高等代数习题解答

(北京大学丘维声教授编著的教材)

宿州学院数学系代数教研室

第 5 章：矩阵的相抵与相似

书后习题.1. $P_{163}, Ex3$

证明：因为 $A_{s\times n}$ 的秩为 $r>0$，所以存在 K 上的 s 级可逆矩阵 P 和 n 级可逆矩阵 Q，使得：

$$A = P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{s\times n} Q = P\begin{pmatrix} I_r \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & 0 \end{pmatrix} Q.$$

记 $P_1 = P\begin{pmatrix} I_r \\ 0 \end{pmatrix}$，$Q_1 = \begin{pmatrix} I_r & 0 \end{pmatrix} Q$

则 $rank(P_1) = r$ 为列满秩，$rank(Q_1) = r$ 为行满秩，使得 $A = P_1Q_1$. □

书后习题.2. $P_{163}, Ex4$

证明：因为 $A_{s\times n}$ 的秩为 $r>0$，所以存在 K 上的 s 级可逆矩阵 P 和 n 级可逆矩阵 Q，使得：

$$A = P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{s\times n} Q = P(E_{11} + ... + E_{rr})Q.$$

$A = PE_{11}Q + ... + PE_{rr}Q$ 表成了 r 个秩为 1 的矩阵之和. □

书后习题.3. $P_{163}, Ex5$

证明：设 $A_{s\times n}$ 的秩为 $r>0$，则存在 K 上的 s 级可逆矩阵 P 和 n 级可逆矩阵 Q，使得：

$A = P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{s\times n} Q$，从而 $AB = P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{s\times n} QB$

记 $QB=\begin{pmatrix}H_1\\H_2\end{pmatrix}$，其中 H_1 是 $r\times m$ 子块，H_2 是 $(n-r)\times m$ 子块，

$AB=P\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}H_1\\H_2\end{pmatrix}=PH_1.$

所以 $rank(AB)=rank(H_1)$，

利用 $P_{90},Ex8$ 的结论，$rank(H_1)\geq r+rank(B)-n$，

所以 $rank(AB)\geq rank(A)+rank(B)-n.$ □

书后习题.4. $P_{163},Ex6$

证明：(方法 1) 因为 $rank(CD)\leq min\{rank(C),rank(D)\}=r$，而由 $Ex5$ 的结论，$rank(CD)\geq rank(C)+rank(D)-r=r$，

所以，$rank(CD)=r.$

(方法 2) 因为 $rank(C)=r$ 且 C 是 r 列矩阵，所以 C 有 r 阶子式 $C\begin{pmatrix}i_1&i_2&\cdots&i_r\\1&2&\cdots&r\end{pmatrix}\neq 0$；同理，$D$ 有 r 阶子式 $D\begin{pmatrix}1&2&\cdots&r\\j_1&j_2&\cdots&j_r\end{pmatrix}\neq 0.$

所以 CD 有一个 r 阶子式

$(CD)\begin{pmatrix}i_1&i_2&\cdots&i_r\\j_1&j_2&\cdots&j_r\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}i_1&i_2&\cdots&i_r\\1&2&\cdots&r\end{pmatrix}\cdot D\begin{pmatrix}1&2&\cdots&r\\j_1&j_2&\cdots&j_r\end{pmatrix}\neq 0$

而再由 $Bient-Cauchy$ 定理知，CD 的所有阶数高于 r 的子式全为 0.

所有 $rank(CD)=r.$ □

书后习题.5. $P_{168},Ex1$

证明：因为 A 是行满秩矩阵，所以矩阵 A 的相抵标准形为 $\begin{pmatrix}I_s&0\end{pmatrix}$，存在可逆矩阵 P,Q，使得 $A=P\begin{pmatrix}I_s&0\end{pmatrix}Q$，从而任意一个 A^-，都有

$A^-=Q^{-1}\begin{pmatrix}I_s\\C\end{pmatrix}P^{-1}$，其中 C 是一个 $(n-s)\times s$ 矩阵. 从而

$AA^-=P\begin{pmatrix}I_s&0\end{pmatrix}QQ^{-1}\begin{pmatrix}I_s\\C\end{pmatrix}P^{-1}=I_s.$ □

