高等代数习题解答

(北京大学丘维声教授编著的教材)

宿州学院数学系代数教研室

第 4 章：矩阵的运算

书后习题.1. $P_{118}, Ex7, (6)$

解：当 $n=2$ 时，$\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}\lambda^2 & 2\lambda & 1\\ 0 & \lambda^2 & 2\lambda\\ 0 & 0 & \lambda^2\end{pmatrix}$;

$\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix}\lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda\\ 0 & \lambda^3 & 3\lambda^2\\ 0 & 0 & \lambda^3\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}^4=\begin{pmatrix}\lambda^4 & 4\lambda^3 & 6\lambda^2\\ 0 & \lambda^4 & 4\lambda^3\\ 0 & 0 & \lambda^4\end{pmatrix}$;

一般的，$\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}\lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2}\\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1}\\ 0 & 0 & \lambda^n\end{pmatrix}$.

下面利用归纳法证明.

$n=2$ 时，结论成立.

假设 $n=k$ 时结论成立．即：$\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix}\lambda^k & k\lambda^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2}\\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1}\\ 0 & 0 & \lambda^k\end{pmatrix}$.

当 $n=k+1$ 时，

$$\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}^{k+1}=\begin{pmatrix}\lambda^k & k\lambda^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2}\\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1}\\ 0 & 0 & \lambda^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \lambda^{k+1} & (k+1)\lambda^k & \frac{k(k+1)}{2}\lambda^{k-1} \\ 0 & \lambda^{k+1} & (k+1)\lambda^k \\ 0 & 0 & \lambda^{k+1} \end{pmatrix}$$

结论成立. □

书后习题.2. $P_{118}, Ex8$

解: $(I-B)(I+B+B^2) = I+B+B^2-B-B^2-B^3 = I$ □

书后习题.3. $P_{118}, Ex10$

证明: 若 $A^2 = A$, 则 $[\frac{1}{2}(B+I)]^2 = \frac{1}{2}(B+I)$

即: $\frac{1}{4}B^2 + \frac{1}{2}B + \frac{1}{4}I = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}I$, 从而 $B^2 = I$

若 $B^2 = I$, 则 $A^2 = [\frac{1}{2}(B+I)]^2 = \frac{1}{4}B^2 + \frac{1}{2}B + \frac{1}{4}I = \frac{1}{2}(B+I) = A$ □

书后习题.4. $P_{118}, Ex11$

证明: 因为 K^n 中的任意列向量 η 都是 $AX = 0$ 的解, 所以取 $\eta = \varepsilon_i, i = 1, 2, ..., n$, 有 $A\varepsilon_i = 0$. 所以 $A = AI = 0$, I 是以 $\varepsilon_i, i = 1, 2, ..., n$ 为列向量的单位矩阵. □

书后习题.5. $P_{122}, Ex1$

证明: 设 $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $D = diag\{d_1, d_2, ..., d_s\}, d_l \neq d_k$.

因为 $DA = AD$, 所以 $m = n = s$. 而在 $DA = (d_i a_{ij}), AD = (a_{ij}d_j)$, 所以 $d_i a_{ij} = a_{ij}d_j$, $(d_i - d_j)a_{ij} = 0$. 在 $i \neq j$ 时, $d_i - d_j \neq 0$, 所以 $a_{ij} = 0, i \neq j$.

从而, A 是对角阵. □

书后习题.6. $P_{123}, Ex2$

证明: 设 $A = (a_{ij})_n, B = (b_{ij})_n$, 且 $i > j$ 时, $a_{ij} = b_{ij} = 0$.

而由矩阵乘积的定义, 记 $AB = C = (c_{ij})_n$, 则

$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + ... + a_{ii-1}b_{i-1j} + a_{ii}b_{ij} + ... + a_{in}b_{nj}$

在 $i > j$ 时, $a_{i1} = ... = a_{ii-1} = 0, b_{ij} = ... = b_{nj} = 0$, 所以 $c_{ij} = 0$, 从而 AB 仍是上三角矩阵.

