高等代数习题解答

(北京大学丘维声教授编著的教材)

宿州学院数学系代数教研室

第 8 章：线性空间

书后习题.1. $P_{81}, Ex1, (2), Ex3$

解：$V = R^+$ 是一个非空集，且运算

$$\oplus: \ \forall a, b \in R^+, a \oplus b \overset{def}{=\!=} ab \in R^+;$$
$$\odot: \ \forall a \in R^+, \ k \in R, k \odot a \overset{def}{=\!=} a^k \in R^+,$$

满足：$\forall a, b, c \in R^+, \ k, l \in R$,

$1°(a \oplus b) \oplus c = (ab)c = a(bc) = a \oplus (b \oplus c)$，结合律成立；

$2° a \oplus b = ab = ba = b \oplus a$，交换律成立；

$3° \ 1 \in R^+$，满足：$1 \oplus a = 1 \cdot a = a$，$1$ 是 $(R^+ \oplus)$ 的 0 元；

$4°$ 对任意的 $a \in R^+$，存在 $\frac{1}{a} \in R^+$，满足：$a \oplus \frac{1}{a} = a \cdot \frac{1}{a} = 1$，$\frac{1}{a}$ 是 a 在 $(R^+ \oplus)$ 中的逆元；

$5° \ 1 \odot a = a^1 = a$;

$6° \ (kl) \odot a = a^{kl} = (a^k)^l = l \odot (k \odot a)$;

$7° \ (k + l) \odot a = a^{(k+l)} = a^k a^l = a^k \oplus a^l = k \odot a \oplus l \odot a$;

$8° \ k \odot (a \oplus b) = (ab)^k = a^k b^k = a^k \oplus b^k = k \odot a \oplus k \odot b$;

所以，R^+ 按所定义的运算构成 R 上的一个线性空间.

$2 \in R^+$，且 $2 \neq 1$ 是 R^+ 中的非 0 元，本身线性无关.

任意的 $a \in R^+$，存在 $\log_2^a \in R$，使得

$$a = 2^{\log_2^a} = \log_2^a \odot a$$

即任意的 $a \in R^+$ 都可以由 2 线性表出.

所以 2 是 R^+ 的一个基, R^+_R 是 1 维的. $\square$

书后习题.2. $P_{81}, Ex2$

解:

(1) 线性相关. $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$;

(2) 线性无关.

考虑组合 $x_1 \cdot 1 + x_2 \cos x + x_3 \cos 2x + x_4 \cos 3x = 0$,
分别取 $x = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi$ 得:

$$(1) \quad \begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = 0 \\ x_1 & +\frac{1}{2}x_2 & -\frac{1}{2}x_3 & -x_4 & = 0 \\ x_1 & & -x_3 & & = 0 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & -x_4 & = 0 \end{cases}$$

其系数行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$$

所以 (1) 只有 0 解, 从而 $1, \cos x,\ \cos 2x,\ \cos 3x$ 线性无关.

(3) 线性无关.

考虑组合 $x_1 \cdot 1 + x_2 \sin x + x_3 \cos x = 0$, 分别取 $x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$ 得:

$$\begin{cases} x_1 & & +x_3 & = 0 \\ x_1 & +x_2 & & = 0 \\ x_1 & & -x_3 & = 0 \end{cases}$$

其只有 0 解.

所以 $1, \sin x, \cos x$ 线性无关.

(4) 线性无关.

考虑组合 $x_1 \sin x + x_2 \cos x + x_3 \sin^2 x + x_4 \cos^2 x = 0$,
分别取 $x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ 得:

$$(2)\quad \begin{cases} \quad\ x_2 \qquad\quad +x_4 = 0 \\ x_1 \qquad +x_3 \qquad = 0 \\ \quad -x_2 \qquad\quad +x_4 = 0 \\ -x_1 \qquad +x_3 \qquad = 0 \end{cases}$$

显然 (2) 只有 0 解.
所以 $\sin x, \cos x, \sin^2 x, \cos^2 x$ 线性无关.

(5) 线性无关.

考虑组合 $x_1 \cdot 1 + x_2 e^x + x_3 e^{2x} + ... + x_{n+1} e^{nx} = 0$,
两边同时取 $1, 2, ..., n$ 阶导数，得：

$$(3)\quad \begin{cases} x_1 \cdot 1 & +x_2 e^x & +x_3 e^{2x} & +\cdots & +x_{n+1} e^{nx} & = 0 \\ & x_2 e^x & +2x_3 e^{2x} & +\cdots & +n x_{n+1} e^{nx} & = 0 \\ & x_2 e^x & +2^2 x_3 e^{2x} & +\cdots & +n^2 x_{n+1} e^{nx} & = 0 \\ & \vdots & & & & \vdots \\ & x_2 e^x & +2^n x_3 e^{2x} & +\cdots & +n^n x_{n+1} e^{nx} & = 0 \end{cases}$$

取 $x = 0$，由 (3) 得：

$$(4)\quad \begin{cases} x_1 \cdot 1 & +x_2 & +x_3 & +\cdots & +x_{n+1} & = 0 \\ & x_2 & +2x_3 & +\cdots & +n x_{n+1} & = 0 \\ & x_2 & +2^2 x_3 & +\cdots & +n^2 x_{n+1} & = 0 \\ & \vdots & & & & \vdots \\ & x_2 & +2^n x_3 & +\cdots & +n^n x_{n+1} & = 0 \end{cases}$$

它的系数行列式为：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 2^2 & \cdots & n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 1 & 2^n & \cdots & n^n \end{vmatrix}_{n+1} = n! \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2^2 & \cdots & n^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 2^{n-1} & \cdots & n^{n-1} \end{vmatrix}_n$$

是范得蒙行列式，$\neq 0$，(4) 只有 0 解.
所以 $1, e^x, e^{2x}, ..., e^{nx}$ 线性无关.