书后习题.6. $P_{168},Ex2$

证明：因为 A 是列满秩矩阵，所以矩阵 A 的相抵标准形为 $\begin{pmatrix}I_n\\0\end{pmatrix}$，存在可逆矩阵 P,Q，使得 $A=P\begin{pmatrix}I_n\\0\end{pmatrix}Q$，从而任意一个 A^-，都有

$A^- = Q^{-1}\begin{pmatrix} I_n & B \end{pmatrix} P^{-1}$, 其中 B 是一个 $n\times(s-n)$ 矩阵. 从而

$A^-A = Q^{-1}\begin{pmatrix} I_n & B \end{pmatrix} P^{-1}P \begin{pmatrix} I_n \\ 0 \end{pmatrix} Q = I_n.$ □

书后习题.7. $P_{168}, Ex3$

证明: 因为 A 是行满秩矩阵, 所以存在 A 的广义逆矩阵 A^-, 满足 $AA^- = I_s$. 令 $X = A^-B$, 则 $AX = AA^-B = I_sB = B$.
所以, A^-B 是方程 $AX = B$ 的解.

相关的问题是: $X = A^-B$ 是否为 $AX = B$ 的通解? □

书后习题.8. $P_{171}, Ex9$

证明: 假设 A 是可逆矩阵, 则由 $AB - BA = A$, 可以得到:
$A^{-1}AB - A^{-1}BA = A^{-1}A$, 即 $B - A^{-1}BA = I$. 由于 $tr(B) = tr(A^{-1}BA)$,
所以 $tr(B - A^{-1}BA) = 0$, 但 $tr(I) = n$, 矛盾.
所以 A 不可逆. □

书后习题.9. 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

求矩阵 A 的特征值以及线性无关的特征向量, 并把它们正交化, 再单位化.

解: 矩阵 A 的特征多项式为

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & -1 & -1 \\ \lambda-2 & \lambda-1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda-1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-2)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda & 2 & 2 \\ 0 & 1 & \lambda-1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda & 2 & 2 \\ 1 & \lambda-1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda-2 & 2 & 2 \\ 2-\lambda & \lambda-1 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda-2 & 2 & 2 \\ 0 & \lambda+1 & 3 \\ 0 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2\begin{vmatrix} \lambda+1 & 3 \\ 1 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$= (\lambda-2)^3(\lambda+2)$

所以矩阵 A 有两个不同特征值

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -2.$$

将 $\lambda_1 = 2$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$ 得

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0$$

它同解与 $x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0.$

显然它的基础解系为

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \eta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \eta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

将 $\lambda_1 = -2$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$ 得

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0$$

它同解与

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0$$

它有基础解系

$$\eta_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

所以矩阵 A 线性无关的特征向量有 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$.
取

$$\xi_1 = \eta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \xi_2 = \eta_2 - \frac{(\eta_2, \xi_1)}{(\xi_1, \xi_1)}\xi_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\xi_3 = \eta_3 - \frac{(\eta_3, \xi_1)}{(\xi_1, \xi_1)}\xi_1 - \frac{(\eta_3, \xi_2)}{(\xi_2, \xi_2)}\xi_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix},\ \xi_4 = \eta_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

则 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ 是矩阵 A 的正交的特征向量组.
再将它们单位化:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\|\xi_1\|}\xi_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \varepsilon_2 = \frac{1}{\|\xi_2\|}\xi_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{\|\xi_3\|}\xi_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{3}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \varepsilon_4 = \frac{1}{\|\xi_4\|}\xi_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

所得的向量 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 是矩阵 A 的标准正交的特征向量组. □

书后习题.10. $P_{178}, Ex3$

证明: 因为 A 是实数域上的矩阵, 所以 $\overline{A} = A$. 而
$A\alpha = \lambda_0\alpha$, 所以 $\overline{A\alpha} = \overline{\lambda_0\alpha}$, 即

$\overline{A\alpha} = \overline{\lambda_0}\overline{\alpha}$, $A\overline{\alpha} = \overline{\lambda_0}\overline{\alpha}$. 即 $\overline{\lambda_0}$ 仍是 A 的一个特征值, $\overline{\alpha}$ 是矩阵 A 的属于特征值 $\overline{\lambda_0}$ 的一个特征向量. □

书后习题.11. $P_{178}, Ex4$

证明: 设矩阵 A 是一个幂零矩阵, 则存在自然数 m, 使得 $A^m = 0$. 从而 $|A| = 0$, 所以 $\lambda = 0$ 是矩阵 A 的一个特征值. 假设矩阵 A 有特征值 λ, 则存在向量 $\alpha \neq 0$, 使得

$A\alpha = \lambda\alpha$, 从而对任意自然数 l,

$A^l\alpha = A^{l-1}(A\alpha) = A^{l-1}(\lambda\alpha) = \lambda A^{l-1}(\alpha) = \lambda^l\alpha$.