而 $c_{ii} = a_{i1}b_{1j} + ... + a_{ii-1}b_{i-1i} + a_{ii}b_{ii} + a_{ii+1}b_{i+1i} + ... + a_{in}b_{nj} = a_{ii}b_{ii}$, 所以, AB 对角线的元素是 A 与 B 相应位置元素的积. □

书后习题.7. $P_{123}, Ex3$

证明: 设 $A = (a_{ij})_{m\times n}$ 与任何矩阵都可以交换, 则利用 $Ex1$ 的结论知, A 是对角阵. 所以可设 $A = diag\{a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}\}$.

又因为 $E_{ij}A=AE_{ij}$，且 $E_{ij}A=E_{ij}\sum\limits_{k=1}^{n}a_{kk}E_{kk}=a_{jj}E_{ij}$；

$AE_{ij}=\big(\sum\limits_{k=1}^{n}a_{kk}E_{kk}\big)E_{ij}=a_{ii}E_{ij}$.

所以，$a_{ii}=a_{jj}$. 从而，A 是数量阵. □

书后习题.8. $P_{123},Ex10$

证明：设 A 是奇数阶反对称矩阵. 则：$A'=-A$，而 $|A|=|A'|$，$|-A|=(-1)^n|A|$，而 n 是奇数，所以 $|-A|=-|A|$. 从而 $|A|=-|A|$，即：$|A|=0$.
□

书后习题.9. $P_{123},Ex11$

证明：因为 $P(i,j)=P\big(i(-1)\big)P\big(j,i(1)\big)P\big(i,j(-1)\big)P\big(j,i(1)\big)$. 所以，交换矩阵的两行可以由若干次将某一行乘一个非 0 数，以及将某一行的倍数加到另一行实现. □

书后习题.10. $P_{127},Ex1$

证明：我们以 $\beta_1,\beta_2,...,\beta_m;\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_m$ 记矩阵 A,B 的行向量组. 以 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ 记 $A+B$ 的行向量组. 则

$\alpha_1=\beta_1+\gamma_1,\alpha_2=\beta_2+\gamma_2,...,\alpha_m=\beta_m+\gamma_m$

要证明 $rank(A+B)\le rank(A)+rank(B)$，只要证明：

$rank\big\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m\big\}\le rank\big\{\beta_1,\beta_2,...,\beta_m\big\}+rank\big\{\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_m\big\}$

如果我们记 $\beta_1,\beta_2,...,\beta_m;\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_m$ 的极大线性无关组分别是 $\beta_{i_1},...,\beta_{i_s};\gamma_{j_1},...,\gamma_{j_t}$，则 $\beta_1,\beta_2,...,\beta_m;\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_m$ 可以由 $\beta_{i_1},...,\beta_{i_s};\gamma_{j_1},...,\gamma_{j_t}$ 线性表出. 而 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ 可由 $\beta_1,\beta_2,...,\beta_m;\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_m$ 线性表出；所以 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ 可以由 $\beta_{i_1},...,\beta_{i_s};\gamma_{j_1},...,\gamma_{j_t}$ 线性表出. 从而

$rank\big\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m\big\}\le rank\big\{\beta_{i_1},...,\beta_{i_s};\gamma_{j_1},...,\gamma_{j_t}\big\}\le(s+t)$

$=rank\big\{\beta_1,\beta_2,...,\beta_m\big\}+rank\big\{\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_m\big\}$

即：$rank(A+B)\le rank(A)+rank(B)$. □

书后习题.11. $P_{127},Ex2$

证明：以 $\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_s$ 记 A 的行向量组；$\gamma_{i_1},...,\gamma_{i_r}$ 记矩阵 A 的行向量组的极大线性无关组. 则：