(6) 线性无关.

考虑组合 $x_1 x^2 + x_2 x|x| = 0$，分别取 $x = 1, -1$ 得：

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & =0 \\ x_1 & -x_2 & =0 \end{cases}$$

其只有 0 解.

所以 $x^2, x|x|=0$ 线性无关. □

书后习题.3. $P_{81}, Ex4$

解:

把复数域 C 看成实数域 R 上的线性空间 C_R, 则:

(1) 它有线性无关的向量组 1, i;

(2) C 中的任何一个复数 α, 都有 $\alpha = a\cdot 1 + b\cdot i$, α 可以由 1, i 线性表出, a, b 分别是 α 的实部和虚部;

所以, 1, i 是 C_R 的一个基, C_R 是 2 维的. □

书后习题.4. $P_{81}, Ex5$

解:

数域 K 按其自身的运算构成自身上的一个线性空间 K_K,

(1) $1 \in K$ 是 K 中的一个非零向量, 线性无关;

(2) K 中任何一个元素 a, 都有 $a = a \cdot 1$, 即 a 可以由 1 线性表出;

所以, 1 是 K_K 的一个基, K_K 是 1 维的. □

书后习题.5. $P_{82}, Ex6, 7, 8$

解:

数域 K 上的所有 n 级对称阵 V_1, 斜对称阵 V_2, 上三角阵 V_3 对矩阵的加法和纯量乘法都是封闭的, 即: 两个对称阵, 斜对称阵, 上三角阵之和仍相应的是对称阵, 斜对称阵, 上三角阵, 一个数与对称阵, 斜对称阵, 上三角阵的数量积仍相应的是对称阵, 斜对称阵, 上三角阵.

且它们很自然的满足线性空间的 8 条公理, 所以它们都是数域 K 上的线性空间.

对于 V_1, 向量集 $\{E_{11}, E_{22}, ..., E_{nn}\} \cup \{E_{ij} + E_{ji} | 1 \le i < j \le n\}$ 在 V_1 中是线性无关的, 且 V_1 中的每一个对称矩阵都可以表示为它们的组合, 也就是说: $\{E_{11}, E_{22}, ..., E_{nn}\} \cup \{E_{ij} + E_{ji} | 1 \le i < j \le n\}$ 是 V_1 的一个基.

V_1 是 $\frac{n(n+1)}{2}$ 维的.

对于 V_2，向量集 $\{E_{ij}-E_{ji}|1\leq i<j\leq n\}$ 在 V_2 中是线性无关的，且 V_2 中的每一个斜对称矩阵都可以表示为它们的组合，也就是说：$\{E_{ij}-E_{ji}|1\leq i<j\leq n\}$ 是 V_2 的一个基.

V_2 是 $\frac{n(n-1)}{2}$ 维的.

对于 V_3，向量集 $\{E_{ij}|1\leq i\leq j\leq n\}$ 在 V_3 中是线性无关的，且 V_3 中的每一个对称矩阵都可以表示为它们的组合，也就是说：$\{E_{ij}+E_{ji}|1\leq i\leq j\leq n\}$ 是 V_3 的一个基.

V_3 是 $\frac{n(n+1)}{2}$ 维的.

其中，E_{ij} 是基本矩阵. $\square$

书后习题.6. $P_{82}, Ex10$

证明: 因为 V_K 是 n 维的, 所以 V 有一个含有 n 个向量的基 $\beta_1,\beta_2,...,\beta_n$; 又因为 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ 可以表出任何 V 中的任何向量，所以 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ 与 $\beta_1,\beta_2,...,\beta_n$ 等价，而等价向量组有相同的秩，所以 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ 的秩为 n，即 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ 的秩等于它的向量个数，所以 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ 线性无关，所以 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ 是 V 的一个基. $\square$

书后习题.7. $P_{82}, Ex11$

解: 任取 $f\in F^X$，由于 $X=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ 是一个有限集，所以函数 f 完全由它在 $\{x_1,x_2,...,x_n\}$ 各点处的 F 值确定.

在 F^X 中，取 n 个 F 值函数

$$f_i(x_j)=\delta_{ij},\ i=1,2,...,n;\ j=1,2,...,n$$

其中 $\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$.

首先说明 F^X 中的向量组 $f_1,f_2,...,f_n$ 线性无关. 考虑组合

$$k_1f_1+k_1f_2+...+k_nf_n=0$$

注意到 X 上的 0 函数是在任意的 x_i 点取值均是 0 的函数，$i=1,2,...,n$. 考虑函数

$$k_1f_1+k_1f_2+...+k_nf_n$$

在 x_i 点的取值. 由 f_i 的定义知，在函数 $f_1,f_2,...,f_n$ 中，只有 f_i 在 x_i 点处的取值为 1，其余的在 x_i 点处的取值均为 0. 所以

$$(k_1f_1+k_1f_2+...+k_nf_n)(x_i)=(k_1f_1)(x_i)+k_1f_2(x_i)+...+k_nf_n(x_i)=k_i$$

所以若

$$k_1f_1+k_1f_2+...+k_nf_n=0$$

则必有 $k_i=0$，$i=1,2,...,n$.

所以 $f_1,f_2,...,f_n$ 线性无关.

