高等代数习题解答

(北京大学丘维声教授编著的教材)

宿州学院数学系代数教研室

第 9 章：线性映射

书后习题.1. $P_{111}, Ex4$

解：$\log_a$ 是 R^+ 到 R 的一个映射；

$\forall x,\ y \in R^+$，$\log_a(x \oplus y) = \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$；

$\forall x \in R^+, k \in R$，$\log_a(k \odot x) = \log_a x^k = k \log_a x$.

所以 $\log_a$ 是 R^+ 到 R 的一个线性映射. □

书后习题.2. $P_{112}, Ex5$

解：是 V 上的一个线性变换.

(*1*) 由于 $a_{11}x + a_{12}y,\ a_{21}x + a_{22}y$ 是 K 上的一次齐次式，所以 $f(a_{11}x + a_{12}y,\ a_{21}x + a_{22}y)$ 仍是 $K[x,y]$ 中的 m 次齐次多项式，从而 $\mathbf{A}$ 是 V 上的变换；

(*2*) 任意 $f(x,\ y),\ g(x,\ y) \in V$，记 $h(x,\ y) = f(x,\ y) + g(x,\ y)$，由 $\mathbf{A}$ 的定义知，

$$\mathbf{A}(f(x,\ y) + g(x,\ y)) = h(a_{11}x + a_{12}y,\ a_{21}x + a_{22}y),$$

由于 $h(x,\ y) = f(x,\ y) + g(x,\ y)$，利用多元多项式的通用性质，则有

$$\begin{aligned} h(a_{11}x + a_{12}y,\ a_{21}x + a_{22}y) = &f(a_{11}x + a_{12}y,\ a_{21}x + a_{22}y) \\ &+g(a_{11}x + a_{12}y,\ a_{21}x + a_{22}y), \end{aligned}$$

即有

$$\mathbf{A}(f(x,\ y) + g(x,\ y)) = \mathbf{A}f(x,\ y) + \mathbf{A}g(x,\ y);$$

(*3*) 任意 $f(x,\ y) \in V,\ k \in K$，记 $d(x,\ y) = kf(x,\ y)$，由 $\mathbf{A}$ 的定义知，

$$\mathbf{A}(kf(x,\ y)) = d(a_{11}x + a_{12}y,\ a_{21}x + a_{22}y),$$

由于 $d(x,\ y) = kf(x,\ y)$，利用多项式的通用性质，则

$$d(a_{11}x + a_{12}y,\ a_{21}x + a_{22}y) = kf(a_{11}x + a_{12}y,\ a_{21}x + a_{22}y),$$

即是

$$\mathbf{A}(kf(x,\ y)) = k\mathbf{A}f(x,\ y).$$

所以 $\mathbf{A}$ 是 V 上的线性变换； □

书后习题.3. $P_{112}, Ex6$

解：f 是 F_{2^m} 上的线性变换.

(*1*) 因为 F_{2^m} 是域，所以任意的 $x \in F_{2^m}$，有 $x^2 \in F_{2^m}$，所以 f 是 F_{2^m} 上的变换；

(*2*) 任意的 $x,\ y \in F_{2^m}$，由于域 F_{2^m} 的特征为 2，也就是任意的 $x \in F_{2^m}$，都有 $x + x = 0$. 所以 $(x+y)^2 = x^2 + xy + yx + y^2 = x^2 + y^2$，从而

$$f(x+y) = (x+y)^2 = x^2 + y^2 = f(x) + f(y).$$

(*3*) 对 $0 \in F_2$，$f(0x) = f(0) = 0^2 = 0 = 0f(x)$；

对 $1 \in F_2$，$f(1 \cdot x) = f(x) = x^2 = f(x) = 1 \cdot f(x)$.

所以 f 是 F_{2^m} 上的线性变换. □

书后习题.4. $P_{112}, Ex7$

证明：(*1*) 直接验证：$\mathbf{A}$ 是 $K[x]$ 上的一个线性变换.

显然 $\mathbf{A}$ 是 $K[x]$ 上的一个变换；

任意的 $f(x),\ g(x) \in K[x]$,

$$\mathbf{A}(f(x) + g(x)) = x(f(x) + g(x)) = xf(x) + xg(x) = \mathbf{A}f(x) + \mathbf{A}g(x);$$

任意的 $f(x) \in K[x]$，$k \in K$,

$$\mathbf{A}(kf(x)) = x(kf(x)) = k(xf(x)) = k\mathbf{A}f(x);$$

所以 $\mathbf{A}$ 是 $K[x]$ 上的一个线性变换.

(*2*) 任意的 $f(x) \in K[x]$，则

$(\mathbf{DA} - \mathbf{AD})f(x) = (\mathbf{DA})f(x) - (\mathbf{AD})f(x)$
$= (\mathbf{D}(\mathbf{A}f(x)) - \mathbf{A}(\mathbf{D}f(x))$

$= \mathbf{D}(xf(x)) - \mathbf{A}f'(x)$
$= f(x) + xf'(x) - xf'(x)$
$= f(x)$;

所以 $\mathbf{DA} - \mathbf{AD} = \mathbf{I}$. □

书后习题.5. $P_{112}, Ex8$

证明: 若 $\mathbf{A}$ 是 V 上的可逆线性变换, 则 $\mathbf{A}$ 是 V 到 V 的一个同构映射, 从而 $\mathbf{A}$ 把 V 的一个基仍映成一个基.

即如果 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ 是 V 的一个基, $\mathbf{A}$ 是 V 上的可逆线性变换, 则 $\mathbf{A}\alpha_1, \mathbf{A}\alpha_2, ..., \mathbf{A}\alpha_n$ 仍是 V 的一个基.

我们也可以根据可逆变换的定义证明.

假设 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ 是 V 的一个基, $\mathbf{A}$ 是 V 上的可逆线性变换, 则存在 V 上的线性变换 $\mathbf{B}$, 使得 $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}$. 考虑向量 $\mathbf{A}\alpha_1, \mathbf{A}\alpha_2, ..., \mathbf{A}\alpha_n$ 的线性组合

$$x_1\mathbf{A}\alpha_1 + x_2\mathbf{A}\alpha_2 + ... + x_n\mathbf{A}\alpha_n = 0,$$

即

$$\mathbf{A}(x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + ... + x_n\alpha_n) = 0,$$

从而

$$\mathbf{B}[\mathbf{A}(x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + ... + x_n\alpha_n)] = \mathbf{B}(\mathbf{0}) = 0,$$

而 $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$, 所以

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + ... + x_n\alpha_n = 0,$$

而 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ 是 V 的一个基, 所以

$$x_1 = x_2 = ... = x_n = 0,$$

$\mathbf{A}\alpha_1, \mathbf{A}\alpha_2, ..., \mathbf{A}\alpha_n$ 线性无关, 而 V 是 n 维的, 所以 $\mathbf{A}\alpha_1, \mathbf{A}\alpha_2, ..., \mathbf{A}\alpha_n$ 是 V 的一个基.

假设 $\mathbf{A}\alpha_1, \mathbf{A}\alpha_2, ..., \mathbf{A}\alpha_n$ 是 V 的一个基, 则任意的 $\alpha \in V$, 都存在唯一的 $(x_1, x_2, ..., x_n)^T \in F^n$, 使得

$$\alpha = x_1\mathbf{A}\alpha_1 + x_2\mathbf{A}\alpha_2 + ... + x_n\mathbf{A}\alpha_n,$$

定义：$\mathbf{B}\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + ... + x_n\alpha_n$，则可以直接验证：$\mathbf{B}$ 是 V 上的一个线性变换，且满足 $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}$，即 $\mathbf{A}$ 是 V 上的线性变换，$\mathbf{B}$ 是 $\mathbf{A}$ 的逆变换. □

书后习题.6. $P_{112}, Ex9$

证明：首先对 $\mathbf{A} \in Hom(V,\ V')$，如果对自然数 m，有 $\mathbf{A}^m\alpha = 0$，则对任意的自然数 l，显然有 $\mathbf{A}^{m+l}\alpha = 0$.

考虑向量组 $\alpha, \mathbf{A}\alpha, \mathbf{A}^2\alpha, ..., \mathbf{A}^{m-1}\alpha$ 在线性组合

$$x_0\alpha + x_1\mathbf{A}\alpha + x_2\mathbf{A}^2\alpha + ... + x_{m-1}\mathbf{A}^{m-1}\alpha = 0,$$

则

$$\mathbf{A}^{m-1}[x_0\alpha + x_1\mathbf{A}\alpha + x_2\mathbf{A}^2\alpha + ... + x_{m-1}\mathbf{A}^{m-1}\alpha] = 0,$$

从而

$$x_0\mathbf{A}^{m-1}\alpha = 0,$$

注意到 $\mathbf{A}^{m-1}\alpha \neq 0$，所以 $x_0 = 0$，从而

$$x_1\mathbf{A}\alpha + x_2\mathbf{A}^2\alpha + ... + x_{m-1}\mathbf{A}^{m-1}\alpha = 0,$$

从而

$$\mathbf{A}^{m-2}[x_1\mathbf{A}\alpha + x_2\mathbf{A}^2\alpha + ... + x_{m-1}\mathbf{A}^{m-1}\alpha] = 0,$$

可得

$$x_1\mathbf{A}^{m-1}\alpha = 0,$$

即有 $x_1 = 0$，从而

$$x_2\mathbf{A}^2\alpha + ... + x_{m-1}\mathbf{A}^{m-1}\alpha = 0,$$

再考虑 $\mathbf{A}^{m-3}$ 作用 $x_2\mathbf{A}^2\alpha + ... + x_{m-1}\mathbf{A}^{m-1}\alpha$ 的象，则可以得到 $x_2 = 0$，重复以上过程，我们可以得到：

$$x_0 = x_1 = ... = x_{m-1} = 0,$$

所以 $\alpha, \mathbf{A}\alpha, \mathbf{A}^2\alpha, ..., \mathbf{A}^{m-1}\alpha$ 线性无关. □

书后习题.7. $P_{112}, Ex10$

证明：对自然数 k 进行归纳.

$k = 1$ 时，结论显然成立.

假设对任意自然数 $k < l$ 的自然数都成立. 即当 $k < l$ 时，都有

$$\mathbf{A}^k\mathbf{B}-\mathbf{B}\mathbf{A}^k=k\mathbf{A}^{k-1}.$$

当 $k=l$ 时，由于

$$\mathbf{A}^{l-1}\mathbf{B}-\mathbf{B}\mathbf{A}^{l-1}=(l-1)\mathbf{A}^{(l-1)-1},$$

所以

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{l-1}\mathbf{B}-\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A}^{l-1}=(l-1)\mathbf{A}\mathbf{A}^{(l-1)-1},$$
$$\mathbf{A}^{l-1}\mathbf{B}\mathbf{A}-\mathbf{B}\mathbf{A}^{l-1}\mathbf{A}=(l-1)\mathbf{A}^{(l-1)-1}\mathbf{A},$$

即

$$\mathbf{A}^{l}\mathbf{B}-\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A}^{l-1}=(l-1)\mathbf{A}^{l-1},$$
$$\mathbf{A}^{l-1}\mathbf{B}\mathbf{A}-\mathbf{B}\mathbf{A}^{l}=(l-1)\mathbf{A}^{l-1},$$

所以

$$\mathbf{A}^{l}\mathbf{B}-\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A}^{l-1}+\mathbf{A}^{l-1}\mathbf{B}\mathbf{A}-\mathbf{B}\mathbf{A}^{l}=2(l-1)\mathbf{A}^{l-1},$$
$$\mathbf{A}^{l}\mathbf{B}+\mathbf{A}[\mathbf{A}^{l-2}\mathbf{B}-\mathbf{B}\mathbf{A}^{l-2}]\mathbf{A}-\mathbf{B}\mathbf{A}^{l}=2(l-1)\mathbf{A}^{l-1},$$

由归纳假设，

$$\mathbf{A}^{l-2}\mathbf{B}-\mathbf{B}\mathbf{A}^{l-2}=(l-2)\mathbf{A}^{(l-2)-1},$$

所以

$$\mathbf{A}^{l}\mathbf{B}+\mathbf{A}[(l-2)\mathbf{A}^{(l-2)-1}]\mathbf{A}-\mathbf{B}\mathbf{A}^{l}=2(l-1)\mathbf{A}^{l-1},$$
$$\mathbf{A}^{l}\mathbf{B}+(l-2)\mathbf{A}^{l-1}-\mathbf{B}\mathbf{A}^{l}=2(l-1)\mathbf{A}^{l-1},$$

所以

$$\mathbf{A}^{l}\mathbf{B}-\mathbf{B}\mathbf{A}^{l}=l\mathbf{A}^{l-1}.$$

由归纳法原理，结论成立. □

书后习题.8. $P_{112}, Ex11$

证明: (*1*) 假设 $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ 仍是幂等变换，即

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2=\mathbf{A}^2+\mathbf{A}\mathbf{B}+\mathbf{B}\mathbf{A}+\mathbf{B}^2=\mathbf{A}+\mathbf{B},$$

则

$$\mathbf{A}\mathbf{B}+\mathbf{B}\mathbf{A}=0,\ \mathbf{A}\mathbf{B}=-\mathbf{B}\mathbf{A},$$

从而

$$\mathbf{A}\mathbf{B}=\mathbf{A}^2\mathbf{B}=\mathbf{A}(\mathbf{A}\mathbf{B})=-\mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{A})=-(\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{A}=(\mathbf{B}\mathbf{A})\mathbf{A}=\mathbf{B}\mathbf{A}^2=\mathbf{B}\mathbf{A},$$

所以

$$\mathbf{AB}=\mathbf{BA}=0.$$

假设 $\mathbf{AB}=\mathbf{BA}=0$，则直接计算得

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2=\mathbf{A}^2+\mathbf{AB}+\mathbf{BA}+\mathbf{B}^2=\mathbf{A}+\mathbf{B},$$

$\mathbf{A}+\mathbf{B}$ 是幂等变换.

(2) 计算

$(\mathbf{A}+\mathbf{B}-\mathbf{AB})^2=(\mathbf{A}+\mathbf{B}-\mathbf{AB})(\mathbf{A}+\mathbf{B}-\mathbf{AB})$

$=\mathbf{A}^2+\mathbf{AB}-\mathbf{AAB}+\mathbf{BA}+\mathbf{B}^2-\mathbf{BAB}-\mathbf{ABA}-\mathbf{ABB}+\mathbf{ABAB},$

注意到 $\mathbf{AB}=\mathbf{BA}$，$\mathbf{A}^2=\mathbf{A}$，$\mathbf{B}^2=\mathbf{B},$

从而

$(\mathbf{A}+\mathbf{B}-\mathbf{AB})^2=\mathbf{A}+\mathbf{AB}-\mathbf{AB}+\mathbf{AB}+\mathbf{B}-\mathbf{AB}-\mathbf{AB}-\mathbf{AB}+\mathbf{AB}$

$=(\mathbf{A}+\mathbf{B}-\mathbf{AB}).$ □

书后习题.9. $P_{114}, Ex1$

证明:

$\forall\alpha\in U,\ \beta\in W$，由 $\mathbf{P}_U$ 的定义知

$$\mathbf{P}_U\alpha=\alpha;\ \mathbf{P}_U\beta=0,$$

所以

$$\alpha\in Im\mathbf{P}_U,\ \beta\in Ker\mathbf{P}_U,$$

从而

$$U\subset Im\mathbf{P}_U,\ W\subset Ker\mathbf{P}_U.$$

$\forall\alpha\in Im\mathbf{P}_U,\ \beta\in Ker\mathbf{P}_U$，则存在 $\gamma\in V$，使得

$$\mathbf{P}_U\gamma=\alpha,\ \mathbf{P}_U\beta=0.$$

由于 $V=U\oplus W$，所以存在 $\gamma_1,\beta_1\in U,\ \gamma_2,\beta_2\in W$，使得

$$\gamma=\gamma_1+\gamma_2,\ \beta=\beta_1+\beta_2,$$

利用 $\mathbf{P}_U$ 的定义，则

$$\alpha=\mathbf{P}_U\gamma=\gamma_1\in U,\ \mathbf{P}_U\beta=\beta_1=0,\beta=\beta_2\in W,$$

所以

$$Im\mathbf{P}_U\subset U,\ Ker\mathbf{P}_U\subset W,$$

所以

$$Im\mathbf{P}_U = U,\ Ker\mathbf{P}_U = W.$$

$\square$

书后习题.10. $P_{112}, Ex2$

证明:

$\forall\alpha \in V$, 由于 $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$, 所以 $\mathbf{A}(\mathbf{I}-\mathbf{A}) = \mathbf{0}$, 从而 $(\mathbf{I}-\mathbf{A})\alpha \in Ker\mathbf{A}$, 有

$$\alpha = (\mathbf{I}-\mathbf{A})\alpha + \mathbf{A}\alpha \in Ker\mathbf{A} + Im\mathbf{A},$$
$$V = Ker\mathbf{A} + Im\mathbf{A}.$$

再 $\forall\alpha \in Ker\mathbf{A} \cap Im\mathbf{A}$, 则存在 $\beta \in V$, 使得

$$\mathbf{A}\beta = \alpha \text{ 且 } \mathbf{A}\alpha = 0,$$

而 $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$, 所以

$$\alpha = \mathbf{A}\beta = \mathbf{A}^2\beta = \mathbf{A}(\mathbf{A}\beta) = \mathbf{A}\alpha = 0,$$

所以 $Ker\mathbf{A} \cap Im\mathbf{A} = 0$, 所以 $V = Ker\mathbf{A} \oplus Im\mathbf{A}$.