$\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_s$ 可以由 $\gamma_{i_1},...,\gamma_{i_r}$ 线性表出. 所以可设

$$A=\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\\ \vdots\\ \gamma_s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k_{11}\gamma_{i_1}+k_{12}\gamma_{i_2}+...+k_{1r}\gamma_{i_r}\\ k_{21}\gamma_{i_1}+k_{22}\gamma_{i_2}+...+k_{2r}\gamma_{i_r}\\ \vdots\\ k_{s1}\gamma_{i_1}+k_{s2}\gamma_{i_2}+...+k_{sr}\gamma_{i_r}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}k_{11}&k_{12}&\cdots&k_{1r}\\ k_{21}&k_{22}&\cdots&k_{2r}\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\ k_{s1}&k_{s2}&\cdots&k_{sr}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma_{i_1}\\ \gamma_{i_2}\\ \vdots\\ \gamma_{i_r}\end{pmatrix}.$$

记 $B=\begin{pmatrix}k_{11}&k_{12}&\cdots&k_{1r}\\ k_{21}&k_{22}&\cdots&k_{2r}\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\ k_{s1}&k_{s2}&\cdots&k_{sr}\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}\gamma_{i_1}\\ \gamma_{i_2}\\ \vdots\\ \gamma_{i_r}\end{pmatrix}$. 则 B 是 $s\times r$ 矩阵, C 是 $r\times s$ 矩阵，且有 $rank(C)=r$. 下面要说明 $rank(B)=r$.

注意 $\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_s$ 被 $\gamma_{i_1},...,\gamma_{i_r}$ 线性表出时的系数是唯一的，且 $\gamma_{i_1},...,\gamma_{i_r}$ 被 $\gamma_{i_1},...,\gamma_{i_r}$ 表出的系数恰好是 B 的第 $i_1,...,i_r$ 行的元素，且分别为 $(1,0,...,0),(0,1,0,...,0),...,(0,...,0,1)$，即 B 有 r 行线性无关 (第 $i_1,...,i_r$ 行线性无关). 所以 $rank(B)=r$. 所以，存在 B 是列满秩矩阵，C 是行满秩矩阵，$A=BC$. $\square$

书后习题.12. $P_{127},Ex5$

证明：因为 $I+A=AA'+A=A(A'+I)$，所以，$|I+A|=|A||A'+I|$. 又因为 $A'+I=(A'+I)'$，所以 $|I+A|=|A'+I|$，而 $|A|=-1$，从而 $|I+A|=-|A+I|,|I+A|=0$. $\square$

书后习题.13. $P_{128},Ex7$

证明：注意到 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\ x_1&x_2&x_3\\ x_1^2&x_2^2&x_3^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&x_1&x_1^2\\ 1&x_2&x_2^2\\ 1&x_3&x_3^2\end{pmatrix}$

即得要证明的结论. $\square$

书后习题.14. $P_{128},Ex8$

解：记 $B=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&i&i^2&i^3\\1&i^2&i^4&i^6\\1&i^3&i^6&i^9\end{pmatrix}$，$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$，则 $|B|=-16i$.

考虑 $AB=\begin{pmatrix}a_0&a_1&a_2&a_3\\a_3&a_0&a_1&a_2\\a_2&a_3&a_0&a_1\\a_1&a_2&a_3&a_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&i&i^2&i^3\\1&i^2&i^4&i^6\\1&i^3&i^6&i^9\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}f(1)&f(i)&f(i^2)&f(i^3)\\f(1)&if(i)&i^2f(i^2)&i^3f(i^3)\\f(1)&i^2f(i)&i^4f(i^2)&i^6f(i^3)\\f(1)&i^3f(i)&i^6f(i^2)&i^9f(i^3)\end{pmatrix}$

所以，$|A||B|=|AB|=\begin{vmatrix}f(1)&f(i)&f(i^2)&f(i^3)\\f(1)&if(i)&i^2f(i^2)&i^3f(i^3)\\f(1)&i^2f(i)&i^4f(i^2)&i^6f(i^3)\\f(1)&i^3f(i)&i^6f(i^2)&i^9f(i^3)\end{vmatrix}$