再，任取 $f\in F^X$，并设 f 在 $\{x_1,x_2,...,x_n\}$ 各点处的取值分别为

$$f(x_1),f(x_2),...,f(x_n),$$

则有

$$f=f(x_1)f_1+f(x_2)f_2+...+f(x_n)f_n,$$

即 f 可以由 $f_1,f_2,...,f_n$ 线性表出.

所以 $f_1,f_2,...,f_n$ 是 F^X 的一个基，F^X 是 n 维的. □

书后习题.8. $P_{82},Ex12$

证明：

(1) 验证性的证明. 只要直接计算.

(2)$\{E_{11}-E_{22},E_{12}+E_{21},i(E_{12}-E_{21})\}=\{\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&i\\-i&0\end{pmatrix}\}$

是 V 中的向量组，且如果组合

$$x_1(E_{11}-E_{22})+x_2(E_{12}+E_{21})+x_3[i(E_{12}-E_{21})]=0,$$

即

$$\begin{pmatrix}x_1&x_2+ix_3\\x_2-ix_3&-x_1\end{pmatrix}=0$$

从而有

$$x_1=x_2=x_3=0,$$

所以 $\{E_{11}-E_{22},E_{12}+E_{21},i(E_{12}-E_{21})\}$ 在 V 中线性无关.

再，任意的

$$\begin{pmatrix}x_1&x_2+ix_3\\x_2-ix_3&-x_1\end{pmatrix}\in V,$$

都有

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2+ix_3 \\ x_2-ix_3 & -x_1 \end{pmatrix} = x_1(E_{11}-E_{22})+x_2(E_{12}+E_{21})+x_3[i(E_{12}-E_{21})]$$

即 V 中的任何一个向量都可以由 $\{E_{11}-E_{22}, E_{12}+E_{21}, i(E_{12}-E_{21})\}$ 线性表出.

所以 $\{E_{11}-E_{22}, E_{12}+E_{21}, i(E_{12}-E_{21})\}$ 是 V 的一个基. V 是 3 维的.

(3) 任意的

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2+ix_3 \\ x_2-ix_3 & -x_1 \end{pmatrix} \in V,$$

则

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 & x_2+ix_3 \\ x_2-ix_3 & -x_1 \end{pmatrix} &= x_1(E_{11}-E_{22})+x_2(E_{12}+E_{21})+x_3[i(E_{12}-E_{21})] \\ &= \big((E_{11}-E_{22}),(E_{12}+E_{21}),i(E_{12}-E_{21})\big)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

即 $\begin{pmatrix} x_1 & x_2+ix_3 \\ x_2-ix_3 & -x_1 \end{pmatrix}$ 在基 $(E_{11}-E_{22}),(E_{12}+E_{21}),i(E_{12}-E_{21})$ 之下的坐标为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

□

书后习题.9. $P_{91}, Ex2, 3, 4$

证明： 任取 $B_1, B_2 \in C(A)$，$k \in K$，由 $C(A)$ 的意义可知，

$$B_1A = AB_1, B_2A = AB_2,$$

且

$(B_1+B_2)A = B_1A+B_2A = AB_1+AB_2 = A(B_1+B_2)$，$(B_1+B_2) \in C(A)$，

即 $C(A)$ 对 $M_n(K)$ 的加法封闭；再，

$$(kB_1)A = k(B_1A) = k(AB_1) = A(kB_1),\ kB_1 \in C(A),$$

即 $C(A)$ 对 $M_n(K)$ 的数量乘法封闭；

所以 $C(A)$ 是 $M_n(K)$ 的一个子空间.

若 $A = diag\{a_1, a_2, ..., a_n\}$，由上册教材 $P_{122}, Ex1$ 的结论知，$C(A)$ 是 K 上的 n 级对角阵组成的集合，即

$$C(A) = \{diag\{k_1, k_2, ..., k_n\} | k_i \in K\}.$$

这时，E_{ii}，$i = 1, 2, ..., n$ 是 $C(A)$ 中的元素 (E_{ii} 为基本矩阵)，且

1° $E_{11}, E_{22}, ..., E_{nn}$ 在 $C(A)$ 中线性无关；

2° 任意的 $B \in C(A)$，则 B 是对角阵，可设 $B = diag\{b_1, b_2, ..., b_n\}$，从而

$$B = b_1 E_{11} + b_2 E_{22} + ... + b_n E_{nn},$$

即 B 可以由 $E_{11}, E_{22}, ..., E_{nn}$ 线性表出.

所以 $E_{11}, E_{22}, ..., E_{nn}$ 是 $C(A)$ 的一个基，$C(A)$ 是 n 维的.

如果取 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$，任取 $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \in C(A)$，则

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

即

$$\begin{pmatrix} b_{31} & b_{32} & b_{33} \\ b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 4b_{11} - 2b_{21} + b_{31} & 4b_{12} - 2b_{22} + b_{32} & 4b_{13} - 2b_{23} + b_{33} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} b_{12} + 4b_{13} & -2b_{13} & b_{11} + b_{13} \\ b_{22} + 4b_{23} & -2b_{23} & b_{21} + b_{23} \\ b_{32} + 4b_{33} & -2b_{33} & b_{31} + b_{33} \end{pmatrix}$$

比较两边的元素，得

$$\begin{cases} b_{31} & = & b_{12}+4b_{13} \\ b_{32} & = & -2b_{13} \\ b_{33} & = & b_{11}+b_{13} \\ b_{11} & = & b_{22}+4b_{23} \\ b_{12} & = & -2b_{23} \\ b_{13} & = & b_{21}+b_{23} \\ 4b_{11}-2b_{21}+b_{31} & = & b_{32}+4b_{33} \\ 4b_{12}-2b_{22}+b_{32} & = & -2b_{33} \\ 4b_{13}-2b_{23}+b_{33} & = & b_{31}+b_{33} \end{cases}$$

解得：它有三个自由未知量 b_{11}, b_{12}, b_{13}，矩阵 B 的其它位置的元素都可以由这三个位置的元素确定，分别取

$$\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ b_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

得

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

是 $C(A)$ 的一个基，$C(A)$ 是 3 维的. □

书后习题.10. $P_{91}, Ex7$

证明：记 $A = (a_{ij})_{n\times s}$，$A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$，$j = 1, 2, ..., s$ 是 A 的列向量.