又 $V = Ker\mathbf{A} \oplus Im\mathbf{A}$ 且对 $\forall\alpha \in V$,

$$\mathbf{A}\alpha = \begin{cases} \alpha & \alpha \in Im\mathbf{A} \\ 0 & \alpha \in Ker\mathbf{A} \end{cases}$$

利用上一节的定理知 $\mathbf{A} = \mathbf{P}_{Im\mathbf{A}}$ 是平行于 $Ker\mathbf{A}$ 在 $Im\mathbf{A}$ 的投影. $\square$

书后习题.11. $P_{115}, Ex3$

证明:

V 是域 F 上的有限维线性空间, 所以 $Im\mathbf{A}$ 是 U 的一个有限维子空间. 记 $\mathbf{C} = \mathbf{B}|_{Im\mathbf{A}}$ 为线性映射 $\mathbf{B}$ 在 $Im\mathbf{A}$ 的限制, 则

$$\dim V = \dim Ker\mathbf{A} + \dim Im\mathbf{A},$$
$$\dim V = \dim Ker\mathbf{BA} + \dim Im\mathbf{BA},$$
$$\dim Im\mathbf{A} = \dim Ker\mathbf{C} + \dim Im\mathbf{C},$$

所以

$$\dim Ker\mathbf{BA} = \dim Ker\mathbf{A} + \dim Im\mathbf{A} - \dim Im\mathbf{BA},$$

注意到 $Im\mathbf{BA} = Im\mathbf{C}$, $\dim Im\mathbf{A} - \dim Im\mathbf{C} = \dim Ker\mathbf{C}$, 所以

$$\dim Ker\mathbf{BA} = \dim Ker\mathbf{A} + \dim Ker\mathbf{C},$$

再 $\forall\alpha \in Ker\mathbf{C} \subset Im\mathbf{A}$，由于 $\mathbf{C} = \mathbf{B}|_{Im\mathbf{A}}$，所以
$\mathbf{B}\alpha = \mathbf{C}\alpha = 0, \alpha \in Ker\mathbf{B}$，所以 $Ker\mathbf{C} \subset Ker\mathbf{B}$，从而
$\dim Ker\mathbf{C} \leq \dim Ker\mathbf{B}$. 所以

$$\dim Ker\mathbf{BA} \leq \dim Ker\mathbf{A} + \dim Ker\mathbf{B}.$$

□

书后习题.12. $P_{115}, Ex4$

证明:

由于 $\dim V = n$, $\dim U = m$ 且 $\mathbf{A}$ 是 V 到 U 的线性映射，$\mathbf{B}$ 是 U 到 W 的线性映射，所以

$$n = \dim V = \dim Ker\mathbf{A} + \dim Im\mathbf{A} = \dim Ker\mathbf{A} + rank\mathbf{A},$$
$$n = \dim V = \dim Ker\mathbf{BA} + \dim Im\mathbf{BA} = \dim Ker\mathbf{BA} + rank\mathbf{BA},$$
$$\dim Ker\mathbf{BA} + rank\mathbf{BA} = \dim Ker\mathbf{A} + rank\mathbf{A}$$
$$m = \dim U = \dim Ker\mathbf{B} + \dim Im\mathbf{B} = \dim Ker\mathbf{B} + rank\mathbf{B},$$

由上一题的结论

$$\dim Ker\mathbf{BA} \leq \dim Ker\mathbf{A} + \dim Ker\mathbf{B},$$

得

$$rank\mathbf{BA} \geq rank\mathbf{A} - \dim Ker\mathbf{B} = rank\mathbf{A} + rank\mathbf{B} - m.$$

□

书后习题.13. $P_{115}, Ex5$

证明:

(1) 假设 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 有相同的象，即 $Im\mathbf{A} = Im\mathbf{B}$,

对 $\forall\alpha \in V$，则 $\mathbf{B}\alpha \in Im\mathbf{B} = Im\mathbf{A}$，所以存在 $\beta \in V$，使得 $\mathbf{A}\beta = \mathbf{B}\alpha$，又 $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$，所以

$$\mathbf{AB}\alpha = \mathbf{A}(\mathbf{B}\alpha) = \mathbf{A}(\mathbf{A}\beta) = \mathbf{A}\beta = \mathbf{B}\alpha,$$
$$\mathbf{AB} = \mathbf{B}.$$

同样, 对 $\forall\alpha \in V$, 则 $\mathbf{A}\alpha \in Im\mathbf{A} = Im\mathbf{B}$, 所以存在 $\beta \in V$, 使得 $\mathbf{B}\beta = \mathbf{A}\alpha$，又 $\mathbf{B}^2 = \mathbf{B}$，所以

$$\mathbf{BA}\alpha = \mathbf{B}(\mathbf{A}\alpha) = \mathbf{B}(\mathbf{B}\beta) = \mathbf{B}\beta = \mathbf{A}\alpha,$$
$$\mathbf{BA} = \mathbf{A}.$$

假设 $\mathbf{AB} = \mathbf{B}$, $\mathbf{BA} = \mathbf{A}$,

对 $\forall\alpha \in Im\mathbf{A}$, 则存在 $\beta \in V$, 使得 $\mathbf{A}\beta = \alpha$, 而 $\alpha = \mathbf{A}\beta = (\mathbf{BA})\beta = \mathbf{B}(\mathbf{A}\beta) \in Im\mathbf{B}$, 所以 $Im\mathbf{A} \subset Im\mathbf{B}$;

对 $\forall\alpha \in Im\mathbf{B}$, 则存在 $\beta \in V$, 使得 $\mathbf{B}\beta = \alpha$, 而 $\alpha = \mathbf{B}\beta = (\mathbf{AB})\beta = \mathbf{A}(\mathbf{B}\beta) \in Im\mathbf{A}$, 所以 $Im\mathbf{B} \subset Im\mathbf{A}$;

所以 $Im\mathbf{A} = Im\mathbf{B}$.

(2) 假设 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 有相同的核, 即 $Ker\mathbf{A} = Ker\mathbf{B}$,

$\forall\alpha \in V$, 由于 $\mathbf{A}(\mathbf{A}\alpha) = \mathbf{A}^2\alpha = \mathbf{A}\alpha$, $\mathbf{A}(\mathbf{A}\alpha - \alpha) = 0$, $\mathbf{A}\alpha - \alpha \in Ker\mathbf{A} = Ker\mathbf{B}$, 所以 $\mathbf{B}(\mathbf{A}\alpha - \alpha) = 0$, $\mathbf{B}(\mathbf{A}\alpha) - \mathbf{B}\alpha = 0$, $\mathbf{B}(\mathbf{A}\alpha) = \mathbf{B}\alpha$, 所以 $\mathbf{BA} = \mathbf{B}$.

$\forall\alpha \in V$, 由于 $\mathbf{B}(\mathbf{B}\alpha) = \mathbf{B}^2\alpha = \mathbf{B}\alpha$, $\mathbf{B}(\mathbf{B}\alpha - \alpha) = 0$, $\mathbf{B}\alpha - \alpha \in Ker\mathbf{B} = Ker\mathbf{A}$, 所以 $\mathbf{A}(\mathbf{B}\alpha - \alpha) = 0$, $\mathbf{A}(\mathbf{B}\alpha) - \mathbf{A}\alpha = 0$, $\mathbf{A}(\mathbf{B}\alpha) = \mathbf{A}\alpha$, 所以 $\mathbf{AB} = \mathbf{A}$.

假设 $\mathbf{BA} = \mathbf{B}$, $\mathbf{AB} = \mathbf{A}$, 则

$\forall\alpha \in Ker\mathbf{A}$, 则 $\mathbf{B}\alpha = \mathbf{BA}\alpha = \mathbf{B}(\mathbf{A}\alpha) = 0$, 所以 $\alpha \in Ker\mathbf{B}$, $Ker\mathbf{A} \subset Ker\mathbf{B}$;

$\forall\alpha \in Ker\mathbf{B}$, 则 $\mathbf{A}\alpha = \mathbf{AB}\alpha = \mathbf{A}(\mathbf{B}\alpha) = 0$, 所以 $\alpha \in Ker\mathbf{A}$, $Ker\mathbf{B} \subset Ker\mathbf{A}$;

所以 $Ker\mathbf{A} = Ker\mathbf{B}$. □

书后习题.14. $P_{115}, Ex6$

证明: 由于 $Ker\mathbf{A} = U$ 是 V 的一个子空间, 它也是有限维的. 取它的一个基 $\alpha_1, ..., \alpha_s$, 可以扩充为 V 的一个基 $\alpha_1, ..., \alpha_s, \alpha_{s+1}, ..., \alpha_n$, 记 $W =< \alpha_{s+1}, ..., \alpha_n >$, 则显然有 $V = Ker\mathbf{A} \oplus < \alpha_{s+1}, ..., \alpha_n >= U \oplus W$.

记 $M =< \mathbf{A}\alpha_{s+1}, ..., \mathbf{A}\alpha_n >$, 它是 V' 的一个子空间. 由于 $\mathbf{A}\alpha_{s+1}, ..., \mathbf{A}\alpha_n$ 线性无关, 所以 $\mathbf{A}\alpha_{s+1}, ..., \mathbf{A}\alpha_n$ 是 M 的一个基, 将其扩充为 V' 的一个基 $\mathbf{A}\alpha_{s+1}, ..., \mathbf{A}\alpha_n, \beta_1, ..., \beta_t$, 并记 $N =< \beta_1, ..., \beta_t >$, 则 $V' = M \oplus N$ 且 $W \cong M$. □

书后习题.15. $P_{115}, Ex7$

证明：因为 $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, ..., \mathbf{A}_s$ 是 V 上两两不等的线性变换，所以

$$\forall i \neq j,\ \mathbf{A}_i - \mathbf{A}_j \neq \mathbf{0},$$

即

$$Ker(\mathbf{A}_i - \mathbf{A}_j) \neq V$$

是 V 的真子空间, $\forall i \neq j$. 利用 $P_{91}, Ex10$ 的结论，则

$$\bigcup_{1 \leq i < j \leq n} [Ker(\mathbf{A}_i - \mathbf{A}_j)] \neq V,$$

所有，存在 $\alpha \in V$ 且对 $\forall i \neq j, \alpha \overline{\in} [Ker(\mathbf{A}_i - \mathbf{A}_j)]$，即

$$\forall i \neq j, \mathbf{A}_i \alpha \neq \mathbf{A}_j \alpha.$$

□

书后习题.16. $P_{120-121}, Ex1, 2, 3, 4$

解：这几个习题是同一类型，我们只解答 $Ex3$.

$$\mathbf{A}E_{11} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} = aE_{11} + 0E_{12} + cE_{21} + 0E_{22},$$

$$\mathbf{A}E_{12} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} = 0E_{11} + aE_{12} + 0E_{21} + cE_{22},$$

$$\mathbf{A}E_{21} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix} = bE_{11} + 0E_{12} + dE_{21} + 0E_{22},$$

$$\mathbf{A}E_{22} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = 0E_{11} + bE_{12} + 0E_{21} + dE_{22},$$

所以 $\mathbf{A}$ 在基 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 之下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix}.$$

□

书后习题.17. $P_{121}, Ex5$

证明：由 $P_{112}A\#Ex9$ 的结论知：$\mathbf{A}^{n-1}\alpha, \mathbf{A}^{n-2}\alpha, ..., \mathbf{A}\alpha, \alpha$ 在 V 中线性无关，从而 $\mathbf{A}^{n-1}\alpha, \mathbf{A}^{n-2}\alpha, ..., \mathbf{A}\alpha, \alpha$ 是 V 的一个基. 且

$$\mathbf{A}(\mathbf{A}^{n-1}\alpha, \mathbf{A}^{n-2}\alpha, ..., \mathbf{A}\alpha, \alpha) = (\mathbf{A}^{n-1}\alpha, \mathbf{A}^{n-2}\alpha, ..., \mathbf{A}\alpha, \alpha)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

所以线性变换 $\mathbf{A}$ 在基 $\mathbf{A}^{n-1}\alpha, \mathbf{A}^{n-2}\alpha, ..., \mathbf{A}\alpha, \alpha$ 之下的矩阵是

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

书后习题.18. $P_{121}, Ex6$

证明： 假设在基 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ 之下线性变换 $\mathbf{A}$ 的矩阵为 A，则 $\mathbf{A}^2$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ 之下的矩阵为 A^2，所以

$\mathbf{A}$ 是幂等变换 $\Leftrightarrow \mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$

$\Leftrightarrow$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ 之下线性映射 $\mathbf{A}^2$ 与 $\mathbf{A}$ 的矩阵相等

$\Leftrightarrow A^2 = A$

$\Leftrightarrow A$ 是幂等矩阵. $\square$

书后习题.19. $P_{121}, Ex7$

证明： (*1*) 因为 $\dim Hom(V,\ V') = n^2$，所以，$\mathbf{I}, \mathbf{A}, \mathbf{A}^2, ..., \mathbf{A}^{n^2-1}, \mathbf{A}^{n^2} \in Hom(V,\ V')$ 是线性相关. 从而存在不全为 0 的元 $a_0, a_1, ..., a_{n^2-1}, a_{n^2} \in F$，使得

$$a_0\mathbf{I} + a_1\mathbf{A} + ... + a_{n^2-1}\mathbf{A}^{n^2-1} + a_{n^2}\mathbf{A}^{n^2} = 0,$$

记 $f(x) = a_0 + a_1x + ... + a_{n^2-1}x^{n^2-1} + a_{n^2}x^{n^2}$，则 $f(x) \neq 0$，$\deg f(x) \leq n^2$，且

$$f(\mathbf{A}) = a_0\mathbf{I} + a_1\mathbf{A} + ... + a_{n^2-1}\mathbf{A}^{n^2-1} + a_{n^2}\mathbf{A}^{n^2} = 0.$$

(*2*) 假设 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式，则存在 $u(x)$，$v(x) \in F[x]$，使得

$$d(x) = u(x)f(x) + v(x)g(x),$$

又 $Hom(V,\ V')$ 是一个环，利用多项式的通用性质，则

$$d(\mathbf{A}) = u(\mathbf{A})f(\mathbf{A}) + v(\mathbf{A})g(\mathbf{A}) = \mathbf{0}.$$

(3) 假设 $\mathbf{A}$ 是可逆的线性变换. 由 *(1)* 的结论, 存在多项式 $f(x) \neq 0$, 使得 $f(\mathbf{A}) = 0$.

