac{1}{n-k}\right)C_{2n-2k-2}^{n-k-1}$$

(37) 的左端可以写为

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} C_{2k-2}^{k-1} C_{2n-2k}^{n-k} = 4 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} C_{2k-2}^{k-1} C_{2n-2k-2}^{n-k-1}$$

$$-2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(n-k)}C_{2k-2}^{k-1}C_{2n-2k-2}^{n-k-1}$$

$$=2C_{2n-2}^{n-1}-\frac{2}{n}C_{2n-2}^{n-1},$$

这里我们已经使用了例12的等式 (20) 和(23), 这就是(37) 因而 (36) 成立。

(33) 和(36) 用微积分的方法是不难证明的,它不过是一般二项展开式的两个特例。由于我们不假定读者具有微积分的知识,所以纯粹用初等的办法,按照形式幂级数除法的定义给出它们的证明。在证明过程中,我们还 获得了象(20),(23) 和(37) 那样有意义的组合恒等式。

现在可以用母函数方法来证明组合恒等式了。先来证明最基本的恒等式 $C_{k}^{r}=C_{k}^{r-1}$ 。前面说过

$$C_n^0$$
, C_n^1 , ..., C_n^n

的母函数是(1+x)"。那么数列

$$C_n^n, C_n^{n-1}, \cdots, C_n^n$$

的母函数又是什么?按照定义,它的母函数是

$$C_{n}^{n} + C_{n}^{n-1}x + \dots + C_{n}^{n-k}x^{k} + \dots + C_{n}^{0}x^{n}$$

$$= x^{n} \left(C_{n}^{n} \frac{1}{x^{n}} + C_{n}^{n-1} \frac{1}{x^{n-1}} + \dots + C_{n}^{0} \right)$$

$$= x^{n} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{n} = (1 + x)^{n}.$$

这说明二者具有相同的母函数,因而这两个数列也是相同的,即 $C_n^*=C_n^{*-*}$, k=0, $1,\cdots,n$.

从上面的证明过程可以看出,应用母函数来证明组合但等式的基本思想是证明恒等式两端的数列具有相同的母函数.

例 19 证明
$$\sum_{k=0}^{n} (C_{n}^{k})^{2} = C_{2}^{n}$$
.

证 因为
$$(1+x)$$
" = $\sum_{k=0}^{n} C_{k}^{k}x^{k}$,所以 28

$$(1+x)^{2n} = \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k\right) \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k\right).$$

这个乘积中x*的系数为

$$\sum_{k=0}^{n} C_{n}^{k} C_{n}^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} (C_{n}^{k})^{2},$$

"但从展开式 $(1+x)^2$ " = $\sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k x^k$ 知道x"的系数为 C_{2n}^n 因而**得**

$$\sum_{k=0}^{n} (C_{n}^{k})^{2} = C_{2n}^{n}.$$

例 20 证明

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} (C_{n}^{k})^{2} = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} C_{n}^{\frac{n}{2}}, \text{ 如果 n 是偶数,} \\ 0, \text{如果 n 是奇数.} \end{cases}$$

证 根据二项式定理得

$$(1-x^2)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k x^{2k}. \tag{38}$$

另一方面

$$(1-x^{2})^{n} = (1-x)^{n} (1+x)^{n} = \left(\sum_{k=0}^{n} C_{n}^{k} x^{k}\right) \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} C_{n}^{k} x^{k}\right).$$
(39)

比较(38), (39) 中 x², 的系数得

$$\sum_{k=0}^{2r} (-1)^k C_n^k C_n^{2r-k} = (-1)^r C_n^r. \tag{40}$$

比较 x21+1 的系数得

$$\sum_{k=0}^{2r+1} (-1)^k C_n^k C_n^{2r+1-k} = 0. \tag{41}$$

如果 n 是偶数, 在 (40) 中取 $r = \frac{n}{2}$ 就得

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} (C_{n}^{k})^{2} = (-1)^{\frac{n}{2}} C_{n}^{\frac{n}{2}}.$$

如果 n 是奇数, 在(41) 中取 $r = \frac{n-1}{2}$ 得

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} (C_{n}^{k})^{2} = 0.$$

这就是要证明的结果。

这个恒等式也可分成下面两个来写:

$$\sum_{k=0}^{2^n} (-1)^k (C_{2n}^k)^2 = (-1)^n C_{2n}^n,$$

$$\sum_{k=0}^{2^{n+1}} (-1)^k (C_{2^{n+1}}^k)^2 = 0.$$

例 21 证明
$$\sum_{k=0}^{n} C_{p+k}^{p} C_{q+n-k}^{q} = C_{p+q+n+1}^{p+q+1}$$
 (42)

证 由例16知道,

$$\frac{1}{(1-x)^{p+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{p+k}^{p} x^{k}, \frac{1}{(1-x)^{q+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{q+k}^{q} x^{k},$$

所以

$$\frac{1}{(1-x)^{p+1}} \frac{1}{(1-x)^{q+1}} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} C_{p+k}^{p} x^{k}\right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} C_{q+k}^{q} x^{k}\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}C_{p+k}^{p}C_{q+n-k}^{q}\right)x^{n},\qquad (43)$$

另一方面

$$\frac{1}{(1-x)^{p+q+2}} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{p+q+n+1}^{p+q+1} x^{n}, \qquad (44)$$

比较 (43) 和 (44) 即得 (42) .

例 22 证明
$$\sum_{k=0}^{q} C_n^k C_m^{q-k} = C_{m+n}^q$$
. (45)

证 证明很简单,因为 $\{C_{k}^{k}\}$, $\{C_{k}^{k}\}$ 的母函数分别为 $(1+x)^{*}$ 和 $(1+x)^{*}$, 而 $\sum_{k=0}^{q} C_{k}^{k} C_{k}^{q-k}$ 是这两个母函数乘积 $(1+x)^{*}(1+x)^{*}=(1+x)^{**}$ 的 x^{q} 的 x^{q} 的 x^{q} 。 而 $(1+x)^{**}$ 的 x^{q}

 $(1+x)^*(1+x)^* = (1+x)^{***}$ 的 x^* 的系数,而 $(1+x)^{***}$ 的 x^* 的系数是 C_{n+*}^{α} ,因而两者相等,即 (45) 成立。

(45) 称为范德蒙公式,它在证明某些恒等式时很有用,它的主要作用是把 C_{m+n}^{a} 分解成一个和式,使证明得以简化。

例 23 证明
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} C_{n}^{k} C_{m+k}^{q} = (-1)^{n} C_{m}^{q-n}$$
.

证 利用范德蒙公式把C2+k分解为

$$C_{m+k}^q = \sum_{l=0}^q C_k^l C_m^{q-l},$$

利用例5的结果得

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} C_{n}^{k} C_{m+k}^{q} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} C_{n}^{k} \sum_{l=0}^{q} C_{k}^{l} C_{m}^{q-l}$$

$$=\sum_{l=0}^{q} C_{m}^{q-l} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} C_{n}^{k} C_{k}^{l} = \sum_{l=0}^{q} C_{m}^{q-l} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k} C_{n}^{k} C_{k}^{l}$$

$$=\sum_{l=0}^{q} C_m^{q-l} (-1)^{l} \delta_{ln} = (-1)^{n} C_m^{q-n}$$

例 24 证明
$$\sum_{k=0}^{n} C_{2k}^{k} C_{2n-2k}^{n-k} = 2^{2n}$$
.

证 由 (36) 知道

$$\frac{1}{\sqrt{1-4x}} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{2k}^{k} x^{k}.$$

两边平方得

$$\frac{1}{1-4x} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} C_{2k}^{k} C_{2n-2k}^{u-k} \right) x^{n}.$$

另一方面
$$\frac{1}{1-4x} = \sum_{n=0}^{\infty} (4x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{2^n} x^n$$
,比较两边 x^n 的系

数,即得所要证的等式。

在例 9 中我们证明了恒等式

(9)·

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^{i} 2^{2n-2i} C_{2n-i+1}^{i} = n+1.$$

作指标变换n-1=k,上式可写为

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} 2^{2k} C_{n+k+1}^{2k+1} = n+1. \tag{46}$$

(9)和(46)是等价的。现在用母函数的思想来证明(46),为此命

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} (2-x)^{n+k+1} x^{k}.$$

我们来研究 f(x) 中 x" 的系数。首先,由二项式定理,

$$(2-x)^{n+k+1} = \sum_{l=0}^{n+k+1} C_{n+k+1}^{l} 2^{l} (-x)^{n+k+1-l}$$

$$(2-x)^{n+k+1}x^{k} = \sum_{l=0}^{n+k+1} C_{n+k+1}^{l} 2^{l} (-1)^{n+k+1-l} x^{n+2k+1-l}.$$

在这个和式中,只有当l=2k+1时才出现 x^n 的项 $C_{xx}^{2k+1}, 2^{2k+1}(-1)^{n-k}x^n$ 。

所以f(x)中 x^* 的系数为

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} 2^{2k+1} C_{n+k+1}^{2k+1} = 2 \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} 2^{2k} C_{n+k+1}^{2k+1}$$

另一方面,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} (2-x)^{n+k+1} x^{k} = (2-x)^{n+1} \sum_{k=0}^{n} (2x-x^{2})^{k}$$

$$= (2-x)^{n+1} \frac{1-(2x-x^{2})^{n+1}}{1-2x+x^{2}}$$

$$= \frac{(2-x)^{n+1}}{(1-x)^{2}} - \frac{x^{n+1}(2-x)^{2}}{(1-x)^{2}}$$

先看第一项,因为

$$(2-x)^{n+1} = [1+(1-x)]^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^{k} (1-x)^{k},$$

所以

$$\frac{(2-x)^{n+1}}{(1-x)^{2}} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^{k} (1-x)^{k-2} = C_{n+1}^{0} (1-x)^{-2}$$

$$+ C_{n+1}^{1} (1-x)^{-1} + C_{n+1}^{2} + C_{n+1}^{3} (1-x)$$

$$+ \cdots + C_{n+1}^{n+1} (1-x)^{n-2}$$

显然,上面的和式从第三项起都不能产生 x" 的项,而 第一项 x" 的系数是 n+1,第二项 x" 的系数也是 n+1。这 说 明 $\frac{(2-x)^{n+1}}{(1-x)^2}$ 中 x" 的系数是 2(n+1)。用同样的方法不难 证

明 (47) 的第二项中不含 x" 的项,因而 f(x) 中 x" 的 系 数 是 2(n+1)。由此即得 (46)。

这个证明的困难之处在于构造与问题相适应的函数 f(x),上面的例子提供了一种构造方法.

用母函数方法证明组合恒等式的另一种想法是这样的: 把恒等式的某一端看成一个数列 $\{a_x\}$,设法算出 $\{a_x\}$ 所对应的母函数f(x),再把f(x)展开成形式幂级数,它的 x^* 项的系数就是 a_x 的值。下面先看一个例子。

例 25 计算
$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_{k-k}^k$$
 这里[x]表示 x 的整数部分。

解 记
$$a_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_{n-k}^k$$
,我们设法求出 a_n 所对应的母函

数. 先证明 a. 满足下面的递推关系:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad n = 2, 3, \cdots$$
 (48)

设 n 为偶数, n=2m, 则 $\left[\frac{n-1}{2}\right] = \left[\frac{n-2}{2}\right] = m-1$. 利

用基本恒等式(2), a. 可写为

$$a_{n} = \sum_{k=0}^{m} C_{2m-k}^{k} = C_{2m}^{0} + \sum_{k=1}^{m-1} C_{2m-k-1}^{k} + \sum_{k=1}^{m-1} C_{2m-k-1}^{k-1} + C_{m-k}^{m}$$

$$(49)_{3}$$

(49) 的前两项的和为

$$\sum_{k=0}^{m-1} C_{2m-k-1}^{k} = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_{n-1-k}^{k} = a_{n-1},$$

后两项的和为

$$\sum_{k=1}^{m-1} C_{2m-k-1}^{k-1} + C_{m-1}^{m-1} = \sum_{l=0}^{m-2} C_{2m-l-2}^{l} + C_{m-1}^{m-1} = \sum_{l=0}^{m-1} C_{2m-l-2}^{l}$$

$$= \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{m-2}{2} \rfloor} C_{n-2-l}^{l} = a_{n-2},$$

代入 (49) 即知 (48) 成立。n为奇数的情形也可同样证。明。从a。的表达式可以直接看出a。 $=a_1=1$ 。设a。的母函数为f(x),则有

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^2 + \dots,$$

$$-xf(x) = -a_0 x - a_1 x^2 - \dots - a_{n-1} x^n - \dots,$$

$$-x^2 f(x) = -a_0 x^2 - \dots - a_{n-2} x^n - \dots,$$

把这三个式子加起来,注意到 $a_n-a_{n-1}-a_{n-2}=0$ 以及 $a_0=a_1=1$, 得

$$(1-x-x^2)f(x) = a_0 + (a_1-a_0)x + (a_2-a_1-a_0)x^2 + \cdots + (a_n-a_{n-1}-a_{n-2})x^n + \cdots = 1,$$

因而有

$$f(x) = \frac{1}{1-x-x^2},$$

这就是数列 a. 的母函数. 剩下的问题是把它展开为形式幂级数. 容易验证,

$$\frac{1}{1-x-x^2} = \frac{1}{r_2-r_1} \left(\frac{1}{x-r_1} - \frac{1}{x-r_2} \right). \quad (50)$$

其中 r_1 , r_2 是二次方程 $1-x-x^2=0$ 的两个根。

$$r_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \quad r_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

把 (50) 改写为

$$\frac{1}{1-x-x^2} = \frac{1}{r_2-r_1} \left\{ \frac{1}{r_2(1-\frac{1}{r_2}x)} - \frac{1}{r_1(1-\frac{1}{r_1}x)} \right\},$$

从(30)可得

$$\frac{1}{1-\frac{1}{r_2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r_2^n} x^n, \quad \frac{1}{1-\frac{1}{r_1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r_1^n} x^n,$$

代入上式得

$$\frac{1}{1-x-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{r_2-r_1} \left(\frac{1}{r_2^{n+1}} - \frac{1}{r_1^{n+1}} \right) \right\} x^n.$$

庄此即得

$$a_n = \frac{1}{r_2 - r_1} \left(\frac{1}{r_2^{n+1}} - \frac{1}{r_1^{n+1}} \right) = \frac{1}{(r_1 r_2)^{n+1}} \frac{r_1^{n+1} - r_2^{n+1}}{r_2 - r_1}$$
(51)

但
$$r_1 r_2 = -1$$
, $r_2 - r_1 = -\sqrt{5}$, 而
$$r_1^{n+1} - r_2^{n+1} = (-1)^{n+2} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right\}$$

代入(51),就得下面的恒等式

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_{n-k}^{k} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right\}. \quad (52).$$

这就是要算的结果。

这样一个恒等式用其它方法是不易得到的。现在可以进一步推广我们的结果。

例 26 计算
$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_{n-k}^k r^k$$
.
$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_{n-k}^k r^k, \ \,$$
 容易看出 $b_0 = b_1 = 1$,用和例

25相同的办法,可以证明

$$b_n = b_{n-1} + rb_{n-2}, n = 2, 3, \cdots$$

设 $\{b_n\}$ 的母函数是g(x),那么

$$g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n + \dots,$$

$$-xg(x) = -b_0 x - b_1 x^2 - \dots - b_{n-1} x^n - \dots,$$

$$-rx^2 g(x) = -rb_0 x^2 - \dots - rb_{n-2} x^n - \dots,$$

三式相加得 $(1-x-rx^2)g(x)=1$, 这里我们已经利用了 b. 的递推关系式以及条件 b. = b1 = 1. 于是

$$g(x) = \frac{1}{1-x-rx^2},$$

用和例 25 同样的方法把它展开成形式幂级数即得

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_{n-k}^{k} r^{k} = \frac{1}{2^{n+1} \sqrt{1+4r}} \left\{ (1+\sqrt{1+4r})^{n+1} - (1-\sqrt{1+4r})^{n+1} \right\}.$$
 (53)

当r=1时,从(53)就得到(52)。在(53)中分别取r= 2 和 r = 6,就分别得到

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_{n-k}^{k} 2^{k} = \frac{1}{3} (2^{n+1} + (-1)^{n}), \qquad (54)$$

$$\sum_{k=0}^{3} C_{n-k}^{k} 6^{k} = \frac{1}{5} (3^{n+1} + (-1)^{n} 2^{n+1}). \tag{55}$$

在 (53) 中取 r=-1, 这时 (53) 的右端等于

$$\frac{1}{\sqrt{3}i} \left\{ \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2} \right)^{n+1} \right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}i} \left\{ \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)^{n+1} - \left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right)^{n+1} \right\}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{n+1}{3} \pi,$$

最后一个等式利用了棣莫佛公式。这样从(53)又得到一个新的组合恒等式

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^{k} C_{n-k}^{k} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{n+1}{3} \pi.$$
 (56)

例 27 证明恒等式

$$\sum_{k=0}^{n-1} (C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^k) (C_n^{k+1} + C_n^{k+2} + \dots + C_n^n)$$

$$=\frac{n}{2}C_{2}^{n}. \tag{57}$$

证 记 (57) 的左端为 a_{*-1} , $d_{*} = C_{*}^{0} + C_{*}^{1} + \cdots + C_{*}^{1}$,

则

$$C_n^{k+1} + C_n^{k+2} + \dots + C_n^n = C_n^{n-k-1} + C_n^{n-k-2} + \dots + C_n^n$$

$$= d_{n-k-1},$$

于是 $a_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} d_k d_{n-k-1}$. 如果 d_k 的母函数是f(x),即

 $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} d_i x^i$,那么根据形式幂级数的乘法规则,

38
$$f^{2}(s) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{i} d_{k}d_{i-k} \right) x^{i},$$

由此可见 a_{n-1} 是 f'(x) 的展开式中 x''^{-1} 的系数。因为 C_n^0, C_n^1, \cdots 的母函数是 $(1+x)^n$,由例14知道 $C_n^0, C_n^0 + C_n^1, C_n^0 + C_n^1 + C_n^2, \cdots$

的母函数是(1+x)* $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{(1+x)^k}{1-x}$; 即d, 的母函数

$$f(x)=\frac{(1+x)^{n}}{1-x},$$

而 a_{n-1} 便是 $\int_{-1}^{2} (x) = \frac{(1+x)^{2}}{(1-x)^{2}}$ 展开式中 x^{n-1} 的系数。由例16知道,

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k,$$

而 $(1+x)^{2} = \sum_{k=0}^{2n} C_{2,k}^{k}$,因而

$$\frac{(1+x)^{\frac{2}{n}}}{(1-x)^{\frac{2}{n}}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{k} C_{2n}^{l} (k-l+1) \right) x^{n},$$

以所x***的系数为

$$a_{n-1} = \sum_{l=0}^{n-1} C_{2n}^{l} (n-l), \qquad (58)$$

由例2和第1节的习题11知道

$$\sum_{k=0}^{n} C_{2n}^{k} = 2^{2n-1} + \frac{1}{2} C_{2n}^{n}, \quad \sum_{k=0}^{n} k C_{2n}^{k} = n2^{2n-1},$$

代入 (58) 即得

$$a_{n-1} = n \sum_{l=0}^{n-1} C_{2n}^{l} - \sum_{l=0}^{n-1} l C_{2n}^{l}$$

$$= n \left(\sum_{i=0}^{n} C_{2n}^{i} - C_{2n}^{n} \right) - \sum_{i=0}^{n} i C_{2n}^{i} + n C_{2n}^{n}$$

$$= n \left(2^{2n-1} + \frac{1}{2} C_{2n}^{n} - C_{2n}^{n} \right) - n 2^{2n-1} + n C_{2n}^{n}$$

$$= \frac{n}{2} C_{2n}^{n}$$

这就是要证明的(57)。

这个有趣的组合恒等式是由常庚哲和单增首先提出并证明的,登载在1984年第一期≪美国数学月报≫的问题和解答栏内。

上面三个例子都是把所求的和看成一个数列,求出它的母函数后,再从母函数的展开式得到要求的和。这里的关键是找到它的母函数,而有时候这种母函数又是很难找到的。下面的例子提供了又一种寻找母函数的方法。

例 28 计算
$$\sum_{k=0}^{n-1} C_{n+k}^{2k+1}$$
.