设 A 的秩为 r，则 A 有 r 列线性无关，且 A 的任意 $r+1$ 列都线性相关. 不妨设 A 的前 r 列线性无关，由于

$$(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_s) = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)A,$$

所以

$$\beta_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\alpha_i, \ j = 1, 2, ..., s$$

考虑 $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_r$ 的线性组合

$$x_1\beta_1+x_2\beta_2+...+x_r\beta_r=0,$$

即

$$\sum_{j=1}^{r}x_j\big(\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\alpha_i\big)=0,$$
$$\sum_{i=1}^{n}\big(\sum_{j=1}^{r}a_{ij}x_j\big)\alpha_i=0,$$

注意到 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ 线性无关，所以有

$$\sum_{j=1}^{r}a_{ij}x_j=0,\ i=1,2,...,n$$

也就是

$$\sum_{j=1}^{r}x_jA_j=0,$$

而 A 的前 r 列线性无关，所以 $x_j=0,\ j=1,2,...,r$，从而 $\beta_1,\beta_2,...,\beta_r$ 线性无关.

下证，$\beta_1,\beta_2,...,\beta_s$ 任意 $r+1$ 个向量都线性相关.

任取 $\beta_1,\beta_2,...,\beta_s$ 中 $r+1$ 个向量 $\beta_{j_1},\beta_{j_2},...,\beta_{j_{r+1}}$,，考虑

$$y_1\beta_{j_1}+y_2\beta_{j_2}+...+y_{r+1}\beta_{j_{r+1}}=0$$

由于

$$(\beta_1,\beta_2,...,\beta_s)=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)A,$$

所以

$$\beta_{j_l}=\sum_{i=1}^{n}a_{ij_l}\alpha_i,\ l=1,2,...,r+1$$

所以

$$\sum_{l=1}^{r+1}y_l\beta_{j_l}=\sum_{l=1}^{r+1}y_l\big(\sum_{i=1}^{n}a_{ij_l}\alpha_i\big)=\sum_{i=1}^{n}\big(\sum_{l=1}^{r+1}a_{ij_l}y_l\big)\alpha_i$$

令

$$\sum_{l=1}^{r+1}a_{ij_l}y_l=0,\ i=1,2,...,n,$$

则有 $\sum\limits_{l=1}^{r+1}y_l\beta_{j_l}=0$ 成立.

注意到 A 的任意 $r+1$ 列都是线性相关的，且由

$$\sum_{l=1}^{r+1}a_{ij_l}y_l=0,\ i=1,2,...,n,$$

知
$$\sum_{l=1}^{r+1} y_l A_{j_l} = 0,$$
所以存在不全为 0 的 y_l, $l = 1, 2, ..., r+1$, 使得
$$\sum_{l=1}^{r+1} y_l A_{j_l} = 0,$$
成立. 也就是存在不全为 0 的 y_l, $l = 1, 2, ..., r+1$, 使得
$$\sum_{l=1}^{r+1} y_l \beta_{j_l} = 0$$
成立. 所以 β_{j_l}, $l = 1, 2, ..., r+1$ 线性相关. 从而 $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_s$ 的秩为 r. □

书后习题.11. $P_{91}, Ex8$

证明: 由于其符号差 $s > 0$, 所以 $p > n - p$.

取 $f(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ 的解
$$\alpha_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_{p+1}, \alpha_2 = \varepsilon_2 + \varepsilon_{p+2}, ..., \alpha_{n-p} = \varepsilon_{n-p} + \varepsilon_n$$
其中 ε_i 是 R^n 中的标准向量. 显然, α_i, $i = 1, 2, ..., n-p$ 都是 $f(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ 的解, 且它们的任意组合
$$l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + ... + l_{n-p}\alpha_{n-p} = (l_1, \cdots, l_{n-p}, 0, \cdots, 0, l_1, \cdots, l_{n-p})'$$
仍是 $f(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ 的解. 记
$$W_1 = <\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n-p}>,$$
则 W_1 是 $f(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ 的解集 W 的一个子集, 且 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n-p}$ 线性无关, 所以 W_1 是 $n - p$ 维的, $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n-p}$ 是它的一个基. □

书后习题.12. $P_{91}, Ex9$

证明: 如果 V_i $i = 1, 2$ 中有一个是另一个的子集, 结论显然成立.

假设 V_i $i = 1, 2$ 中任何一个都不是另一个的子集. 因为 V_i $i = 1, 2$ 是 V 的真子集, 所以存在
$$\alpha \in V_1, \alpha \overline{\in} V_2; \ \beta \in V_2, \beta \overline{\in} V_1,$$
则 $\alpha + \beta \in V$.

如果 $\alpha + \beta \in V_1 \cup V_2$, 则有 $\alpha + \beta \in V_1$ 或 $\alpha + \beta \in V_2$.