设 $f(x) = a_0 + a_1x + ... + a_mx^m$, 由于 $f(x) \neq 0$, 所以存在 $0 \leq k < m$, 使得 $a_0 = ... = a_{k-1} = 0, a_k \neq 0$, 可设 $f(x) = a_kx^k + ... + a_mx^m$, $a_k \neq 0$, 所以 $f(\mathbf{A}) = a_k\mathbf{A}^k + ... + a_m\mathbf{A}^m = 0$, 进而
$\mathbf{A}^k + a_{k+1}\mathbf{A}^{k+1} + ... + a_m\mathbf{A}^m = \mathbf{0}.$
由于 $\mathbf{A}$ 可逆, 所以 $\mathbf{A}^k$ 也可逆, 且 $[\mathbf{A}^k]^{-1} = [\mathbf{A}^{-1}]^k$. 所以
$(\mathbf{A}^k)^{-1}[\mathbf{A}^k + a_{k+1}\mathbf{A}^{k+1} + ... + a_m\mathbf{A}^m]$
$= \mathbf{I} + a_{k+1}\mathbf{A} + ... + a_m\mathbf{A}^{m-k} = 0$, 取
$g(x) = 1 + a_{k+1}x + ... + a_mx^{m-k}$, 则 $g(x)$ 的常数项不是 0, 且
$g(\mathbf{A}) = \mathbf{I} + a_{k+1}\mathbf{A} + ... + a_m\mathbf{A}^{m-k} = \mathbf{0}.$

假设存在常数项不为 0 的多项式 $f(x) = a_0 + a_1x + ... + a_mx^m$, $a_0 \neq 0$, 使得 $f(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$. 而
$f(\mathbf{A}) = a_0\mathbf{I} + a_1\mathbf{A} + ... + a_m\mathbf{A}^m = \mathbf{0}$, 所以
$a_0\mathbf{I} = \mathbf{A}(-a_1\mathbf{I} - a_2\mathbf{A} - ... - a_m\mathbf{A}^{m-1}),$
$\mathbf{A}(-a_0^{-1}a_1\mathbf{I} - a_0^{-1}a_2\mathbf{A} - ... - a_0^{-1}a_m\mathbf{A}^{m-1}) = \mathbf{I},$
所以 $\mathbf{A}$ 可逆, 且 $\mathbf{A}^{-1} = -a_0^{-1}a_1\mathbf{I} - a_0^{-1}a_2\mathbf{A} - ... - a_0^{-1}a_m\mathbf{A}^{m-1}$. □

书后习题.20. $P_{121}, Ex8$

证明: 设 $A = (a_{ij})_n$. 因为 $rank\mathbf{A} = \dim Im\mathbf{A}$, 而 $Im\mathbf{A} =< \mathbf{A}\alpha_1, \mathbf{A}\alpha_2, ..., \mathbf{A}\alpha_n >$, 又 $(\mathbf{A}\alpha_1, \mathbf{A}\alpha_2, ..., \mathbf{A}\alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)A$, 利用 P_{95} 例 1 得,
$\dim < \mathbf{A}\alpha_1, \mathbf{A}\alpha_2, ..., \mathbf{A}\alpha_n >= rankA$, 所以 $rank\mathbf{A} = rankA$. □

书后习题.21. $P_{121}, Ex9$

证明: 取 V 的一个基 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ 以及 V' 的一个基 $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_s$, 则线性映射 $\mathbf{A}$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ 和基 $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_s$ 下的矩阵为 $A = (a_{ij})_{s\times n}$.
由矩阵理论知, 存在 s 阶可逆矩阵 P 和 n 阶可逆矩阵 Q, 使得

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

取 $(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)Q$,
$(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_s) = (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_s)P^{-1}$,
$(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_s)P = (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_s)$,

则 $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ 是 V 的一个基;
$\xi_1, \xi_2, ..., \xi_s$ 是 V' 的一个基.
且 $\mathbf{A}(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) = \mathbf{A}[(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)Q]$
$= [\mathbf{A}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)]Q$
$= [(\eta_1, \eta_2, ..., \eta_s)A]Q$
$= (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_s)(AQ)$
$= [(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_s)P](AQ)$
$= (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_s)(PAQ)$.
所以线性映射 $\mathbf{A}$ 在基 $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ 和基 $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_s$ 之下的矩阵为

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

书后习题.22. $P_{121}, Ex12$

解: (*1*) 由于

$$(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_1) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

即是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_1$ 的过渡矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

而 $\mathbf{A}$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 之下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

所以 $\mathbf{A}$ 在基 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_1$ 之下的矩阵为:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{21} \\ a_{32} & a_{33} & a_{31} \\ a_{12} & a_{13} & a_{11} \end{pmatrix}$$

(*2*) 由于

$$(k\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

即是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到 $k\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的过渡矩阵为

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

而 $\mathbf{A}$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 之下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

所以 $\mathbf{A}$ 在基 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_1$ 之下的矩阵为：

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \frac{1}{k}a_{12} & \frac{1}{k}a_{13} \\ ka_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

(*3*) 由于

$$(\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

即是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到 $\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_3$ 的过渡矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

而 $\mathbf{A}$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 之下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

所以 $\mathbf{A}$ 在基 $\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_3$ 之下的矩阵为：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_{11}-a_{21} & a_{11}+a_{12}-a_{21}-a_{22} & a_{13}-a_{23} \\ a_{21} & a_{21}+a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31}+a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad \square$$

书后习题.23. $P_{121}, Ex13$

证明：取 V 的一个基 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$，设线性变换 $\mathbf{A}$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ 之下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{33} \end{pmatrix}.$$

考虑基 $\alpha_1, ..., \alpha_{i-1}, 2\alpha_i, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_n$ 之下的矩阵. 由于 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ 到基 $\alpha_1, ..., \alpha_{i-1}, 2\alpha_i, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_n$ 的过渡矩阵为初等矩阵 $P(i(2))$，则线性变换 $\mathbf{A}$ 在基 $\alpha_1, ..., \alpha_{i-1}, 2\alpha_i, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_n$ 之下的矩阵为

$$P^{-1}(i(2))AP(i(2)) = A,$$

这时, $P^{-1}(i(2))AP(i(2))$ 的第 i 行的元素为 $\frac{1}{2}a_{i1}, ..., \frac{1}{2}a_{ii-1}, a_{ii}, \frac{1}{2}a_{ii+1}, ..., \frac{1}{2}a_{in}$，而 A 的第 i 行的元素为 $a_{i1}, ..., a_{ii-1}, a_{ii}, a_{ii+1}, ..., a_{in}$，它们对应相等，从而

$$a_{ik} = 0, \ \forall i \neq k.$$

所以 A 是一个对角矩阵.

再考虑基 $\alpha_1, ..., \alpha_{i-1}, \alpha_j, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_{j-1}, \alpha_i, \alpha_{j+1}, ..., \alpha_n$ 之下的矩阵. 由于 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ 到基 $\alpha_1, ..., \alpha_{i-1}, \alpha_j, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_{j-1}, \alpha_i, \alpha_{j+1}, ..., \alpha_n$ 的过渡矩阵为 $P(i,\ j)$. 所以线性变换 $\mathbf{A}$ 在基 $\alpha_1, ..., \alpha_{i-1}, \alpha_j, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_{j-1}, \alpha_i, \alpha_{j+1}, ..., \alpha_n$ 之下的矩阵为

$$P^{-1}(i,\ j)AP(i,\ j) = A,$$

注意到 $P^{-1}(i,\ j)AP(i,\ j)$ 中 $(i,\ i)$ 位置的元素为 a_{jj}，所以

$$a_{ii} = a_{jj},\ \forall i,\ j.$$

所以 A 是一个数量矩阵.

下证明：线性变换 $\mathbf{A}$ 在一个基下的矩阵是数量矩阵 $kI \Leftrightarrow \mathbf{A}$ 是数乘变换 $k\mathbf{I}$.

假设 $\mathbf{A}=k\mathbf{I}$, 则对 $\forall\alpha\in V$, 都有 $\mathbf{A}=k\alpha$, 所以 $\mathbf{A}$ 在任何基下的矩阵都是数量矩阵 kI.

假设 $\mathbf{A}$ 在某一个基 $\alpha_1,...,\alpha_n$ 下的矩阵是数量矩阵 kI, 则 $\mathbf{A}\alpha_i=k\alpha_i$, $\forall 1\leq i\leq n$.

$\forall\alpha\in V$, 设 $\alpha=x_1\alpha_1+...+x_n\alpha_n$, 则 $\mathbf{A}\alpha=\mathbf{A}(x_1\alpha_1+...+x_n\alpha_n)$
$=x_1\mathbf{A}\alpha_1+...+x_n\mathbf{A}\alpha_n$
$=x_1k\alpha_1+...+x_nk\alpha_n$
$=k\alpha$.

所以 $\mathbf{A}$ 是数乘变换. □

书后习题.24. $P_{121},Ex14$

解: (*1*) 由于

$$(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2&3&0&0\\0&-1&1&0\\1&-1&1&2\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)S$$

且 A 是一个可逆矩阵, 所以 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 仍是 V 的一个基, 且 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 到 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 之下的过渡矩阵为

$$S=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2&3&0&0\\0&-1&1&0\\1&-1&1&2\end{pmatrix},\ S^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&0&0\\\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&1&0\\-\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

所以 $\mathbf{A}$ 在基 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 之下的矩阵为

$$S^{-1}AS=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&0&0\\\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&1&0\\-\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&2&1\\-1&2&1&3\\1&2&5&5\\2&-2&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2&3&0&0\\0&-1&1&0\\1&-1&1&2\end{pmatrix}.$$

(*2*)$\forall\alpha\in Ker\mathbf{A}$, 设 $\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4$, 则

$$\mathbf{A}\alpha = \mathbf{A}[(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}] = [\mathbf{A}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)]\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$$

$$= (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}.$$

所以 $\alpha \in Ker\mathbf{A} \Leftrightarrow A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = 0.$

即 $Ker\mathbf{A}$ 中所有向量在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 之下的坐标构成 $A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = 0$ 的一个解空间. 由于

$$A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 1\\-1 & 2 & 1 & 3\\1 & 2 & 5 & 5\\2 & -2 & 1 & -2\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 1\\0 & 2 & 3 & 4\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

所以 $AX=0$ 的基础解系为

$$\xi_1 = \begin{pmatrix}-4\\-3\\2\\0\end{pmatrix},\ \xi_1 = \begin{pmatrix}-1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}$$

记 $\beta_1 = -4\alpha_1 - 3\alpha_2 + 2\alpha_3$, $\beta_2 = -\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_4$, 则
$Ker\mathbf{A} =< \beta_1, \beta_2 >$.

$Im\mathbf{A} = \{|\forall\alpha \in V\}$, 设 $\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 + x_4\alpha_4$, 则

$\mathbf{A}\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$，所以，$Im\mathbf{A}$ 中的向量的坐标组成的集合为

$$W = \{A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} | \forall \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in K^4\} \subset K^4.$$

是 A 的列向量的生成空间.

又 $rankA = 2$，且

$$z_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ z_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

是 A 的列向量组的极大线性无关组，所以

$$\{A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} | \forall \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\} =< z_1, z_2 >.$$

记 $\gamma_1 = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4$，$\gamma_2 = 2\alpha_2 + 2\alpha_3 - 2\alpha_4$，则 $Im\mathbf{A} =< \gamma_1, \gamma_2 >$.

(3)$\beta_1 = -4\alpha_1 - 3\alpha_2 + 2\alpha_3$，$\beta_2 = -\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_4$ 是 $Ker\mathbf{A}$ 的一个基，取 $\beta_3 = \alpha_3, \beta_4 = \alpha_4$，则 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 是 V 的一个基，且 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 的过渡矩阵为

$$T = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ 且 } T^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{11} & -\frac{1}{11} & 0 & 0 \\ \frac{3}{11} & -\frac{4}{11} & 0 & 0 \\ \frac{4}{11} & \frac{2}{11} & 1 & 0 \\ -\frac{3}{11} & \frac{4}{11} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

从而 $\mathbf{A}$ 在基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 之下的矩阵为

$$T^{-1}AT=\begin{pmatrix}-\frac{2}{11} & -\frac{1}{11} & 0 & 0\\ \frac{3}{11} & -\frac{4}{11} & 0 & 0\\ \frac{4}{11} & \frac{2}{11} & 1 & 0\\ -\frac{3}{11} & \frac{4}{11} & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 1\\ -1 & 2 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 5 & 5\\ 2 & -2 & 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4 & -1 & 0 & 0\\ -3 & -2 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 0 & -\frac{5}{11} & -\frac{5}{11}\\ 0 & 0 & \frac{2}{11} & -\frac{9}{11}\\ 0 & 0 & \frac{65}{11} & \frac{65}{11}\\ 0 & 0 & \frac{9}{11} & -\frac{13}{11}\end{pmatrix}$$

(4) $\gamma_1=\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3+2\alpha_4,\ \gamma_2=2\alpha_2+2\alpha_3-2\alpha_4$ 是 $Im\mathbf{A}$ 的一个基, 取 $\gamma_3=\alpha_3,\ \gamma_4=\alpha_4$, 则 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4$ 是 V 的一个基, 且基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 到基 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4$ 的过渡矩阵为

$$P=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 2 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 0\\ 2 & -2 & 0 & 1\end{pmatrix} \text{ 且 } P^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ -2 & -1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

所以 $\mathbf{A}$ 在基 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4$ 之下的矩阵为

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ -2 & -1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 1\\ -1 & 2 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 5 & 5\\ 2 & -2 & 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 2 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 0\\ 2 & -2 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$ □

书后习题.25. $P_{126}, Ex3$

解: *(1)* 因为 $\mathbf{A}$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 之下的矩阵为 A, 且

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0 & 0\\ -1 & 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-1)^2,$$

所以 $\mathbf{A}$ 有两个不同的特征值 $\lambda_1=0,\ \lambda_2=1$.