$=\big(f(1)f(i)f(i^2)f(i^3)\big)|B|$,

又 $|B|\neq 0$，所以 $|A|=f(1)f(i)f(i^2)f(i^3)$. □

书后习题.15. $P_{128}, Ex9$

解：记 $A=\begin{pmatrix}a_1&-1\\a_2&-1\\\vdots&\vdots\\a_n&-1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\b_1&b_2&\cdots&b_n\end{pmatrix}$,

则 $AB=\begin{pmatrix}a_1-b_1&a_1-b_2&\cdots&a_1-b_n\\a_2-b_1&a_2-b_2&\cdots&a_2-b_n\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a_n-b_1&a_n-b_2&\cdots&a_n-b_n\end{pmatrix}$

所以在 $n>2$ 时，$|AB|=0$. $n=1,2$ 时，直接计算. □

书后习题.16. $P_{142}, Ex1$

证明: 因为 $AB=0$, 如果我们记 B 列向量组为 $B_1,B_2,...,B_m$, 则 $AB_k=$

$0, k = 1, ..., m$. 即：$B_k, k = 1, ..., m$ 是方程组 $AX = 0$ 的解. 而由齐次线性方程组解的结构定理知，$B_k, k = 1, ..., m$ 可以被 $AX = 0$ 的基础解系线性表出. 即 $B_k, k = 1, ..., m$ 可以由 $n - rank(A)$ 个向量线性表出，所以 $rank\{B_1, B_2, ..., B_m\} \le n - rank(A)$,
即是：$rank(A) + rank(B) \le n$. □

书后习题.17. $P_{142}, Ex3$.

证明：(1) 因为 C 是行满秩矩阵，所以 C 有 n 线性无关. 将 C 中线性无关的 n 列构成矩阵 D，则 $|D| \ne 0$. 又因为 $BC = 0$，所以，矩阵 B 与矩阵 C 的任意一列的乘积都是 0，从而 $BD = 0$. 而 D 是可逆矩阵，所以 $B = 0$.

(2) 由 $BC = C$，得 $(B - I)C = 0$.
利用 (1) 的结论，$B - I = 0$，$B = I$. □

书后习题.18. $P_{142}, Ex4$.

证明：(证法 1) 首先说明：对分块对角 $D = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$,
有：$r(D) = r(A_1) + r(A_2)$.
首先 $r(D) \le r(A_1) + r(A_2)$ 是显然的. 再，若 $|D_1|$ 是 A_1 的最高阶不为 0 的子式，$|D_2|$ 是 A_2 的最高阶不为 0 的子式. 则 $det \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix}$ 是 D 的一个子式，且 $det \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix} \ne 0$，所以 $r(D) \ge r(A_1) + r(A_2)$.
所以 $r(D) = r(A_1) + r(A_2)$.

构作矩阵：$D = \begin{pmatrix} I + A & 0 \\ 0 & I - A \end{pmatrix}$，则 $r(D) = r(I + A) + r(I - A)$.
而 $A^2 = I$，所以

$$\begin{pmatrix} I & -\frac{1}{2}(I + A) \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ A & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I + A & 0 \\ 0 & I - A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ I & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & \frac{1}{2}(I - A) \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} I & -\frac{1}{2}(I + A) \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I + A & 0 \\ I + A & I - A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ I & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & \frac{1}{2}(I - A) \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} I & -\frac{1}{2}(I + A) \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I + A & 0 \\ 2I & I - A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & \frac{1}{2}(I - A) \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} I & -\frac{1}{2}(I+A) \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I+A & 0 \\ 2I & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2I & 0 \end{pmatrix}$$

而矩阵 $\begin{pmatrix} I & -\frac{1}{2}(I+A) \\ 0 & I \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} I & 0 \\ A & I \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} I & 0 \\ I & I \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} I & \frac{1}{2}(I-A) \\ 0 & I \end{pmatrix}$ 都是可逆矩阵,

所以 $r(D) = r(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2I & 0 \end{pmatrix}) = n$, 即：命题成立.