若 $\alpha + \beta \in V_1$, 则 $\beta = (\alpha + \beta) - \alpha \in V_1$, 矛盾.

若 $\alpha+\beta\in V_2$，则 $\alpha=(\alpha+\beta)-\beta\in V_2$，矛盾.

所以，$\alpha+\beta\overline{\in}V_1\cup V_2$，$V_1\cup V_2\neq V$. □

书后习题.13. $P_{91}, Ex10$

证明：对子空间的个数 s 进行归纳.

$s=2$，由上一习题的结论，命题成立.

假设 $s=k$ 时，命题真.

即，对 V 中 k 个真子空间 $V_1, V_2, ..., V_k$，有 $\bigcup\limits_{i=1}^{k} V_i\neq V$.

在 $s=k+1$ 时，利用归纳假定，$\bigcup\limits_{i=1}^{k} V_i\neq V$. 从而存在

$$\alpha_0\in V \text{ 且 } \alpha_0\overline{\in}\bigcup_{i=1}^{k} V_i.$$

如果 $\alpha_0\overline{\in}V_{k+1}$，则 $\alpha_0\overline{\in}\bigcup\limits_{i=1}^{k+1} V_i$，$\bigcup\limits_{i=1}^{k+1} V_i\neq V$；

如果 $\alpha_0\in V_{k+1}$，因为 V_{k+1} 是 V 的真子空间，所以存在 $\beta\in V, \beta\overline{\in}V_{k+1}$，构作集合

$$W=\{l\alpha_0+\beta|l\in F\},$$

因为 F 的特征是 0，所以 F 是一个无限域，从而 W 是一个无限集. 且对任意的 $l\in F$，都有 $l\alpha_0+\beta\overline{\in}V_{k+1}$.

下证：V_i，$i=1,2,...,k$ 中至多有一个向量在 W 中.

如果在 V_i，$i=1,2,...,k$ 有两个向量 $\gamma_1,\gamma_2\in W$ 且 $\gamma_1,\gamma_2\in V_i, \gamma_1\neq\gamma_2$，则存在 l_i，$i=1,2$，$l_1\neq l_2$，使得

$$\gamma_1=l_1\alpha_0+\beta,\ \gamma_2=l_2\alpha_0+\beta,$$

从而 $\gamma_1-\gamma_2=(l_1-l_2)\alpha_0\in V_i, 1\leq i\leq k$.

由于 V_i 是子空间，从而 $\gamma_1-\gamma_2\in V_i$，注意 $l_1-l_2\neq 0$，所以 $\alpha_0\in V_i$ 与 $\alpha_0\overline{\in}\bigcup\limits_{i=1}^{k} V_i$ 矛盾.

所以存在 $\alpha\in W$, 使得 $\alpha\overline{\in}\bigcup\limits_{i=1}^{k+1} V_i$，从而 $\bigcup\limits_{i=1}^{k+1} V_i\neq V$. □

书后习题.14. $P_{91}, Ex11$

解：以 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ 为列向量构作矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&1&1\\-1&3&2&3\\0&1&0&1\\1&-3&-2&-3\end{pmatrix}$$

对矩阵 A 实施初等行变换，A 可以化为

$$A\to\begin{pmatrix}1&-2&1&1\\0&1&3&4\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

所以 $r(A)=3$，从而

$$V_1+V_2=<\alpha_1,\alpha_2>+<\beta_1,\beta_2>=<\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2>,$$

它是 3 维的，$\alpha_1,\alpha_2,\beta_1$ 线性无关是 V_1+V_2 的一个基.

再，$\beta_2=2\alpha_1+\alpha_2+\beta_1$，所以 $\beta_2-\beta_1=2\alpha_1+\alpha_2\in V_1\cap V_2$.

注意到 V_1,V_2 都是 2 维的，且 V_1+V_2 是 3 维的，所以 $V_1\cap V_2$ 是 1 维的，从而 $0\neq\beta_2-\beta_1\in V_1\cap V_2$ 是 $V_1\cap V_2$ 的一个基. □

书后习题.15. $P_{92},Ex12$

解：以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$ 为列向量构作一个矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0&1&4\\1&-1&-3&2&-3\\-1&3&5&2&3\\2&0&-4&1&1\end{pmatrix}$$

对矩阵 A 实施初等行变换，A 可以化为

$$A\to\begin{pmatrix}1&0&-2&0&1\\0&1&1&0&2\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

所以 $r(A)=3$，从而

$$V_1+V_2=<\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3>+<\beta_1,\beta_2>=<\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2>,$$

它是 3 维的，$\alpha_1,\alpha_2,\beta_1$ 线性无关是 V_1+V_2 的一个基.

再，$\beta_2=\alpha_1+2\alpha_2-\beta_1$，所以 $\beta_2+\beta_1=\alpha_1+2\alpha_2\in V_1\cap V_2$.

注意到 V_1,V_2 都是 2 维的，且 V_1+V_2 是 3 维的，所以 $V_1\cap V_2$ 是 1 维的，从而 $0\neq\beta_2+\beta_1\in V_1\cap V_2$ 是 $V_1\cap V_2$ 的一个基. □

书后习题.16. $P_{92},Ex13$

证明：由线性方程组的理论知：

$$V_1=<\varepsilon_1-\varepsilon_2,\varepsilon_1-\varepsilon_3,...,\varepsilon_1-\varepsilon_n>,$$
$$V_2=<\varepsilon_1+\varepsilon_2+...+\varepsilon_n>,$$

其中 ε_i 是 K^n 中的标准单位向量.