将 $\lambda_1 = 0$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$ 得

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0,$$

有基础解系

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \eta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

所以 α_2, α_3 是 $\mathbf{A}$ 的属于特征值 $\lambda_1 = 0$ 的两个线性无关的特征向量. 所以属于特征值 $\lambda_1 = 0$ 的所有的特征向量为：

$$\{x_1\alpha_2 + x_2\alpha_3 | x_1, x_2 \in F \text{不全为}0\}.$$

将 $\lambda_1 = 1$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$ 得

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0,$$

有基础解系

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \eta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

所以 $\alpha_1 + \alpha_3$, α_4 是 $\mathbf{A}$ 的属于特征值 $\lambda_1 = 1$ 的两个线性无关的特征向量. 所以属于特征值 $\lambda_1 = 1$ 的所有的特征向量为：

$$\{x_3(\alpha_1 + \alpha_3) + x_4\alpha_4 | x_3, x_4 \in F \text{不全为}0\}.$$

(2) 取 α_2, α_3, $\alpha_1 + \alpha_3$, α_4, 则它们是 $\mathbf{A}$ 的特征向量组成的 V 的一个基, 且

$$\mathbf{A}(\alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_1+\alpha_3,\ \alpha_4)=(\alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_1+\alpha_3,\ \alpha_4)\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

. □

书后习题.26. $P_{126}, Ex4$

证明: 设 $\lambda_1\neq\lambda_2$ 是线性变换 $\mathbf{A}$ 的两个不同特征值, $\alpha_1,\ \alpha_2$ 分别是属于特征值 $\lambda_1,\ \lambda_2$ 的两个特征向量, 则

$$\mathbf{A}\alpha_1=\lambda_1\alpha_1,\ \mathbf{A}\alpha_2=\lambda_2\alpha_2.$$

考虑 $\alpha_1,\ \alpha_2$ 的线性组合

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2=0,$$

则

$$x_1\lambda_2\alpha_1+x_2\lambda_2\alpha_2=0,$$
$$\mathbf{A}(x_1\alpha_1+x_2\alpha_2)=x_1\mathbf{A}\alpha_1+x_2\mathbf{A}\alpha_2=x_1\lambda_1\alpha_1+x_2\lambda_2\alpha_2=0,$$

所以

$$x_1(\lambda_1-\lambda_2)\alpha_1=0,$$

又 $\lambda_1\neq\lambda_2,\ \alpha_1\neq0$, 所以

$$x_1=0,$$

同样可以得到 $x_2=0$, 所以 $\alpha_1,\ \alpha_2$ 线性无关. □

书后习题.27. $P_{126}, Ex5$

证明: 假设 $\xi_1+\xi_2$ 是 $\mathbf{A}$ 的属于特征值 λ 的一个特征向量, 即

$$\mathbf{A}(\xi_1+\xi_2)=\lambda(\xi_1+\xi_2),$$

而

$$\mathbf{A}(\xi_1+\xi_2)=\mathbf{A}\xi_1+\mathbf{A}\xi_2=\lambda_1\xi_1+\lambda_2\xi_2,$$

所以

$$\lambda_1\xi_1+\lambda_2\xi_2=\lambda(\xi_1+\xi_2),$$
$$()\xi_1+(\lambda_2-\lambda)\xi_2=0,$$

而由 $Ex4$ 的结论, $\xi_1,\ \xi_2$ 线性无关, 所以

$$\lambda_1 - \lambda = \lambda_2 - \lambda = 0,$$
$$\lambda_1 = \lambda = \lambda_2,$$

矛盾.

所以 $\xi_1 + \xi_2$ 不是 $\mathbf{A}$ 的特征向量. □

书后习题.28. $P_{126}, Ex6$

证明：在 V 中任取一个向量 $\alpha \in V$，由于任意的非 0 向量都是 $\mathbf{A}$ 的特征向量，所以存在 $k \in F$，使得 $\mathbf{A}\alpha = k\alpha$.

现任取 $\alpha_1, \alpha_2 \in V$，则存在 $k_1, k_2 \in F$，使得

$$\mathbf{A}\alpha_1 = k_1\alpha_1,\ \mathbf{A}\alpha_2 = k_2\alpha_2,$$

当 α_1, α_2 是非 0 向量，则 k_1, k_2 是 $\mathbf{A}$ 的特征值.

如果 $k_1 \neq k_2$，则 α_1, α_2 线性无关，从而 $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$，且 $\alpha_1 + \alpha_2$ 不再是 $\mathbf{A}$ 的特征向量，与已知矛盾.

所以 $k_1 = k_2$，从而对任意的 $\alpha \in V$，存在 $k \in F$，使得 $\mathbf{A}\alpha = k\alpha$. 所以 $\mathbf{A}$ 是 V 上的数乘变换. □

书后习题.29. $P_{126}, Ex7$

证明：(*1*) 设 λ 是线性变换 $\mathbf{A}$ 的一个特征值，α 是属于特征值 λ 的一个特征向量. 即

$$\mathbf{A}\alpha = \lambda\alpha.$$

由于 $\mathbf{A}$ 是可逆线性变换，所以 $\mathbf{A}$ 是 V 上的单射，从而 $Ker\mathbf{A} = 0$，所以 $\forall\alpha \in V$，如果 $\alpha \neq 0$，都有 $\mathbf{A}\alpha \neq 0$，所以 0 不是 $\mathbf{A}$ 的特征值.

(*2*) 设 λ 是线性变换 $\mathbf{A}$ 的一个特征值，α 是属于特征值 λ 的一个特征向量. 则 $\lambda \neq 0$，且 $\mathbf{A}\alpha = \lambda\alpha$.

由于 $\mathbf{A}$ 可逆，则 $\mathbf{A}^{-1}$ 也是线性变换，且

$$\alpha = \mathbf{I}\alpha = (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\alpha = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}\alpha) = \mathbf{A}^{-1}(\lambda\alpha) = \lambda(\mathbf{A}^{-1}\alpha),$$

所以

$$\mathbf{A}^{-1}\alpha = \tfrac{1}{\lambda}\alpha,$$

即 $\frac{1}{\lambda}$ 是 $\mathbf{A}^{-1}$ 的特征值. □

书后习题.30. $P_{126}, Ex8$

证明：假设 $V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus ... \oplus V_{\lambda_s}$，取 V_{λ_i} 的基 $\alpha_{i1}, ..., \alpha_{it_i}$，则 $\alpha_{i1}, ..., \alpha_{it_i}$ 是 $\mathbf{A}$ 的属于特征值 λ_i 的 t_i 个线性无关的特征向量，而由直和的等价条件，则 $\alpha_{11}, ..., \alpha_{1t_1}, ..., \alpha_{s1}, ..., \alpha_{st_s}$ 是 V 的一个基，所以 $t_1 + ... + t_s = n$，$\mathbf{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量，所以 $\mathbf{A}$ 可以对角化.

假设 $\mathbf{A}$ 可以对角化，则 $\mathbf{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量. 而 $\lambda_1, ..., \lambda_s$ 是 $\mathbf{A}$ 的全部特征值，取属于特征值 λ_i 的所有线性无关的特征向量 $\alpha_{i1}, ..., \alpha_{it_i}$，则 $\alpha_{i1}, ..., \alpha_{it_i}$ 是 V_{λ_i} 的一个基. 且

$$\alpha_{11}, ..., \alpha_{1t_1}, ..., \alpha_{s1}, ..., \alpha_{st_s}$$

是 $\mathbf{A}$ 的所有的线性无关的特征向量，而 $\mathbf{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量，所以 $t_1 + ... + t_s = n$，从而

$$\alpha_{11}, ..., \alpha_{1t_1}, ..., \alpha_{s1}, ..., \alpha_{st_s}$$

是 V 的一个基，再由直和的等价条件，则 $V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus ... \oplus V_{\lambda_s}$. □

书后习题.31. $P_{126}, Ex9$

证明：我们分下列 5 步完成证明.

(1) 因为 $\mathbf{A}$ 的谱是单的，所以 $\mathbf{A}$ 可以对角化，即存在 V 的一个基 $\alpha_1, ..., \alpha_n$，使得 $\mathbf{A}$ 在这一组基下的矩阵为对角阵

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

记 $\mathbf{B}$ 在基 $\alpha_1, ..., \alpha_n$ 下的矩阵为 B，由于 $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$，所以 $AB = BA$. 再由上册 $P_{122}, Ex1$ 的结论知，B 是一个对角阵.

(2) 记 $\mathbb{H} = \{\mathbf{D} | \mathbf{D} \in Hom(V,\ V)\text{且在基 } \alpha_1, ..., \alpha_n \text{ 下的矩阵为对角阵}\}$. 则 $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{H}$，且

$\forall \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{H},\ k \in F$，$\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ 在基 $\alpha_1, ..., \alpha_n$ 的矩阵为对角阵，$X,\ Y$，$\mathbf{X} + \mathbf{Y}$ 在基 $\alpha_1, ..., \alpha_n$ 的矩阵为 $X + Y$ 仍是对角阵，$k\mathbf{X}$ 在基 $\alpha_1, ..., \alpha_n$ 的矩阵为 kX 也是对角阵，也就是：$\mathbf{X} + \mathbf{Y},\ k\mathbf{X} \in \mathbb{H}$，所以 $\mathbb{H}$ 是 $Hom(V, V)$ 的一个子空间.

$(3)\mathbb{H}$ 是 n 维子空间.

记 $\mathbf{E}_{ii} \in Hom(V,V), i = 1,...,n$, $\mathbf{E}_{ii}\alpha_k = \begin{cases} \alpha_i & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$. 则 $\mathbf{E}_{ii}$ 在基 $\alpha_1,...,\alpha_n$ 之下的矩阵为 E_{ii} 为对角阵, 所以 $\mathbf{E}_{ii} \in \mathbb{H}, i = 1,...,n$.

由于 $E_{11}, E_{22}, ..., E_{nn}$ 在 $M_n(F)$ 中线性无关, 利用 $Hom(V,\ V)$ 到 $M_n(F)$ 的同构映射

$$\sigma : Hom(V,\ V) \to M_n(F),$$

$$\mathbf{A} \mapsto A, \text{ 其中 } A \text{ 是 } \mathbf{A} \text{ 在基 } \alpha_1,...,\alpha_n \text{ 之下的矩阵}.$$

知: $E_{11}, E_{22}, ..., E_{nn}$ 在 $M_n(F)$ 中线性无关, 它的原象在 $Hom(V,\ V)$ 中也线性无关, 即 $\mathbf{E}_{11}, \mathbf{E}_{22}, ..., \mathbf{E}_{nn}$ 在 $Hom(V,V)$ 中线性无关;

$\forall \mathbf{D} \in \mathbb{H}$, 假设 $\mathbf{D}$ 在基 $\alpha_1,...,\alpha_n$ 之下的矩阵为

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}.$$

即 $\mathbf{D}\alpha_i = d_i\alpha_i, i = 1,2,...,n$. 则

$$\mathbf{D} = d_1\mathbf{E}_{11} + d_2\mathbf{E}_{22} + ... + d_n\mathbf{E}_{nn}.$$

事实上, $\forall \alpha \in V$, $\alpha = x_1\alpha_1 + ... + x_n\alpha_n$, 则

$$\mathbf{D}\alpha = x_1\mathbf{D}\alpha_1 + ... + x_n\mathbf{D}\alpha_n = x_1d_1\alpha_1 + ... + x_nd_n\alpha_n.$$

而

$$(d_1\mathbf{E}_{11} + d_2\mathbf{E}_{22} + ... + d_n\mathbf{E}_{nn})\alpha = d_1\mathbf{E}_{11}\alpha + d_2\mathbf{E}_{22}\alpha + ... + d_n\mathbf{E}_{nn}\alpha,$$

且

$(d_k\mathbf{E}_{kk})\alpha = d_k\mathbf{E}_{kk}(x_1\alpha_1 + ... + x_n\alpha_n)$

$= d_k\mathbf{E}_{kk}(x_1\alpha_1) + ... + d_k\mathbf{E}_{kk}(x_{k-1}\alpha_{k-1}) + d_k\mathbf{E}_{kk}(x_k\alpha_k) + d_k\mathbf{E}_{kk}(x_{k+1}\alpha_{k+1}) + ... + d_k\mathbf{E}_{kk}(x_n\alpha_n)$

$= d_kx_k\alpha_k,\ k = 1,2,...,n.$

所以

$$(d_1\mathbf{E}_{11} + d_2\mathbf{E}_{22} + ... + d_n\mathbf{E}_{nn})\alpha = x_1d_1\alpha_1 + ... + x_nd_n\alpha_n.$$

即

$$\mathbf{D} = d_1\mathbf{E}_{11} + d_2\mathbf{E}_{22} + ... + d_n\mathbf{E}_{nn}.$$

所以 $\mathbf{E}_{11},\mathbf{E}_{22},...,\mathbf{E}_{nn}$ 是 $\mathbb{H}$ 的一个基. $\mathbb{H}$ 是 n 维的.

(4) $\mathbf{I}$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^2,...,\mathbf{A}^{n-1}$ 是 $\mathbb{H}$ 的一个基.

显然, $\mathbf{I}$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^2,...,\mathbf{A}^{n-1}\in\mathbb{H}$;

考虑 $\mathbf{I}$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^2,...,\mathbf{A}^{n-1}$ 的线性组合

$$y_0\mathbf{I}+y_1\mathbf{A}+y_2\mathbf{A}^2+...+y_{n-1}\mathbf{A}^{n-1}=\mathbf{0},$$

由于

$$\mathbf{A}\alpha_i=\lambda_i\alpha_i, i=1,2,...,n,$$

所以

$$\mathbf{A}^m\alpha_i=\lambda_i^m\alpha_i, i=1,2,...,n, m\text{是任意自然数}.$$

从而

$$\begin{gathered}(y_0\mathbf{I}+y_1\mathbf{A}+y_2\mathbf{A}^2+...+y_{n-1}\mathbf{A}^{n-1})\alpha_i=\\(y_0+y_1\lambda_i+y_2\lambda_i^2+...+y_{n-1}\lambda_i^{n-1})\alpha_i=0,\end{gathered}$$

再 $\alpha_i\neq 0$, 所以

$$y_0+y_1\lambda_i+y_2\lambda_i^2+...+y_{n-1}\lambda_i^{n-1}=0,$$

$i=1,2,...,n$. 从而有关于 $y_0,y_1,y_2,...,y_{n-1}$ 的线性方程组

$$(\star)\qquad\left\{\begin{array}{llllll}y_0 & +y_1\lambda_1 & +y_2\lambda_1^2 & +... & +y_{n-1}\lambda_1^{n-1} & =0\\ y_0 & +y_1\lambda_2 & +y_2\lambda_2^2 & +... & +y_{n-1}\lambda_2^{n-1} & =0\\ \vdots & & & & & \vdots\\ y_0 & +y_1\lambda_n & +y_2\lambda_n^2 & +... & +y_{n-1}\lambda_n^{n-1} & =0\end{array}\right.$$

显然 $(\star)$ 的系数行列式为

$$\begin{vmatrix}1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & ... & \lambda_1^{n-1}\\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & ... & \lambda_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & ... & \vdots\\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & ... & \lambda_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\le i<j\le n}(\lambda_j-\lambda_i)\neq 0$$

只有 0 解, 所以 $\mathbf{I}$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^2,...,\mathbf{A}^{n-1}$ 线性无关, 是 $\mathbb{H}$ 的一个基.

(5) 由 *(1)* 知, $\mathbf{B}\in\mathbb{H}$, 所以 $\mathbf{B}$ 可以被 $\mathbf{I}$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^2,...,\mathbf{A}^{n-1}$ 唯一的线性表出, 即存在唯一的系数 $a_0,a_1,a_2,...,a_{n-1}\in F$, 使得

$$\mathbf{B}=a_0I+a_1\mathbf{A}+a_2\mathbf{A}^2+...+a_{n-1}\mathbf{A}^{n-1}.$$

取 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_{n-1}x^{n-1}$，则 $deg(f(x))<n$，且

$$\mathbf{B}=f(\mathbf{A}).$$

□

书后习题.32. $P_{131},Ex1$

解：因为

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\0&1&1&0\\0&2&0&1\end{pmatrix}$$

是可逆矩阵，所以

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\0&1&1&0\\0&2&0&1\end{pmatrix}=(\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3+2\alpha_4,\alpha_3,\alpha_4)$$

仍是 V 的一个基，且在基 $\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3+2\alpha_4,\alpha_3,\alpha_4$ 之下 $\mathbf{A}$ 的矩阵为

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\0&1&1&0\\0&2&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\0&1&4&-2\\2&-1&0&1\\2&-1&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\0&1&1&0\\0&2&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&2\end{pmatrix}$$

为分块上三角矩阵，且

$$\mathbf{A}(\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3+2\alpha_4)=(\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3+2\alpha_4)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},$$

所以 $W=<\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3+2\alpha_4>$ 是 $\mathbf{A}-$ 子空间. □

书后习题.33. $P_{131},Ex2$

证明：(*1*) 由于 W 是有限维子空间，所以可设 $\alpha_1,...,\alpha_s$ 是 W 的一个基. 从而 $W=<\alpha_1,...,\alpha_s>$，且 $Im(\mathbf{A}|_W)=<\mathbf{A}\alpha_1,...,\mathbf{A}\alpha_s>$.