解 记 $a_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_n^2 \zeta_k^{-1}$, 它的母函数设为 f(x), 则

 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 这里假定 $a_n = 0$. 为了求得 f(x), 我们引进另外一个和式

$$b_n = \sum_{k=0}^n C_{n+k}^{2k},$$

并记它的母函数为 g(x), 即 $g(x) = \sum b_n x^n$. 利用基本 恒 等式 (2) 可得

$$a_{n+1} = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} C_{n+1+k}^{2k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n+k}^{2k+1} + \sum_{k=0}^{n-1} C_{n+k}^{2k} + 1$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} C_{n+k}^{2k+1} + \sum_{k=0}^{n} C_{n+k}^{2k} = a_n + b_n, \qquad (59)$$

$$b_{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n} C_{n+1+k}^{2k} + 1 = 1 + \sum_{k=1}^{n} C_{n+k}^{2k} + \sum_{k=1}^{n} C_{n+k}^{2k-1} + 1,$$

对上面最后一个和式作指标变换 k=1+1, 于是

$$1 + \sum_{k=1}^{n} C_{n+k}^{2k-1} = 1 + \sum_{l=0}^{n-1} C_{n+l+1}^{2l+1} = \sum_{l=0}^{n} C_{n+1+l}^{2l+1} = a_{n+1},$$
而得

因而得

$$b_{n+1} = b_n + a_{n+1}. (60)$$

两个递推公式可得

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^{n+1} = x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_{n+1} x^{n+1} = x \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^{n+1},$$

$$\begin{cases} f(x) = xf(x) + xg(x), \\ g(x) - 1 = xg(x) + f(x). \end{cases}$$

从这关于 f(x) 和 g(x) 的联立方程组可以解得

$$f(x) = \frac{x}{1-3x+x^2}, g(x) = \frac{1-x}{1-3x+x^2}.$$

从上面的推导看出,在g(x)的帮助下,我们才求得了f(x)的表达式。现在来求f(x)的展开式。

容易知道 $x^2 - 3x + 1 = (x - \alpha)(x - \beta)$, 这里

$$\alpha=\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \quad \beta=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

所以

$$f(x) = \frac{x}{1 - 3x + x^2} = \frac{1}{\beta - \alpha} \left(\frac{-\alpha}{x - \alpha} + \frac{\beta}{x - \beta} \right)$$

$$= \frac{1}{\beta - \alpha} \left(\frac{1}{1 - \frac{x}{\alpha}} - \frac{1}{1 - \frac{x}{\beta}} \right)$$

$$= \frac{1}{\beta - \alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha^n} - \frac{1}{\beta^n} \right) x^n,$$

由此得

$$a_n = \frac{1}{\beta - \alpha} \left(\frac{1}{\alpha^n} - \frac{1}{\beta^n} \right) = \frac{1}{\beta - \alpha} \frac{\beta^n - \alpha^n}{\alpha^n \beta^n},$$

由于 $\beta - \alpha = -\sqrt{5}$, $\alpha\beta = 1$, 所以

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right\},$$

即

$$\sum_{k=0}^{n-1} C_{n+k}^{2k+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right\}.$$

这就是我们要算的值。

用同样的方法,把g(x)展开就可得b。的值。不过有一

个更简单的办法可算出

$$b_n = \sum_{k=0}^n C_{n+k}^{2k}.$$

作指标变换 k=n-1, 上式就变成

$$b_n = \sum_{l=0}^n C_{2n-l}^{2n-2l} = \sum_{l=0}^n C_{2n-l}^{l}.$$

洄想起我们在例25中已经算出

$$c_{n} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_{n-k}^{k} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right\}^{n}$$

油此立刻得到

$$b_* = c_{2*} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{2n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{2n+1} \right\}.$$

证明下列恒等式:

$$1 \cdot \sum_{k=0}^{m} C_{k+n-1}^{n-1} = C_{m+n}^{n}.$$

2.
$$\sum_{k=1}^{n} C_{n}^{k-1} C_{n}^{k} = \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}$$

3.
$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k C_m^k C_m^{2n-k} = (-1)^n C_m^n.$$

$$4 \cdot \sum_{k=0}^{n} k C_{n}^{k} C_{m}^{k} = n C_{n+m-1}^{n}.$$

5.
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} C_{n}^{k} C_{m+k}^{q+k} = (-1)^{n} C_{m}^{q+n}.$$

6.
$$\sum_{k=0}^{n} k C_{2k}^{k} C_{2n-2k}^{n-k} = n 2^{2n-1}.$$

7.
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1-2k} C_{2k}^{k} 2^{2n-2k} = C_{2n}^{n}.$$

$$8 \cdot \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} C_{n}^{k} C_{m+n-k}^{m} = \begin{cases} 1, & m=n \\ 0, & m < n. \end{cases}$$

9.
$$\sum_{k=0}^{n-1} (C_{2n}^{2k+1})^2 = \frac{1}{2} \{C_{4n}^{2n} + (-1)^{n-1} C_{2n}^n\}_{+}$$

$$\begin{bmatrix} \binom{n}{2} \\ 10 \cdot \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_{n+1}^k C_{n+1}^n C_{2n-2k}^n = n+1.$$

$$\begin{bmatrix} \frac{n}{2} \end{bmatrix}$$
11.
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} C_{n}^{k} C_{2n-2k}^{n} = 2^{n}.$$

12.
$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \left(1 - \frac{2k}{n}\right)^2 \left(C_n^k\right)^2 = \frac{1}{n} C_{2n-2}^{n-1}.$$

13。(i)若r<n,则

$$\sum_{k=q}^{r} (-1)^{k} C_{k}^{q} C_{n}^{r-k} = (-1)^{q} C_{n-q}^{r-q}$$

$$\sum_{k=q}^{r} (-1)^{k} C_{k}^{q} C_{n}^{r-k} = 0.$$

14.
$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k C_{2k}^k C_{4n-2k}^{2n-k} = 2^{2n} C_{2n}^n.$$

15.
$$\sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k C_{2k}^k C_{4n+2-2k}^{2n+1-k} = 0.$$

16.
$$\sum_{k=0}^{n} C_{2n-2k}^{n-k} C_{2k}^{k} \frac{1}{2k-1} = 0, \quad n = 1, 2, \cdots$$

17.
$$\sum_{k=0}^{n} 2^{n-k} C_{n+k}^{2k} = \frac{2^{2n+1}+1}{3}.$$

• .

3 组合变换的互逆公式

组合变换的互逆公式是计算由组合数构成的和式,和发现新的组合恒等式的重要工具。

设{a,}是一个给定的数列,命

$$b_k = \sum_{l=0}^{k} (-1)^l C_k^l a_l, \quad k = 0, 1, 2 \cdots$$
 (61)

则公式 (61) 把数列 $\{a_n\}$ 变换成一个新数列 $\{b_n\}$ 。如果把数列 $\{b_n\}$ 再经过 (61) 变换一次,所得结果如何?

为了讨论这一问题,先说明一个求和公式.设{x,,}是一个和两个指标有关的数列,考虑下面这些数的和:

$$x_{00}$$
 $+x_{10} + x_{11}$
 $+x_{20} + x_{21} + x_{22}$
 $+x_{30} + x_{31} + x_{32} + x_{33}$
 $+\cdots$
 $+x_{n0} + x_{n1} + x_{n2} + \cdots + x_{nn}$

每一行的和可写成 $\sum_{i=0}^{\infty} x_{i,i}$, k=0,1,...,n, 再把 n+1 行的和

加起来得表中所有数的和

$$S = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{k} x_{ki}.$$

当然 S 也可用另一种办法写出来。先把每一列的和写出来得 $\sum x_{s,i}$, l=0,1,...,n, 再把 n+1 列的和加起来得

$$S = \sum_{l=0}^{n} \sum_{k=l}^{n} x_{kl}.$$

因而得求和公式。

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{k} x_{ki} = \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=1}^{n} x_{ki}. \tag{62}$$

现在回到原来的问题。把 $\{b_n\}$ 经(61)再变换一次,可得

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} C_{n}^{k} b_{k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} C_{n}^{k} \left(\sum_{l=0}^{k} (-1)^{l} C_{k}^{l} a_{l} \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{k} (-1)^{k+l} C_{n}^{k} C_{k}^{l} a_{l},$$

记 $x_{k,l} = (-1)^{k+1}C_{k}^{k}C_{k}a_{l}$, 利用求和公式 (62) 和例 5 的恒等式得

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} C_{n}^{k} b_{k} = \sum_{l=0}^{n} \sum_{k=l}^{n} (-1)^{k+l} C_{n}^{k} C_{k}^{l} a_{l}$$

$$= \sum_{l=0}^{n} (-1)^{l} a_{l} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k} C_{n}^{k} C_{k}^{l}$$

$$= \sum_{l=0}^{n} (-1)^{l} a_{l} (-1)^{l} \delta_{l} = \sum_{l=0}^{n} a_{l} \delta_{l} = a_{n}.$$

上面的推导说明,把 $\{a_n\}$ 经变换 (61)变为 $\{b_n\}$,若把 $\{b_n\}$ 再经变换 (61)变换一次,则又回到了原来的 $\{a_n\}$ 。

我们得到了下面的

定理 1 设{a_n}是一个给定的数列,如果

$$b_k = \sum_{i=0}^k (-1)^i C_k^i a_i, \quad k = 0, 1, 2, \cdots, \tag{61}$$

那么

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k b_k, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$
 (63)

(61) 和 (63) 称为一对组合变换的互逆公式。

这对互逆公式的作用是可以由一个组合恒等式产生一个新的组合恒等式。

例 29 证明恒等式

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k} C_{n}^{k} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k} \right) = -\frac{1}{n}. \tag{64}$$

证 直接证明这个恒等式是比较困难的。在例 8 中我们已经证明了

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} C_n^k = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}.$$
 (8)

如果命 $a_n = 0$, $a_k = -\frac{1}{k}$, $k = 1, 2 \dots ; b_n = 0$, $b_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

$$\cdots + \frac{1}{n}$$
, $n = 1, 2 \cdots$ 那么 (8) 便可写为

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k C_n^k a_k = b_n, \quad n = 0, 1...$$

根据组合变换的互逆公式,立刻得

$$a_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k b_k, \quad n = 0, 1, \cdots$$

把a, b, 的表达式代入上式, 就得到要证明的恒等式 (64).

例 30 证明
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k (C_{m+k}^k)^{-1} = \frac{m}{n+n}$$
. (65)

证 直接证明这个等式比较困难。根据组合变换的互逆公式,如果能证明

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} C_{n}^{k} \frac{m}{m+n} = (C_{m+n}^{m})^{-1}, \qquad (66)$$

那么(65)便成立。实际上,我们在例7中已经证明(66)成立,因而根据定理1,(65)成立。

上面两个例子充分说明了组合变换的互逆公式在推导组合恒等式时的作用。从一个较简单的恒等式可以导出一个较复杂的恒等式。

现在来推广例29的结果。

例 31 证明

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k} C_{n}^{x} \left(x + \frac{x^{2}}{2} + \dots + \frac{x^{k}}{k} \right)$$

$$= \frac{-1}{n} [1 - (1 - x)^{n}]. \tag{67}$$

证 显然,当x=1时,从(67)就得到(64)。根据定理1,要证明(67),只要证明

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} C_{n}^{k} \frac{1}{k} [1 - (1-x)^{k}] = x + \frac{x^{2}}{2} + \dots + \frac{x^{n}}{n}$$
(68)

就行了。(68)的右端可以写为

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} C_{n}^{k} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} C_{n}^{k} \frac{1}{k} (1-x)^{k}$$

$$= \alpha_{n} - \beta_{n}.$$
(69)

从例8已知
$$\alpha_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} C_n^k \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$$
. 再用

证明例 8 的方法来计算 β .. 由于

$$\frac{1}{k}C_n^k = \frac{1}{k}(C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}) = \frac{1}{k}C_{n-1}^k + \frac{1}{n}C_n^k,$$

所以

$$\beta_{n} = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} C_{n}^{k} \frac{1}{k} (1-x)^{k} + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} (1-x)^{n}$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} C_{n-1}^{k} (1-x)^{k} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} C_{n}^{k} (1-x)^{k}$$

$$=\beta_{n-1}-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k}C_{n}^{k}(1-x)^{k},$$

由二项式定理,

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} C_{n}^{k} (1-x)^{k} = (1-(1-x))^{n} = x^{n},$$

因而得 β 的递推关系

$$\beta_n = \beta_{n-1} + \frac{1}{n}(1-x^n)$$

$$= \beta_{n-2} + \frac{1}{n-2} (1 - x^{n-1}) + \frac{1}{n} (1 - x^n) = \cdots$$

$$= \beta_1 + \frac{1}{2} (1 - x^2) + \cdots + \frac{1}{n} (1 - x^n)$$

$$= 1 - x + \frac{1}{2} (1 - x^2) + \cdots + \frac{1}{n} (1 - x^n)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \left(x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n}\right).$$

把 α . 和 β . 的值代入 (69) 就得到 (68). 证明完 毕. 在 (67) 中命 $\alpha = 2$, 就得到下面的恒等式:

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k} C_{n}^{k} \left(2 + \frac{2^{2}}{2} + \dots + \frac{2^{k}}{k}\right) = -\frac{1}{n} [1 - (-1)^{n}]$$

$$= \begin{cases} 0, & n = \text{ind}, \\ -\frac{2}{n}, & n = \text{frace}. \end{cases}$$

用证明定理1的方法还可导出另一组互逆公式。

定理 2 设 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 是两个给定的数列,则下面两个等式等价

$$a_{*} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} C_{n+p}^{k+p} b_{k}, \qquad (70)$$

$$b_{k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} C_{n+p}^{k+p} a_{k}, \qquad (71)$$

式中 4 是任意的非负整数。

所谓 (70) 和 (71) 等价,是指如果 (70) 成立,则 (71) 也成立,反之也然。

证 如果 (70) 成立; 我们验证 (71) 也成立、把a,的

表达式代入 (71) 的右端得

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} C_{n+p}^{k+p} a_{k} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{k} (-1)^{k+l} C_{n+p}^{k+p} C_{k+p}^{l+p} b_{l}$$

$$= \sum_{l=0}^{n} (-1)^{l} b_{l} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k} C_{n+p}^{k+p} C_{k+p}^{l+p}, \qquad (72)$$

曲于

$$C_{n+p}^{k+p}C_{k+p}^{l+p} = \frac{(n+p)_{1}}{(k+p)_{1}(n-k)_{1}} \frac{(k+p)_{1}}{(l+p)_{1}(k-l)_{1}}$$

$$= \frac{(n+p)_{1}}{n_{1}} \frac{l_{1}}{(l+p)_{1}} C_{n}^{k}C_{k}^{l},$$

把它代入(72)并应用例5的等式,即得

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} C_{n+p}^{k+p} a_{k} = \frac{(n+p)!}{n!} \sum_{l=0}^{n} (-1)^{l} b_{l} \frac{l!}{(l+p)!} \times$$

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k} C_{n}^{k} C_{k}^{l} = \frac{(n+p)_{1}}{n_{1}} \sum_{l=0}^{n} (-1)^{l} b_{l} \frac{1_{1}}{l(l+p)_{1}} \delta_{1n} (-1)^{l}$$

$$= \frac{(n+p)_{1}}{n_{1}} \frac{n_{1}}{(n+p)_{1}} b_{n} = b_{n}.$$

这就是 (71) . 用同样的方法可以从 (71) 推出 (70) . 作为定理 2 的应用,我们证明下面的恒等式:

$$\sum_{k=0}^{n} C_{n+p}^{k+p} x^{k} = \sum_{k=0}^{n} C_{p+k-1}^{k} (1+x)^{n-k}, \quad p = 1, 2, \dots$$
 (73)

在 (70), (71) 这组互逆公式中, 取 $b_* = (-1)^* \alpha^*$,

并记
$$a_*(\alpha,p) = \sum_{k=0}^n C_{n+k}^{n+k} \alpha^k$$
,于是从 (71)即得

$$\alpha^{n} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+k} C_{n+p}^{k+p} a_{k}(\alpha, p).$$

记 $a_n(\alpha,p)$ 的母函数为 $f(\alpha,p,x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\alpha,p)x^n$ 。由于

$$a_{n}(\alpha, p) = \sum_{k=0}^{n} C_{n+p}^{k+p} \alpha^{k} = \sum_{k=0}^{n} C_{n+p-1}^{k+p} \alpha^{k} + \sum_{k=0}^{n} C_{n+p-1}^{k+p-1} \alpha^{k}$$
$$= a_{n}(\alpha, p-1) + a_{n-1}(\alpha, p),$$

所以

$$(1-x)f(\alpha, p, x) = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\alpha, p)x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\alpha, p)x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\alpha, p)x^{n+1}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\alpha, p)x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}(\alpha, p)x^n$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n(\alpha, p) - a_{n-1}(\alpha, p))x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\alpha, p-1)x^n = f(\alpha, p-1, x),$$

由此不难得到

$$(1-x)^{p} f(\alpha, p, x) = (1-x)^{p-1} f(\alpha, p-1, x)$$

$$= (1-x)^{p-2} f(\alpha, p-2, x)$$

$$= \cdots = f(\alpha, 0, x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n}(\alpha, 0) x^{n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (1+\alpha)^{n} x^{n} = \frac{1}{1-(1+\alpha)x^{n}}$$

于是得

$$f(\alpha, p, x) = \frac{1}{(1-x)!} \frac{1}{1-(1+\alpha)x}$$
 (74)

从例 16 知道 $\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n-1+n}^n x^n$. 再根据形式 幂 级 数

的乘法规则

$$\frac{1}{(1-x)^{p}} \frac{1}{1-(1+\alpha)x} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} C_{p+k-1}^{k} (1+\alpha)^{n-k} \right) x^{n}.$$

比较 (74) 两端 x"的系数,即得

$$\sum_{k=0}^{n} C_{n+p}^{k+p} \alpha^{p} = \sum_{k=0}^{n} C_{p+k-1}^{k} (1+\alpha)^{n-k}$$