(证法 2) 因为 $A^2 = I$, 所以 $(I+A)(I-A) = 0$, 利用 $P_{142}, Ex1$ 的结论, 有：$r(I+A) + r(I-A) \le n$. 又因为 $(I+A) + (I-A) = 2I$, 再利用 $P_{127}, Ex1$ 的结论, $n = r(2I) \le r(I+A) + r(I-A)$,
所以 $r(I+A) + r(I-A) = n$. □

书后习题.19. $P_{142}, Ex5$.

证明: (证法 1) 因为 $A^2 = A$, 所以 $A(I-A) = 0$, 利用 $P_{142}, Ex1$ 的结论, 有：$r(A) + r(I-A) \le n$. 又因为 $A + (I-A) = I$, 再利用 $P_{127}, Ex1$ 的结论, $n = r(I) \le r(A) + r(I-A)$, 所以 $r(A) + r(I-A) = n$.

(证法 2) 构作矩阵 $D = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I-A \end{pmatrix}$, 则 $r(D) = r(A) + r(I-A)$.

而在 $A^2 = A$ 时,
$$\begin{pmatrix} I & -A \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ I & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I-A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & I \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -A & I \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} I & -A \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ A & I-A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & I \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -A & I \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} I & -A \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & A \\ A & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -A & I \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} I & -A \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & A \\ 0 & I \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

又因为：$\begin{pmatrix} I & -A \\ 0 & I \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} I & 0 \\ I & I \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} I & I \\ 0 & I \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} I & 0 \\ -A & I \end{pmatrix}$ 都是可逆矩阵, 所以

$r(D) = r\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = n.$ □

书后习题.20. $P_{142}, Ex6.$

证明：只要证明，$A'\beta$ 可以由 $A'A$ 的列向量组线性表出. 注意到：$A'\beta$ 是 A' 的列向量组的线性组合，即 $A'\beta$ 可以由 A' 的列向量组线性表出，所以只要证：A' 的列向量组可以由 $A'A$ 的列向量组线性表出.

而 $A'A$ 的列向量组是 A' 的列向量组的线性组合，且在实数域上，$r(A'A) = r(A')$，所以 $A'A$ 的列向量组与 A' 的列向量组等价，从而 A' 的列向量组可以由 $A'A$ 的列向量组线性表出. 即有：$A'\beta$ 可以由 $A'A$ 的列向量组线性表出. 方程组有解. □

书后习题.21. $P_{142}, Ex7.$

证明：(1) 因为 $r(A) = 1$，若记 $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$ 为 A 的行向量组，则存在 γ_{i_0}，使得 $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$ 可以由 γ_{i_0} 线性表出. 即：

$$A = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1\gamma_{i_0} \\ k_2\gamma_{i_0} \\ \vdots \\ k_n\gamma_{i_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}\gamma_{i_0}$$

记 $B = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$，$C = \gamma_{i_0}$ 为 A 的第 i_0 行，则：$A = BC$.

(2)$A^2 = (BC)(BC) = B(CB)C$，而 CB 是 1×1 矩阵，记 $CB = k$，所以 $B(CB)C = kBC = kA$. □

书后习题.22. $P_{142}, Ex8, 9.$

证明：因为 $AA^\star = |A|I$，所以，$|A||A^\star| = |A|^n$

(1) 当 $r(A) = n$ 时，$|A| \neq 0$. $|A^\star| = |A|^{n-1} \neq 0$，从而 $r(A^\star) = n$;

(2) 当 $r(A) = n-1$ 时，$|A| = 0, AA^\star = |A|I = 0$. 利用 $P_{142}, Ex1$ 的结论，则：$r(A) + r(A^\star) = n - 1 + r(A^\star) \leq n$，$r(A^\star) \leq 1$. 又因为 A 有一个 $n-1$ 阶子式不为 0，所以 $A^\star \neq 0$，从而 $r(A^\star) \geq 1$. 所以：$r(A^\star) = 1$.

(3) 当 $r(A) < n-1$ 时，则 A 的所有 $n-1$ 阶子式均为 0，从而 $A^\star = 0$.