即: 如果 λ 是矩阵 A 的特征值, 则 λ^l 是矩阵 A^l 的特征值.

更一般的: 如果 λ 是矩阵 A 的特征值, $f(x)$ 是数域 K 上的一个多项式, 则 $f(\lambda)$ 是矩阵 $f(A)$ 的特征值.

对已知矩阵 A, 由 $A\alpha = \lambda\alpha$ 以及 $A^m = 0$ 知, $\lambda^m\alpha = A^m\alpha = 0$. 而 $\alpha \neq 0$, 从而 $\lambda^m = 0$, 即矩阵 A 的特征值只有 0. □

书后习题.12. $P_{178}, Ex5$

证明: 假设矩阵 A 是数域 K 上的一个幂等矩阵, 则 $A^2 = A$, 从而 $A(I-A) = 0$, $|A||(I-A)| = 0$, 所以 $|A| = 0$ 或 $|I-A| = 0$.

若 $|A| = 0$, 则矩阵 A 有特征值 0; 若 $|I-A| = 0$, 则矩阵 A 有特征值 1.

下面还要证明: 矩阵 A 的特征值只有 1 或 0.

假设矩阵 A 有特征值 λ, 且 α 是矩阵 A 属于特征值 λ 的特征向量, 则 $A\alpha = \lambda\alpha$, $A^2\alpha = \lambda^2\alpha$, 从而 $\lambda\alpha = \lambda^2\alpha$, $(\lambda - \lambda^2)\alpha = 0$, 注意到 $\alpha \neq 0$, 所以 $\lambda - \lambda^2 = 0$, $\lambda = 0$ 或 $\lambda = 1$. 即矩阵 A 的特征值只有 0 或 1. □

书后习题.13. $P_{178}, Ex6$

证明: 设矩阵 A 的特征值为 λ, 则 λ^m 是矩阵 $A^m = I$ 的特征值. 而单位矩阵只有特征值 1, 所以 $\lambda^m = 1$. □

书后习题.14. $P_{178}, Ex8$

证明: (1) 因为矩阵 A 是可逆矩阵, 所以 $|A| \neq 0$. 即 $|0I - A| \neq 0$, 从而 0 不是矩阵 A 的特征值.

(2) 设矩阵 A 是可逆矩阵, λ_0 是其一个特征值, α 是矩阵 A 的属于特征值 λ_0 一个特征向量, 则 $A\alpha = \lambda_0\alpha$, 所以

$A^{-1}(A\alpha) = A^{-1}(\lambda_0\alpha) = A^{-1}(\lambda_0\alpha) = \lambda_0 A^{-1}\alpha$, 即 $\lambda_0 A^{-1}\alpha = (A^{-1}A)\alpha = \alpha$,

而 $\lambda_0 \neq 0$，所以 $A^{-1}\alpha = \lambda_0^{-1}\alpha$. 即 λ_0^{-1} 是矩阵 A^{-1} 的特征值. □

书后习题.15. $P_{178}, Ex10$

证明：设矩阵 A 是 n 级正交矩阵，则 $A'A = AA' = I$.

(1) 如果 A 有特征值，设 λ 是矩阵 A 的一个特征值，α 是矩阵 A 属于特征值 λ 的特征向量，则 $A\alpha = \lambda\alpha$，从而 $(A\alpha)' = (\lambda\alpha)'$，即 $\alpha'A' = \lambda\alpha'$，所以 $(\alpha'A')(A\alpha) = (\lambda\alpha')(\lambda\alpha)$，$\alpha'(A'A)\alpha = \lambda^2(\alpha'\alpha)$. 即 $(\alpha, \alpha) = \lambda^2(\alpha, \alpha)$，注意到 $\alpha \neq 0 (> 0)$，
所以 $\lambda^2 = 1$，$\lambda = 1$ 或 $\lambda = -1$.