这就是要证明的(73)。

(73) 有一个有趣的应用。在(73) 中取x=-1,得一新恒等式

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} C_{n+p}^{k+p} = C_{p+n-1}^{n}, \qquad (75)$$

这相当于在 (70) 中取 $b_*=1$, 于是从 (71) 又得

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} C_{n+p}^{k+p} C_{p+k-1}^{k} = 1, \qquad (76)$$

这又是一个新的恒等式。 注意到

$$C_{n+p}^{k+p}C_{p+k-1}^{k} = \frac{(n+p)!}{(k+p)!(n-k)!} \frac{(p+k-1)!}{k!(p-1)!}$$

$$= C_{n}^{k}C_{n+1}^{n} \frac{p}{k+p},$$

把它代入 (76) , 又得

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} C^{k} \frac{p}{k+p} = (C^{n}_{n+p})^{-1}.$$

这是我们在例7中已经证明过的恒等式。

定理2和定理1从本质上来说没有多大差别,因为定理2可由定理1导出。下面的定理给出了一组新的互逆公式。

定理 3 设 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 是两个数列,下面两个等式等价:

$$a_{n} = \sum_{k=0}^{n} C_{n}^{k} b_{n-2k}, \qquad (77)$$

$$b_{n} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^{\frac{k}{n}} \frac{n}{n-k} C_{n-k}^{k} a_{n-2,k}. \tag{78}$$

证 我们就 $a_* = \alpha^*$ 的情形,由 (78)来推导 (77),也就是说,假定

$$b_{n}(\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k} \frac{n}{n-k} C_{n-k}^{k-1} \alpha^{n-2k}, \quad m = \left[\frac{n}{2}\right]$$

要证明

$$\alpha^{n} = \sum_{k=0}^{m} C_{n}^{k} b_{n-2k} (\alpha). \tag{79}$$

利用基本恒等式(3),可写

$$\frac{n}{n-k}C_{n-k}^{k} = \left(1 + \frac{k}{n-k}\right)C_{n-k}^{k} = C_{n-k}^{k} + C_{n-k-1}^{k-1},$$

于是

$$b_{n}(\alpha) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{\frac{k}{k}} (C_{n-k}^{k} + C_{n-k-1}^{k-1}) \alpha^{n-2k},$$

这里我们规定当 k 是负整数时 $C_{k}^{*}=0$ 。由此得

$$\alpha b_{n-1}(\alpha) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{k} (C_{n-1-k}^{k} + C_{n-2-k}^{k-1}) \alpha^{n-2k},$$

$$b_{n-2}(\alpha) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{k} (C_{n-2-k}^{k} + C_{n-3-k}^{k-1}) \alpha^{n-2-2k}$$

$$= -\sum_{k=0}^{m+1} (-1)^{k} (C_{n-1-k}^{k-1} + C_{n-2-k}^{k-2}) \alpha^{n-2k}$$

$$= -\sum_{k=0}^{m} (-1)^{k} (C_{n-1-k}^{k-1} + C_{n-2-k}^{k-2}) \alpha^{n-2k},$$

于是

$$\alpha b_{n-1}(\alpha) - b_{n-2}(\alpha) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{k} (C_{n-1-k}^{k} + C_{n-2-k}^{k-1} + C_{n-2-k}^{k-1} + C_{n-2-k}^{k-1} + C_{n-2-k}^{k-2}) \alpha^{n-2k}$$

$$= \sum_{k=0}^{m} (-1)^{k} (C_{n-k}^{k} + C_{n-k-1}^{k-1}) \alpha^{n-2k} = b_{n}(\alpha),$$

或者

$$\alpha b_n(\alpha) = b_{n+1}(\alpha) + b_{n-1}(\alpha), n = 2, 3, \cdots$$
 (80)

此外容易看出

$$b_{0}(\alpha) = 1, \ \alpha b_{0}(\alpha) = b_{1}(\alpha), \ \alpha b_{1}(\alpha) = b_{2}(\alpha) + 2b_{0}(\alpha)$$
(81)

现在设 $b_{\bullet}(\alpha)$ 的母函数为 $f(\alpha,x)$,即

$$f(\alpha, x) = b_0(\alpha) + b_1(\alpha)x + b_2(\alpha)x^2 + \dots + b_n(\alpha)x^n + \dots$$

$$-\alpha x f(\alpha, x) = -\alpha b_0(\alpha)x - \alpha b_1(\alpha)x^2 - \dots - \alpha b_{n-1}(\alpha)x^n - \dots$$

$$x^2 f(\alpha, x) = b_0(\alpha)x^2 + \dots + b_{n-2}(\alpha)x^n + \dots$$

三式相加, 根据 (80) 和 (81) 可得

$$(1-\alpha x + x^2) f(\alpha, x) = 1-x^2$$
,

或者

$$\frac{1+x^2}{1-x^2}f(\alpha,x) = \frac{1+x^2}{1-\alpha x+x^2} = \frac{1}{1-\alpha x(1+x^2)^{-1}}.$$

记 $z = x(1+x^2)^{-1}$,则

$$\frac{1+x^2}{1-x^2}f(\alpha,x) = \frac{1}{1-\alpha z} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n z^n.$$
 (82)

另一方面,从 $z = \frac{x}{1+x^2}$,可以解得

$$x^2 = \frac{x}{z} - 1$$
, $x = \frac{1 - \sqrt{1 - 4z^2}}{2z}$. (83)

于是

$$\frac{1+x^2}{1-x^2} = \frac{1+x^2}{1+x^2-2x^2} = \frac{1}{1-2xz} = \frac{1}{\sqrt{1-4z^2}}.$$

$$\ddot{\upsilon} \beta_{\bullet}(z) = \frac{1}{\sqrt{1-4z^2}} = \frac{1+x^2}{1-x^2}$$
, 那么

$$\frac{1+x^2}{1-x^2}f(\alpha,x) = \sum_{k=0}^{\infty}b_k(\alpha)\beta_0(z)x^k = \sum_{k=0}^{\infty}b_k(\alpha)\beta_k(z),$$

这里 $\beta_*(z) = \beta_*(z) x^*$,由 (83)的第一个式子可得

$$\beta_{k}(z) = \beta_{0}(z)x^{k-2}\left(\frac{x}{z}-1\right) = \frac{1}{z}\beta_{0}(z)x^{k-1} - \beta_{0}(z)x^{k-2}$$

$$= \frac{1}{z}\beta_{k-1}(z) - \beta_{k-2}(z), \qquad k = 2, 3, \dots. \tag{85}$$

而

$$\beta_{1}(z) = \beta_{0}(z)x = \beta_{0}(z)\frac{1 - \sqrt{1 - 4z^{2}}}{2z}$$

$$= \frac{1}{2z}\beta_{0}(z)\left(1 - \frac{1}{\beta_{0}(z)}\right) = \frac{1}{2z}(\beta_{0}(z) - 1).$$

由例 18 已知

$$\beta_0(z) = (1 - 4z^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n}^n z^{2n}$$
 (86)

所以

$$\beta_{1}(z) = \frac{1}{2z} \left(\sum_{k=0}^{\infty} C_{2k}^{k} z^{2k} - 1 \right) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} C_{2k}^{k} z^{2k-1}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n+2}^{n+1} z^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n+1}^{n} z^{2n+1}. \tag{87}$$

从(86)、(87)并利用(85)的递推关系,应用数学归纳法,即可证得一般的

$$\beta_{2k}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} C_{2n}^{n-k} z^{2k}, \qquad \beta_{2k+1}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} C_{2n+1}^{n-k} z^{2n+1}$$

把这些关系代入 (84) 得

$$\frac{1+x^{2}}{1-x^{2}}f(\alpha,x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{2k}(\alpha)\beta_{2k}(x) + \sum_{k=0}^{\infty} b_{2k+1}(\alpha)\beta_{2k+1}(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} C_{2n}^{n-k} z^{2n} b_{2k}(\alpha) + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} C_{2n+1}^{n-k} z^{2n+1} b_{2k+1}(\alpha)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n} \sum_{k=0}^{n} C_{2n}^{n-k} b_{2k}(\alpha) + \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n+1} \sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{n-k} b_{2k+1}(\alpha),$$

(88)

这里我们已经在 n = ∞的情况下使用了求和公式 (62). 现在比较 (82) 和 (88) 中同次幂的系数得。

$$\alpha^{2n} = \sum_{k=0}^{n} C_{2n}^{n-k} b_{2k}(\alpha) = \sum_{l=0}^{n} C_{2n}^{l} b_{2n-2l}(\alpha),$$

$$\alpha^{2n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{n-k} b_{2k+1}(\alpha) = \sum_{l=0}^{n} C_{2n+1}^{l} b_{2n-2l+1}(\alpha),$$

这两式合起来就是 (79) 。证明完毕。

这个定理的证明有一定的难度,它充分利用了母函数这一工具。当然,没有熟练的运算技巧,母函数方法是很难用上的。

现在看定理3的应用。

例 32 证明恒等式

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^{k} \frac{n}{n-k} C_{n-k}^{k} \alpha^{n-2k} \\
= \frac{1}{2^{n}} \left\{ (\alpha + \sqrt{\alpha^{2} - 4})^{n} + (\alpha - \sqrt{\alpha^{2} - 4})^{n} \right\}. \tag{89}$$

证 在定理3的证明中,

$$b_{*}(\alpha) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{k} \frac{n}{n-k} C_{n-k}^{k} \alpha^{n-2k}, \quad m = \left[\frac{n}{2}\right], \tag{90}$$

它就是 (89) 的左端。已知 b,(a)的母函数为

$$f(\alpha, x) = \frac{1 - x^2}{1 - \alpha x + x^2} = \frac{2 - \alpha x}{1 - \alpha x + x^2} - 1$$

$$= \frac{1}{1-px} + \frac{1}{1-qx} - 1,$$

这里p,q满足 $1-\alpha x+x^2=(1-px)(1-qx)$,所以 $p+q=\alpha$,pq=1。而且

$$p = \frac{1}{2} (\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4}), \quad q = \frac{1}{2} (\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4}).$$
 (91)

把 $\frac{1}{1-px}$, $\frac{1}{1-qx}$ 展开成形式幂级数,便有

$$f(\alpha, x) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} q^n x^n - 1$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (p^n + q^n) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (\alpha) x^n,$$

比较x*的系数,即得

$$b_n(\alpha) = p^n + q^n, n = 1, 2, ...$$

把 (90) 和 (91) 代入上式即得 (89) . 证毕.

在 (89) 中取 $\alpha = 2$, 得恒等式

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^{k} \frac{n}{n-k} C_{n-k}^{k} 2^{n-2k} = 2, \quad n = 1, 2, \dots, \tag{92}$$

这个等式也可直接从 (77) 和 (78) 得到: 在这组互逆 公式中取 $a_k=2^k$, k=0,1,2,...; $b_0=1$, $b_k=2$, k=1,2, 容易证明这时 (77) 成立,因而 (78) 成立,这就是 (92) 。

在 (89) 中取 $\alpha = 1$, (89) 的右端为

$$\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^* + \left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^* = 2\cos\frac{n\pi}{3},$$

于是又得恒等式

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} \frac{n}{n-k} C_{n-k}^{k} = 2\cos\frac{n\pi}{3}, \quad n=1,2,\dots.$$

(93)

在互逆公式 (77) 和 (78) 中取 $a_k = 1$, $k = 0, 1, \dots, b_0 = 1$,

$$b_k = 2\cos\frac{k\pi}{3}$$
, $k = 1, 2, \dots$ 则 当 $n = 2m + 1$ 时, 从 (77),

(78) 和 (93) 可得

$$1 = \sum_{k=0}^{m} C_{2m+1}^{k} b_{2m+1-2k}$$

$$=\sum_{k=0}^{m}C_{2m+1}^{k}2\cos\frac{\pi}{3}(2m+1-2k),$$

如果 n=2m,则有

$$1 = \sum_{k=0}^{m} C_{2m}^{k} b_{2m-2k} = \sum_{k=0}^{m-1} C_{2m}^{k} 2\cos \frac{2m-2k}{3} \pi + C_{2m}^{m}$$

或者

$$1 = 2\sum_{k=0}^{m} C_{2m}^{k} \cos \frac{2m-2k}{3} \pi - C_{2m}^{m},$$

综上所述, 我们得到等式

$$\sum_{k=0}^{n} C_{n}^{k} \cos \frac{(n-2k)\pi}{3} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & n \text{ ho box}, \\ \frac{1}{2}(1+C_{n}^{n}), & n \text{ ho box}. \end{cases}$$

(91)

从 (89) 还可得到恒等式

$$\sum_{k=9}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^k C_{n-k}^k \frac{(2\cos x)^{n-2k}}{n-k} = \frac{2}{n} \cos nx.$$

这个等式请读者自己证明。

根据上面的等式以及互逆公式(77)和(78),还可得到新的恒等式

从定理3还可推出一组新的互逆公式。

设α.,β.是满足(77), (78)的一对数列,即

$$\alpha_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \beta_{n-2k},$$

$$\beta_{n} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^{k} \frac{n}{n-k} C_{n-k}^{k} \alpha_{n-2k},$$

命
$$p_n = \frac{\alpha_n}{n}$$
, $q_n = \frac{\beta_n}{n}$, 代入上式得

$$np_{n} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_{n}^{k} (n-2k) q_{n-2k},$$

$$nq_{n} = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^{k} \frac{n}{n-k} C_{n-k}^{k} (n-2k) p_{n-2k}.$$

由于

$$\frac{n-2k}{n-k}C_{n-k}^{k} = \left(1 - \frac{k}{n-k}\right)C_{n-k}^{k} = C_{n-k}^{k} - C_{n-k-1}^{k-1} = C_{n-k-1}^{k}$$

$$= C_{n-k-1}^{k}$$

里这我们先用了基本恒等式(3),再用(2)。 这一组等式可改写为

$$p_{n} = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_{n}^{k} \frac{n-2k}{n} q_{n-2k},$$

$$q_{n} = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^{k} C_{n-k-1}^{k} p_{n-2k}.$$

或者

$$p_{n+1} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} C_{n+1}^{k} \frac{n+1-2k}{n+1} q_{n+1-2k},$$

$$\begin{bmatrix} \frac{n+1}{2} \end{bmatrix}$$

$$q_{n+1} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} (-1)^{k} C_{n-k}^{k} p_{n+1-2k}.$$

由于

$$\frac{n+1-2k}{n+1}C_{n+1}^{k} = \left(1-\frac{2k}{n+1}\right)C_{n+1}^{k} = C_{n+1}^{k} - 2C_{n}^{k-1}$$
$$= C_{n}^{k} - C_{n}^{k-1},$$

半记 $p_{*+1}=a_*$, $q_{*+1}=b_*$, 故这组等式就变为

$$a_{n} = \sum_{k=0}^{n} (C_{n}^{k} - C_{n}^{k-1}) b_{n-2k}, \qquad (95)$$

$$b_{*} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} C_{n-k}^{k} a_{*-2k}. \tag{96}$$

这是一组新的互逆公式。这里 $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ 换成 $\left[\frac{n}{2}\right]$ 是因为当

$$n=2m$$
 时, $\left[\frac{n+1}{2}\right]=\left[\frac{n}{2}\right]$, $\leq n=2m+1$ 时, $\left[\frac{n+1}{2}\right]$

这项不出现。

例 33 证明
$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(n+1-2k)^2}{[n+1-k]} C_n^k = 2^n$$
. (97)

证 在例9中我们得到了一对恒等式:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} C_{2n-k}^{k} 2^{2n-2k} = 2n+1, \qquad (14)$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} C_{2n+1-k}^{k} 2^{2n+1-2k} = 2n+2. \tag{9}$$

在 (96) 中取 $a_n = 2^n$, $b_n = n+1$, 当 n 取偶数时得到 (14), 当 n 取奇数时,得到 (9)。 这说明这样的一对 a_n , b_n 使 (96) 成立,因而 (95) 也成立,于是得

$$\begin{bmatrix} \frac{n}{2} \end{bmatrix}$$

$$2^{n} = \sum_{k=0}^{n} (C_{n}^{k} - C_{n}^{k-1}) (n+1-2k),$$

但

$$C_{n}^{k} - C_{n}^{k-1} = C_{n}^{k} - (C_{n+1}^{k} - C_{n}^{k}) = 2C_{n}^{k} - C_{n+1}^{n+1-k}$$

$$= 2C_{n}^{k} - \frac{n+1}{n+1-k} C_{n}^{n-k} = \frac{n+1-2k}{n+1-k} C_{n}^{k},$$

代入上式便得 (97)。

作为这章的结尾,我们介绍用母函数来构造互逆公式的方法。

设 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 是两个数列,它们的母函数分别为f(x)和 g(x),即

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \ g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n.$$

如果有幂级数 $h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$,使得

$$f(x) = g(x)h(x),$$

那么{a,}, {b,}, {c,}有下列关系

$$a_{n} = \sum_{k=0}^{n} c_{k} b_{n-k}. \tag{98}$$

如果 $\frac{1}{h(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^* x^n$, 由于 $g(x) = f(x) - \frac{1}{h(x)}$, 那么

$$b_{n} = \sum_{k=0}^{n} c_{k}^{*} a_{n-k}. \tag{99}$$

(98) 和 (99) 便是一对互逆公式。

例如,取
$$h(x) = \frac{1}{(1-x)^{p+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{p+n}^n x^n$$
,则

$$\frac{1}{h(x)} = (1-x)^{p+1} = \sum_{n=0}^{p+1} (-1)^n C_{p+1}^n x^n.$$

油此就得如下一对互逆公式

$$a_n = \sum_{k=0}^n C_{p+k}^k b_{n-k}, \ b_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_{p+1}^k a_{n-k}.$$
 (100)

组合变换的互逆公式在证明组合恒等式时有 重 要 的 作 用,这在本章的例中已经充分体现出来。它的作用有两个方面: 当一对等式中有一个已经被证明时,那么另外一个就是前一个的推论,无需再证明;当两个等式都未被证明,则可

选择一个较为容易的来证。

本章介绍了下面五对互逆公式:

$$\begin{cases} a_{n} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} C_{n}^{k} b_{k}, \\ b_{n} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} C_{n}^{k} a_{k}; \\ a_{n} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} C_{n+p}^{k+p} b_{k}, \\ b_{n} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} C_{n+p}^{k+p} a_{k}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{n} = \sum_{k=0}^{n} C_{n}^{k} b_{n-2k}, \\ \begin{bmatrix} \frac{n}{2} \end{bmatrix} \\ b_{n} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} \frac{n}{n-k} C_{n-k}^{k} a_{n-2k}; \\ a_{n} = \sum_{k=0}^{n} (C_{n}^{k} - C_{n}^{k-1}) b_{n-2k}, \\ \begin{bmatrix} \frac{n}{2} \end{bmatrix} \\ b_{n} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} C_{n-k}^{k} a_{n-2k}; \\ a_{n} = \sum_{k=0}^{n} C_{p+k}^{k} b_{n-k}, \\ b_{n} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} C_{p+1}^{k} a_{n-k}. \end{cases}$$

从它们得到了不少新的恒等式。构造新的互逆公式是研究组合恒等式的一个内容,这里介绍的只是其中最基本的几个。

习 题 三

证明下列恒等式:

1.
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k}}{k+1} C_{n}^{k} [(1+x)^{k+1} - 1] = (-1)^{n} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