由于 $\mathbf{A}$ 是可逆线性变换，所以 $\mathbf{A}\alpha_1,...,\mathbf{A}\alpha_s$ 仍线性无关，即 $Im(\mathbf{A}|_W)$ 是 s 维的，所以 $Im(\mathbf{A}|_W)=W$，$\mathbf{A}|_W$ 是 W 上的一个同构映射. 所以 $\mathbf{A}|_W$ 可逆.

(2) 由 (1) 的证明知, $\mathbf{A}\alpha_1, ..., \mathbf{A}\alpha_s$ 是 W 的一个基, 且 $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\alpha_1, ..., \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\alpha_s = \alpha_1, ..., \alpha_s \in W$, 所以 W 是 $\mathbf{A}^{-1}-$ 子空间.
且 $(\mathbf{A}|_W)^{-1}(\mathbf{A}\alpha_1, ..., \mathbf{A}\alpha_s) = (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\alpha_1, ..., \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\alpha_s) = (\alpha_1, ..., \alpha_s)$,
所以 $(\mathbf{A}|_W)^{-1} = \mathbf{A}^{-1}|_W$. □

书后习题.34. $P_{131}, Ex3$

证明: 因为 V 是复数域上的线性空间, 所以 V 上的线性变换 $\mathbf{A}$ 至少有一个特征值 λ. 记 V_λ 是 $\mathbf{A}$ 的属于特征值 λ 的特征子空间.

因为 $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, 所以 V_λ 是 $\mathbf{B}-$ 子空间, 即 $\mathbf{B}|_{V_\lambda}$ 是 V_λ 上的一个线性变换, 所以 $\mathbf{B}|_{V_\lambda}$ 也至少有一个特征值 μ, 从而存在 $\alpha \in V_\lambda$, $\alpha \neq 0$, 使得 $(\mathbf{B}|_{V_\lambda})\alpha = \mathbf{B}\alpha = \mu\alpha$. 所以 $\alpha \in V_\lambda$ 是 $\mathbf{B}$ 的一个特征向量, 也是 $\mathbf{A}$ 的一个特征向量. □

书后习题.35. $P_{132}, Ex4$

证明: (1) 因为 $\mathbf{A}$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ 之下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{pmatrix}$$

所以

$$\begin{cases} \mathbf{A}\alpha_1 & = & a\alpha_1 \\ \mathbf{A}\alpha_k & = & \alpha_{k-1} + a\alpha_k, \quad k = 2, 3, ..., n \end{cases}$$

所以, 对任何子空间 W 以及 $k > 2$, 如果 $\alpha_k, \mathbf{A}\alpha_k \in W$, 则有 $\alpha_{k-1} \in W$.

因为 W 是 $\mathbf{A}-$ 子空间, 且 $\alpha_n \in W$, 所以 $\mathbf{A}\alpha_n \in W$, 从而 $\alpha_{n-1} \in W$. 注意到 W 是 $\mathbf{A}-$ 子空间, $\forall \alpha \in W$, 都有 $\mathbf{A}\alpha \in W$, 所以由 $\alpha_{n-1} \in W$ 可以得到 $\alpha_{n-2} \in W$, 依次递推, 可以得到: $\alpha_n, \alpha_{n-1}, ..., , \alpha_1 \in W$, 从而 $W = V$.

(2) 设 W 是 V 的一个非 0 不变子空间. 任取 $\beta \in W$, $\beta \neq 0$, 则存在不全为 0 的元 $k_1, k_2, ..., k_n \in F$, 使得 $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + ... + k_n\alpha_n$, 从而

$$\mathbf{A}\beta = \mathbf{A}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$$

$$= (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$$

$$= (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)\begin{pmatrix} ak_1 + k_2 \\ ak_2 + k_3 \\ \vdots \\ ak_{n-1} + k_n \\ ak_n \end{pmatrix}$$

$$= a\beta + (k_2\alpha_1 + k_3\alpha_2 + ... + k_n\alpha_{n-1}),$$

所以 $k_2\alpha_1 + k_3\alpha_2 + ... + k_n\alpha_{n-1} \in W$.

由于 $k_1, k_2, ..., k_n$ 不全为 0，所以存在 $s \leq n$，
$k_s \neq 0$，$k_{s+1} = ... = k_n = 0$，从而 $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + ... + k_s\alpha_s$，且 $k_2\alpha_1 + k_3\alpha_2 + ... + k_s\alpha_{s-1} \in W$. 而

$$k_2\alpha_1 + k_3\alpha_2 + ... + k_s\alpha_{s-1} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)\begin{pmatrix} k_2 \\ \vdots \\ k_s \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

所以

$$\mathbf{A}(k_2\alpha_1+k_3\alpha_2+...+k_s\alpha_{s-1})=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & a & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_2\\ \vdots\\ k_s\\ 0\\ \vdots\\ 0 \end{pmatrix}$$

$$=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)\begin{pmatrix} ak_2+k_3\\ \vdots\\ ak_{s-1}+k_s\\ ak_s\\ 0\\ \vdots\\ 0 \end{pmatrix}$$

$=a(k_2\alpha_1+k_3\alpha_2+...+k_s\alpha_{s-1})+(k_3\alpha_1+...+k_s\alpha_{s-2})$.
所以 $k_3\alpha_1+...+k_s\alpha_{s-2}\in W$，再对 $k_3\alpha_1+...+k_s\alpha_{s-2}$ 在 $\mathbf{A}$ 之下求象，最后可以得到：

$$k_s\alpha_1\in W.$$

所以 $\alpha_1\in W$.

(3) 由于 α_1 属于 $\mathbf{A}$ 的所有非 0 不变子空间，所以任意两个非平凡不变子空间的和都不会是直和．从而 V 不能分解成 $\mathbf{A}$ 的两个非平凡不变子空间的直和.

(4) 任取 $\mathbf{A}$ 的一个非 0 不变子空间 W，则 $\alpha_1\in W$.

取 W 的一个基 $\alpha_1,\beta_2,...,\beta_m$，由于 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ 是 V 的一个基，所以存在 $a_{ij}\in F$，使得

$$\begin{cases} \beta_2 & =a_{21}\alpha_1 & +a_{22}\alpha_2 & +... & +a_{2s}\alpha_s\\ \beta_3 & =a_{31}\alpha_1 & +a_{32}\alpha_2 & +... & +a_{3s}\alpha_s\\ & \vdots & & \vdots & \\ \beta_m & =a_{m1}\alpha_1 & +a_{m2}\alpha_2 & +... & +a_{ms}\alpha_s \end{cases}$$

其中 s 是 $\beta_2,...,\beta_m$ 中被 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ 表出时，不为 0 系数的足码最大值．从而 $a_{2s},a_{3s},...,a_{ms}$ 不全为 0，注意到基中 $\beta_2,...,\beta_m$ 的顺序可以改变，所以

可以假设 $a_{2s}\neq 0$. 且 $m\leq s$. 下面考虑 $\mathbf{A}\beta_2$. 由于

$$\beta_2=a_{21}\alpha_1+a_{22}\alpha_2+...+a_{2s}\alpha_s$$

$$=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)\begin{pmatrix}a_{21}\\ \vdots\\ a_{2s}\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

$$=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)\begin{pmatrix}a&1&0&\cdots&0&0\\ 0&a&1&\cdots&0&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\ 0&0&0&\cdots&a&1\\ 0&0&0&\cdots&0&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{21}\\ \vdots\\ a_{2s}\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

$$=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)\begin{pmatrix}aa_{21}+a_{22}\\ \vdots\\ aa_{2s-1}+a_{2s}\\ aa_{2s}\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

$$=a\beta_2+a_{22}\alpha_1+(a_{23}\alpha_2+...+a_{2s}\alpha_{s-1}),$$

所以 $a_{23}\alpha_2+...+a_{2s}\alpha_{s-1}\in W$，且

$$a_{23}\alpha_2+...+a_{2s}\alpha_{s-1}=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)\begin{pmatrix}0\\ a_{23}\\ \vdots\\ a_{2s}\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},$$

所以

$$\mathbf{A}(a_{23}\alpha_2+...+a_{2s}\alpha_{s-1})=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & a & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0\\ a_{23}\\ \vdots\\ a_{2s}\\ 0\\ \vdots\\ 0 \end{pmatrix}$$

$=a(a_{23}\alpha_2+...+a_{2s}\alpha_{s-1})+a_{23}\alpha_1+(a_{24}\alpha_2+...+a_{2s}\alpha_{s-2})$,
所以 $a_{24}\alpha_2+...+a_{2s}\alpha_{s-2}\in W$，再求 $a_{24}\alpha_2+...+a_{2s}\alpha_{s-2}\in W$ 在 $\mathbf{A}$ 之下的象，依次进行下去，可以得到：$a_{2s}\alpha_2\in W$，从而 $\alpha_2\in W$.

同样可以证明：$\alpha_3,...,\alpha_s\in W$，所以 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ 可以由 $\alpha_1,\beta_2,...,\beta_m$ 线性表出，从而 $s\le m$.

所以 $m=s$, $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ 也是 W 的一个基, 从而 $W=<\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s>$.

又 $\mathbf{A}\alpha_1=a\alpha_1$，$\mathbf{A}\alpha_k=\alpha_{k-1}+a\alpha_k,\ \forall k>1$. 所以 $W=<\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s>$ 是 $\mathbf{A}$ 的不变子空间. 从而 $\mathbf{A}$ 的所有不变子空间有 $n+1$ 个，它们是：

$$\{0\},<\alpha_1>,<\alpha_1,\alpha_2>,...,<\alpha_1,...,\alpha_n>.$$

□

书后习题.36. $P_{132},Ex5$

证明：假设 $\mathbf{A}$ 在实数域上有特征值 λ，设 α 是属于特征值 λ 的特征向量，记 $W=<\alpha>$，则 W 是 $\mathbf{A}$ 的一维不变子空间；

假设 $\mathbf{A}$ 在实数域上没有特征值. 取 $\alpha_1,...,\alpha_n$ 是 V 的一个基, 设在这个基下线性变换 $\mathbf{A}$ 的矩阵为实数矩阵 A. 则在复数域上, 矩阵 A 的特征多项式 $|\lambda I-A|$ 有共轭虚数根 $z=a+bi,\ \overline{z}=a-bi$，其中 $a,b\in\mathcal{R}$ 是实数. 假设 $X_1,X_2\in\mathcal{R}^n$，使得 $X=X_1+iX_2$ 是矩阵 A 在复数域上属于特征值 $z=a+bi$ 的特征向量，即

$$A(X_1+iX_2)=(a+bi)(X_1+iX_2),$$

从而

$$AX_1+iAX_2=(aX_1-bX_2)+i(aX_2+bX_1),$$
$$AX_1=aX_1-bX_2,\ AX_2=aX_2+bX_1,$$

且有 $A(X_1-iX_2)=AX_1-iAX_2$
$=(aX_1-bX_2)-i(aX_2+bX_1)=(a-bi)(X_1-iX_2)$,
也就是说: $\overline{X}=X_1-iX_2$ 是矩阵 A 属于特征值 $\overline{z}$ 的一个特征向量.

记 $\beta_1=(\alpha_1,...,\alpha_n)X_1,\ \beta_2=(\alpha_1,...,\alpha_n)X_2$,
则由 $AX_1=aX_1-bX_2,\ AX_2=aX_2+bX_1$ 知,

$$\mathbf{A}\beta_1=a\beta_1-b\beta_2,\ \mathbf{A}\beta_2=a\beta_2+b\beta_1,$$

所以 $W=<\beta_1,\beta_2>$ 是一个 $\mathbf{A}-$ 子空间.

下证 β_1,β_2 线性无关.

假设 β_1,β_2 线性相关, 由于 $\alpha_1,...,\alpha_n$ 是基, 所以 β_1,β_2 线性相关 $\Leftrightarrow$ X_1,X_2 在 $\mathcal{R}^n$ 中线性相关. 从而存在 $l\in\mathcal{R}$, 使得 $X_1=lX_2$, 从而

$$X_1+iX_2=(l+i)X_2,\ X_1-iX_2=(l-i)X_2\in\mathcal{C}^n,$$

是复数域上 n 维数组空间中线性相关的两个向量.

但 $X_1+iX_2,\ X_1-iX_2$ 是矩阵 A 分别属于特征值 $z,\ \overline{z}$ 的特征向量, 线性无关, 矛盾. 所以 β_1,β_2 线性无关.

所以 $<\beta_1,\beta_2>$ 是二维的, $\mathbf{A}$ 有二维不变子空间. □

书后习题.37. $P_{132},Ex6$

证明: 设 W 是 $\mathbf{A}$ 的一维不变子空间, 任意 $\alpha\in W,\alpha\neq 0$, 则 α 是 W 的一个基. 而 W 是 $\mathbf{A}-$ 子空间, 所以 $\mathbf{A}\alpha\in W$ 可以由 α 线性表出, 从而存在 $k\in F$, 使得 $\mathbf{A}\alpha=k\alpha$, 也就是: α 是 $\mathbf{A}$ 的一个特征向量. 从而一般的有: 线性变换 $\mathbf{A}$ 的一维不变子空间中的非 0 向量都是 $\mathbf{A}$ 的特征向量.

由于 V 是平面上的向量空间, 所以 V 二维的, 因而 $\mathbf{A}$ 的非平凡不变子空间只能是一维的.

$\mathbf{A}$ 是旋转变换, 且旋转角度 $\theta\neq k\pi$, 所以任意向量 $\alpha\in W$, $\mathbf{A}\alpha$ 与 α 都不能共线, 所以 $\mathbf{A}$ 没有特征向量.

所以 $\mathbf{A}$ 没有非平凡的不变子空间. □

书后习题.38. $P_{132},Ex7$

证明: 记 V_{λ_0} 为特征值 λ_0 的特征子空间, 并设 V_{λ_0} 的维数为 m, $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ 是 V_{λ_0} 的一个基.

则特征值 λ_0 的几何重数为 m.

将 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ 扩充为 V 的一个基 $\alpha_1, ..., \alpha_m, \alpha_{m+1}, ..., \alpha_n$, 则在基 $\alpha_1, ..., \alpha_m, \alpha_{m+1}, ..., \alpha_n$ 之下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1m+1} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \lambda_0 & \cdots & 0 & a_{2m+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_0 & a_{mm+1} & \cdots & a_{mn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{m+1m+1} & \cdots & a_{m+1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nm+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

从而 $\mathbf{A}$ 的特征多项式为 $(\lambda - \lambda_0)^m \begin{vmatrix} \lambda - a_{m+1m+1} & \cdots & -a_{m+1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ -a_{nm+1} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$,

所以 λ_0 的代数重数至少是 m, 所以几何重数不超过代数重数. □

书后习题.39. $P_{132}, Ex8$

证明: 假设 $\mathbf{A}$ 可以对角化, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s$ 是 $\mathbf{A}$ 的 s 个不同特征值, V_{λ_i} 是 $\mathbf{A}$ 的属于特征值 λ_i 特征子空间.

则由对角化的等价条件,

$$V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus ... \oplus V_{\lambda_s},$$
$$n = dimV_{\lambda_1} + dimV_{\lambda_2} + ... + dimV_{\lambda_s},$$

也就是, $\mathbf{A}$ 的不同特征值的几何重数之和等于 n. 而特征值的代数重数不小于几何重数, 且代数重数之和等于 n, 所以特征值的几何重数等于代数重数.

假设线性变换 $\mathbf{A}$ 的特征值的几何重数等于代数重数.

因为 V 是 n 维的, 所以 $\mathbf{A}$ 的特征多项式是复数域 C 上的 n 次多项式. 记为 $f(\lambda)$. 在复数域上, $f(\lambda)$ 可以分解为一次多项式的乘积.

$$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{t_1}(\lambda - \lambda_2)^{t_2}...(\lambda - \lambda_s)^{t_s},$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s$ 是 $\mathbf{A}$ 的 s 个不同特征值. t_i 是特征值 λ_i 的代数重数. $t_1 + t_2 + ... + t_s = n$.