(2) 因为 $|1 \cdot I - A| = |AA' - A| = |A(A' - I)| = |A||(A' - I)|$，
而 $|A| = 1$，所以 $|I - A| = |A' - I| = |(A - I)'| = |A - I| = (-1)^n|I - A|$，
再由 n 是奇数，所以 $|I - A| = 0$，即 1 是矩阵 A 的一个特征值. □

(3) 因为 $(-1)^n|I + A| = |(-1)(I + A)| = |(-1) \cdot I - A| = (-1)^n|AA' + A|$
$= (-1)^n|A(A' + I)| = (-1)^n|A||(A' + I)|$
$= (-1)^n|A||(A + I)'| = (-1)^n|A||(A + I)|$，而 $|A| = -1$，
所以 $|I + A| = 0$，即 $|(-1) \cdot I - A| = 0$，-1 是矩阵 A 的一个特征值. □

书后习题.16. $P_{178}, Ex11$

证明：设 α 是矩阵 A 属于特征值 λ_0 的特征向量，则 $A\alpha = \lambda_0\alpha$.

(1) 对任意的 $k \in K$，$(kA)\alpha = k(A\alpha) = k(\lambda_0\alpha) = (k\lambda_0)\alpha$，$k\lambda_0$ 是 (kA) 的一个特征值.

(2) 因为 $A\alpha = \lambda_0\alpha$，所以 $A^2\alpha = A(A\alpha) = A(\lambda_0\alpha) = \lambda_0(A\alpha) = \lambda_0^2\alpha$. 假设对任意正整数 $m = k$，有 $A^k\alpha = \lambda_0^k\alpha$，则 $m = k + 1$ 时，
$A^{k+1}\alpha = A^k(A\alpha) = A^k(\lambda_0\alpha) = \lambda_0(A^k\alpha) = \lambda_0(\lambda_0^k\alpha) = \lambda_0^{k+1}\alpha$.

所以对任意正整数 m，λ_0^m 是矩阵 A^m 的一个特征值.

(3) 利用 (1) 与 (2) 的结论，$f(A)\alpha = f(\lambda)\alpha$. □

书后习题.17. $P_{178}, Ex13$

证明：设 $\lambda_0 \neq 0$ 是矩阵 AB 的一个非 0 特征值，α 是属于特征值 λ_0 的特征向量，则 $(AB)\alpha = \lambda_0\alpha$，从而 $B(AB)\alpha = B(\lambda_0\alpha)$，即
$(BA)(B\alpha) = \lambda_0(B\alpha)$. 如下只要说明：$B\alpha \neq 0$，事实上，如果 $B\alpha = 0$，则 $(AB)\alpha = 0$，但 $\lambda_0\alpha \neq 0$，矛盾. 所以 λ_0 是 BA 的非 0 特征值.

同样可以证明，BA 的非 0 特征值也都是 AB 的特征值. 即 AB 与 BA 有相同的非 0 特征值. $\square$

书后习题.18. $P_{182}, Ex5$

证明：因为 K^n 中的任何一个向量都是矩阵 A 的特征向量，所以矩阵 A 有 n 个线性无关的特征向量，从而矩阵 A 可以对角化.
即存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP = diag\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$，其中 $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ 是矩阵 A 的特征值.
假设 $\lambda_i \neq \lambda_j$，α, β 分别是属于它们的特征向量，则由 $P_{181}, Ex4$ 知，$\alpha + \beta \neq 0$ 不是矩阵 A 的特征向量，这与已知矛盾. 所以 $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n$.
即 $P^{-1}AP = \lambda I$，$A = P(\lambda I)P^{-1} = \lambda I$，$A$ 是数量矩阵. $\square$

书后习题.19. $P_{182}, Ex6$

证明：由 $P_{178}, Ex4$ 的结论，幂零矩阵 A 的特征值只有数 0.
假设 A 可以对角化，则存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP = diag\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$，其中 $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ 是矩阵 A 的特征值.
从而 $P^{-1}AP = 0$，$A = P0P^{-1} = 0$. 矛盾.
所以非零幂零矩阵 A 不可以对角化. $\square$