由于 $\varepsilon_1-\varepsilon_2,\varepsilon_1-\varepsilon_3,...,\varepsilon_1-\varepsilon_n$ 线性无关，所以 $\varepsilon_1-\varepsilon_2,\varepsilon_1-\varepsilon_3,...,\varepsilon_1-\varepsilon_n$ 是 V_1 的一个基.

单个向量 $\varepsilon_1+\varepsilon_2+...+\varepsilon_n$ 是 V_2 的一个基.

再，$\varepsilon_1-\varepsilon_2,\varepsilon_1-\varepsilon_3,...,\varepsilon_1-\varepsilon_n,\varepsilon_1+\varepsilon_2+...+\varepsilon_n$ 线性无关，它是 V 的一个基. 即 V_1 与 V_2 的基合在一起是 V 的基.

所以 $V=V_1\oplus V_2$. □

书后习题.17. $P_{92},Ex15$

证明：(*1*) 首先 $0\in M_n^0(K)$，$M_n^0(K)\neq\emptyset$.

任意的 $A,B\in M_n^0(K)$，$k\in K$，则 $tr(A)=tr(B)=0$，而

$$tr(A+B)=tr(A)+tr(B),tr(kA)=ktr(A),$$

所以，$A+B,kA\in M_n^0(K)$. $M_n^0(K)$ 是 $M_n(K)$ 的一个子空间.

(*2*) 任意的 $A\in M_n(K)$，记 $B=[\frac{1}{n}tr(A)]I\in<I>$，则 $tr(A-B)=tr(A)-tr(B)=0$，$A-B\in M_n^0(K)$，$A=B+(A-B)$.

所以，$M_n(K)=<I>+M_n^0(K)$；

再任意的 $A\in<I>\cap M_n^0(K)$，则 $A=aI$ 且 $tr(A)=an=0$，$a=0$. 即 $A=0$.

所以 $<I>\cap M_n^0(K)=0$.

所以 $M_n(K)=<I>\oplus M_n^0(K)$. □

书后习题.18. $P_{92},Ex16$

证明：设 $K^n = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s}$，则特征子空间 V_{λ_i}，$i = 1, 2, ..., s$ 的基合在一起就是 K^n 的基. 而 V_{λ_i}，$i = 1, 2, ..., s$ 的基都是 A 的特征向量，所以 A 有 n 个线性无关的特征向量，从而 A 可以对角化.

设 A 可以对角化，则 A 有 n 个线性无关的特征向量，设它们分别属于特征值 λ_i，$i = 1, 2, ..., s$. 并记属于特征值 λ_i，$i = 1, 2, ..., s$ 的线性无关的特征向量为 $\alpha_{i1}, ..., \alpha_{il_i}$，即 $V_{\lambda_i} =< \alpha_{i1}, ..., \alpha_{il_i} >$.

由于属于不同特征值的特征向量线性无关，所以 $l_1 + ... + l_s = n$. 从而 V_{λ_i}，$i = 1, 2, ..., s$ 的基合在一起就是 K^n 的基. 从而 $K^n = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s}$. □

书后习题.19. $P_{92}, Ex17$

证明：(*1*) 显然 W_i，$i = 1, 2$ 都是 K^n 的子空间，且 W 也是 K^n 的子空间. 又 $W_i \subset W$，$i = 1, 2$，所以 W_i，$i = 1, 2$ 都是 W 的子空间.

(*2*) 如果 $(f_1(x), f_2(x)) = 1$，则存在 $u(x), v(x)$，使得

$$u(x)f_1(x) + v(x)f_2(x) = 1,$$

从而

$$u(A)f_1(A) + v(A)f_2(A) = I,$$

任取 $\alpha \in W$，由于 $f(x) = f_1(x)f_2(x)$，所以

$$f(A)\alpha = f_1(A)(f_2(A)\alpha) = f_2(A)(f_1(A)\alpha) = 0,$$

即：

$$f_2(A)\alpha \in W_1,\ v(A)f_2(A)\alpha \in W_1;\ f_1(A)\alpha \in W_2,\ u(A)f_1(A)\alpha \in W_2,$$

且

$$\alpha = u(A)f_1(A)\alpha + v(A)f_2(A)\alpha,$$

所以 $W \subset W_1 + W_2$.

又任意 $\beta \in W_1 + W_2$，存在 $\beta_1 \in W_1$，$\beta_2 \in W_2$，使得

$$\beta = \beta_1 + \beta_2, f_1(A)\beta_1 = f_2(A)\beta_2 = 0,$$

$$f(A)\beta = f(A)(\beta_1 + \beta_2) = f_2(A)(f_1(A)\beta_1) + f_1(A)(f_2(A)\beta_2) = 0,$$

$\beta \in W$，所以 $W_1 + W_2 \subset W$，
所以 $W = W_1 + W_2$.

任取 $\beta \in W_1 \cap W_2$，则

$$f_1(A)\beta=0;\ f_2(A)\beta=0,$$
$$\beta=u(A)f_1(A)\beta+v(A)f_2(A)\beta=0,$$

所以 $W_1\cap W_2=0$.