记 V_{λ_i} 是 $\mathbf{A}$ 的属于特征值 λ_i 特征子空间, 由于在 $i \neq j$ 时, $V_{\lambda_i} \cap V_{\lambda_j} = 0$, 所以和

$$V_{\lambda_1}+V_{\lambda_2}+...+V_{\lambda_s}$$

是直和，又每个特征值的代数重数等于几何重数，所以

$$dimV_{\lambda_1}+dimV_{\lambda_2}+...+dimV_{\lambda_s}=t_1+t_2+...+t_s=n,$$

所以

$$V=V_{\lambda_1}\oplus V_{\lambda_2}\oplus...\oplus V_{\lambda_s}.$$

由线性变换可以对角化的等价条件，得 $\mathbf{A}$ 可以对角化. $\square$

书后习题.40. $P_{132}, Ex9$

证明：$\mathbf{A}$ 是幂等变换

$\Leftrightarrow \mathbf{A}^2=\mathbf{A}$

$\Leftrightarrow \mathbf{A}(\mathbf{A}-\mathbf{I})=\mathbf{0}$

$\Leftrightarrow Ker\mathbf{A}(\mathbf{A}-\mathbf{I})=V.$

假设 $\mathbf{A}$ 是幂等变换，则 $Ker\mathbf{A}(\mathbf{A}-\mathbf{I})=V.$

取 $f(x)=x(x-1)$，$f_1(x)=x$，$f_2(x)=x-1$，则 $f(x)=f_1(x)f_2(x)$，且 $(f_1(x),\ f_2(x))=1$，所以

$$Kerf(\mathbf{A})=Kerf_1(\mathbf{A})\oplus Kerf_2(\mathbf{A}),$$
$$Ker\mathbf{A}(\mathbf{A}-\mathbf{I})=Ker\mathbf{A}\oplus Ker(\mathbf{A}-\mathbf{I}),$$
$$n=dimKer\mathbf{A}+dimKer(\mathbf{A}-\mathbf{I}),$$

又因为 $dimKer\mathbf{A}+rank\mathbf{A}=n$，$dimKer(\mathbf{A}-\mathbf{I})+rank(\mathbf{A}-\mathbf{I})=n$，
所以 $n=rank\mathbf{A}+rank(\mathbf{A}-\mathbf{I})$.

假设 $n=rank\mathbf{A}+rank(\mathbf{A}-\mathbf{I})$，由于 $dimKer\mathbf{A}+rank\mathbf{A}=n$，$dimKer(\mathbf{A}-\mathbf{I})+rank(\mathbf{A}-\mathbf{I})=n$，所以 $n=dimKer\mathbf{A}+dimKer(\mathbf{A}-\mathbf{I})$.

又因为 $\forall\alpha\in Ker\mathbf{A}\cap Ker(\mathbf{A}-\mathbf{I})$，则 $\mathbf{A}\alpha=(\mathbf{A}-\mathbf{I})\alpha=0$，从而

$$\alpha=\mathbf{I}\alpha=[\mathbf{A}-(\mathbf{A}-\mathbf{I})]\alpha=\mathbf{A}\alpha-(\mathbf{A}-\mathbf{I})\alpha=0,$$

所以 $Ker\mathbf{A}\cap Ker(\mathbf{A}-\mathbf{I})=0$. 从而 $Ker\mathbf{A}+Ker(\mathbf{A}-\mathbf{I})=V$.

所以 $\forall\alpha\in V$，存在 $\alpha_1\in Ker\mathbf{A}$，$\alpha_2\in Ker\mathbf{A}-\mathbf{I}$，使得 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$，从而

$$\mathbf{A}(\mathbf{A}-\mathbf{I})\alpha=\mathbf{A}(\mathbf{A}-\mathbf{I})\alpha_1+\mathbf{A}(\mathbf{A}-\mathbf{I})\alpha_2=0,$$

所以 $\mathbf{A}(\mathbf{A}-\mathbf{I})=\mathbf{0}$，从而 $\mathbf{A}^2=\mathbf{A}$. $\square$

书后习题.41. $P_{132}, Ex10$

证明：任取 V 的一个基 $\alpha_1, ..., \alpha_n$，并定义 V 上的一个线性变换 $\mathbf{A}$,

$$\mathbf{A}(\alpha_1, ..., \alpha_n) = (\alpha_1, ..., \alpha_n)A.$$

则

A 是对合矩阵

$\Leftrightarrow$ $\mathbf{A}$ 是对合变换

$\Leftrightarrow$ $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$

$\Leftrightarrow$ $(\mathbf{A}+\mathbf{I})(\mathbf{A}-\mathbf{I}) = \mathbf{0}$

$\Leftrightarrow$ $Ker(\mathbf{A}+\mathbf{I})(\mathbf{A}-\mathbf{I}) = V$.

假设 $\mathbf{A}$ 是对合变换，则 $Ker(\mathbf{A}+\mathbf{I})(\mathbf{A}-\mathbf{I}) = V$.

取 $f(x) = (x+1)(x-1)$, $f_1(x) = x+1$, $f_2(x) = x-1$，则 $f(x) = f_1(x)f_2(x)$，且 $(f_1(x), f_2(x)) = 1$，所以

$$Kerf(\mathbf{A}) = Kerf_1(\mathbf{A}) \oplus Kerf_2(\mathbf{A}),$$
$$Ker(\mathbf{A}+\mathbf{I})(\mathbf{A}-\mathbf{I}) = Ker\mathbf{A}+\mathbf{I} \oplus Ker(\mathbf{A}-\mathbf{I}),$$
$$n = dimKer(\mathbf{A}+\mathbf{I}) + dimKer(\mathbf{A}-\mathbf{I}),$$

又因为

$dimKer(\mathbf{A}+\mathbf{I}) + rank(\mathbf{A}+\mathbf{I}) = n$, $dimKer(\mathbf{A}-\mathbf{I}) + rank(\mathbf{A}-\mathbf{I}) = n$,

所以 $n = rank(\mathbf{A}+\mathbf{I}) + rank(\mathbf{A}-\mathbf{I})$.

所以 $n = rank(A+I) + rank(A-I)$.

假设 $n = rank(A+I)+rank(A-I)$, 从而 $n = rank(\mathbf{A}+\mathbf{I})+rank(\mathbf{A}-\mathbf{I})$, 由于 $dimKer(\mathbf{A}+\mathbf{I}) + rank(\mathbf{A}+\mathbf{I}) = n$, $dimKer(\mathbf{A}-\mathbf{I}) + rank(\mathbf{A}-\mathbf{I}) = n$，所以 $n = dimKer(\mathbf{A}+\mathbf{I}) + dimKer(\mathbf{A}-\mathbf{I})$.

又因为 $\forall\alpha \in Ker(\mathbf{A}+\mathbf{I}) \cap Ker(\mathbf{A}-\mathbf{I})$, 则 $(\mathbf{A}+\mathbf{I})\alpha = (\mathbf{A}-\mathbf{I})\alpha = 0$, 从而

$$\alpha = \mathbf{I}\alpha = [(\mathbf{A}+\mathbf{I}) - (\mathbf{A}-\mathbf{I}) - \mathbf{I}]\alpha = (\mathbf{A}+\mathbf{I})\alpha - (\mathbf{A}-\mathbf{I})\alpha - \mathbf{I}\alpha = -\alpha,$$

所以 $\alpha = 0$, $Ker(\mathbf{A}+\mathbf{I}) \cap Ker(\mathbf{A}-\mathbf{I}) = 0$.

从而 $Ker(\mathbf{A}+\mathbf{I}) + Ker(\mathbf{A}-\mathbf{I}) = V$.

所以 $\forall\alpha \in V$，存在 $\alpha_1 \in Ker(\mathbf{A}+\mathbf{I})$, $\alpha_2 \in Ker\mathbf{A}-\mathbf{I}$, 使得 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$，从而

$$(\mathbf{A}+\mathbf{I})(\mathbf{A}-\mathbf{I})\alpha=(\mathbf{A}-\mathbf{I})(\mathbf{A}+\mathbf{I})\alpha_1+(\mathbf{A}+\mathbf{I})(\mathbf{A}-\mathbf{I})\alpha_2=0,$$

所以 $(\mathbf{A}+\mathbf{I})(\mathbf{A}-\mathbf{I})=\mathbf{0}$，从而 $\mathbf{A}^2=\mathbf{I}$，$A^2=I$. □

书后习题.42. $P_{132}, Ex11$

解：对于数乘变换 $\mathbf{k}$，取 $f(x)=x-k$，则

$$f(\mathbf{k})=\mathbf{k}-k\mathbf{I}=0,$$

所以 $f(x)=x-k$ 是数乘变换 $\mathbf{k}$ 的零化多项式. □

书后习题.43. $P_{132}, Ex12$

证明：假设线性变换 $\mathbf{A}$ 是一次多项式 $f(x)=mx-k$，$m\neq 0$，则

$$m\mathbf{A}-k\mathbf{I}=\mathbf{0},$$
$$\mathbf{A}=m^{-1}k\mathbf{I}$$

是数乘变换. □

书后习题.44. $P_{132}, Ex13$

解：因为

$A^2=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}2&2\\0&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

$=2A-I,$

所以，$A^2-2A+I=0$，从而 A 的零化多项式为

$$x^2-2x+1.$$

□

书后习题.45. $P_{132}, Ex14$

解： 因为 $A^n=0$，所以存在多项式 $f(x)=x^n$，使得 $f(A)=0$，所以 A 的零化多项式是 $f(x)=x^n$. □

书后习题.46. $P_{132}, Ex15$

证明：(*1*) 首先验证 $\overline{\mathbf{A}}$ 是 V/W 上的变换. 即要验证每一个 V/W 中的元素都在 $\overline{\mathbf{A}}$ 之下有唯一确定的象.

$\forall\alpha+W,\beta+W\in V/W$，如果 $\alpha+W=\beta+W$，则 $\alpha-\beta\in W$. 而 $\overline{\mathbf{A}}(\alpha+W)=\mathbf{A}\alpha+W$，$\overline{\mathbf{A}}(\beta+W)=\mathbf{A}\beta+W$. 因为 W 是 $\mathbf{A}-$ 子空间，所

以 $\mathbf{A}(\alpha-\beta)\in W$，从而 $\mathbf{A}\alpha-\mathbf{A}\beta\in W$，所以 $\mathbf{A}\alpha+W=\mathbf{A}\beta+W$. $\overline{\mathbf{A}}$ 是 V/W 上的变换.

$\forall\alpha+W,\beta+W\in V/W,\ k\in F$，则

$\overline{\mathbf{A}}[(\alpha+W)+(\beta+W)]=\overline{\mathbf{A}}[(\alpha+\beta)+W)]$
$=[\mathbf{A}(\alpha+\beta)]+W=(\mathbf{A}\alpha+\mathbf{A}\beta)+W$
$=(\mathbf{A}\alpha+W)+(\mathbf{A}\beta+W)$
$=\overline{\mathbf{A}}(\alpha+W)+\overline{\mathbf{A}}(\beta+W)$；
$\overline{\mathbf{A}}[k(\alpha+W)]=\overline{\mathbf{A}}(k\alpha+W)$
$=\mathbf{A}k\alpha+W=k\mathbf{A}\alpha+W$
$=k(\mathbf{A}\alpha+W)$
$=k\overline{\mathbf{A}}(\alpha+W)$；
所以 $\overline{\mathbf{A}}$ 是 V/W 上的线性变换. □

书后习题.47. $P_{135},Ex1$

证明：记 $f_i(\lambda)=(\lambda-\lambda_i)^{r_i}$，$i=1,2,...,s$，则

$$f(\lambda)=f_1(\lambda)f_2(\lambda)...f_s(\lambda),$$

且 $f_1(\lambda)$，$f_2(\lambda)$，...，$f_s(\lambda)$ 两个互素. 利用前一节的结论，则

$$Kerf(\mathbf{A})=Kerf_1(\mathbf{A})\oplus f_2(\mathbf{A})\oplus...\oplus f_s(\mathbf{A}).$$

再，**Hamilton-Cayley** 定理知：$f(\mathbf{A})=\mathbf{0}$，$Kerf(\mathbf{A})=V$，所以

$$V=Kerf_1(\mathbf{A})\oplus f_2(\mathbf{A})\oplus...\oplus f_s(\mathbf{A}).$$

□

书后习题.48. $P_{135},Ex2$

证明：记 n 级矩阵 A 的特征多项式为

$$f(\lambda)=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+...+a_1\lambda+a_0,$$

则 $a_0=(-1)^n|A|$，且

$$f(A)=A^n+a_{n-1}A^{n-1}+...+a_1A+a_0I=0,$$
$$a_0I=-A^n-a_{n-1}A^{n-1}-...-a_1A,$$

假设 A 可逆，则 $a_0=(-1)^n|A|\neq0$，从而

$$I=-a_0^{-1}A^n-a_0^{-1}a_{n-1}A^{n-1}-...-a_0^{-1}a_1A,$$
$$A^{-1}=-a_0^{-1}A^{n-1}-a_0^{-1}a_{n-1}A^{n-2}-...-a_0^{-1}a_1I.$$

所以结论成立. $\square$

书后习题.49. $P_{135}, Ex4$

证明: (*1*) 设矩阵方程 $AX-XB=0$ 只有零解, 要证明矩阵 A, B 没有公共的特征值. 假设 A, B 有公共的特征值 λ_0, α 是矩阵 A 属于特征值 λ_0 的特征向量.

因为 B 的转置矩阵 B' 与矩阵 B 有相同的特征多项式, 所以 λ_0 也是 B' 的一个特征值. 并设 β 是矩阵 B' 属于特征值 λ_0 的特征向量. 则

$$A\alpha=\lambda_0,\ B'\beta=\lambda_0\beta,\ \beta'B=\lambda_0\beta'.$$

取 $C=\alpha\beta'\in M_{n\times m}(F)$, 则 $C\neq 0$, 且
$AC-CB=A\alpha\beta'-\alpha\beta'B$
$=(A\alpha)\beta'-\alpha(\beta'B)$
$=\lambda_0\alpha\beta'-\alpha(\lambda_0\beta')=0.$
从而矩阵方程 $AX-XB=0$ 有非 0 解, 矛盾.

所以矩阵 A, B 没有公共的特征值.

(*2*) 设矩阵 A, B 没有公共的特征值, 要证明矩阵方程 $AX-XB=0$ 只有零解.

设 $f(\lambda)$ 是矩阵 A 的特征多项式, $g(\lambda)$ 是矩阵 B 的特征多项式. 由于在复数域上 A, B 没有公共的特征值, 也就是在复数域上 $f(\lambda)$, $g(\lambda)$ 没有公共根, 所以 $(f(\lambda),\ g(\lambda))=1$, 从而存在 $u(\lambda),\ v(\lambda)\in C[\lambda]$, 使得

$$u(\lambda)f(\lambda)+v(\lambda)g(\lambda)=1,$$

利用多项式的通用性质, 则

$$u(A)f(A)+v(A)g(A)=I,$$

又因为 $f(A)=0$, 所以 $v(A)g(A)=I$. $g(A)$ 是可逆矩阵, $g(A)^{-1}=v(A)$.