书后习题.20. $P_{182}, Ex7$

证明：由 $P_{178}, Ex5$ 的结论，幂等矩阵 A 一定有特征值，且特征值为 1 或 0.
如果 $A = 0$ 或 $A = I$，结论显然成立.
假设 $A \neq 0$ 且 $A \neq I$. 利用 $P_{1142}, Ex5$ 的结论，即 $r(A) + r(I - A) = n$ 知，$|A| = 0$ 且 $|I - A| = 0$. 也就是说 0 和 1 都是矩阵 A 的特征值.
记 $r(A) = r$，$r(I - A) = t$，则 $r + t = n$.

由于 $r(A) = r$，所以将特征值 $\lambda = 0$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$ 得 $AX = 0$，其基础解系含有 $n - r$ 个解，即矩阵 A 的属于特征值 $\lambda = 0$ 线性无关的特征向量有 $n - r$ 个.
记作：$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n-r}$

由于 $r(I - A) = t$，所以将特征值 $\lambda = 1$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$ 得 $(I - A)X = 0$，其基础解系含有 $n - t$ 个解，即矩阵 A 的属于特征值 $\lambda = 1$ 线性无关的特征向量有 $n - t = r$ 个.
记作：$\beta_1, \beta_2, ..., \beta_r$.

所以矩阵 A 线性无关的特征向量的个数为 n，矩阵 A 可以对角化，且如果取 $P=(\beta_1,\beta_2,...,\beta_r,\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{n-r})$，则

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以命题成立. □

书后习题.21. $P_{182},Ex8$

证明: 对 n 级矩阵 A, 如果 A 有 n 个特征值 (按重数计算)$\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$, 则 $\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_n=tr(A)$.

利用 $P_{182},Ex7$ 的结论，显然成立. □

书后习题.22. $P_{182},Ex9$

证明: 设矩阵 A 是数域 K 上的对合矩阵，则 $A^2=I$. 从而 $(I+A)(I-A)=0$, $|(I+A)||(I-A)|=0$, 所以 $|(I+A)|=0$ 或者 $|(I-A)|=0$.

如果 $|(I+A)|=0$, 即 $|(-I-A)|=0$, -1 是矩阵 A 的特征值; 如果 $|(I-A)|=0$, 1 是矩阵 A 的特征值.

假设 λ 是矩阵 A 的一个特征值，η 是矩阵 A 的属于特征值 λ 的特征向量. 则 $A\eta=\lambda\eta$. 从而 $I\eta=A(A\eta)=A(\lambda\eta)=\lambda^2\eta$, 所以 $\lambda^2=1$, $\lambda=1$ 或 $\lambda=-1$. 即对合矩阵 A 的特征值是 1 或 -1.

如果，结论显然. 矩阵 A 可以对角化，且相应的标准形就是 I 或 $-I$.

如果 $A\neq I$ 且 $A\neq -I$. 由于 A 是对合矩阵，利用 $P_{142},Ex4$, 则 $r(I+A)+r(I-A)=n$.

在 $A\neq I$ 且 $A\neq -I$ 时，$r(I+A)<n$ 且 $r(I-A)<n$. 记 $r(I-A)=r$, 则 $r(I+A)=n-r$, 且 1 和 -1 都是矩阵 A 的特征值.

将特征值 1 代入齐次线性方程组 $(\lambda I-A)X=0$ 得: $(I-A)X=0$, 则它的基础解系含有 $n-r$ 个解，设为 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{n-r}$, 即矩阵 A 属于特征值 1 的线性无关的特征向量有 $n-r$ 个.

将特征值 -1 代入齐次线性方程组 $(\lambda I-A)X=0$ 得: $(I+A)X=0$, 则它的基础解系含有 $n-(n-r)=r$ 个解，设为 $\beta_1,\beta_2,...,\beta_r$, 即矩阵 A 属于特征值 -1 的线性无关的特征向量有 r 个.