在 (2), (3) 两种情形下，即是 $|A| = 0$ 的情形下，都有 $|A^\star| = 0$，所以 $|A^\star| = 0 = |A|^{n-1}$. □

书后习题.23. $P_{142}, Ex10.$

证明：(1) 在 $|A| \neq 0$ 时，则 $|A^\star| \neq 0$，$A^\star$ 可逆，且 $AA^\star = |A|I$，$(|A|^{-1}A)A^\star = I, (A^\star)^{-1} = |A|^{-1}A$. $(A^\star)^{-1} = |A^\star|^{-1}(A^\star)^\star$.
所以，$|A|^{-1}A = |A^\star|^{-1}(A^\star)^\star$，$(A^\star)^\star = |A^\star||A|^{-1}A$，而 $|A^\star| = |A|^{n-1}$，所以，$(A^\star)^\star = |A|^{n-2}A$.

在 $|A| = 0$ 时，如果 $n \geq 3$，则 $A^\star = 0$，$(A^\star)^\star = 0$，
即：$(A^\star)^\star = |A|^{n-1}A = 0$.
如果 $n = 2$，容易直接计算，$(A^\star)^\star = A$. □

书后习题.24. $P_{142}, Ex11.$

证明：以 $A_1, A_2, ..., A_n$ 记矩阵 A 的列向量组；以 $X_1, X_2, ..., X_m$ 记矩阵 X 的列向量组；以 $B_1, B_2, ..., B_m$ 记矩阵 B 的列向量组.

假设矩阵方程 $AX = B$ 有解, 则: $(A_1, A_2, ..., A_n)X_i = B_i, i = 1, 2, ..., m$.
即: 矩阵 B 的列向量组可以由 A 的列向量组线性表出, 从而分块矩阵 $(A \;\; B)$ 的列向量组可以由 A 的列向量组线性表出，而 A 的列向量组显然可以由分块矩阵 $(A \;\; B)$ 的列向量组线性表出, 所以 A 的列向量组与分块矩阵 $(A \;\; B)$ 的列向量组等价. 所以 $r(A) = r\big((A \;\; B)\big)$.

假设 $r(A) = r\big((A \;\; B)\big)$. 由于 A 的列向量组是 $(A \;\; B)$ 的列向量组的一个部分组，所以 A 的列向量组可以由 $(A \;\; B)$ 的列向量组线性表出. 再由 $r(A) = r\big((A \;\; B)\big)$，即：$A$ 的列向量组的秩等于 $(A \;\; B)$ 的列向量组的秩，所以 A 的列向量组与 $(A \;\; B)$ 的列向量组等价. 从而 B 的列向量组可以由 A 的列向量组线性表出，即：对任意的 B_i，方程组 $AX = B_i$ 都有解，所以对矩阵 B，存在矩阵 X，使得 $AX = B$ 成立. 即矩阵方程 $AX = B$ 有解. □

书后习题.25. $P_{143}, Ex15.$

证明：因为 A 可逆，我们可以构作矩阵 $\begin{pmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix}$，则

$det \begin{pmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix} = 1$，且 $\begin{pmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$.

所以 $det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$

$= |A||D - CA^{-1}B| = |AD - ACA^{-1}B|$,

而 $AC = CA$, 所以 $|AD - ACA^{-1}B| = |AD - CAA^{-1}B| = |AD - CB|$. 即有: $det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = |AD - CB|$. □

书后习题.26. $P_{143}, Ex18$.

证明: 设矩阵 $B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1s} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2s} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ B_{s1} & B_{s2} & \cdots & B_{ss} \end{pmatrix}$ 是与矩阵 A 有同型分块且与 A 可交换. 则 B_{kl} 是矩阵 B 的 $n_k \times n_l$ 子块.