假设矩阵方程 $AX-XB=0$ 有解 C, 则 $AC=CB$. 从而

$$A^2C=A(AC)=A(CB)=(AC)B=(CB)B=CB^2,$$

且假设

$$A^kC=CB^k,$$

则

$$A^{k+1}C = A^k(AC) = A^k(CB) = (A^kC)B = (CB^k)B = CB^{k+1},$$

记 $g(\lambda) = \lambda^m + b_{m-1}\lambda^{m-1} + ... + b_1\lambda + b_0$，则

$g(A)C = A^mC + b_{m-1}A^{m-1}C + ... + b_1AC + b_0C$

$= CB^m + b_{m-1}CB^{m-1} + ... + b_1CB + b_0C$

$= Cg(B) = 0.$

注意到 $g(A)$ 可逆，所以 $C = 0$，即 $AX - XB = 0$ 只有零解. □

书后习题.50. $P_{142}, Ex1$

解：(*1*) 矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

的特征多项式是

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1),$$

假设 A 的最小多项式为 $m(\lambda)$，则 $m(\lambda)|(\lambda-1)^2(\lambda+1)$，所以 $m(\lambda)$ 只可能是

$$(\lambda - 1), (\lambda + 1), (\lambda - 1)^2, (\lambda - 1)(\lambda + 1), (\lambda - 1)^2(\lambda + 1),$$

验证得：$(A - I)(A + I) = 0$，而显然 $A + I$，$A - I$ 都不是 0 矩阵，所以

$$(\lambda - 1)(\lambda + 1),$$

是 A 的最小多项式.

(*2*) 矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

的特征多项式是

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 & 1 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ -1 & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^3,$$

假设 A 的最小多项式为 $m(\lambda)$，则 $m(\lambda)|(\lambda-2)^3$，所以 $m(\lambda)$ 只可能是

$$(\lambda-2),(\lambda-2)^2,(\lambda-2)^3,$$

验证得：$(A-2I)^2=0$，而显然 $A-2I\neq 0$，所以

$$(\lambda-2)^2,$$

是 A 的最小多项式. □

书后习题.51. $P_{142}, Ex2$

解： (*1*) 其最小多项式为：$(\lambda-1)^2$；

(*2*) 其最小多项式为：$(\lambda-1)^3$；

(*3*) 其最小多项式为：$(\lambda-3)^2(\lambda-5)$；

(*4*) 其最小多项式为：$(\lambda-3)^2(\lambda-5)$； □

书后习题.52. $P_{142}, Ex3$

解：不相似. 它们的最小多项式相同，但特征多项式不同. (即使是特征多项式相同，也不一定相似.) □

书后习题.53. $P_{142}, Ex4$

解： (*1*) 它的最小多项式可以写成不同的一次多项式的乘积，所以它可以对角化.

(*2*) 它的最小多项式是两个相同的一次多项式的乘积，所以它不可以对角化. □

书后习题.54. $P_{142}, Ex5$

解：本题中所有的 Jordan 形矩阵均不可以对角化. □

书后习题.55. $P_{142}, Ex6$

证明：假设 A 是复数域上的周期为 m 的周期矩阵，则 $A^m=I$，所以 λ^m-1 是矩阵 A 的一个零化多项式. 而在复数域上，多项式 λ^m-1 可以分解为 m 个不同一次因式的乘积.

假设 $m(\lambda)$ 是 A 的最小多项式，则 $m(\lambda)|(\lambda^m-1)$，从而 $m(\lambda)$ 可以写成一些不同的一次因式的乘积.

所以 A 相似于对角矩阵. □

书后习题.56. $P_{142}, Ex7$

解：因为 $A^3=3A^2+A-3I$，所以 A 有零化多项式

$$\lambda^3-3\lambda^2-\lambda+3=(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-3).$$

为不同的一次因式的乘积.

假设 A 的最小多项式为 $m(\lambda)$, 则 $m(\lambda)|(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-3)$. 从而 $m(\lambda)$ 是一次的或者是不同的一次因式的乘积. 所以 A 可以对角化. $\square$

书后习题.57. $P_{142}, Ex8$

解: 因为 $A^3=A^2+4A-4I$, 所以 A 有零化多项式

$$\lambda^3-\lambda^2-4\lambda+4=(\lambda-1)(\lambda+2)(\lambda-2).$$

为不同的一次因式的乘积.

假设 A 的最小多项式为 $m(\lambda)$, 则 $m(\lambda)|(\lambda-1)(\lambda+2)(\lambda-2)$. 从而 $m(\lambda)$ 是一次的或者是不同的一次因式的乘积. 所以 A 可以对角化. $\square$

书后习题.58. $P_{142}, Ex9$

解: 设在有理域上矩阵 A 的最小多项式为 $m(\lambda)$, 则 $m(\lambda)$ 是 A 的零化多项式 $g(\lambda)$ 的因式.

而 $g(\lambda)$ 在有理数域上不可约, 且 $degm(\lambda)\geq 1$, 所以 $m(\lambda)\sim g(\lambda)$. 即 $m(\lambda)$ 与 $g(\lambda)$ 相差一个非零有理常数倍, 从而 $m(\lambda)$ 在有理数域上也不可约, 不能分解为一次因式的乘积, 所以矩阵 A 在有理数域上不可以对角化.

在复数域上, 由于 $m(\lambda)$ 在有理数域上不可约, 所以 $(m(\lambda),m'(\lambda))=1$, 从而在复数域上 $m(\lambda)$ 没有重因式, 所以 $m(\lambda)$ 在复数域上可以分解为一些不同的一次因式的乘积. 所以在复数域上, 矩阵 A 可以对角化.

书后习题.59. $P_{142}, Ex10$

解: (*1*) 线性变换 $\mathbf{A}$ 的特征多项式是

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & 0\\ -1 & \lambda-2 & 1\\ 1 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-1)^2,$$

假设 $\mathbf{A}$ 的最小多项式为 $m(\lambda)$, 则 $m(\lambda)|(\lambda-2)(\lambda-1)^2$, 所以 $m(\lambda)$ 只可能是

$$(\lambda-2),(\lambda-1),(\lambda-1)^2,(\lambda-1)(\lambda-2),(\lambda-2)(\lambda-1)^2,$$

验证得:

$$(\lambda-2)(\lambda-1)^2$$

是 $\mathbf{A}$ 的最小多项式.

(2) 由 $\mathbf{A}$ 的最小多项式为

$$m(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-1)^2$$

得

$$V=ker(\mathbf{A}-2\mathbf{I})\oplus Ker(\mathbf{A}-\mathbf{I})^2.$$

任取 $\alpha\in ker(\mathbf{A}-2\mathbf{I})$, 设 α 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 之下的坐标为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

则

$$(A-2I)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0,\ \begin{pmatrix}-1&0&0\\1&0&1\\-1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0,$$

有基础解系

$$\eta_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},$$

所以 $ker(\mathbf{A}-2\mathbf{I})$ 有一个基为 α_2,

$$ker(\mathbf{A}-2\mathbf{I})=<\alpha_2>.$$

任取 $\alpha\in ker(\mathbf{A}-\mathbf{I})^2$, 设 α 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 之下的坐标为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

则

$$(A-I)^2\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0,\ \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0,$$

有基础解系

$$\eta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \eta_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

所以 $ker(\mathbf{A}-\mathbf{I})^2$ 有一个基为 $\alpha_1, \alpha_2-\alpha_3$,

$$ker(\mathbf{A}-\mathbf{I})^2 =< \alpha_1, \alpha_2-\alpha_3 >.$$

书后习题.60. $P_{142}, Ex11$

解：由 $\mathbf{A}$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ 之下的矩阵为 A 知：

$$\begin{cases} \mathbf{A}\alpha_k &= \alpha_{k+1},\quad k=1,2,...n-1 \\ \mathbf{A}\alpha_n &= -a_0\alpha_1 - a_1\alpha_2 - ... - a_{n-1}\alpha_n \end{cases}$$

由于

$$\mathbf{A}\alpha_k = \alpha_{k+1},\ k=1,2,...,n-1,$$

所以

$$\mathbf{A}^k\alpha_1 = \alpha_{k+1},\ k=1,2,...,n-1,$$

从而由

$$\mathbf{A}\alpha_n = -a_0\alpha_1 - a_1\alpha_2 - ... - a_{n-1}\alpha_n,$$
$$\mathbf{A}\alpha_n + a_0\alpha_1 + a_1\alpha_2 + ... + a_{n-1}\alpha_n = 0$$

得

$$\mathbf{A}^n\alpha_1 + a_0\mathbf{I}\alpha_1 + a_1\mathbf{A}\alpha_1 + ... + a_{n-1}\mathbf{A}^{n-1}\alpha_1 = 0,$$
$$(\mathbf{A}^n + a_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} + ... + a_1\mathbf{A} + a_0\mathbf{I})\alpha_1 = 0,$$

记 $g(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_1\lambda + a_0$，下证：

(*1*) $g(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$;

显然 $g(\mathbf{A})\alpha_1 = 0$，对任意的 α_k，$1 < k \le n$，都有

$$g(\mathbf{A})\alpha_k = g(\mathbf{A})(\mathbf{A}^{k-1}\alpha_1) = \mathbf{A}^{k-1}(g(\mathbf{A})\alpha_1) = 0,$$

所以 $g(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$;

(*2*)$g(\lambda)$ 是 $\mathbf{A}$ 的首相系数为 1 的零化多项式中次数最小的.

对任意的 $h(\lambda)$，设其首相系数为 1，且 $degh(\lambda) = m < n$.

记 $h(\lambda) = \lambda^m + b_{m-1}\lambda^{m-1} + ... + b_1\lambda + b_0$，则 $h(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^m + b_{m-1}\mathbf{A}^{m-1} + ... + b_1\mathbf{A} + b_0\mathbf{I}$，这时

$h(\mathbf{A})\alpha_1 = (\mathbf{A}^m + b_{m-1}\mathbf{A}^{m-1} + ... + b_1\mathbf{A} + b_0\mathbf{I})\alpha_1$
$\mathbf{A}^m\alpha_1 + b_{m-1}\mathbf{A}^{m-1}\alpha_1 + ... + b_1\mathbf{A}\alpha_1 + b_0\mathbf{I}\alpha_1$
$= \alpha_{m+1} + b_{m-1}\alpha_m + ... + b_1\alpha_2 + b_0\alpha_1,$
因为 $\alpha_{m+1}, \alpha_m, ..., \alpha_2, \alpha_1$ 线性无关，所以
$h(\mathbf{A})\alpha_1 = \alpha_{m+1} + b_{m-1}\alpha_m + ... + b_1\alpha_2 + b_0\alpha_1 \neq 0,$
从而 $h(\mathbf{A})\alpha_1 \neq \mathbf{0}$. 即 $g(\lambda)$ 是 $\mathbf{A}$ 的首相系数为 1 的零化多项式中次数最小的.

所以 $g(\lambda)$ 是 $\mathbf{A}$ 的最小多项式.

记 $\mathbf{A}$ 的特征多项式为 $f(\lambda)$, 则 $degf(\lambda) = n$. 而 $g(\lambda)|f(\lambda)$, 且 $degg(\lambda) = n$, 所以 $g(\lambda) \sim f(\lambda)$, 又因为它们都是首项系数为 1 的多项式, 所以 $f(\lambda) = g(\lambda)$. □

书后习题.61. $P_{142}, Ex12$

证明：$F[\mathbf{A}]$ 是域 F 上的一个代数.

$F[\mathbf{A}]$ 是一个有单位元 $\mathbf{I}$ 的交换环. 要证明 $F[\mathbf{A}]$ 是域，只要证明：$\forall g(\mathbf{A}) \in F[\mathbf{A}], g(\mathbf{A}) \neq \mathbf{0}$, 则 $g(\mathbf{A})$ 可逆.

记 $m(\lambda)$ 是 $\mathbf{A}$ 的最小多项式. 则由已知得：$m(\lambda)$ 在 $F[\lambda]$ 上不可约. 对任意的 $g(\mathbf{A}) \in F[\mathbf{A}]$, 如果 $g(\mathbf{A}) \neq \mathbf{0}$, 则 $g(\lambda)$ 不是 $\mathbf{A}$ 的零化多项式, 从而 $m(\lambda) \nmid g(\lambda)$. 注意到 $m(\lambda)$ 在 $F[\lambda]$ 上不可约, 所以必有 $(m(\lambda),\ g(\lambda)) = 1$, 所以存在 $u(\lambda), v(\lambda) \in F[\lambda]$, 使得

$$u(\lambda)m(\lambda) + v(\lambda)g(\lambda) = 1,$$

再由多项式的通用性质，则

$$u(\mathbf{A})m(\mathbf{A}) + v(\mathbf{A})g(\mathbf{A}) = \mathbf{I},$$
$$v(\mathbf{A})g(\mathbf{A}) = \mathbf{I},$$

所以 $g(\mathbf{A})$ 在 $F[\mathbf{A}]$ 上可逆，且 $[g(\mathbf{A})]^{-1} = v(\mathbf{A})$.

所以，$F[\mathbf{A}]$ 是一个域. □

书后习题.62. $P_{142}, Ex13$

证明： 因为矩阵 A 可以对角化，所以存在可逆矩阵 P，使得

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{t_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{t_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_s I_{t_s} \end{pmatrix},$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s$ 是 A 的不同的特征值.

考虑 $P^{-1}BP$, 由于 $AB = BA$, 所以 $(P^{-1}AP)(P^{-1}BP) = (P^{-1}BP)(P^{-1}AP)$, 利用上册 $P_{143}, Ex18$ 的结论, 则 $P^{-1}BP$ 是一个分块对角阵. 设

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_s \end{pmatrix},$$

则 B_i 是 t_i 级子阵, $i = 1, 2, ..., s$.

记 $P^{-1}BP$ 的最小多项式是 $m(\lambda)$, 子阵 B_i 的最小多项式是 $m_i(\lambda)$, $i = 1, 2, ..., s$. 则

$$m(\lambda) = [m_1(\lambda), m_2(\lambda), ..., m_s(\lambda)],$$

由于 B 可以对角化, 所以 $P^{-1}BP$ 可以对角化, 所以 $m(\lambda)$ 可以分解成一些不同一次因式的乘积. 从而对任意的 $m_i(\lambda)$, $i = 1, 2, ..., s$, 由于 $m_i(\lambda)|m(\lambda)$, 所以 $m_i(\lambda)$ 也可以分解成一些不同的一次因式的乘积. 所以 B_i 可以对角化, $i = 1, 2, ..., s$.

所以对任意的 B_i, $i = 1, 2, ..., s$, 存在 t_i 级可逆矩阵 Q_i, 使得

$$Q_i^{-1} B_i Q_i = D_i,$$

D_i 是 t_i 级对角矩阵. 记

$$Q = \begin{pmatrix} Q_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Q_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & Q_s \end{pmatrix},$$

则 Q 是可逆矩阵, 且

$$Q^{-1}=\begin{pmatrix} Q_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Q_2^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & Q_s^{-1} \end{pmatrix},$$

且

$$\begin{aligned}
&Q^{-1}(P^{-1}BP)Q\\
&=\begin{pmatrix} Q_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Q_2^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & Q_s^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Q_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & Q_s \end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix} Q_1^{-1}B_1Q_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Q_2^{-1}B_2Q_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & Q_s^{-1}B_sQ_s \end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix} D_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & D_s \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

是对角形. 且

$$\begin{aligned}
&Q^{-1}(P^{-1}AP)Q\\
&=\begin{pmatrix} Q_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Q_2^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & Q_s^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 I_{t_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{t_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_s I_{t_s} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Q_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & Q_s \end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix} Q_1^{-1}\lambda_1 I_{t_1}Q_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Q_2^{-1}\lambda_2 I_{t_2}Q_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & Q_s^{-1}\lambda_s I_{t_s}Q_s \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{t_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{t_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_s I_{t_s} \end{pmatrix}$$

也是对角形.

取 $S = PQ$, 则 $S^{-1} = Q^{-1}P^{-1}$, 则 S 满足

$$S^{-1}AS,\ S^{-1}BS$$

都是对角形. □

书后习题.63. $P_{149}, Ex1$

解: (*1*) 计算

$$B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以 B 是幂零矩阵, 且幂零指数为 2.