2.
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k}}{k+1} C_{n}^{k} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{(n+1)^{2}}$$

3.
$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} C_{n}^{k} \left(x + \frac{x^{2}}{2} + \dots + \frac{x^{k}}{k} \right)$$
$$= \frac{1}{n} \left[1 - (1-x)^{n} \right].$$

4.
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} C_{n}^{k} 2^{2k} (C_{2k}^{k})^{-1} = \frac{1}{1-2n}.$$

$$5. \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} k C_{n}^{k} C_{k+n-1}^{k} = (-1)^{n} n C_{m}^{n}$$

6.
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k}}{2k+1} C_{n}^{k} (C_{2k}^{k})^{-1} 2^{2k} = \frac{1}{2n+1}.$$

7.
$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} C_n^k \sum_{l=1}^{k} \frac{1}{l} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{l} \right) = \frac{1}{n^2}.$$

$$8. \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k}}{k+1} C_{n}^{k} \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i+1} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{i+1}\right)$$

$$= \frac{1}{(n+1)^{3}}.$$

9.
$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k C_{n-k}^k 2^{n-1k} = n + 1$$

$$10. \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^k C_{n-k}^k \frac{(2\cos x)^{n-2k}}{n-k} = \frac{2}{n} \cos nx.$$

1].
$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_n^k \cos(n-2k) x = \begin{cases} 2^{n-1} \cos^n x, & n \text{ 为奇数,} \\ 2^{n-1} \cos^n x + \frac{1}{2} C_n^{\frac{n}{2}}, & n \text{ 为 } \end{cases}$$
偶数。

4 差 分 方 法

差分方法是证明某些组合恒等式时的有效方法。先引进 差分算子 Δ。

设 f(x) 为任一函数,定义差分算子 Δ 为 $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x),$

称它为f的一阶差分或f的一阶差分在x处的值。例如 $\Delta f(0) = f(1) - f(0)$, $\Delta f(0)$ 就称为f的一阶差分在x = 0处的值。

设 α 为任一常数,定义 $\alpha\Delta$ 为 $(\alpha\Delta)f(x) = \alpha\Delta f(x).$

定义 $\Delta^2 f(x) = \Delta(\Delta f(x))$, 且一般定义

 $\Delta^* f(x) = \Delta (\Delta^{n-1} f(x)), \quad (\alpha \Delta^n) f(x) = \alpha \Delta^n f(x).$

设 $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx$ "是一个n次多项式,定义 $p(\Delta) = a_0 I + a_1 \Delta + \cdots + a_n \Delta$ ",这里 I 为恒等算子,定义 为 If(x) = f(x)。 $p(\Delta)$ 对 f(x)的作用定义为

 $p(\Delta)f(\mathbf{x}) = a_0 f(\mathbf{x}) + a_1 \Delta f(\mathbf{x}) + \dots + a_n \Delta^n f(\mathbf{x}).$

定义算子 E 为 Ef(x) = f(x+1), 称为移位算 子。和 Δ 一样,定义 $E^2f(x) = E(Ef(x))$, $E^nf(x) = E(E^{n-1}f(x))$ 。 容易看出

 $E^2 f(x) = E(Ef(x)) = E(f(x+1)) = f(x+2),$ 一般有 $E^* f(x) = f(x+n).$

算子 Δ , I, E 的关系容易从下面的等式得到。 $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x) = \text{E} f(x) - \text{I} f(x) = (E-I) f(x)$,

即 $\Delta = E - I$, 或 $E = I + \Delta$ 。由此可得

$$\Delta^{*} = (E - I)^{*} = \sum_{k=0}^{n} C_{n}^{k} (-I)^{*} E^{*-k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{*} C_{n}^{k} I^{*} E^{*-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{*-k} C_{n}^{k} E^{*} I^{*-k}. \qquad (101)$$

 Δ^* 的这个表达式在讨论中十分有用。

从 △2 的定义可以得到

$$\Delta^{z} f(x) = \Delta (\Delta f(x)) = \Delta (f(x+1) - f(x)) = (f(x+2) - f(x+1)) - (f(x+1) - f(x))$$

$$= f(x+2) - 2f(x+1) + f(x),$$

 $\Delta^* f(x)$ 的一般表达式如何?

定理 4 设 f(x) 为任一函数,那么

$$\Delta^{n} f(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} C_{n}^{k} f(x+n-k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_{n}^{k} f(x+k). \qquad (102)$$

证 利用 (101) 中Δ°的两种不同的表示,即得

$$\Delta^{*} f(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} C_{n}^{k} E^{*-k} I^{k}\right) f(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} C_{n}^{k} E^{*-k} I^{k} f(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} C_{n}^{k} E^{*-k} f(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} C_{n}^{k} f(x+n-k),$$

$$\Delta^{n} f(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_{n}^{k} E^{k} I^{n-k}\right) f(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_{n}^{k} E^{k} I^{n-k} f(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_{n}^{k} f(x+k).$$

证明完毕.

特别, 取 x = 0 或 x = 1 就得

$$\Delta^{n} f(0) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} C_{n}^{k} f(n-k) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_{n}^{k} f(k),$$

$$\Delta^{n} f(1) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} C_{n}^{k} f(1+n-k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_{n}^{k} f(k+1).$$

定理 5 设 f(x) 为任一函数, 那么

$$f(x+n) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \Delta^k f(x). \qquad (103)$$

证 把定理 4 的等式写为

$$(-1)^* \Delta^* f(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k f(x+k),$$

在互逆公式 (61) 和 (63) 中 取 $a_* = f(x+k)$, $b_* = (-1)^* \Delta^* f(x)$ 即得

$$f(x+n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} C_{n}^{k} (-1)^{k} \Delta^{k} f(x) = \sum_{k=0}^{n} C_{n}^{k} \Delta^{k} f(x).$$

这就是 (103) .

例 34 证明: 当 n > k 时, $\Delta^n x^k = 0$, $\Delta^n x^n = n!$ 证 按照一阶差分的定义,

$$\Delta x^{k} = (x+1)^{k} - x^{k} = 1 + C_{k}^{1}x + \dots + C_{k}^{k-1}x^{k-1} + x^{k}$$
$$-x^{k} = kx^{k-1} + \dots + kx + 1.$$

这说明 x^* 的一阶差分 Δx^* 是一个k-1次多项 式,照此 推论 $\Delta(\Delta x^*) = \Delta^2 x^*$ 是一个k-2次多项式,一直做下 去,便知 $\Delta^* x^*$ 是一个常数,因而当 n>k 时, $\Delta^* x^* = 0$ 。第二个式子容易用数学归纳法来证明。n=1 时, $\Delta x = (x+1) - x = 1$,等式成立。现设 $\Delta^* x^* = n!$,于是

$$\Delta^{n+1}x^{n+1} = \Delta^{n}(\Delta x^{n+1}) = \Delta^{n}\{(x+1)^{n+1} - x^{n}\}$$

$$= \Delta^{n}\{(n+1)x^{n} + C_{n+1}^{n-1}x^{n-1} + \dots + 1\}$$

$$= (n+1)\Delta^{n}x^{n} = (n+1)_{1},$$

这里我们已经用了刚才证明的结论:

$$\Delta^n x^{n-1} = 0$$
, $\Delta^n x^{n-2} = 0$, $\cdots \Delta^n 1 = 0$.

证明完毕。

作为 (102) 的应用, 我们证明下面的求和公式.

定理 6 设 f(x) 是任一函数,则

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(k+1) = \sum_{k=0}^{n-1} C_n^{k+1} \Delta^k f(1).$$
 (104)

证 由 (102) 得

$$\Delta^{*}f(1) = \sum_{l=0}^{k} (-1)^{k-l} C_{k}^{l} f(l+1),$$

代入 (104) 的右端,并利用求和公式 (62) 得

$$\sum_{k=0}^{n-1} C_n^{k+1} \Delta^k f(1) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{k} (-1)^{k-l} C_k^l C_n^{k+1} f(l+1)$$

$$= \sum_{l=0}^{n-1} (-1)^{l} f(l+1) \sum_{k=l}^{n-1} (-1)^{k} C_{n}^{k+1} C_{k}^{l}$$

$$= \sum_{l=0}^{n-1} (-1)^{l} f(l+1) \sum_{k=l}^{n-1} (-1)^{k} \frac{n}{k+1} C_{n-1}^{k} C_{k}^{l},$$

根据第一节习题9的恒等式

$$\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \frac{1}{k+1} C_{n-1}^k C_k^l = \frac{(-1)^l}{n},$$

上式变为

$$\sum_{k=0}^{n-1} C_n^{k+1} \Delta^k f(1) = \sum_{l=0}^{n-1} (-1)^l f(l+1) n \cdot \frac{(-1)^l}{n}$$
$$= \sum_{l=0}^{n-1} f(l+1),$$

这就是要证明的(104)。

(104) 是一个很有用的求和公式,用它可以得到自然数方幂和的计算公式。

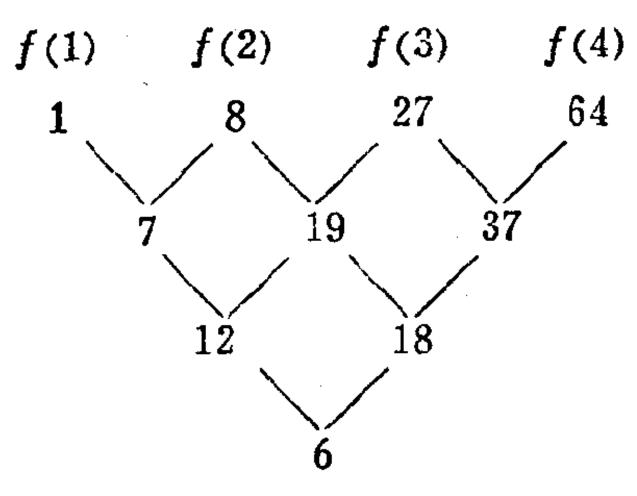
例如,取 $f(x) = x^3$,则 (104) 的左端为自然数的立方和 $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$,而右端是 $f(x) = x^3$ 的各阶差分在 x = 1处的值乘以相应的组合数的和。由例 30 知道, $\Delta^4 x^3 = \Delta^5 x^3 = \cdots = 0$,故 (104) 的右端为

 $C_{s}^{1}f(1) + C_{s}^{2}\Delta f(1) + C_{s}^{2}\Delta^{2}f(1) + C_{s}^{4}\Delta^{3}f(1)$. 不难直接算出,此时 $\Delta f(1) = 7$, $\Delta^{2}f(1) = 12$, $\Delta^{3}f(1) = 6$, 于是得求立方和的公式

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = C_n^1 + 7C_n^2 + 12C_n^2 + 6C_n^4 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$
. 这是大家熟知的公式。

这里应该提到的是如何简单地算出上述差分值。作下的

的表:

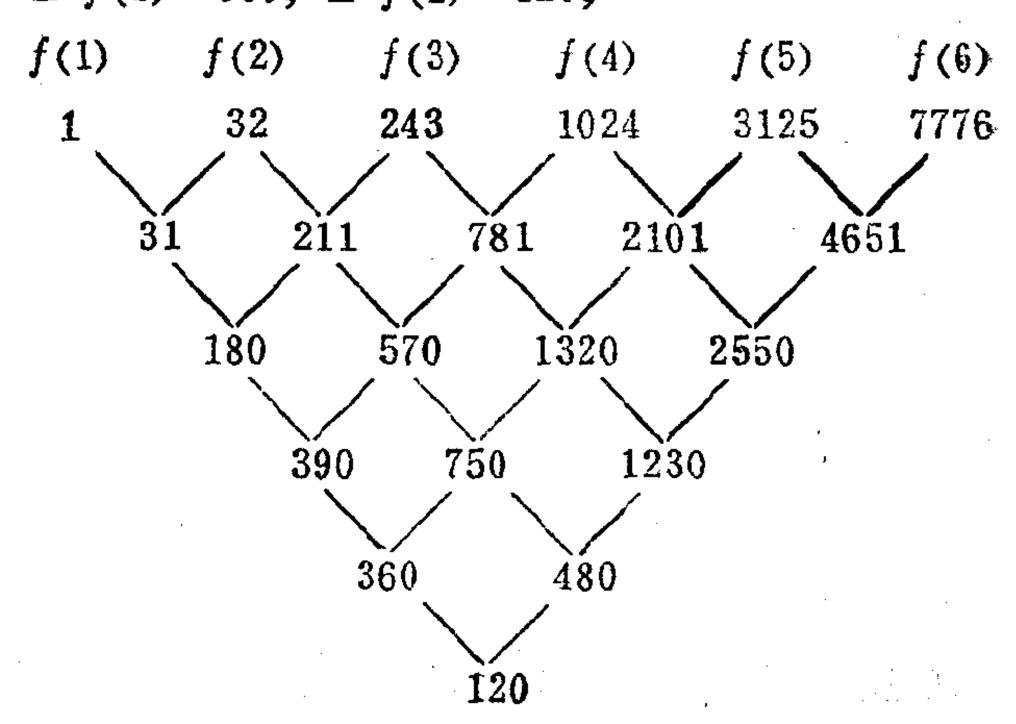


表中左边斜行1, 7, 12, 6 便 分 别 是 f(1), $\Delta f(1)$, $\Delta^{2}f(1)$, $\Delta^{3}f(1)$.

解 在 (104) 中取
$$f(x) = x^5$$
, 则由 (104) 得 $1^5 + 2^5 + \dots + n^5 = C_n^2 + C_n^2 \Delta f(1) + C_n^2 \Delta^2 f(1) + C_n^2 \Delta^3 f(1) + C_n^2 \Delta^4 f(1) + C_n^2 \Delta^5 f(1)$.

从下面的表算得

$$\Delta f(1) = 31$$
, $\Delta^2 f(1) = 180$, $\Delta^3 f(1) = 390$, $\Delta^4 f(1) = 360$, $\Delta^5 f(1) = 120$,



ģ

因而得求和公式

$$1^{5} + 2^{5} + \dots + n^{5} = C_{n}^{1} + 31C_{n}^{2} + 180C_{n}^{3} + 390C_{n}^{4} + 360C_{n}^{5} + 120C_{n}^{6}.$$

如果在 (104) 中取 $f(x) = \frac{1}{x}$, 则得

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=0}^{n-1} C_n^{k+1} \Delta^k f(1),$$

但由 (102) 和例 3 知

$$\Delta^{k} f(1) = \sum_{l=0}^{k} (-1)^{k-l} C_{k}^{l} - \frac{1}{l+l} = \frac{(-1)^{k}}{k+1},$$

代入上式得

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k} \frac{C_{n}^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} C_{n}^{k},$$

这样,我们就再一次得到例8中已经得到的恒等式。

例 36 证明

$$\sum_{k=1}^{n} C_{n}^{k} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k} \right) = 1 + \frac{1}{2^{2}} + \dots + \frac{1}{n^{2}}.$$
(105)

证 在 (104) 中取 $f(x) = \frac{1}{x^2}$, 则有

$$1 + \frac{1}{2^{2}} + \cdots + \frac{1}{n^{2}} = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n}^{k+1} \Delta^{k} f(1),$$

但由(102)和第一节的习题7知,

$$\Delta^{*}f(1) = \sum_{l=0}^{k} (-1)^{k-l} C_{k}^{l} \frac{1}{(1+l)^{2}}$$

$$=\frac{(-1)^{k}}{k+1}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k+1}\right).$$

代入上式即得

$$1 + \frac{1}{2^{2}} + \dots + \frac{1}{n^{2}} = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n}^{k+1} \frac{(-1)^{k}}{k+1} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n} C_{n}^{k} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k}\right).$$

这就是要证明的(105)。

利用定理1的互逆公式,从(105)可得一新的恒等式:

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k} C_{n}^{k} \left(1 + \frac{1}{2^{2}} + \dots + \frac{1}{k^{2}} \right)$$

$$= -\frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right).$$

例 37 证明
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} C_{n}^{k} (x+n-k)^{n} = n!$$

证 在定理4中已经证明

$$\Delta^* f(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k f(x+n-k),$$

在上式中取 $f(x) = x^n$,由例 30 知 $\Delta^n n^n = n_1$,由此即得所要证的等式。

在上面的等式中特别取x=0,得等式

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} C_{n}^{k} (n-k)^{n} = n!$$

或者

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} C_{n}^{k} k^{n} = (-1)^{n} n!$$

定理 7 如果

$$f(n) = \sum_{k=0}^{m+n} C_{m+n}^{\gamma} g(k), \qquad (100)_{k}$$

那么

$$\Delta^* f(0) = \sum_{k=0}^m C_m^k g(k+n), \qquad (107)_k$$

反之, 若 (107) 成立, 则 (106) 也成立。

证 先设 (107) 成立,即

$$\Delta^{n} f(0) = \sum_{k=0}^{m} C_{m}^{k} g(k+n) = \sum_{k=0}^{m} C_{m}^{k} E^{k+n} g(0)$$

$$= \sum_{k=0}^{m} C_{m}^{k} E^{k} E^{n} g(0) = (I+E)^{m} E^{n} g(0)$$

$$= (-1)^{n} (I+E)^{m} \{I-(I+E)\}^{n} g(0)$$

$$= (-1)^{n} (I+E)^{m} \sum_{k=0}^{m} (-1)^{k} C_{n}^{k} (I+E)^{k} g(0)_{2},$$

或者

$$(-1)^* \Delta^* f(0) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \{ (I + E)^{m+k} g(0) \}.$$

用定理1的互逆公式就得

$$(I + E)^{m+n}g(0) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} C_{n}^{k} (-1)^{k} \Delta^{k} f(0)$$
$$= \sum_{k=0}^{n} C_{n}^{k} \Delta^{k} f(0) = f(n).$$

这里最后一个等式利用了定理5的(103)。对上式左端应用二项式定理,即得

$$f(n) = \sum_{k=0}^{m+n} C_{m+n}^k E^k g(0) = \sum_{k=0}^{m+n} C_{m+n}^k g(k).$$

这就是 (106) .