从而矩阵 A 有 $(n-r)+r=n$ 个线性无关的特征向量，所以矩阵 A 可以对角化. 取 $P=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{n-r},\beta_1,\beta_2,...,\beta_r)$，则

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} I_{n-r} & 0 \\ 0 & -I_r \end{pmatrix}$$

□

书后习题.23. $P_{182}, Ex11$

证明：记矩阵 A 属于特征值 λ_1 的特征子空间为 V_{λ_1}，且 $dim(V_{\lambda_1})=r$. 取 V_{λ_1} 的一组基 $\eta_1,\eta_2,...,\eta_r$，由基的扩充定理，可以将 $\eta_1,\eta_2,...,\eta_r$ 扩充为 K^n 的一个基 $\eta_1,\eta_2,...,\eta_r,\delta_1,\delta_2,...,\delta_{n-r}$.

记矩阵 $P=(\eta_1,\eta_2,...,\eta_r,\delta_1,\delta_2,...,\delta_{n-r})$，则 P 是一个可逆矩阵，且
$AP=(A\eta_1,A\eta_2,...,A\eta_r,A\delta_1,A\delta_2,...,A\delta_{n-r})$
$=(\lambda_1\eta_1,\lambda_1\eta_2,...,\lambda_1\eta_r,A\delta_1,A\delta_2,...,A\delta_{n-r})$,
注意到：$A\delta_1,A\delta_2,...,A\delta_{n-r}$ 可以由 $\eta_1,\eta_2,...,\eta_r,\delta_1,\delta_2,...,\delta_{n-r}$ 线性表出，
设为 $(A\delta_1,A\delta_2,...,A\delta_{n-r})=(\eta_1,\eta_2,...,\eta_r,\delta_1,\delta_2,...,\delta_{n-r})B$,
其中矩阵 B 是一个 $n\times(n-r)$ 矩阵.

从而 $AP=(\eta_1,\eta_2,...,\eta_r,\delta_1,\delta_2,...,\delta_{n-r})(C\ B)=P(C\ B)$,
其中 $C=\begin{pmatrix} \lambda_1 I_r \\ 0 \end{pmatrix}$.
$P^{-1}AP=(C\ B)$，矩阵 A 相似于 $(C\ B)$. 而矩阵 $(C\ B)$ 的特征多项式为
$|\lambda I-(C\ B)|=\begin{vmatrix} (\lambda-\lambda_1)I_r & B_1 \\ 0 & (\lambda I-B_2) \end{vmatrix}=(\lambda-\lambda_1)^r|\lambda I-B_2|$,
所以 λ_1 至少是矩阵 $(C\ B)$ 的特征多项式的 r 重根，即 λ_1 至少是矩阵 $(C\ B)$ 的代数重数为 r，也就是 λ_1 是矩阵 A 的代数重数至少为 r.

所以，特征值的几何重数不超过代数重数. □

书后习题.24. $P_{187}, Ex1, (4)$

解：矩阵 A 的特征多项式为：

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-4 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & \lambda-4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda-4 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & \lambda-4 \end{vmatrix}$$

$$\triangleq \begin{vmatrix} B & C \\ C & B \end{vmatrix}$$

因为 $BC = CB$，利用 $P_{143}, Ex15$ 的结论，则

$$\begin{vmatrix} B & C \\ C & B \end{vmatrix} = |B^2 - C^2| = |(B+C)||(B-C)| = (\lambda-4)^2(\lambda-6)(\lambda-2).$$

矩阵 A 有三个不同的特征值：$\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = 2.$

将 $\lambda_1 = 4$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$ 得：

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0$$

同解与：

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0$$

有基础解系：

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \eta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

将 $\lambda_2 = 6$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$ 得：

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0$$

同解与：

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0$$

有基础解系：

$$\eta_3=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

将 $\lambda_3=2$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I-A)X=0$ 得：

$$\begin{pmatrix}-2&-1&0&1\\-1&-2&1&0\\0&1&-2&-1\\1&0&-1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_4\\x_4\end{pmatrix}=0$$

同解与：

$$\begin{pmatrix}-2&-1&0&1\\-1&-2&1&0\\0&1&-2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_4\\x_4\end{pmatrix}=0$$

有基础解系：

$$\eta_4=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

将它们正交化，单位化得

$$\xi_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix},\quad \xi_1=\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\quad \xi_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix},\quad \xi_4=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

记

$$T=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

则：

$$T^{-1}AT = diag\{4,4,6,2\}$$

□

书后习题.25. $P_{187}, Ex4$

证明：因为矩阵 A 是 $s\times n$ 实矩阵，所以矩阵 $A'A$ 是一个实对称矩阵. 所以存在正交矩阵 T，使得

$$T^{-1}A'AT = diag\{\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n\},$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ 是矩阵 $A'A$ 的实特征值.