从而 $W=W_1\oplus W_2$. □

书后习题.20. $P_{96},Ex1$

证明: 作 R 到 R^+ 的一个映射

$$\sigma:R\longrightarrow R^+$$
$$x\longmapsto 2^x,$$

则可以验证: σ 是 R 到 R^+ 的一个同构映射. □

书后习题.21. $P_{96},Ex2$

证明: 它们都是域 F 上 sn 维线性空间, 所以同构. 令

$$\sigma:M_{s\times n}(F)\longrightarrow F^{sn}$$
$$A=(a_{ij})_{s\times n}\longmapsto(a_{11},a_{12},...,a_{1n},a_{21},a_{22},...,a_{2n},...,a_{s1},a_{s2},...,a_{sn})^T.$$

则 σ 是 $M_{s\times n}(F)$ 到 F^{sn} 的一个同构映射. □

书后习题.22. $P_{96},Ex3$

证明: 域 F 上次数 $<n$ 的多项式对于多项式的加法和数与多项式的乘法是封闭的. 所以域 F 上次数 $<n$ 的多项式 $F[x]_n$ 是 $F[x]$ 的一个子空间.

令

$$\sigma:F[x]_n\longrightarrow F^n,$$
$$f(x)=a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+...+a_1x+a_0\mapsto(a_{n-1},a_{n-2},...,a_1,a_0)^T,$$

则容易验证 σ 是 $F[x]_n\longrightarrow F^n$ 的同构映射. □

书后习题.23. $P_{96},Ex4$

解: 向量 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1$ 线性相关. 因为

$$(\alpha_1+\alpha_2)-(\alpha_2+\alpha_3)+(\alpha_3+\alpha_4)-(\alpha_4+\alpha_1)=0.$$

而容易验证 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4$ 线性无关, 所以 W 的维数是 3, $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4$ 是 W 的一个基. □

书后习题.24. $P_{96},Ex5$

证明: (*1*) 容易验证 L 对矩阵的加法和数量乘法封闭. 即 L 是 $M_2(R)$ 的一个子空间. 显然

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\in L,$$

A,B 线性无关，且 $\forall D=\begin{pmatrix}a&b\\-b&a\end{pmatrix}\in L$，$D=aA+bB$. 所以 L 是 2 维的，

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\in L$$

是 L 的一个基.

(2) 令

$$\sigma:C\longrightarrow L$$
$$a+bi\longmapsto\begin{pmatrix}a&b\\-b&a\end{pmatrix}$$

容易验证：σ 是 $C\longrightarrow L$ 的一个同构映射. □

书后习题.25. $P_{96},Ex6$

证明：(1) 直接验证：H 对矩阵的加法以及实数对矩阵的乘法封闭，它也满足 8 条性质. 即 H 是数域 R 上的线性空间.

(2) 在 H 中，取向量

$$A_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix},\ A_3=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\ A_3=\begin{pmatrix}0&i\\i&0\end{pmatrix},$$

则 A_i，$i=1,2,3,4$ 是 H 中线性无关的向量. 且任意的

$$A=\begin{pmatrix}a_1+b_1i&a_2+b_2i\\-a_2+b_2i&a_1-b_1i\end{pmatrix}\in H,\ a_1,b_1,a_2,b_2\in R,$$

都有

$$A=a_1A_1+b_1A_2+a_2A_3+b_2A_4.$$

所以 A_1,A_2,A_3,A_4 是 H 的一个基，H 是 4 维的.

(3) 令

$$\sigma:H\longrightarrow R^4,$$
$$\begin{pmatrix}a_1+b_1i&a_2+b_2i\\-a_2+b_2i&a_1-b_1i\end{pmatrix}\longmapsto(a_1,b_1,a_2,b_2)^T.$$

容易验证：σ 是 $H\longrightarrow R^4$ 的一个同构映射. H 与 R^4 同构. □

书后习题.26. $P_{101}, Ex1$

证明：(*1*) 假设 $\dim(V)$ 是有限的，则由本节的定理知，

$$\dim(V/U) = \dim(V) - \dim(U),$$

而直和的充要条件知，

$$\dim(U \oplus W) = \dim(U) + \dim(W) = \dim(V),$$

所以，

$$\dim(V/U) = \dim(W),$$

再由同构的充要条件，知

$$V/U \cong W.$$

(*2*) 作 W 到 V/U 的一个映射 σ

$$\sigma : W \longrightarrow V/U,$$
$$w \longmapsto w + U = \overline{w},$$

($1°$)σ 显然是 W 到 V/U 的一个映射；

($2°$)σ 是单射.

任意的 $w_1, w_2 \in W$，如果 $\sigma(w_1) = \sigma(w_2)$，即 $w_1 + U = w_2 + U$，从而 $w_1 - w_2 \in U$，又 $w_1 - w_2 \in W$，所以 $w_1 - w_2 \in W \cap U$. 注意到 $V = U \oplus W$，由直和的充要条件知，$W \cap U = 0$，所以 $w_1 - w_2 = 0$，从而 σ 是单射.

($3°$)σ 是满射.

任意的 $v + U \in V/U$，则 $v \in V$. 由于 $V = U + W$，所以存在 $w \in W$, $u \in U$，使得 $v = u + w$，从而 $v - w = u \in U$，所以 $v + U = w + U$，而由 σ 的定义知，$\sigma(w) = w + U = v + U$，所以 σ 是满射.

($4°$) 验证 σ 保持线性运算.

容易验证. □

书后习题.27. $P_{101}, Ex2$

解：U 是过原点的一条直线，所以

$$U = \{k\alpha_0 | \forall k \in F, \alpha_0 \neq 0 \in V \text{ 是一个确定向量}\},$$

它是 V 的一个子空间. 由 V/U 的定义知道，

$$V/U = \{\alpha + U | \alpha \in V\},$$

对于 $\alpha_1+U=\alpha+U$，则 $\alpha_1-\alpha\in U$. 即存在 $k\in F$，使得

$$\alpha_1-\alpha=k\alpha_0,$$

亦即 α_1,α,α_0 线性相关，它们共线. 所以，$\alpha+U$ 是一条与 α_0 平行的直线.