反之,设(106)成立,把(106)写成

$$f(n) = \sum_{k=0}^{m+n} C_{m+n}^k E^k g(0) = (I + E)^{m+n} g(0),$$

利用上式和 (102) 得

$$\Delta^* f(0) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k f(k) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k (I + E)^{m+k} g(0) = (-1)^n (I + E)^m \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k (I + E)^k g(0) = (-1)^n (I + E)^m (I - (I + E))^n g(0)$$

$$= (I + E)^m E^* g(0) = \sum_{k=0}^{m} C_m^k E^k g(n) = \sum_{k=0}^{m} C_m^k g(k+n)^k$$

这就是(107)。定理证毕。

如果在定理 7 中取 m=0, (106) 和 (107) 分别 变为 $f(n) = \sum_{k=0}^{m} C_{k}^{k} g(k)$ 和

$$g(n) = \Delta^n f(0) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k f(k);$$

如果取 $a_k = (-1)^k g(k)$, $b_k = f(k)$, 则上面两个等式变为

$$b_{k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} C_{n}^{k} a_{k}, \quad a_{k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} C_{n}^{k} b_{k}.$$

这就是定理1的一对互逆公式。所以定理7是定理1的推广。

设 $\{a_n\}$ 是一个给定的数列,差分算子 Δ 对数列 $\{a_n\}$ 的作用定义为

$$\Delta^2 a_n = \Delta (\Delta a_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

称它为 {a.} 的二阶差分数列.一般地定义

$$\Delta^{k}(a_{n}) = \Delta(\Delta^{k-1}a_{n}), \quad n = 0, 1, \dots,$$

称它为 {a,} 的 k 阶差分数列。

设 $\{a_*\}$ 是一个给定的数列,如果它的p阶差分数列 $\{\Delta^{\prime}a_*\}$ 不是零数列,而p+1阶差分数列 $\{\Delta^{\prime}a_*\}$ 是零数列,就称 $\{a_*\}$ 是一个p阶等差数列。

例如数列 $\{a_n\} = \{2, 4, 6, 8, \cdots\}$,它的一阶 差 分 数 列 $\{\Delta a_n\} = \{2, 2, 2, \cdots\}$ 不是零数列,而它的二 阶 差 分 数 列 $\{\Delta^2 a_n\} = \{0, 0, \cdots\}$ 是一个零数列,所以它是一阶等差数列,即普通的等差数列。

又如 $\{a_n\} = \{n^s\} = \{0, 1, 8, 27, 64, 125, 216, \cdots\}$,则 $\{\Delta a_n\} = \{1, 7, 19, 37, 61, 91, \cdots\}$, $\{\Delta^2 a_n\} = \{6, 12, 18, 24, 30, \cdots\}$, $\{\Delta^3 a_n\} = \{6, 6, 6, 6, 6, \cdots\}$, $\{\Delta^4 a_n\} = \{0, 0, 0, \cdots\}$,所以 $\{n^s\}$ 是一个三阶等差数列。

例 38 数列 {n'} 是 p 阶等差数列。

证 从例 34 知道, $\Delta'n'=p_1$,所以 $\{\Delta'n'\}$ 不是 零 数 列,而 $\Delta'^{+1}n'=0$,因而 $\{n'\}$ 是 p 阶等差数列。

从例38可得下面的定理8.

定理 8 设 $P(x) = a_0 x^p + a_1 x^{p-1} + \cdots + a_p$ 是一个p次多项式,则数列 $\{P(n)\}$ 是一个p 阶等差数列。

证 从例30容易得到

$$\Delta^{\mathfrak{p}}(n) = \Delta^{\mathfrak{p}}(a, n^{\mathfrak{p}} + a, n^{\mathfrak{p}-1} + \cdots + a^{\mathfrak{p}})$$

 $=a_0\Delta^p n^p + a_1\Delta^p n^{p-1} + \cdots + \Delta^p a_p = a_0p_1,$

而 $\Delta^{p+1}p(n)=0$, 所以 $\{p(n)\}$ 是 p 阶等差数列。

例 39 数列 $\{C_{n+p}^{n}\}$ 是p阶等差数列。

证 因为

$$C_{n+p}^{p} = \frac{(n+p)(n+p-1)\cdots(n+1)}{p!},$$

分子上共有p个n的因子相乘,因此它为n的p次多项式,而其分母是个与n无关的常数,故 C_{n+1}^n 是n的p次多项式,由定理8即知它是一个p阶等差数列。

利用定理5可得下面的定理9

 $\mathbf{\hat{c}}$ 定理 9 设 $\{a_n\}$ 是一个p 阶等差数列,那么

$$a_n = \begin{cases} \sum_{k=0}^n C_n^k \Delta^k a_0, & \text{如果 } n \leq p, \\ \sum_{k=0}^p C_n^k \Delta^k a_0, & \text{如果 } n > p. \end{cases}$$

证 定义函数 f(x), 使它满足

$$f(n) = a_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

于是由 (103) 得

$$a_{*} = f(n) = \sum_{k=0}^{n} C_{n}^{k} \Delta^{k} f(0) = \sum_{k=0}^{n} C_{n}^{k} \Delta^{k} a_{0},$$

当 n>p 时,由于 $\Delta^{p+1}a_0=\cdots=\Delta^na_0=0$,所以

$$a_n = \sum_{k=0}^{p} C_n^k \Delta^k a_0 + \sum_{k=p+1}^{n} C_n^k \Delta^k a_0 = \sum_{k=0}^{p} C_n^k \Delta^k a_0.$$

这就是要证明的。

从定理8和定理9可得定理10。

定理 $10 \{a_n\}$ 是 p 阶等差数列的充分必要条件是 a_n 是的 p 次多项式。

证 如果 a 。是 n 的 D 次 多 项 式 ,则 由 定 理 8 知 a 。是 D 阶 等 差 数 列 , 这 就 证 明 了 定 理 的 充 分 性 。 反 之 , 若 a 。是 D 阶 等 差 数 列 ,则 由 定 理 9 知 a 。是 n 的 D 次 多 项 式 。 定 理 证 毕 。

定理 11 若 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 分别为p阶和q阶等差数列,且 $p \ge q$,则

- (i) $\{\alpha a_n + \beta b_n\}$ 为 P 阶等差数列,这里 α , β 为任 意 两个常数。
 - (ii) $\{a_nb_n\}$ 为 p+q 阶等差数列。

证 由定理 10 知道, a_n , b_n 分别为 n 的 p 次和 q 次 多项式,因为 $p \geqslant q$,因此 $\alpha a_n + \beta b_n$ 便是 n 的 p 次多项式,于是由定理 10 的充分性知道 $\{\alpha a_n + \beta b_n\}$ 是 p 阶等 差数 列,这就证明了 (i)。同样道理, $a_n b_n$ 是 n 的 p+q 次多项式,所以 $\{a_n b_n\}$ 是 p+q 阶等差数列。

现在回到我们的主题上来,如果 $\{a_n\}$ 是p阶等差数列,如何计算下面两个和:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k C_n^k, \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k C_n^k.$$

定理 12 设 $\{a_k\}$ 是一个p阶等差数列,则

(i) 当 $n \ge p$ 时,有 $\sum_{k=0}^{n} a_k C_n^k = \sum_{k=0}^{p} 2^{n-k} C_n^k \Delta^k a_0$,这里 $\Delta^k a_0$ 是 $\{a_n\}$ 的 k 阶差分数列的首项。

(ii) 当
$$n > p$$
 时有 $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k C_n^k = 0$.

证 (i) 由 (103) 得

$$a_k = \sum_{l=0}^k C_k^l \Delta^l a_{\mathfrak{o}},$$

所以

$$\sum_{k=0}^{n} a_{k} C_{n}^{k} = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{l=0}^{k} C_{k}^{l} \Delta^{l} a_{n} \right) C_{n}^{k},$$

利用 (62) 的求和公式和例 6 的恒等式得

$$\sum_{k=0}^{n} a_{k} C_{n}^{k} = \sum_{l=0}^{n} \Delta^{l} a_{0} \sum_{k=1}^{n} C_{n}^{k} C_{k}^{l} = \sum_{l=0}^{n} 2^{n-l} C_{n}^{l} \Delta^{l} a_{0}$$

$$= \sum_{l=0}^{p} 2^{n-l} C_{n}^{l} \Delta^{l} a_{0} + \sum_{l=p+1}^{n} 2^{n-l} C_{n}^{l} \Delta^{l} a_{0},$$

由于{a,}是力阶等差数列,所以

$$\Delta^{p+1}a_0 = \Delta^{p+2}a_0 = \cdots = \Delta^n a_0 = 0$$

$$\sum_{i=p+1}^{n} 2^{n-i} C_n^i \Delta^i a_0 = 0,$$

即

$$\sum_{k=0}^{n} a_{k} C_{n}^{k} = \sum_{l=0}^{p} 2^{n-l} C_{n}^{l} \Delta^{l} a_{q}.$$

这就是要证明的 (i)

(ii) 因为 {a_n} 是 p 阶等差数列, 且 n>p, 故由(102) 得

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} C_{n}^{k} a_{k} = (-1)^{n} \Delta^{n} a_{0} = 0$$

定理证毕。

用这里的公式计算 $\sum_{k=0}^{r} k^2 C_k^r$ 就很简单。因为 $\{k^2\}$ 是二

阶等差数列,而且用例31中作表的方法可得 $a_0 = 0$, $\Delta a_0 = 1$, $\Delta^2 a_0 = 2$,于是从(i)可得

$$\sum_{k=0}^{n} k^{2} C_{n}^{k} = 2^{n-1} C_{n}^{1} + 2 \times 2^{n-2} C_{n}^{2} = 2^{n-2} n (n+1).$$

这是我们在例4中已经得到过的等式。

用同样的方法可以算得

$$\sum_{k=0}^{n} k^{3} C_{n}^{k} = 2^{n-1} C_{n}^{1} + 2^{n-2} \cdot 6 C_{n}^{2} + 2^{n-3} \cdot 6 C_{n}^{3}$$
$$= 2^{n-3} n^{2} (n+3)$$

例 40 设 p(x) 是一个 p(x) 多项式,则当 n>p 时有等式

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} p(k) C_{n}^{k} = 0.$$

证 因为 p(k) 是 k 的 p 次多项式,由定理 10 知道, p(k) 是 p 阶等差数列,故由定理 12 的 (ii) 即知上式成。立。

例 40 为定理 12 (ii) 的应用.

例 41 设 p_1 , …, p_r 是 r个自然数,证明 当 $n > p_1 + \dots + p_r$ 时有等式

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} C_{p_{1}+k}^{p} \cdots C_{p_{r}+k}^{p} C_{n}^{k} = 0.$$

证 由例 35 知道, C_{21+1}^{21} , ..., C_{27+1}^{27} 分别为 p_1 , ..., p_n 的等差数列。根据定理 11 的 (ii), C_{21+1}^{21} C_{22+1}^{22} ... C_{27+1}^{27} 为 $p_1+p_2+\cdots+p_n$ 阶等差数列, 再由定理 12 的

(ii) 知, 当 $n > p_1 + \cdots + p_r$, 时, 上式成立。特别, 当 $p_1 = \cdots = p_r = p$ 时, 就得等式

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} (C_{p+k}^{p})^{r} C_{n}^{k} = 0, \quad n > rp.$$

习 题 四

证明下列恒等式:

1.
$$\Delta(f(x)g(x)) = f(x+1)\Delta g(x) + g(x)\Delta f(x)$$

2.
$$\Delta^{n}(f(x)g(x)) = \sum_{k=0}^{n} C_{n}^{k} \Delta^{k} f(x+n-k) \Delta^{n-k} g(x)$$

3.
$$\Delta^{n}x^{n+1} = (n+1)!\left(x+\frac{n}{2}\right)$$

4.
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} C_{n}^{k} (x-k)^{n+1} = \left(x-\frac{n}{2}\right) (n+1)!$$

5.
$$\sum_{k=0}^{n} k^4 = C_n^1 + 15C_n^2 + 50C_n^3 + 60C_n^4 + 24C_n^5$$

$$6 \cdot \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k-1} \frac{2^{2k}}{2k-1} C_n^k (C_{2k-2}^{k-1})^{-1} = 4\left(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right)$$

7.
$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k} C_{n}^{k} \left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2k-1} \right)$$
$$= -\frac{2^{2n-2}}{2n-1} (C_{2n-2}^{n-1})^{-1}$$

$$8 \cdot \sum_{k=0}^{n} k^{4} C_{n}^{k} = C_{n}^{1} 2^{n-1} + 14 C_{n}^{2} 2^{n-2} + 36 C_{n}^{3} 2^{n-3} + 24 C_{n}^{4} 2^{n-4}$$

$$9 \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} (k+1)^{n} C_{n+1}^{k+1} = 0$$

10.
$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{k} (-1)^{l} C_{k}^{l} (l+1)^{n} = 0$$

11.
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} C_{n}^{k} C_{m-2k}^{n-1} = 0, \quad m \ge 2n$$

5 复数方法

应用复数的运算规则,有时可导出一些很有用的组合恒等式.

下面的讨论中,经常要用到 $\cos\theta + i \sin\theta$ 这种形状的复数,为方便起见,把它记为 $e^{i\theta}$,即

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta. \tag{108}$$

根据复数的乘法规则,

$$e^{i\theta} \cdot e^{i\varphi} = (\cos\theta + i\sin\theta) (\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

= $\cos(\theta + \varphi) + i\sin(\theta + \varphi) = e^{i(\theta + \varphi)}$,

所以对于 $e^{i\theta}$ 可以象普通的指数函数那样进行运算,特别有 $(e^{i\theta})^* = e^{i \cdot \theta}$.

从 (108) 我们有

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = (\cos\theta + i\sin\theta) + (\cos\theta - i\sin\theta) = 2\cos\theta,$$

$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = (\cos\theta + i\sin\theta) - (\cos\theta - i\sin\theta)$$

$$= 2i\sin\theta,$$

这是两个经常要用到的公式.

这一章中, 我们要给出下面四个和式

$$\sum_{k=0}^{n} a_k C_n^k \cos kx, \quad \sum_{k=0}^{n} a_k C_n^k \sin kx,$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} a_{k} C_{n}^{k} \cos kx, \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} a_{k} C_{n}^{k} \sin kx$$

的计算公式,这里 {a,}是一个 p 阶等差数列。

我们先从推广上一节的定理 12 着手。

定理 13 设 $\{a_i\}$ 是一个p阶等差数列,那么

$$\sum_{k=0}^{n} a_{k} C_{n}^{k} x^{k} (1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{p} C_{n}^{k} \Delta^{k} a_{0} x^{k}, n \geqslant p. \quad (109)$$

证 利用第一节习题 20 的恒等式

$$\sum_{k=1}^{n} C_{k}^{l} C_{n}^{k} x^{k} (1-x)^{n-k} = C_{n}^{l} x^{l},$$

和 a_k 的表达式 $a_k = \sum_{l=0}^k C_l \Delta^l a_0$, 即得

$$\sum_{k=0}^{n} a_{k} C_{n}^{k} x^{k} (1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{l=0}^{k} C_{k}^{l} \Delta^{l} a_{0} \right) C_{n}^{k} x^{k} (1-x)^{n-k}$$

$$= \sum_{l=0}^{n} \Delta^{l} a_{0} \sum_{k=l}^{n} C_{n}^{k} C_{k}^{l} x^{k} (1-x)^{n-k}$$

$$= \sum_{l=0}^{n} C_{n}^{l} \Delta^{l} a_{0} x^{l} = \sum_{l=0}^{p} C_{n}^{l} \Delta^{l} a_{0} x^{l}$$

这就是要证明的(109)。

如果在 (109) 中命 $x = \frac{1}{2}$, 就得

$$\sum_{k=0}^{n} a_{k} C_{n}^{k} = \sum_{k=0}^{p} 2^{n-k} C_{n}^{k} \Delta^{k} a_{n},$$

这是定理 12 中的 (i) 。 所以定理 13 是定理 12 的推广。 如果在 (109) 中取 $a_1 = k$,它是一阶等差数列, $a_0 = 0$,

 $\Delta a_0 = 1$,于是得恒等式

$$\sum_{k=0}^{n} k C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = nx_a$$

如果在 (109) 中取 $a_k = k^2$, 这时 p = 2, 簡且 $a_0 = 0$, $\Delta a_0 = 1$, $\Delta^2 a_0 = 2$, 所以有等式

$$\sum_{k=0}^{n} k^{2} C_{n}^{k} x^{k} (1-x)^{n-k} = nx(1+nx-x).$$

如果在上面的等式中取 $x=\frac{1}{3}$,又得恒等式

$$\sum_{k=0}^{n} k^{2} 2^{n-k} C_{n}^{k} = 3^{n-2} n(n+2).$$

从定理13可得

定理 14 设 $\{a_*\}$ 是一个p阶等差数 列,则 当n > p 时有等式

$$\sum_{k=0}^{n} a_{k} C_{n}^{k} t^{k} = \sum_{k=0}^{p} C_{n}^{k} t^{k} (1+t)^{n-k} \Delta^{k} a_{0}, \qquad (110)$$

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k} a_{k} C_{n}^{k} t^{k} = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{k} C_{n}^{k} t^{k} (1-t)^{n-k} \Delta^{k} a_{0}.$$

(111)

证 在等式 (109) 中, 命
$$\frac{x}{1-x} = t$$
, 则 $x = \frac{t}{1+t}$,

于是

$$x^{k}(1-x)^{*-k} = \frac{t^{k}}{(1+t)^{k}} \frac{1}{(1+t)^{*-k}} = \frac{t^{k}}{(1+t)^{n}},$$

代入 (109) 即得

$$\frac{1}{(1+t)^n} \sum_{k=0}^n a_k C_n^k t^k = \sum_{k=0}^p C_n^k \Delta^k a_0 \left(\frac{t}{1+t}\right)^k,$$

两端同乘以 (1+t)* 即得 (110) 。在 (110) 中用-t代t即得 (111) 定理证毕。

根据定理14就可导出本节开头提出的那四个和式的计算公式。

定理 15 设 $\{a_k\}$ 是一个D阶等差数列,则当n > p时有等式

$$\sum_{k=0}^{n} a_{k} C_{n}^{k} \cos kx = \sum_{k=0}^{p} C_{n}^{k} 2^{n-k} \left(\cos \frac{x}{2} \right)^{n-k} \cos \frac{n+k}{2} x \Delta^{k} a_{0},$$
(112)

$$\sum_{k=0}^{n} a_{k} C_{n}^{k} \sin kx = \sum_{k=0}^{p} C_{n}^{k} 2^{n-k} \left(\cos \frac{x}{2} \right)^{n-k} \sin \frac{n+k}{2} x \Delta^{k} a_{0},$$
(113)

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} a_{k} C_{n}^{k} \cos kx = (-1)^{n} \sum_{k=0}^{p} C_{n}^{k} 2^{n-k} \cos \frac{1}{2}.$$

$$\left[n(x+\pi)+k(x-\pi)\right]\left(\sin\frac{x}{2}\right)^{n-k}\Delta^{k}a_{0},\qquad(114)$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} a_{k} C_{n}^{k} \sin kx = (-1)^{n} \sum_{k=0}^{p} C_{n}^{k} 2^{n-k} \sin \frac{1}{2}.$$

$$[n(x+\pi)+k(x-\pi)]\left(\sin\frac{x}{2}\right)^{n-k}\Delta^k a_0 \qquad (115)$$

证 在 (110) 中命 t = e^{i*}, 由于

$$1+t=1+e^{ix}=e^{i\frac{x}{2}}\left(e^{i\frac{x}{2}}+e^{-i\frac{x}{2}}\right)=2e^{i\frac{x}{2}}\cos\frac{x}{2},$$

把它代入 (110) 得

$$\sum_{k=0}^{n} a_{k} C_{n}^{k} e^{i k x} = \sum_{k=0}^{p} C_{n}^{k} e^{i k x} 2^{n-k} e^{i (n-k)} \frac{x}{2} \left(\cos \frac{x}{2} \right)^{n-k} \Delta^{k} a_{k}$$

$$= \sum_{k=0}^{p} C_{n}^{k} 2^{n-k} e^{i (n+k)} \frac{x}{2} \left(\cos \frac{x}{2} \right)^{n-k} \Delta^{k} a_{n},$$

注意到

 $e^{ikx} = \cos kx + i\sin kx$,

$$e^{i(n+k)\frac{x}{2}} = \cos(n+k)\frac{x}{2} + i\sin(n+k)\frac{x}{2}$$

把它们代入上式,并分别取两端的实部和虚部,就得

$$\sum_{k=0}^{n} a_{k} C_{n}^{k} \cos kx = \sum_{k=0}^{p} C_{n}^{k} 2^{n-k} \cos (n+k) \frac{x}{2} \left(\cos \frac{x}{2}\right)^{n-k} \Delta^{k} a_{n},$$

$$\sum_{k=0}^{n} a_{k} C_{n}^{k} \sin kx = \sum_{k=0}^{n} C_{n}^{k} 2^{n-k} \sin (n+k) \frac{x}{2} \left(\cos \frac{x}{2}\right)^{n-k} \Delta^{n} a_{n}.$$

这就是 (112) 和 (113) .