$$AB = \begin{pmatrix} a_1 I_{n_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 I_{n_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_{n_s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1s} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2s} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ B_{s1} & B_{s2} & \cdots & B_{ss} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 B_{11} & a_1 B_{12} & \cdots & a_1 B_{1s} \\ a_2 B_{21} & a_2 B_{22} & \cdots & a_2 B_{2s} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_s B_{s1} & a_s B_{s2} & \cdots & a_s B_{ss} \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1s} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2s} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ B_{s1} & B_{s2} & \cdots & B_{ss} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 I_{n_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 I_{n_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_{n_s} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 B_{11} & a_2 B_{12} & \cdots & a_s B_{1s} \\ a_1 B_{21} & a_2 B_{22} & \cdots & a_s B_{2s} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_1 B_{s1} & a_2 B_{s2} & \cdots & a_s B_{ss} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a_1 B_{11} & a_1 B_{12} & \cdots & a_1 B_{1s} \\ a_2 B_{21} & a_2 B_{22} & \cdots & a_2 B_{2s} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_s B_{s1} & a_s B_{s2} & \cdots & a_s B_{ss} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 B_{11} & a_2 B_{12} & \cdots & a_s B_{1s} \\ a_1 B_{21} & a_2 B_{22} & \cdots & a_s B_{2s} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_1 B_{s1} & a_2 B_{s2} & \cdots & a_s B_{ss} \end{pmatrix}$$

从而有：$a_k B_{kl} = a_l B_{kl}, (a_k - a_l)B_{kl} = 0$，$k, l = 1, 2, ..., s$.
在 $k \neq l$ 时，$(a_k - a_l) \neq 0$，所以 $B_{kl} = 0$. 矩阵 B 是分块对角阵. $\square$

书后习题.27. $P_{150}, Ex4$

证明：
A 是正交阵 $\Leftrightarrow A'A = I$；A 是对称阵 $\Leftrightarrow A' = A$；A 是对合阵 $\Leftrightarrow A^2 = I$

$$(1) \quad \left.\begin{array}{l} A'A = I \\ A' = A \end{array}\right\} \Rightarrow A^2 = I, \text{显然.}$$

$$(2) \quad \left.\begin{array}{l} A'A = I \\ A^2 = I \end{array}\right\} \Rightarrow A' = A, \text{显然.}$$

$$(3) \quad \left.\begin{array}{l} A' = A \\ A^2 = I \end{array}\right\} \Rightarrow A'A = I, \text{也显然.}$$
$\square$

书后习题.28. $P_{151}, Ex5$

证明：假设 A 是正交上三角矩阵，则 A 是可逆矩阵，且 $A^{-1} = A'$ 是一个下三角矩阵. 而 $P_{136}, Ex11$，A^{-1} 仍是一个上三角矩阵. 即:A^{-1} 既是一个上三角矩阵又是一个下三角矩阵，所以 A^{-1} 是一个对角矩阵，从而 A 是一个对角矩阵.

设 $A = diag\{d_1, d_2, ..., d_n\}$，则 $A'A = diag\{d_1^2, d_2^2, ..., d_n^2\} = I$，所以 $d_i^2 = 1, i = 1, 2, ..., n$，而 A 是实数矩阵，
所以 $d_i = 1$ 或 $-1, i = 1, 2, ..., n$. $\square$

书后习题.29. $P_{151}, Ex13$

证明：因为 A 是正交矩阵，所以 $A'A = I$，
$(\alpha, \alpha) = \alpha'\alpha$，
$(A\alpha, A\alpha) = (A\alpha)'A\alpha = (\alpha'A')A\alpha = \alpha'(A'A)\alpha = \alpha'I\alpha = \alpha'\alpha$，
所以 $(A\alpha, A\alpha) = (\alpha, \alpha)$，$|A\alpha| = |\alpha|$. $\square$

书后习题.30. $P_{151}, Ex14$

证明：记：$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ 是矩阵 A 的列向量组. 由于 A 是可逆矩阵，所以 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ 线性无关，利用施密特正交化，可以得到正交向量组
$\beta_1 = \alpha_1$，
$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1$，
......