设 $0\neq\alpha_0\in U$, 则 α_0 是 U 的一个基, 把它扩充为 V 的一个基 $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2$, 由本节的定理证明知, 则 α_1+U,α_2+U 是 V/U 的一个基. V/U 是 2 维的.
□

书后习题.28. $P_{101},Ex3$

证明：因为 $W\in\Omega_1$，所以 U 是 W 的一个子空间且 $\dim W=n-1$，而 U 是 2 维的，所以 $\dim(w/U)=(n-1)-2=n-3$，即 $W/U\in\Omega_2$.

任取 $W_1,W_2\in\Omega_1$，如果 $\sigma(W_1)=\sigma(W_2)$，即 $W_1/U=W_2/U$. 则对 $\forall\alpha_1\in W_1$，则 $\alpha_1+U\in W_1/U=W_2/U$，所以 $\alpha_1+U\in W_2/U$，存在 $\alpha_2\in W_2$，使得 $\alpha_1+U=\alpha_2+U$，即有 $\alpha_1-\alpha_2\in U\subset W_2$，所以 $\alpha_1\in W_2$，从而 $W_1\subset W_2$;

同理可以证明，$W_2\subset W_1$.

所以 $W_1=W_2$.

即 σ 是单射.

任意的 $W/U\in\Omega_2$，则 $\dim(W/U)=n-3$，而由定理知，$\dim(W/U)=\dim(w)-\dim(U)=\dim(W)-2$，所以 $\dim(W)=n-3+2=n-1$，$W\in\Omega_1$. 所以 σ 是满射.

因此，σ 是双射. □

书后习题.29. $P_{101},Ex4$

证明：(*1*) 如果对有限维线性空间，可以从维数证明.

$$\dim(U+W)=\dim(U)+\dim(W)-\dim(U\cap W),$$

所以,

$$\dim[(U+W)/W]=\dim(U)+\dim(W)-\dim(U\cap W)-\dim(W)$$

$$=\dim(U)-\dim(U\cap W);$$

而 $\dim[U/(U\cap W)]=\dim(U)-\dim(U\cap W)$，所以
$\dim[(U+W)/W]=\dim[U/(U\cap W)]$，它们同构.

(2) 对于一般的线性空间，我们作 $(U+W)/W \longrightarrow U/(U\cap W)$ 的一个映射

$$\sigma:(U+W)/W \longrightarrow U/(U\cap W),$$
$$(u+w)+W \mapsto u+(U\cap W),$$

首先要验证：σ 是 $(U+W)/W \longrightarrow U/(U\cap W)$ 的一个映射；

事实上，$\forall (u_1+w_1)+W, (u_2+w_2)+W \in (U+W)/W$，如果 $(u_1+w_1)+W=(u_2+w_2)+W$, 则 $(u_1+w_1)-(u_2+w_2)\in W$, 即存在 $w\in W$, 使得 $(u_1+w_1)-(u_2+w_2)=w$，所以 $u_1-u_2=w-w_1+w_2\in (U\cap W)$，从而 $u_1+(U\cap W)=u_2+(U\cap W)$，即 σ 是 $(U+W)/W \longrightarrow U/(U\cap W)$ 的一个映射.

验证 σ 是单射.

$\forall (u_1+w_1)+W, (u_2+w_2)+W \in (U+W)/W$，如果 $\sigma[(u_1+w_1)+W]=\sigma[(u_2+w_2)+W]$，则 $u_1+(U\cap W)=u_2+(U\cap W)$，即 $u_1-u_2\in (U\cap W)\subset W$. 所以

$$(u_1-u_2)+(w_1-w_2)=(u_1+w_1)-(u_2+w_2)\in W,$$

即 $(u_1+w_1)+W=(u_2+w_2)+W$，所以 σ 是单射.

验证 σ 是满射.

$\forall [u+(U\cap W)]\in U/(U\cap W)$，存在 $[(u+0)+W]\in (U+W)/W$，使得 $\sigma[(u+0)+W]=u+(U\cap W)$，所以 σ 是满射.

验证 σ 保持线性运算性质.

$\forall x,y\in F,\ (u_1+w_1)+W, (u_2+w_2)+W \in (U+W)/W,$

$$\begin{aligned}
&\sigma\{x[(u_1+w_1)+W]+y[(u_2+w_2)+W]\}\\
=\ &\sigma\{[(xu_1+xw_1)+W]+[(yu_2+yw_2)+W]\}\\
=\ &\sigma\{[(xu_1+xw_1)+(yu_2+yw_2)]+W\}\\
=\ &\sigma\{[(xu_1+yu_2)+(xw_1+yw_2)]+W\}\\
=\ &(xu_1+yu_2)+(U\cap W)\\
=\ &[xu_1+(U\cap W)]+[yu_2+(U\cap W)]\\
=\ &x[u_1+(U\cap W)]+y[u_2+(U\cap W)]\\
=\ &x\sigma[(u_1+w_1)+W]+y\sigma[(u_2+w_2)+W].
\end{aligned}$$

所以 σ 保持线性运算性质.

由上, σ 是 $(U+W)/W \longrightarrow U/(U\cap W)$ 的一个同构映射.

$(U+W)/W \cong U/(U\cap W)$. $\square$