同样,在(111)中命 $t = e^{i\pi}$,注意到 $1 - t = 1 - e^{i\pi} = -e^{i\frac{\pi}{2}} \left(e^{i\frac{\pi}{2}} - e^{-i\frac{\pi}{2}} \right) = -2ie^{i\frac{\pi}{2}} \sin \frac{x}{2},$

$$i^{n-k} = \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)^{n-k} = e^{i\frac{n-k}{2}\pi},$$

把它们代入 (111), 即得

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} a_{k} C_{n}^{k} e^{ikx} = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{k} C_{n}^{k} e^{ikx} (-1)^{n-k} 2^{n-k}.$$

$$i^{n-k}e^{i\frac{n-k}{2}x}\left(\sin\frac{x}{2}\right)^{n-k}\Delta^ka_0$$
.

$$= (-1)^{n} \sum_{k=0}^{p} C_{n}^{k} 2^{n-k} e^{i x \left(k + \frac{n-k}{2}\right)} e^{i \frac{n-k}{2} x} \left(\sin \frac{x}{2}\right)^{n-k} \Delta^{k} a_{0}$$

$$= (-1)^{n} \sum_{k=0}^{p} C_{n}^{k} 2^{n-k} e^{\frac{i}{2} [n(x+x)+k(x-n)]} \left(\sin \frac{x}{2} \right)^{n-k} \Delta^{k} a_{e,p}$$

让等式两端的实部和虚部分别相等得

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} a_{k} C_{n}^{k} \cos kx = (-1)^{n} \sum_{k=0}^{p} C_{n}^{k} 2^{n-k} \cos \frac{1}{2}.$$

$$\left[n(x+\pi) + k(x-\pi)\right] \left(\sin \frac{x}{2}\right)^{n-k} \Delta^{k} a_{0},$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} a_{k} C_{n}^{k} \sin kx = (-1)^{n} \sum_{k=0}^{p} C_{n}^{k} 2^{n-k} \sin \frac{1}{2}.$$

$$[n(x+\pi)+k(x-\pi)]\Big(\sin\frac{x}{2}\Big)^{n-k}\Delta^{k}a_{o}.$$

这就是(114)和(115)。定理证毕。

如果在定理 15 的四个等式中取 $a_k=1$, $k=0,1,\dots$, 那 $\Delta a_0=1$, $\Delta a_0=0$, $\Delta^2 a_0=0$, 因而得

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos kx = 2^n \left(\cos \frac{x}{2}\right)^n \cos \frac{n}{2}x, \qquad (116)$$

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \sin kx = 2^n \left(\cos \frac{x}{2}\right)^n \sin \frac{n}{2}x, \qquad (117)$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} C_{n}^{k} \cos kx = (-1)^{n} 2^{n} \cos \frac{n}{2} (x+\pi) \left(\sin \frac{x}{2}\right)^{n},$$
(118)

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} C_{n}^{k} \sin kx = (-1)^{n} 2^{n} \sin \frac{n}{2} (x+\pi) \left(\sin \frac{x}{2}\right)^{n}.$$
(119)

如果取 $a_k = k$, 那么 $a_o = 0$, $\Delta a_o = 1$, $\Delta^2 a_o = \cdots = 0$, 因而从(112), (113), (114), (115)又可得

$$\sum_{k=0}^{n} k C_n^k \cos kx = n2^{n-1} \left(\cos \frac{x}{2} \right)^{n-1} \cos \frac{n+1}{2} x, \qquad (120)$$

$$\sum_{k=0}^{n} k C_{n}^{k} \sin kx = n2^{n-1} \left(\cos \frac{x}{2} \right)^{n-1} \sin \frac{n+1}{2} x, \qquad (121)$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} k C_{n}^{k} \cos kx = (-1)^{n} n 2^{n-1} \cos \frac{1}{2}.$$

$$\left[(\pi+1)x + (n-1)\pi \right] \left(\sin \frac{x}{2} \right)^{n-1}, \qquad (122)$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} k C_{n}^{k} \sin kx = (-1)^{n} n 2^{n-1} \sin \frac{1}{2}.$$

$$\left[(n+1)x+(n-1)\pi\right]\left(\sin\frac{x}{2}\right)^{n-1}.$$
 (123)

如果再用定理 1 的互逆公式,那么从 (116)— (123) 这八个恒等式又可产生八个新的恒等式。例如在 (116)中命 $a_* = (-1)^* \cos kx$,则 (116)可写成

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} C_{n}^{k} a_{k} = 2^{n} \left(\cos \frac{x}{2} \right)^{n} \cos \frac{n}{2} x,$$

于是根据定理1的互逆公式,就得

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} C_{n}^{k} 2^{k} \left(\cos \frac{x}{2} \right)^{k} \cos \frac{k}{2} x = (-1)^{n} \cos nx.$$
(124)

和 (117), (118), (119) 互逆的公式分别为

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} C_{n}^{k} 2^{k} \left(\cos \frac{x}{2} \right)^{k} \sin \frac{k}{2} x = (-1)^{n} \sin nx,$$

(125)

$$\sum_{k=0}^{n} C_{n}^{k} 2^{k} \cos \frac{k}{2} (x+\pi) \left(\sin \frac{x}{2} \right)^{k} = \cos nx, \qquad (126)$$

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^k \sin \frac{k}{2} (x+\pi) \left(\sin \frac{x}{2} \right)^k = \sin nx. \tag{127}$$

要直接证明这些恒等式是相当困难的.

在上面这些恒等式中取一些特殊的x值,又可得到一系列有趣的组合恒等式。例如在(126)中命 $x = \frac{\pi}{2}$ 得

$$\sum_{k=0}^{n} 2^{k} C_{n}^{k} \cos \frac{3k\pi}{4} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{k} = \cos \frac{n\pi}{2},$$

注意到 $\cos \frac{3k\pi}{4} = (-1)^k \cos \frac{k\pi}{4}$, 得恒等式

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} 2^{\frac{k}{2}} C_{n}^{k} \cos \frac{k\pi}{4} = \cos \frac{n\pi}{2}.$$
 (128)

:若在 (127) 中取 $x = \frac{\pi}{2}$, 则得恒等式

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} 2^{\frac{k}{2}} C_n^k \sin \frac{k\pi}{4} = \sin \frac{n\pi}{2}.$$
 (129)

复数中的单位根在讨论某一类组合恒等式特别有用。我。 们知道方程

$$z^m = 1$$

有m个根,它们是

$$z = \cos \frac{2k\pi}{m} + i \sin \frac{2k\pi}{m}, k = 0, 1, \dots, m-1.$$

用我们现在的记号就是 $z=e^{\frac{2k\pi}{m}i}$, k=0,1,...,m-1. 称 $\omega_{\bullet}=e^{\frac{2k\pi}{m}i}$, (k=0,1,...,m-1) 为 m 次单位根 ω_{\bullet} 有 下列重要性质:

$$\sum_{k=0}^{m-1} \omega_k^2 = \begin{cases} m, \text{如果 s 是 m 的 倍数,} \\ 0, \text{如果 s 不是 m 的 倍数.} \end{cases}$$
 (130)

事实上,如果 s 是 m 的倍数,记 s=qm, q 是整数,则 $\omega_k' = \left(e^{\frac{2k\pi}{m}i}\right)' = e^{2kq\pi i} = \cos 2kqn + i \sin 2kq\pi = 1$,

所以 $\sum_{k=0}^{m-1} \omega_k = m$ 。如果 s 不是 m 的倍数,那么

$$\sum_{k=0}^{m-1} \omega_k^f = \sum_{k=0}^{m-1} \left(e^{\frac{2k\pi}{m}i} \right)^s = \sum_{k=0}^{m-1} \left(e^{\frac{2f\pi}{m}i} \right)^k = \frac{1 - e^{2f\pi}i}{1 - e^{\frac{2f\pi}{m}i}} = 0.$$

这就证明了 (130) .

例 42 证明

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m-r}{m} \rfloor} C_n^{r+km} x^{r+km} = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} (\omega_k)^{-r} (1+x\omega_k)^n,$$
(13)

(131)»

式中 $\omega_{n} = e^{\frac{2k\pi}{m}}$, r, m为非负整数, 且 $r \leq m$.

证 由二项式定理

$$(1 + x\omega_k)^n = \sum_{i=0}^n C_n^i x^i \omega_k^i,$$

于是 (131) 的右端为

$$\sum_{k=0}^{m-1} (\omega_k)^{-r} (1 + x\omega_k)^n = \sum_{k=0}^{m-1} (\omega_k)^{-r} \sum_{l=0}^n C_n^l x^l \omega_k^l$$

$$= \sum_{l=0}^n C_n^l x^l \sum_{k=0}^{m-1} \omega_k^{l-r},$$

根据(131),当1-r=qm时, $\sum_{k=0}^{m-1}\omega_k^{1-r}=m$,当 $1-r\neq qm$

m-1 $\sum_{k=0}^{m-1} \omega_k^{-r} = 0$, 因此上面的和式,只有当 l=r+qm 时,

对应的项才不为 0. 由于 $l=r+qm \leq n$, 即 $q \leq \frac{n-r}{m}$, 所

以当 1 从 0 变到 n 时, q 从 0 变到 $\left[\frac{n-r}{m}\right]$,于是得

$$\sum_{k=0}^{m-1} (\omega_k)^{-r} (1+x\omega_k)^n = m \sum_{q=0}^{\lfloor \frac{m-r}{m} \rfloor} C_n^{r+qm} x^{r+qm}.$$

这就是要证明的 (131).

例 43 证明当 r≤m 时,有

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m-r}{m} \rfloor} C_n^{r+k} = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \left(2\cos\frac{k\pi}{m} \right)^n \cos\frac{(n-2r)k\pi}{m}.$$
(132)

证 在 (131) 中取 x=1得

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-r}{m}\right]} C_n^{r+km} = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} (\omega_k)^{-r} (1+\omega_k)^m, \qquad (133)^{\frac{n}{2}}$$

因为

$$(\omega_{k})^{-r} (1 + \omega_{k})^{n} = e^{\frac{-2rk\pi i}{m}} \left(1 + e^{\frac{2k\pi i}{m}}\right)^{n}$$

$$= e^{\frac{-2rk\pi i}{m}} e^{\frac{k\pi \pi i}{m}} \left(e^{-\frac{k\pi i}{m}} + e^{\frac{k\pi i}{m}}\right)^{n}$$

$$= e^{\frac{k\pi i}{m} (n-2r)} 2^{n} \left(\cos\frac{k\pi}{m}\right)^{n}$$

$$= \left(2\cos\frac{k\pi}{m}\right)^{n} \left(\cos\frac{(n-2r)k\pi}{m} + i\sin\frac{(n-2r)k\pi}{m}\right)_{m}$$

所以 (133) 的右端为

$$\frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} (\omega_k)^{-r} (1 + \omega_k)^n = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \left(2\cos\frac{k\pi}{m} \right)^n \cdot \left\{ \cos\frac{(n-2r)k\pi}{m} + i\sin\frac{(n-2r)k\pi}{m} \right\}.$$

在 (133) 的两端取实部,即得

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{m-r}{m}\right]} C_n^{r+km} = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \left(2\cos\frac{k\pi}{m}\right)^n \cos\frac{(n-2r)k\pi}{m}$$

这就是等式 (132)。

在 (132) 中取 r=0, m=2 得.

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_n^{2k} = 2^{n-1}.$$

取 r = 0, m = 4 可得

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{4}\right]} C_n^{4k} = \frac{1}{4} \left(2^n + 2(\sqrt{2})^n \cos \frac{n\pi}{4}\right),$$

在上面的等式中,用4n换n又得

$$\sum_{k=0}^{n} C_{4n}^{4k} = \frac{1}{4} (2^{4n} + (-1)^{n} 2^{2n+1}).$$

此外, 若在 (132) 中分别取r=1, m=3, r=2, m=3, 又可分别得恒等式

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{3}\right]} C_n^{1+3k} = \frac{1}{3} \left(2^n + 2\cos\frac{(n-2)\pi}{3} \right),$$

$$\left[\frac{\frac{n-2}{3}}{\sum_{k=0}^{2}}\right]^{2^{n+3}k} = \frac{1}{3}\left(2^{n} + 2\cos\frac{(n-4)n}{3}\right).$$

若在 (132) 中取 r=0, m=n, 则得恒等式

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left(\cos \frac{k\pi}{n} \right)^n = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

例 44 证明下列恒等式

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-r}{m} \rfloor} C_n^{r+km} \cos(r+km) x$$

$$= \frac{2^n}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \cos\left[\frac{nx}{2} + \frac{k\pi}{m}(n-2r)\right] \cos^n\left(\frac{x}{2} + \frac{k\pi}{m}\right)$$
(134)

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m-r}{m} \rfloor} C_n^{r+km} \sin(r+km) x$$

$$2^{m-1} \int nx \, k\pi$$

$$= \frac{2^n}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \sin \left[\frac{nx}{2} + \frac{k\pi}{m} (n-2r) \right] \cos^n \left(\frac{x}{2} + \frac{k\pi}{m} \right). \tag{135}$$

证 在等式 (131) 的 x 处用 e^{i*} 代替就得

$$\sum_{k=0}^{m-1} C_n^{r+km} e^{i(r+km) \cdot x}$$

$$= \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} e^{-\frac{2kr\pi}{m}i} \left(1 + e^{i(x + \frac{2k\pi}{m})}\right)^n$$

$$= \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} e^{-\frac{2kr\pi}{m}i} e^{i\frac{\pi}{2}(x + \frac{2k\pi}{m})} \left(e^{-\frac{1}{2}(x + \frac{2k\pi}{m})} + e^{i\frac{\pi}{2}(x + \frac{2k\pi}{m})}\right)^n$$

$$= \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} e^{-\frac{2kr\pi}{m}i} e^{i\frac{\pi}{2}(x + \frac{2k\pi}{m})} e^{-\frac{1}{2}(x + \frac{2k\pi}{m}) - \frac{2kr\pi}{m}}$$

$$+ e^{i\frac{\pi}{2}(x + \frac{2k\pi}{m})} e^{-\frac{1}{2}(x + \frac{2k\pi}{m})}$$

$$\times \cos^{\frac{\pi}{2}(x + \frac{2k\pi}{m})},$$

让等式两边的实部、虚部分别相等得

$$\sum_{k=0}^{m} C_n^{r+k} \cos(r+km) x = \frac{2^n}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \cos\left[\frac{nx}{2} + \frac{k\pi}{m}(n-2r)\right]$$

$$\times \cos^n\left(\frac{x}{2} + \frac{k\pi}{m}\right),$$

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-r}{m}\rfloor} C_n^{r+km} \sin(r+km)x =$$

$$=\frac{2^{n}}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\sin\left[\frac{nx}{2}+\frac{k\pi}{m}(n-2r)\right]\cos^{n}\left(\frac{x}{2}+\frac{k\pi}{m}\right).$$

这就是 (134) 和 (135)。

如果在上式中让 r=0, 又可得

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{m} \rfloor} C_n^{km} \cos kmx$$

$$=\frac{2^{n}}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\cos n\left(\frac{x}{2}+\frac{k\pi}{m}\right)\cos^{n}\left(\frac{x}{2}+\frac{k\pi}{m}\right),\,$$

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{m} \rfloor} C_n^{km} \sin kmx$$

$$=\frac{2^n}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\sin n\left(\frac{x}{2}+\frac{k\pi}{m}\right)\cos n\left(\frac{x}{2}+\frac{k\pi}{m}\right).$$

特别,如果取m=2,则有

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_n^{2k} \cos 2kx = 2^{n-1} \left\{ \cos \frac{nx}{2} \cos \frac{nx}{2} + \cos \frac{x+\pi}{2} \left(\cos \frac{x+\pi}{2} \right)^n \right\},$$

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_n^{2k} \sin 2kx = 2^{n-1} \left\{ \sin \frac{nx}{2} \cos^n \frac{x}{2} \right\}$$

$$+\sin n\frac{x+\pi}{2}\left(\cos\frac{x+\pi}{2}\right)^n$$
.

习 题 五

证明下列恒等式

1.
$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - a\right)^{2} C_{n}^{k} x^{k} (1 - x)^{n-k} = (x - a)^{2} + \frac{x(1 - x)^{n-k}}{n}$$

$$2 \cdot \sum_{k=0}^{{\binom{n}{2}}} C_n^k \cos(n-2k) x$$

$$= \begin{cases} 2^{n-1} \cos^n x, & n \text{ 为奇数时,} \\ 2^{n-1} \cos^n x + \frac{1}{2} C_n^2, & n \text{ 为偶数时.} \end{cases}$$

$$3 \cdot \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^{k} C_{n-k}^{k} (2\cos x)^{n-2k} = \frac{\sin (n+1)x}{\sin x}$$

4.
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} k 2^{k-1} C_{n}^{k} \left(\cos \frac{x}{2} \right)^{k-1} \cos \frac{k+1}{2} x$$
$$= (-1)^{n} n \cos n x$$

$$5. \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} k 2^{k-1} C_{n}^{k} \left(\cos \frac{x}{2} \right)^{k-1} \sin \frac{k+1}{2} x$$
$$= (-1)^{n} n \sin n x.$$

6.
$$\sum_{k=0}^{n} k 2^{k-1} C_n^k \cos \frac{1}{2} \left[(k+1) x + (k-1) n \right] \left(\sin \frac{x}{2} \right)^{k-1}$$

 $= n \cos n x$.