由于 T 是正交矩阵，所以 $T^{-1}=T'$. 从而

$$T^{-1}A'AT = T'A'AT = (AT)'(AT),$$

即

$$(AT)'(AT) = diag\{\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n\}.$$

记 $AT=(t_{ij})$，则 $(AT)'(AT)$ 的主对角元素 (i,i) 为:

$$\sum_{k=1}^{n} t_{ki}^2 \ge 0,$$

所以

$$\lambda_i = \sum_{k=1}^{n} t_{ki}^2 \ge 0,$$

即矩阵 $A'A$ 的特征值都是非负数. □

书后习题.26. $P_{187}, Ex5$

证明：对矩阵的级数 n 进行归纳.

$n=1$ 时，结论显然成立.

假设对任意 $n-1$ 级矩阵，结论成立.

对 n 级实矩阵 A，由于 A 的特征多项式的根都是实数，所以 A 有实特征值 λ_1. 从而存在向量 $\eta_1\in R^n$，满足：

$$|\eta_1|=1,\quad A\eta_1=\lambda_1\eta_1$$

由基的扩充定理，存在 $\alpha_2,...,\alpha_n\in R^n$，使得 $\eta_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ 是 R^n 的一个基. 经过施密特正交化和单位化，可以得到一组单位正交向量组 $\eta_1,\eta_2,...,\eta_n$，记

$$T_1=(\eta_1,\eta_2,...,\eta_n),$$

则 T_1 是一个 n 级正交矩阵，且

$$AT_1=(A\eta_1,A\eta_2,...,A\eta_n)=(\lambda_1\eta_1,A\eta_2,...,A\eta_n),$$

由于 $\eta_1,\eta_2,...,\eta_n$ 是 R^n 的基，所以存在一个 $n\times(n-1)$ 矩阵 B，使得

$$(A\eta_2,...,A\eta_n)=(\eta_1,\eta_2,...,\eta_n)B$$

记

$$B=\begin{pmatrix}\beta\\B_1\end{pmatrix},$$

其中 β 是矩阵 B 的第一行组成在子块，B_1 是矩阵 B 的后 $n-1$ 行组成在子块. 则

$$AT_1=(\eta_1,\eta_2,...,\eta_n)\begin{pmatrix}\lambda_1&\beta\\0&B_1\end{pmatrix}=T_1\begin{pmatrix}\lambda_1&\beta\\0&B_1\end{pmatrix},$$

$$T_1^{-1}AT_1=\begin{pmatrix}\lambda_1&\beta\\0&B_1\end{pmatrix}$$

由于 $|\lambda I-A|=\left|\lambda I-\begin{pmatrix}\lambda_1&\beta\\0&B_1\end{pmatrix}\right|=(\lambda-\lambda_1)|\lambda I_{n-1}-B_1|$，所以 $n-1$ 级矩阵 B_1 的特征多项式 $|\lambda I_{n-1}-B_1|$ 的根也都是实数. 由归纳，存在 $n-1$ 级正交矩阵 T_2，使得 $T_2^{-1}B_1T_2=C$，C 是一个上三角形矩阵. 记

$$T=T_1\begin{pmatrix}1&0\\0&T_2\end{pmatrix},$$

则 T 仍是一个正交矩阵，且

$$T^{-1}AT=\left(T_1\begin{pmatrix}1&0\\0&T_2\end{pmatrix}\right)^{-1}A\left(T_1\begin{pmatrix}1&0\\0&T_2\end{pmatrix}\right)$$

$$=\begin{pmatrix}1&0\\0&T_2\end{pmatrix}^{-1}(T_1^{-1}AT_1)\begin{pmatrix}1&0\\0&T_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&T_2^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1&\beta\\0&B_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&T_2\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & \beta \\ 0 & T_2^{-1}B_1T_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \beta \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

是一个上三角形矩阵.

由归纳法原理，结论成立. $\square$