$\beta_n=\alpha_n-\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{(\alpha_n,\beta_k)}{(\beta_k,\beta_k)}\beta_k$，即

$\alpha_1=\beta_1$，

$\alpha_2=\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1+\beta_2$，

……

$\alpha_n=\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{(\alpha_n,\beta_k)}{(\beta_k,\beta_k)}\beta_k+\beta_n$

所以存在上三角矩阵 $B_1=\begin{pmatrix}1 & \frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)} & \frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)} & \cdots & \frac{(\alpha_n,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\\ 0 & 1 & \frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)} & \cdots & \frac{(\alpha_n,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \frac{(\alpha_n,\beta_3)}{(\beta_3,\beta_3)}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$，使得

$$(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)=(\beta_1,\beta_2,...,\beta_n)\begin{pmatrix}1 & \frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)} & \frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)} & \cdots & \frac{(\alpha_n,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\\ 0 & 1 & \frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)} & \cdots & \frac{(\alpha_n,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \frac{(\alpha_n,\beta_3)}{(\beta_3,\beta_3)}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}.$$

B_1 是可逆的上三角矩阵，且 $\beta_1,\beta_2,...,\beta_n$ 是正交向量组. 再将 $\beta_1,\beta_2,...,\beta_n$ 单位化，得

$$(\eta_1,\eta_2,...,\eta_n)=(\beta_1,\beta_2,...,\beta_n)\begin{pmatrix}\frac{1}{|\beta_1|} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \frac{1}{|\beta_2|} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{|\beta_n|}\end{pmatrix}，从而$$

$$(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$$

$$=(\eta_1,\eta_2,...,\eta_n)\begin{pmatrix}|\beta_1| & 0 & \cdots & 0\\ 0 & |\beta_2| & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & |\beta_n|\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)} & \frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)} & \cdots & \frac{(\alpha_n,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\\ 0 & 1 & \frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)} & \cdots & \frac{(\alpha_n,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \frac{(\alpha_n,\beta_3)}{(\beta_3,\beta_3)}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix},$$

记 $T=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$，

$$B=\begin{pmatrix}|\beta_1| & 0 & \cdots & 0\\ 0 & |\beta_2| & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & |\beta_n|\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)} & \frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)} & \cdots & \frac{(\alpha_n,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\\ 0 & 1 & \frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)} & \cdots & \frac{(\alpha_n,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \frac{(\alpha_n,\beta_3)}{(\beta_3,\beta_3)}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}.$$

则 T 是正交矩阵, B 是主对角元都是正数的上三角可逆矩阵, 且 $A=TB$.

下证唯一性. 假设还存在正交矩阵 T_1 和上三角可逆矩阵 C, 使得
$A=T_1C$, 则
$TB=T_1C\Rightarrow T_1^{-1}T=CB^{-1}$.
正交矩阵的逆仍是正交矩阵, 正交矩阵的积仍是正交矩阵. 而 CB^{-1} 是上三角矩阵, 且主对角元是正数. 利用 $P_{151},Ex5$, 则 $CB^{-1}=I$, 从而 $C=B;T=T_1$. 唯一性得证. □

书后习题.31. $P_{156},Ex2$

证明: 假设 $f:S\longrightarrow S';g:S'\longrightarrow S''$ 是两个单射, 则
任意的 $x_1,x_2\in S$, 由 $f(x_1)=f(x_2)$ 可以得到: $x_1=x_2$.
任意的 $y_1,y_2\in S'$, 由 $g(y_1)=g(y_2)$ 可以得到: $y_1=y_2$
从而由 $(gf)(x_1)=(gf)(x_2)$, 即 $g(f(x_1))=g(f(x_2))$, 可以得到
$f(x_1)=f(x_2)$, 进而有 $x_1=x_2$, 所以 gf 是单射.

假设 $f:S\longrightarrow S';g:S'\longrightarrow S''$ 是两个满射, 则
任意的 $y''\in S''$, 存在 $y'\in S'$, 使得 $g(y')=y''$; 而对 $y'\in S'$, 存在 $y\in S$, 使得 $f(y)=y'$. 所以对任意的 $y''\in S''$, 存在 $y\in S$, 使得 $(gf)(y)=g(f(y))=g(y')=y''$. 所以, gf 是满射. □