7.
$$\sum_{k=0}^{n} k 2^{k-1} C_{n}^{k} \sin \frac{1}{2} \left[(k+1)x + (k-1)\pi \right] \left(\sin \frac{x}{2} \right)^{k-1}$$
$$= n \sin nx.$$

$$8 \cdot \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} k C_{n}^{k} 2^{k-1} \sin \frac{k+1}{4} \pi = (-1)^{n} n \sin \frac{n\pi}{2}.$$

9.
$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_n^{2k+1} \cos(2k+1) x$$

$$= 2^{n-1} \left\{ \cos^n \frac{x}{2} \cos \frac{nx}{2} - (-1)^n \sin^n \frac{x}{2} \cos \frac{n(x+n)}{2} \right\}$$

10.
$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_n^{2k+1} \sin(2k+1) x = 2^{n-1} \left\{ \cos^n \frac{x}{2} \sin \frac{nx}{2} - (-1)^n \sin^n \frac{x}{2} \sin \frac{n(\pi+x)}{2} \right\}.$$

习题解答或提示

习 题 一

- 1. 在二项式定理 $(1+x)^* = \sum_{k=0}^{\infty} C_k^k x^* 中取 x = 2 即得。$
- 2. 由基本恒等式 (3) 得 kC%=nC%=1, 所以

$$\sum_{k=0}^{n} k C_n^k = \sum_{k=1}^{n} n C_{n-1}^{k-1} = n \sum_{l=0}^{n-1} C_{n-1}^l = n 2^{n-1}.$$

- 3. 由基本恒等式(5)和上题的结果即得.
- 4. 利用基本恒等式(3)和(6)即得.
- 5. 由基本恒等式(3)得 $\frac{1}{k+1}C_{n}^{*} = \frac{1}{n+1}C_{n}^{*};$,所以

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} C_n^k x^k = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} C_{n+1}^{k+1} x^k = \frac{1}{(n+1)x} \sum_{k=0}^{n} C_{n+1}^{k+1} x^{k+1}$$

$$=\frac{1}{(n+1)x}\sum_{i=1}^{n+1}C_{n+1}^{i}x^{i}=\frac{(1+x)^{n+1}-1}{(n+1)x}.$$

注意,这是例 3 的推广,在上面的等式中分别命x=1和x=-1,就得例 3 的结果。若命x=2 就得

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{2^{k}}{k+1} C_{n}^{k} = \frac{3^{n+1}-1}{2(n+1)}$$

6. 由基本恒等式 (5) 和 (6) 知道 C:+C:+···+C:=2*, (a)

$$C_n^0 - C_n^1 + \dots + (-1)^n C_n^n = 0,$$
 (6)

如果 n 是偶数,则(b)可写为

$$C_n^0 - C_n^1 + \dots + C_n^n = 0 \tag{c}$$

(a) - (c) 即得.

$$C_n^1 + C_n^3 + \dots + C_n^{n-1} = 2^{n-1}$$

如果 n 为奇数,则(b)可写为

$$C_n^0 - C_n^1 + \dots - C_n^n = 0,$$
 (d)

(a) -(d) 得

$$C_n^1 + C_n^3 + \cdots + C_n^n = 2^{n-1}$$

这个等式可以简写为
$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} C_{k}^{2k+1} = 2^{n-1}$$
.

7. 由基本恒等式(3)和例8,即得。

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k}}{(k+1)^{2}} C_{n}^{k} = \frac{1}{n+1} \sum_{n=0}^{n} \frac{(-1)^{k}}{k+1} C_{n+1}^{k+1} =$$

$$=\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}\frac{(-1)^{i+1}}{i}C_{n+1}^{i}$$

$$=\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}\right).$$

8. 先设 n 为偶数, n = 2m, 于是根据例 11 的等式可得

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k}}{C_{n}^{k}} = \sum_{k=0}^{2m} \frac{(-1)^{k}}{C_{2n}^{k}} = 2 + \sum_{k=1}^{2m-1} \frac{(-1)^{k}}{C_{2n}^{k}} = 2$$

$$+\frac{-1}{m+1}=\frac{2m+1}{m+1}=\frac{2(n+1)}{n+2}$$

如果 n 为奇数,设 n=2m+1,则由例 10 得

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k}}{C_{n}^{k}} = \sum_{k=0}^{2m+1} \frac{(-1)^{k}}{C_{2m+1}^{k}} = \sum_{k=1}^{2m} \frac{(-1)^{k}}{C_{2m+1}^{k}}$$

$$= \frac{1}{2m+1} \sum_{k=1}^{2m} \frac{k(-1)^{k}}{C_{2m}^{k-1}}$$

$$= \frac{1}{2m+1} \sum_{l=0}^{2m-1} \frac{(l+1)(-1)^{l+1}}{C_{2m}^{l}} = 0.$$

9. 由基本恒等式(3)和例5即得。

10. 记
$$a_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_{2n-1}^k$$
, $b_n = \sum_{m=n}^{2n-1} C_{2n-1}^k$, 于是

$$a_n + b_n = \sum_{k=0}^{2n-1} C_{2n-1}^k = 2^{2n-1}$$
,但容易知道 $b_n = a_n$,所以 $a_n = 2^{2n-2}$.

11,
$$\sum_{k=0}^{n} kC_{2n}^{k} = 2n \sum_{k=1}^{n} C_{2n-1}^{k-1} = 2n \sum_{l=0}^{n-1} C_{2n-1}^{l} = n2^{2n-1}$$

12. 因为
$$\frac{1}{k}C_n^k = \frac{1}{k}C_{n-1}^k + \frac{1}{n}C_n^k$$
, 所以

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} C_n^k [1 - (1-x)^k]$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} C_{n-1}^{k} [1 - (1-x)^{k}]$$

$$+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}C_{n}^{k}[1-(1-x)^{k}]=f_{n-1}+g_{n}$$

$$\overline{m} \qquad g_n = -\frac{1}{n} \left\{ \sum_{k=1}^n (-1)^k C_n^k - \sum_{k=1}^n (-1)^k C_n^k (1-x)^k \right\}$$

$$= -\frac{1}{n} \left\{ \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} C_{n}^{k} - \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} C_{n}^{k} (1-x)^{k} \right\}$$

$$= \frac{1}{n} (1 - (1-x))^{n} = \frac{1}{n} x^{n}$$

从递推公式 $f_n = f_{n-1} + \frac{1}{n}x^n$,即得要证的等式。

13. 若记 $b_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \frac{m}{m+k}$, 则在例7中已经

证明了递推关系式

$$b_n = \frac{n}{m+n}b_{n-1}.$$

这个证明过程并不需要假定 m 是 整数. 现在取

$$m = \frac{1}{2}, \quad ||b_{n}|| = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} C_{n}^{k} \frac{1}{2k+1}, \quad ||f|||$$

$$b_{n} = \frac{n}{\frac{1}{2} + n} b_{n-1} = \frac{n(n-1)}{\left(\frac{1}{2} + n\right)\left(\frac{1}{2} + n - 1\right)} b_{n-2}$$

$$= \cdots = \frac{n!}{\left(\frac{1}{2} + n\right)\left(\frac{1}{2} + n - 1\right)\cdots\left(\frac{1}{2} + 1\right)} b_{0}$$

$$= \frac{2^{n}n!}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3} = \frac{2^{2n}(n!)^{2}}{(2n+1)(2n)!}$$

$$= \frac{2^{2n}}{2n+1} (C_{1n}^{n})^{-1}$$

14. 在上题中取 $m = -\frac{1}{2}$,用同样的递推方法即得。

15.
$$\sum_{k=0}^{n} kC_{2n+1}^{k} = (2n+1) \sum_{k=1}^{n} C_{2n}^{k-1} = (2n+1) \sum_{k=0}^{n-1} C_{2n}^{k}$$

$$= (2n+1) \left\{ \sum_{k=0}^{n} C_{2n}^{*} - C_{2n}^{*} \right\} = (2n+1) \left(2^{2n-1} - \frac{1}{2} C_{2n}^{n} \right),$$

这里已经利用了例2的结果.

16.
$$\sum_{k=0}^{n} k C_{2n}^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} (n-k) C_{2n}^{k} = n \sum_{k=0}^{n} C_{2n}^{k} - \sum_{k=0}^{n} k C_{2n}^{k}$$
$$= n \left(2^{2n-1} + \frac{1}{2} C_{2n}^{n} \right) - n 2^{2n-1} = n C_{2n-1}^{n}$$

这里用了例2和第11题的结果。

17. 和上题的证法相同。

$$\sqrt{x}a_n + b_n = \sum_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^{\nu} \sqrt{x^k} = (1 + \sqrt{x})^{2n+1},$$

$$\sqrt{x}a_n - b_n = \sum_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}(-1)^{k+1} \sqrt{x^k} = (\sqrt{x}-1)^{2n+1},$$

两式相加即得要证的等式。两式相减得

$$\sum_{k=0}^{n} C_{n+1}^{k} x^{k} = \frac{(1+\sqrt{x})^{2n+1} + (1-\sqrt{x})^{2n+1}}{2}.$$

19. 把和式写成

$$\sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^{k-1} \frac{n-k}{C_{2n}^k} = \sum_{k=1}^{k-1} (-1)^{k-1} \frac{n-k}{C_{2n}^k} + \sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^{k-1} \frac{n-k}{C_{2n}^k} = a_n + b_n,$$

对右端第二个和式作指标变换k=2n-1,于是

$$b_n = \sum_{k=n+1}^{2n-1} (-1)^{k-1} \frac{n-k}{C_{2n}^k} = \sum_{l=1}^{n-1} (-1)^{l-1} \frac{l-n}{C_{2n}^{n-l}}$$
$$= -\sum_{l=1}^{n-1} (-1)^{l-1} \frac{n-l}{C_{2n}^l} = -a_n,$$

所以 $a_n + b_n = 0$.

20. 利用基本恒等式(4),

1. 因为 $\{C_{k+n-1}^{n-1}\}$ 的母函数为 $\frac{1}{(1-x)^n}$,根据例14

$$\left\{ \sum_{k=0}^{m} C_{k+n-1}^{n-1} \right\}_{m=0,1,2...}$$

$$\left(1-x\right) \frac{1}{(1-x)^{n}} = \frac{1}{(1-x)^{n-1}},$$

即 $\sum_{k=0}^{m} C_{k+n-1}^{n-1}$ 是 $\frac{1}{(1-x)^{n-1}}$ 展开式中 x^{m} 的系数,因而得

$$\sum_{k=0}^{m} C_{k+n-1}^{n-1} = C_{n+m}^{m}$$

2. 因为
$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k$$
, $x(1+x)^n$

$$=\sum_{k=0}^{n}C_{n}^{k}x^{k+1}=\sum_{k=1}^{n+1}C_{n}^{k-1}x^{k},$$

所以x(1+x)"(1+x)"的x"的系数为

$$\sum_{k=0}^{n} C_{n}^{k-1} C_{n}^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} C_{n}^{k-1} C_{n}^{k},$$

另一方面 $x(1+x)^2$ "中x"的系数为

$$C_{2n}^{n-1} = \frac{(2n)_1}{(n-1)_1(n+1)_1},$$

所以等式成立。

- 3. 左端的和式是 $(1-x)^{n}(1+x)^{n}=(1-x^{2})^{n}$ 中 x^{2} 的 系数, 所以它等于 $(-1)^{n}C_{n}^{n}$
 - 4. 由基本恒等式 (3),

$$\sum_{k=0}^{n} k C_{n}^{k} C_{m}^{k} = n \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} C_{m}^{k} = n \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k} C_{m}^{k+1},$$

 $\{C_{n+1}^{k+1}\}$ 的毋函数是 $x^{-1}(1+x)$ ", $\{C_{n-1}^{k}\}$ 的母函数是

(1+x)ⁿ⁻¹,
$$\iiint_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k} C_{m}^{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{n-1-k} C_{m}^{k+1} \neq 0$$

$$\chi^{-1} (1 + \chi)^m (1 + \chi)^{m-1} = \chi^{-1} (1 + \chi)^{m+n-1}$$

中 x^{n-1} 的系数,因而等于 C_{n+m-1}^{n}

5. 根据范德蒙公式

$$C_{m+k}^{q+k} = \sum_{l=0}^{q+k} C_k^{l} C_m^{q+k-l},$$

于是

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} C_{n}^{k} C_{m+k}^{q+k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} C_{n}^{k} \sum_{i=0}^{q+k} C_{k}^{i} C_{m}^{q+k-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} C_{n}^{k} \sum_{i=0}^{k} C_{k}^{i} C_{m}^{q+k-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} C_{n}^{k} \sum_{j=0}^{k} C_{k}^{k-j} C_{m}^{q+j}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} C_{n}^{k} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k} C_{n}^{k} C_{k}^{j}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} C_{m}^{q+i} \sum_{k=i}^{n} (-1)^{i} \delta_{i,k} = (-1)^{n} C_{m}^{q+k}.$$

6.
$$ichtarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}, \quad \text{iff} \quad f^2(x) = \frac{1}{1-4x} = \sum_{k=0}^{\infty} 4^k x^k,$$

于是

$$f^{3}(x) = f^{2}(x)f(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} 4^{k} x^{k}\right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} C_{2k}^{k} x^{k}\right)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} C_{2k}^{k} 2^{2n-2k}\right) x^{n},$$

但用数学归纳法容易证明 $\sum_{k=0}^{n} C_{2k} 2^{2n-2k} = (2n+1)C_{2k}^{n}$ 。因

而得
$$f^*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)C_{2,n}^n x^n$$
. 由此得

$$f^{k}(x) = f^{3}(x)f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} (2k+1) C_{2k}^{k} C_{2n-2k}^{n-k} \right) x^{n}.$$

另一方面,

$$f^{4}(x) = \frac{1}{(1-4x)^{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)4^{n}x^{n},$$

比较 x"的系数,即得

$$(n+1) 4^{n} = \sum_{k=0}^{n} (2k+1) C_{2k}^{k} C_{2n-2k}^{n-k}$$

$$= 2 \sum_{k=0}^{n} k C_{2k}^{k} C_{2n-2k}^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} C_{2k}^{k} C_{2n-2k}^{n-k}$$

$$= 2 \sum_{k=0}^{\infty} k C_{2k}^{k} C_{2n-2k}^{n-k} + 4^{n},$$

由此即得

$$\sum_{k=0}^{n} k C_{2k}^{k} C_{2n-2k}^{n-k} = n2^{2n-1}.$$

7. 在 (33) 中用 -4x 代替 x, 可得

$$\sqrt{1-4x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1-2k} C_{2k}^{k} x^{k},$$

另外 $\frac{1}{1-4x} = \sum_{k=0}^{\infty} 4^k x^k$, 所以

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1-2k} C_{2k}^{k} 2^{2n-2k}$$

便是 $\frac{1}{1-4x}$ · $\sqrt{1-4x}$ = $\frac{1}{\sqrt{1-4x}}$ 的展开式中x*的系数,因

而等于 C₂"。

8. 容易看出
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} C_{n}^{k} C_{m+n-k}^{m}$$
 是

$$(1-x)^{n}\frac{1}{(1-x)^{m+1}}=(1-x)^{n-m-1}$$

中*"的系数,因而得要证的等式。

9.
$$i = a_n = \sum_{k=0}^{n-1} (C_{2n}^{2k+1})^2$$
, $b_n = \sum_{k=0}^{n} (C_{2n}^{2k})^2$,

则由例 18 和例 19 得

$$a_n + b_n = C_{+n}^{2n}, b_n - a_n = (-1)^n C_{2n}^n$$

因而得 $a_n = \frac{1}{2}$

$$a_n = \frac{1}{2} (C_{4n}^{2n} + (-1)^{n-1} C_{2n}^n).$$

10. 因为
$$(1-x^2)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k C_{n+1}^k x^{2k}$$
,

$$\frac{1}{(1-x)^{n+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{n+k}^{n} x^{k}, \quad \text{fill} \quad (1-x^{2})^{n+1} \cdot \frac{1}{(1-x)^{n+1}} +$$

x"的系数是

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^{k} C_{n+1}^{k} C_{2n-2k}^{n},$$

另一方面 $(1-x^2)^{n+1} \frac{1}{(1-x)^{n+1}} = (1+x)^{n+1}$, 它的 x^n 系

数是 n+1。故得所欲证之等式。

[
$$\frac{n}{2}$$
]
11. 和上题的做法相同, $\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k C_{2n-2k}^n$ 是

$$(1-x^2)^n \cdot \frac{1}{(1-x)^{n+1}} = (1+x)^n \frac{1}{1-x} + x^n$$
的系数,它等

于

$$C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n$$

12. 不难证明

$$\sum_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{2k}{n}\right)^{2} (C_{n}^{k})^{2} = 2 \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \left(1 - \frac{2k}{n}\right)^{2} (C_{n}^{k})^{2}.$$

而

$$\sum_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{2k}{n}\right)^{2} \left(C_{n}^{k}\right)^{2} = \sum_{k=0}^{n} \left(C_{n}^{k}\right)^{2} - \frac{4}{n} \sum_{k=0}^{n} k \left(C_{n}^{k}\right)^{2} + \frac{4}{n} \sum_{k=0}^{n} k \left(C_{$$

$$\frac{4}{n^2} \sum_{k=0}^{n} k^2 (C_n^k)^2 = a_1 + a_2 + a_3$$

由例 18 知 $a_1 = \sum_{k=0}^{\infty} (C_k^k)^2 = C_{2n}^n$, 在第 4 题中 让 m=n, 得

$$a_2 = -\frac{4}{n} \sum_{k=0}^{n} k (C_n^k)^2 = -4C_{2,n-1}^n$$

$$\sigma_3 = \frac{4}{n^2} \sum_{k=0}^{n} k^2 (C_n^k)^2 = 4 \sum_{k=1}^{n} (C_{n-1}^{k-1})^2 = 4 C_{2n-2}^{n-1}$$

所以

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \left(1 - \frac{2k}{n}\right)^{2} \left(C_{n}^{k}\right)^{2} = \frac{1}{2} \left(a_{1} + a_{2} + a_{4}\right) = \frac{1}{n} C_{2n-2}^{n-1}.$$

13. 由(1-x)*和 (1-x)-*-1 的展开式可得

$$(1-x)^{k-q-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{k} (-1)^{k-l} C_n^{k-l} C_{q+l}^{l} \right) x^{k}. \qquad (e)$$

如果 r < n,则因 $q \le r < n, n-q-1 \ge 0$,所以

$$(1-x)^{n-q-1} = \sum_{k=0}^{n-q-1} (-1)^k C_{n-q-1}^k x^k \qquad (f)$$

比较(e)和(f)的 x " 的系数得

$$\sum_{l=0}^{r-q} (-1)^{r-q-1} C_n^{r-q-1} C_{q+1}^{l} = (-1)^{r-q} C_{n-q-1}^{r-q},$$

对上式求和指标作变换q+1=k,上式可写为

$$\sum_{k=q}^{r} (-1)^{r-k} C_n^{r-k} C_k^q = (-1)^{r-q} C_{n-q-1}^{r-q},$$

两端消去 (-1)', 即得 (i)

如果 $r \ge n$, 这时 $r - q \ge n - q - 1$, 又因 $q \le n - 1$, 即 $n - q - 1 \ge 0$, 故 (f) 右端和式中最高次项为 $x^{n - q - 1}$.比较 (e) 和 (f) 中 $x^{n - q}$ 的系数即得 (ii).

14.
$$i \partial f(x) = (1-4x)^{-\frac{1}{2}}$$
, $i \partial f(-x) = (1+4x)^{-\frac{1}{2}}$,

所以
$$f(x)f(-x) = (1-4^2x^2)^{-\frac{1}{2}}$$
, 因为 $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_{2k}^k x^k$,

 $f(-x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k C_{2k}^k x^k, \quad \text{所以} f(x) f(-x) 中 x^2 \text{n} 的 系数$

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k C_{2k}^k C_{2(2n-k)}^{2n-k} = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k C_{2k}^k C_{4n-2k}^{2n-k},$$

而 $(1-4^2x^2)^{-\frac{1}{2}}$ 展开式中 x^2 "的系数是 2^2 " C_{2n} ",故等式成立。

15. 上题中 f(x)f(-x) 的展开式中 x^{2n+1} 的系数为

$$\sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k C_{2k}^k C_{4n+2-2k}^{2n+1-k},$$

而 $(1-4^2x^2)^{-\frac{1}{2}}$ 的展开式中没有 x^{2} "⁺¹ 这种项,因而上式为 0.

16. 在第7题中已经得到

$$\sqrt{1-4x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1-2k} C_{2k}^{k} x^{k},$$

所以

$$1 = \sqrt{1 - 4x} \frac{1}{\sqrt{1 - 4x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1 - 2k} C_{2k}^{k} C_{2-2k}^{n-k} \right) x^{n},$$

比较系数即得.

$$17.$$
 命 $n-k=l$, 则

$$\sum_{k=0}^{n} 2^{n-k} C_{n+k}^{2k} = \sum_{l=0}^{n} C_{2n-l}^{2n-2} 2^{l} = \sum_{l=0}^{n} C_{2n-1}^{2} 2^{l} = \frac{2^{2n+1}+1}{3}.$$

最后一个等式是利用公式(53)得到的。

习题三

1. 在习题一的第5题中取
$$a_k = (-1)^k \frac{x^k}{k+1}$$
, $b_k =$

$$\frac{(1+x)^{k+1}-1}{(k+1)x}$$
,由定理1的互逆公式即得。

2. 在习题一的第7题中取
$$a_k = \frac{1}{(k+1)^2}$$
, $b_k = \frac{1}{k+1}$
 $\times \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k+1}\right)$, 由定理 1 的互逆公式即得。

3. 在习题一的第12题中取
$$a_k = -\frac{1}{k}[1-(1-\kappa)^k]$$
,

$$b_k = x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^k}{k}$$
 再利用定理 1 的互逆公式.

4. 在习题一的第14题中取
$$a_1 = \frac{1}{1-2k}$$
, $b_1 = 2^{2k}$

- $-(C_{2*}^{c})^{-1}$, 再用定理 1 的互逆公式。
- 5. 在习题二的第4题中取 $a_k = (-)^k k C_m^k$, $b_k = k$ · C_{k+m-1}^k , 用定理1的互逆公式。
- 6. 在习题一的第13题中取 $a_k = \frac{1}{2k+1}$, $b_k = \frac{2^{2k}}{2k+1}$ -(C_{2k}^{k})⁻¹,再用定理 1 的互逆公式。

7. 如果命
$$a_k = -\frac{1}{k^2}$$
, $b_k = \sum_{l=1}^k \frac{1}{k} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{l}\right)$,

那么根据定理1的互逆公式, 所要证的恒等式等价于

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k^2} C_n^k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k} \right)$$

记上式左端为f.,则

$$f_{n} = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{\frac{k+1}{2}} \frac{1}{k} \left(\frac{1}{k} C_{n-1}^{k} + \frac{1}{n} C_{n}^{k} \right) + (-1)^{\frac{k+1}{2}} \frac{1}{n^{2}}$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{\frac{k+1}{2}} \frac{1}{k^{2}} C_{n-1}^{k} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{\frac{k+1}{2}} \frac{1}{k} C_{n}^{k}$$

$$= f_{n-1} + \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right),$$

田这递推公式,即得上面的恒等式。

8. 若取
$$a_k = \frac{1}{(k+1)^3}$$
, $b_k = \frac{1}{k+1} \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{l+1} \left(1 + \frac{1}{2}\right)$

 $+\cdots+\frac{1}{l+1}$)则由定理1的互逆公式,要证的等式等价于

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k}}{(k+1)^{3}} C_{n}^{k} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k+1}\right).$$

利用上题的等式及上题的方法即可证得上面的等式成立。

9. 在互逆公式

$$a_{k} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (C_{n}^{k} - C_{n}^{k-1}) b_{n-2k},$$

$$b_{n} = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^{k} C_{n-k}^{k} a_{n-2k}$$

中取 $a_k = 2^k$, $b_k = k+1$, 要证明等式成立, 只须证明

$$\sum_{k=0}^{m} (C_{n}^{k} - C_{n}^{k-1}) (n-2k+1) = 2^{n}, m = \left[\frac{n}{2}\right] \qquad (g)$$

事实上

$$\sum_{k=0}^{m} (C_n^{k} - C_n^{k-1}) (n-2k+1)$$

$$= (n+1)\sum_{k=0}^{m} (C_n^k - C_n^{k-1}) - 2\sum_{k=0}^{m} k(C_n^k - C_n^{k-1})$$

$$= (n+1)C_n^m - 2q_n,$$

$$|| f || q_n = \sum_{k=0}^m k C_n^k - \sum_{k=0}^m k C_n^{k-1} = \sum_{k=1}^m k C_n^k - \sum_{k=0}^{m-1} (k+1) C_n^k.$$

$$= mC_n^m - \sum_{k=0}^{m-1} C_n^k = (m+1)C_n^m - \sum_{k=0}^m C_n^k.$$

注意到等式

$$\sum_{\kappa=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_n^{\kappa} = \begin{cases} 2^{n-1}, & n \text{ 为奇数时,} \\ \frac{1}{2} \left(2^n + C_n^{\frac{n}{2}}\right), & n \text{ 为偶数时.} \end{cases}$$

当 n 为奇数时, n=2m+1, 则 $\left[\frac{n}{2}\right]=m$,

$$2q_n = 2(m+1)C_n^m - 2^n$$
,

所以

$$\sum_{k=0}^{m} (C_n^k - C_n^{k-1}) (n-2k+1)$$

$$= (2m+2) C_n^m - 2 (m+1) C_n^m + 2^n = 2^n,$$

即
$$(g)$$
成立。当 $n=2m$ 时, $\left[\frac{n}{2}\right]=m$,

$$2q_n = 2(m+1)C_n^m - 2^n - C_n^m$$

所以

$$\sum_{k=0}^{m} (C_n^k - C_n^{k-1}) (n-2k+1)$$

$$= (2m+1)C_n^m - 2(m+1)C_n^m + 2^n + C_n^m = 2^n.$$

这时(g)也成立。因而由互逆公式,所证的恒等式成立。

注意,在正文中本题的等式是通过(9)和(14)来确立的,然后通过互逆公式证明(9)成立。这里先证明(g)成立。这里先证明(g)成立,通过互逆公式证明本题的等式成立,实际上是给这等式。另一个独立的证明。

10. 在例28的等式

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^k \frac{n}{n-k} C_{n-k}^k \alpha^{n-2k}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n \left\{ (\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4})^n + (\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4})^n \right\}$$

中取 $\alpha = 2\cos x$, 则 $\alpha^2 - 4 = 4(\cos^2 x - 1) = -4\sin^2 x$, 故 右端为

$$\frac{1}{2^n} \left\{ (2\cos x + 2i\sin x)^n + (2\cos x - 2i\sin x)^n \right\}$$

$$= 2\cos nx,$$

故知等式成立.

11. 在互逆公式 (77) 和 (78) 中取 $a_k = (\cos x)^k$, $a_k = 0, 1, \dots, b_0 = 1, b_k = 2\cos kx$, 利用上题的恒等式即得.

题习四

1. $\Delta(f(x)g(x)) = f(x+1)g(x+1) - f(x)g(x)$ = f(x+1)g(x+1) - f(x+1)g(x) + f(x+1)g(x) - f(x)g(x) $= f(x+1)\Delta g(x) + g(x)\Delta f(x).$

2. 证 E_{1}, Δ_{1} 是只对 f 作用的算 子, E_{g} , Δ_{g} 只对 g 作 f, 即 E_{1} $f(x) = E_{f}(x) = f(x+1)$, E_{1} $g(x) = E_{g}(x) = g(x+1)$

$$\Delta_{f}(x) = \Delta f(x) = f(x+1) - f(x), \qquad \Delta_{g}(x) = \Delta g(x)$$
$$= g(x+1) - g(x). \quad \text{ } \exists E \text{ } \exists$$

$$\Delta(f(x)g(x)) = (E_f\Delta_g + \Delta_f)(f(x)g(x))$$

類以
$$\Delta^*(f(x)g(x)) = (E, \Delta_x + \Delta_y)^*(f(x)g(x))$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{n} C_{n}^{k} \Delta_{j}^{k} E_{j}^{n-k} \Delta_{k}^{n-k}\right) (f(x) g(x))$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_{n}^{k} \Delta_{j}^{k} E_{j}^{n-k} f(x) \Delta_{k}^{n-k} g(x)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}C_{n}^{k}\Delta^{k}f(x+n-k)\Delta^{n-k}g(x).$$

3. 用数学归纳法。当 n=1 时,

$$\Delta x^2 = (x+1)^2 - x^2 = 2x+1=2(x+\frac{1}{2})$$
, 等式成立。今设

$$\Delta^{n-1}x^n=n!\left(x+\frac{n-1}{2}\right),$$

利用上题的结果得

$$\Delta^{n} (x^{n+1}) = \Delta^{n} (x^{n} \cdot x) = (\Delta^{n} x^{n}) x + n \Delta^{n-1} (x+1)^{n}$$

$$= n_{1} x + n \Delta^{n-1} (x^{n} + n x^{n-1})$$

$$= n_{1} x + n \left(n_{1} (x + \frac{n-1}{2}) + n_{1} \right)$$

$$= (n+1)_{1} \left(x + \frac{n}{2} \right).$$

4. 在定理4的等式

$$\Delta^{n} f(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} C_{n}^{k} f(x+n-k)$$

中取 $f(x) = x^{n+1}$,由上题的结果得

$$(n+1)!\left(x+\frac{n}{2}\right) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} C_{n}^{k} (x+n-k)^{n+1},$$

作x一n代替上面的x,即得要证的等式。

- 5. 由定理6的求和公式即得.
- 6. 在定理 6 的求和公式中取 $f(x) \frac{1}{2x-1}$, 由公式

(102) 和第一节的习题13得

$$\Delta^{k} f(1) = \sum_{l=0}^{k} (-1)^{l-k} C_{k}^{l} f(l+1) = \sum_{l=0}^{k} (-1)^{k-l} C_{k}^{l}$$

$$\cdot \frac{1}{2l+1} = (-1)^{k} \frac{2^{2k}}{2k+1} (C_{2k}^{k})^{-1},$$

由 (104) 即得

$$1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n+1} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k C_n^{k+1} \frac{2^{2k}}{2k+1} (C_{2k}^k)^{-1}$$
$$= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} C_n^k \frac{2^{2k-2}}{2k-1} \left(C_{2k-2}^{k-1}\right)^{-1}$$

- 7. 从上题的恒等式经过定理1的互逆公式即得。
- 8. {k'}是4阶等差数列,用定理12的计算公式.
- 9. 用 k 换 k+1, 要证的等式变为

$$\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k} k^{n} C_{n+1}^{k} = 0$$

在 (102) 中取 $f(x) = x^n$, 得

$$\Delta^{n+1}x^n = \sum_{k=n}^{n+1} (-1)^{n-k+1} C_{n+1}^k (x+k)^n,$$

因为
$$\Delta^{n+1}x^n = 0$$
。 故得 $\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k C_{n+1}^k (x+k)^n = 0$. 命 $x=0$,

即得要证的等式.

10.
$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{k} (-1)^{l} \cdot C_{k}^{l} (l+1)^{n}$$

$$= \sum_{l=0}^{n} (-1)^{l} (l+1)^{n} \sum_{k=l}^{n} C_{k}^{l}$$

$$=\sum_{l=0}^{\infty} (-1)^{l} (l+1)^{n} C_{n+1}^{l+1} = 0$$

最后一个等式是利用了上题的结果.

11. 因为

$$C_{m-2k}^{n-1} = \frac{1}{(n-1)!} (m-2k) (m-2k-1) \cdots (m-2k-n+2)$$

是 h 的 n-1次多项式,由定理10知,它是一个 n-1 阶等差数列,于是由定理12的(ii)知等式成立。

习题五

1. 利用从 (109) 分别取 $a_k = k$, $a_k = k^2$ 得到的两个等式即得证明.

2.
$$i = e^{i z}$$
, $a_{z} = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_{n}^{k} z^{2k}$, $b_{z} = \sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n} C_{n}^{k} z^{2k}$

则
$$a_n + b_n = \sum_{k=0}^n C_n^k z^{2k} = (1 + z^2)^n$$
.

$$b_n = \sum_{k=m+1}^{n} C_n^k z^{2k} = \sum_{l=0}^{n-m-1} C_n^{n-l} z^{2n-2l} = \sum_{l=0}^{m} C_n^l z^{2n-2l}$$

所以

$$a_n + \frac{b_n}{z^{\frac{2}{n}}} = \sum_{k=0}^m C_n^k (z^{2k} + z^{-2k}),$$

$$\frac{a_n}{z^{\frac{2}{n}}} + \frac{b_n}{z^{\frac{2}{n}}} = (1 + z^{-2})^n,$$

因而

$$(1-z^{-2n})a_n = \sum_{k=0}^m C_n^k (z^{2k} + z^{-2k}) - (1+z^{-2})^n$$

两端同乘 z* 得

$$(z^{n}-z^{-n})a_{n}=z^{n}\sum_{k=0}^{m}C_{n}^{k}(z^{2k}+z^{-2k})-(z+z^{-1})^{n},$$

两边取实部得

$$-2\sin nx \sum_{k=0}^{m} C_{n}^{k} \sin 2kx = 2\cos nx \sum_{k=0}^{m} C_{n}^{k} \cos 2kx - (2\cos x)^{n},$$

移项后即得

$$\sum_{k=0}^{m} C_{n}^{k} \cos (n-2k) x = 2^{n-1} \cos^{n} x.$$

当
$$n=2m$$
 为偶数时, $\left[\frac{n}{2}\right]=m$, 这时

$$b_n = \sum_{k=0}^{n-m-1} C_n^k z^{2n-2k} = \sum_{k=0}^{m-1} C_n^k z^{2n-2k},$$

因而

$$a_n + z^{-2} b_n = \sum_{k=0}^m C_n^k (z^{2k} + z^{-2k}) - C_n^m z^{-2m},$$

新以

$$(1-z^{-2n})a_n = \sum_{k=0}^m C_n^k (z^{2k} + z^{-2k}) - (1+z^{-2})^n - C_n^m z^{-2m},$$

$$(z^{n}-z^{-n})a_{n}=z^{n}\sum_{k=0}^{n}C_{n}^{k}(z^{2k}+z^{-2k})-(z+z^{-1})^{n}-C_{n}^{n}$$

用z=e^{i*}代入,两边取实部,即得

$$\sum_{k=0}^{m} C_{n}^{k} \cos (n-2k) x = 2^{n-1} \cos^{n} x + \frac{1}{2} C_{n}^{\frac{n}{2}}.$$

在第三节中我们已经得到过这个恒等式,这里用复数方法给出了另一个证明。

3. 在第三节中, 我们得到了下面的互逆对:

$$\begin{cases} a_{n} = \sum_{k=0}^{m} (C_{n}^{k} - C_{n}^{k-1}) b_{n-2k}, \\ b_{n} = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{k} C_{n}^{k} a_{n-2k}, \end{cases}$$

$$m = \left[\frac{n}{2}\right].$$

在上面的互逆对中取 $a_k = (2\cos x)^k$, $b_k = \frac{\sin(k+1)x}{\sin x}$. 因

此要证明等式成立,只要证明下面的等式成立:

$$(2\cos x)^{n} = \sum_{k=0}^{m} (C_{n}^{k} - C_{n}^{k-1}) \frac{\sin (n-2k+1)x}{\sin x} \qquad (h)^{k}$$

容易看出,上式右端为

$$\sum_{k=0}^{m} C_n^k \frac{\sin (n-2k+1)x}{\sin x} - \sum_{k=0}^{m} C_n^{k-1} \frac{\sin (n-2k+1)x}{\sin x}$$

$$= \sum_{k=0}^{m} C_{n}^{k} \frac{\sin (n-2k+1)x}{\sin x} - \sum_{k=0}^{m-1} C_{n}^{k} \frac{\sin (n-2k-1)x}{\sin x}$$

$$=C_n^m\frac{\sin(n-2m+1)x}{\sin x}$$

$$+\sum_{k=0}^{m-1} C_n^k \frac{\sin (n-2k+1)x - \sin (n-2k-1)x}{\sin x}$$

$$= C_n^m \frac{\sin(n-2m+1)x}{\sin x} + 2\sum_{k=0}^{m-1} C_n^k \cos(n-2k)x$$
 (i)

$$C_n^m = \frac{\sin 2x}{\sin x} + 2\sum_{k=0}^{m-1} C_n^k \cos(n-2k)x$$

$$=2\sum_{k=0}^{m}C_{n}^{k}\cos\left(n-2k\right)x,$$

当
$$n=2m$$
时, $\left[\frac{n}{2}\right]=m$, (i) 变为

$$C_n^{\frac{n}{2}} + 2\sum_{k=0}^{m-1} C_k^{\gamma} \cos\left(n-2k\right) x$$

$$=2\sum_{k=0}^{m}C_{n}^{k}\cos(n-2k)x-2C_{n}^{\frac{n}{2}}+C_{n}^{\frac{n}{2}}$$

$$=2\sum_{k=0}^{m}C_{n}^{k}\cos(n-2k)x-C_{n}^{\frac{n}{2}}.$$

因此要 (h) 成立, 就要证明

$$\sum_{k=0}^{m} C_{n}^{k} \cos(n-2k) x = \begin{cases} 2^{n-1} \cos^{n} x, & n \text{ n h h h h h}, \\ 2^{n-1} \cos^{n} x + \frac{1}{2} C_{n}^{\frac{n}{2}}, n \text{ h h h h}, \end{cases}$$

而这就是上题中已经证明的。

4. 在 (120) 中命 $a_k = (-1)^k k \cos kx$, $b_k = k2^{k-1}$

$$\left(\cos\frac{x}{2}\right)^{k-1}\cos\frac{k+1}{2}x$$
,则从 (120) 和定理一的互逆公式

可得

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^{k} k 2^{k-1} C_{n}^{k} \left(\cos \frac{x}{2} \right)^{k-1} \cos \frac{k+1}{2} x$$

 $= (-1)^n n \cos nx$

- 5. 利用 (121) 和定理一的互逆公式。
- 6. 利用 (122) 和定理一的互逆公式。
- 7. 利用 (123) 和定理一的互逆公式。
- ·8. 在第 5 题的恒等式中命 $x = \frac{\pi}{2}$.
- 9. 在公式 (134) 中取 r=1, m=2, , 这时 (134) 的 右端为

$$2^{n-1}\left\{\cos\frac{nx}{2}\cos^{n}\frac{x}{2}+\cos\left[\frac{nx}{2}+\frac{\pi}{2}(n-2)\right]\cos^{n}\frac{x+\pi}{2}\right\},\,$$

因为

$$\cos\left(\frac{nx}{2} + \frac{n\pi}{2} - \pi\right) = -\cos\frac{n(x + \pi)}{2},$$

$$\cos\frac{x + \pi}{2} = -\sin\frac{x}{2},$$

所以上式可改写为

$$2^{n-1} \left\{ \cos \frac{nx}{2} \cos \frac{x}{2} - (-1)^n \sin \frac{x}{2} \cos \frac{n(x+\pi)}{2} \right\}.$$

因而得本题的等式。

10. 和上题方法相同。