(*2*) 显然 $rankB = 2$, 所以 B 的特征子空间的维数等于 $4-2=2$, 因而 B 的 Jordan 标准形中 Jordan 块的个数等于 2, 且 Jordan 块的级数 ≤ 2.

其 1 级 Jordan 块的个数

$$N(1) = rank\mathbf{B}^0 + rank\mathbf{B}^2 - 2rank\mathbf{B}^1 = 4 + 0 - 2 \times 2 = 0;$$

其 2 级 Jordan 块的个数

$$N(2) = rank\mathbf{B}^1 + rank\mathbf{B}^3 - 2rank\mathbf{B}^2 = 2 + 0 - 2 \times 0 = 2;$$

所以 B 的 Jordan 标准形是由 2 个 2 级 Jordan 块组成, 且对角元都是 0. 从而 B 的 Jordan 标准形为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

书后习题.64. $P_{149}, Ex2$

证明: 因为 B 是域 F 上的幂零矩阵, 所以存在可逆矩阵 T, 使得

$$J = T^{-1}BT$$

为主对角元都是 0 的 Jordan 标准形.

对任意的正整数 k, 都有 $J^k = T^{-1}B^kT$, 也就是说 B^k 与 J^k 是相似的.

相似矩阵有相同的迹. 而 J 是一个上三角形矩阵, 它的主对角元都是 0, 从而 J^k 也是上三角矩阵, 且 J^k 的主对角元都是 0. 也就是说 $tr(J^k) = 0$.

所以对任意的正整数 k, 都有 $tr(B^k) = 0$. □

书后习题.65. $P_{149}, Ex3$

证明: 设 B 是幂零矩阵, 幂零指数为 l, λ_0 是 B 的一个特征值, $\alpha \neq 0$ 是 B 的属于特征值 λ_0 的特征向量. 则

$$B\alpha = \lambda_0\alpha,\ 0\alpha = B^l\alpha = \lambda_0^l\alpha,$$

而 $\alpha \neq 0$, 所以 $\lambda_0 = 0$. B 的特征值全为 0.

假设 B 的特征值全为 0, 则 B 的特征多项式为 λ^n, 所以 B 的最小多项式只能是 λ^m, $m \leq n$.

所以存在正整数 n, 使得 $B^n = 0$, 所以 B 是幂零矩阵. □

书后习题.66. $P_{155}, Ex1, 2$

解: (*1*) 矩阵 A 的特征多项式为

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 4 & \lambda - 4 & 0 \\ 2 & -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^3,$$

所以 A 的全部特征值为 2(3 重).

这是

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

它的秩为 $rank(A - 2I) = 1$, 所以对角元为 2 的 Jordan 块的个数是 $3 - rank(A - 2I) = 2$ 个.

其级数只能是一个 1 级, 一个 2 级, 所以 A 的 Jordan 标准形是

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

它的最小多项式是 $(\lambda-2)^2$.

(*2*) 矩阵 A 的特征多项式为

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-4 & 5 & -2 \\ -5 & \lambda+7 & -3 \\ -6 & 9 & \lambda-4 \end{vmatrix}=(\lambda-1)\lambda^2,$$

所以 A 的全部特征值为 1 和 0(2 重).

1 是 A 的一重特征值，它对应的 jordan 形子块也只能是一阶的；

0 是 A 的二重特征值，且 $A-0I$ 的秩是 2，所以对角元为 0 的 Jordan 块的个数为 $3-2=1$ 个；它是一个 2 阶 Jordan 块.

所以 A 的 Jordan 标准形是

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

它的最小多项式是 $(\lambda-1)\lambda^2$.

(*3*) 矩阵 A 的特征多项式为

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 3 & -3 \\ 2 & \lambda+6 & -13 \\ 1 & 4 & \lambda-8 \end{vmatrix}=(\lambda-1)^3,$$

所以 A 的全部特征值为 1(3 重).

1 是 A 的 3 重特征值，且

$$A-I=\begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -2 & -7 & 13 \\ -1 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

它的秩为 2，所以属于特征值 1 的特征子空间的维数是 $3-2=1$，从而主对角元为 1 的 Jordan 块的个数为 1，所以 A 的 Jordan 标准形是

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

它的最小多项式是 $(\lambda-1)^3$.

(4) 矩阵 A 的特征多项式为

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 3 & -4 \\ -4 & \lambda+7 & -8 \\ -6 & 7 & \lambda-7 \end{vmatrix} = (\lambda-3)(\lambda+1)^2,$$

所以 A 的全部特征值为 3 和 -1(2 重).

3 是 A 的 1 重特征值, 所以对角元为 3 的 Jordan 块的级数是 1, 个数也是 1.

-1 是 A 的 2 重特征值, 且

$$A-(-1)I = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 4 & -6 & 8 \\ 6 & -7 & 8 \end{pmatrix},$$

它的秩为 2, 所以属于特征值 -1 的特征子空间的维数为 $3-2=1$, 从而对角元为 -1 的 Jordan 块的个数是 1. 所以 A 的 Jordan 标准形是

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

它的最小多项式是 $(\lambda-3)(\lambda+1)^2$.

(5) 矩阵 A 的特征多项式为

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-3 & 4 & 0 & -2 \\ -4 & \lambda+5 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & \lambda-3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda+1)^2,$$

所以 A 的全部特征值为 1(2 重) 和 -1(2 重).

1 是 A 的 2 重特征值, 且

$$A-I=\begin{pmatrix}2&-4&0&2\\4&-6&-2&4\\0&0&2&-2\\0&0&2&-2\end{pmatrix},$$

它的秩为 3, 所以属于特征值 1 的特征子空间的维数是 $4-3=1$, 主对角元为 1 的 Jordan 块的个数为 1. 级数应该为 2.

-1 是 A 的 2 重特征值, 且

$$A-(-1)I=\begin{pmatrix}4&-4&0&2\\4&-4&-2&4\\0&0&4&-2\\0&0&2&0\end{pmatrix},$$

它的秩为 3, 所以属于特征值 -1 的特征子空间的维数是 $4-3=1$, 主对角元为 -1 的 Jordan 块的个数为 1. 级数应该为 2.

所以 A 的 Jordan 标准形是

$$\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&1\\0&0&0&-1\end{pmatrix},$$

它的最小多项式是 $(\lambda-1)^2(\lambda+1)^2$.

(6) 矩阵 A 的特征多项式为

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&1&0&0\\-1&\lambda-1&0&0\\-3&0&\lambda-5&3\\-4&1&-3&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-2)^4,$$

所以 A 的全部特征值为 2(4 重).

2 是 A 的 4 重特征值, 且

$$A-(2)I=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\1&-1&0&0\\3&0&3&-3\\4&-1&3&-3\end{pmatrix},$$

它的秩为 2，所以属于特征值 2 的特征子空间的维数是 $4-2=2$，主对角元为 2 的 Jordan 块的个数为 2.

它的主对角元为 2 的 1 级 Jordan 块的个数为
$N = rank(A-2I)^{1-1} + rank(A-2I)^{1+1} - 2rank(A-2I)^{1}$
$= 4+0-2\times 2 = 0,$

它的主对角元为 2 的 2 级 Jordan 块的个数为
$N = rank(A-2I)^{2-1} + rank(A-2I)^{2+1} - 2rank(A-2I)^{2}$
$= 2+0-2\times 0 = 2,$

所以 A 的 Jordan 标准形是

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

A 的最小多项式是 $(\lambda-2)^2$. □

书后习题.67. $P_{156}, Ex3$

证明： 取 t 阶可逆矩阵

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

则 $P^{-1} = P$，且

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a \end{pmatrix},$$

即 $P^{-1}J_t(a)P = (J_t(a))'$. □

书后习题.68. $P_{156}, Ex4$

证明：在复数域上，任何矩阵 A 都相似于一个 Jordan 形矩阵，即

$$A \sim \begin{pmatrix} J_{t_1}(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{t_2}(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{t_s}(\lambda_s) \end{pmatrix} = J,$$

存在可逆矩阵 T，使得 $T^{-1}AT = J$，所以 $T'A'(T^{-1})' = J'$，也就是说：$A' \sim J'$. 由于矩阵的相似具有传递性，所以只要证，$J \sim J'$. 事实上，取

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & P_s \end{pmatrix}，其中\ P_i = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}_{t_i},\ i = 1, 2, ..., s.\ 则$$

$$P^{-1}JP$$

$$= \begin{pmatrix} P_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & P_s \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} J_{t_1}(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{t_2}(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{t_s}(\lambda_s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & P_s \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} P_1^{-1}J_{t_1}(\lambda_1)P_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_2^{-1}J_{t_2}(\lambda_2)P_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & P_s^{-1}J_{t_s}(\lambda_s)P_s \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (J_{t_1}(\lambda_1))' & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (J_{t_2}(\lambda_2))' & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (J_{t_s}(\lambda_s))' \end{pmatrix} = J'.$$

所以 A 与 A' 相似. □

书后习题.69. $P_{156}, Ex5$

证明：因为复数域上任何矩阵都相似于一个 Jordan 形矩阵，其主对角元是 A 的全部特征值. 所以存在可逆矩阵 T，使得

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} J_{t_1}(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{t_2}(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{t_s}(\lambda_s) \end{pmatrix},$$

其中有重集合 $\{\underbrace{\lambda_1, ..., \lambda_1}_{t_1}, \underbrace{\lambda_2, ..., \lambda_2}_{t_2}, ..., \underbrace{\lambda_s, ..., \lambda_s}_{t_s}\}$ 是 A 的全部特征值. 从而

$$T^{-1}A^mT = (T^{-1}AT)^m = \begin{pmatrix} (J_{t_1}(\lambda_1))^m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (J_{t_2}(\lambda_2))^m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (J_{t_s}(\lambda_s))^m \end{pmatrix}.$$

而对每一个 Jordan 块矩阵 $J_{t_i}(\lambda_i)$，$i = 1, 2, ..., s$，它是一个主对角元为 λ_i 的上三角矩阵，它的任何次幂仍然是上三角矩阵，且它的 m 次幂的主对角元恰好事原来主对角元的 m 次幂. 所以每一个子块 $(J_{t_i}(\lambda_i))^m$ 的主对角元是 λ_i^m，且上三角矩阵的主对角元就是它的特征值，所以 $T^{-1}A^mT$ 的特征值是 A 的特征值的 m 次幂. 又由于相似矩阵有相同的特征值，所以 A 的全部特征值的 m 次幂组成了 A^m 的全部特征值. □

书后习题.70. $P_{156}, Ex6$

证明：复数域上任何矩阵都相似于一个 Jordan 形矩阵，其主对角元是 A 的全部特征值. 所以存在可逆矩阵 T，使得

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} J_{t_1}(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{t_2}(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{t_s}(\lambda_s) \end{pmatrix},$$

其中有重集合 $\{\underbrace{\lambda_1,...,\lambda_1}_{t_1},\underbrace{\lambda_2,...,\lambda_2}_{t_2},...,\underbrace{\lambda_s,...,\lambda_s}_{t_s}\}$ 是 A 的全部特征值. 所以

$$T^{-1}g(A)T = g(T^{-1}AT) = \begin{pmatrix} g(J_{t_1}(\lambda_1)) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & g(J_{t_2}(\lambda_2)) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & g(J_{t_s}(\lambda_s)) \end{pmatrix},$$

对每一个子块 $g(J_{t_i}(\lambda_i))$ $i = 1,2,...,s$, 它仍然是上三角矩阵, 且主对角元是 $g(\lambda_i)$,

所以有重集合 $\{\underbrace{g(\lambda_1),...,g(\lambda_1)}_{t_1},\underbrace{g(\lambda_2),...,g(\lambda_2)}_{t_2},...,\underbrace{g(\lambda_s),...,g(\lambda_s)}_{t_s}\}$ 是 $g(A)$ 的全部特征值.

矩阵 A 的全部特征值的 g 函数值 $g(\lambda_i)$ $i = 1,2,...,n$ 是矩阵 A 的多项式 $g(A)$ 的全部特征值. □

书后习题.71. $P_{156}, Ex7$

(*1*)**证明:** 矩阵 A 的特征多项式为

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & -1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1.$$

所以 $A^3 - A^2 - A + I = 0$, 即 $A^3 = A^2 + A - I$.

我们对自然数 k 作归纳.

$k = 3$ 时, 命题显然成立.

假设 $k \le m-1$ $(m \ge 4)$ 成立, 即 $A^k = A^{k-2} + A^2 - I$,

当 $k = m$ 时,

$$A^m = AA^{m-1} = A(A^{m-3} + A^2 - I) = A^{m-2} + A^3 - A$$
$$= A^{m-2} + A^2 + A - I - A = A^{m-2} + A^2 - I.$$

结论对 $k = m$ 成立. 由数学归纳法原理, 命题成立.

(*2*)**解:** 利用关系 $A^k = A^{k-2} + A^2 - I$, , 可以得到

$$A^{100} = A^2 + 49(A^2 - I)$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 50 & 1 & 0 \\ 50 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$ □

书后习题.72. $P_{1161}, Ex2, 3$

解: (*2*) 因为 f 是 V 上的线性映射，所以

$$\begin{cases} f(\alpha_1+2\alpha_3) &= 4 \\ f(\alpha_2+3\alpha_3) &= 0 \\ f(4\alpha_1+\alpha_2) &= 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(\alpha_1)+2f(\alpha_3) &= 4 \\ f(\alpha_2)+3f(\alpha_3) &= 0 \\ 4f(\alpha_1)+f(\alpha_2) &= 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(\alpha_1) &= 2 \\ f(\alpha_2) &= -3 \\ f(\alpha_3) &= 1 \end{cases}$$

所以

$f(x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3) = x_1f(\alpha_1)+x_2f(\alpha_2)+x_3f(\alpha_3)$
$= 2x_1-3x_2+x_3.$

(*3*) 因为 f 是 V 上的线性映射，所以

$$\begin{cases} f(3\alpha_1+\alpha_2) &= 2 \\ f(\alpha_2-\alpha_3) &= 1 \\ f(2\alpha_1+\alpha_3) &= 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3f(\alpha_1)+f(\alpha_2) &= 2 \\ f(\alpha_2)-f(\alpha_3) &= 1 \\ 2f(\alpha_1)+f(\alpha_3) &= 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(\alpha_1) &= -1 \\ f(\alpha_2) &= 5 \\ f(\alpha_3) &= 4 \end{cases}$$

对任意的 $\alpha = x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3 \in V$，定义

$$f(\alpha) = -x_1+5x_2+4x_3,$$

则 f 是 V 上的一个线性函数，且满足已知条件. □

书后习题.73. $P_{161}, Ex4$

证明: 因为 $f_i \neq 0,\ i=1,2,...,n$, 所以对任意的 $1 \leq i \leq n$, 都有 $Kerf_i \subsetneqq V$, 即 $Kerf_i$ 是 V 的真子空间. 利用 $P_{91}, Ex10$ 的结论，则

$$\bigcup_{i=1}^{n}[Kerf_i] \neq V,$$

所以存在 $\alpha \in V$ 但 $\alpha \overline{\in} \bigcup\limits_{i=1}^{n}[Kerf_i]$，即 $f_i(\alpha) \neq 0,\ \forall i.$ □

书后习题.74. $P_{161}, Ex5$

证明: 由已知得

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3) = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

因为

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

是可逆矩阵，且

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

所以它们的对偶基 f_1, f_2, f_3 到 g_1, g_2, g_3 的过渡矩阵是

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

从而

$$(g_1, g_2, g_3) = (f_1, f_2, f_3) \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}.$$

□

书后习题.75. $P_{161}, Ex6$

证明： 因为 V 是 R 上的 3 维线性空间，所以它的对偶空间 V^* 也是 3 维线性空间. 考虑 V^* 中向量 f_1, f_2, f_3 的线性组合

$$x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 = 0,$$

则对任意的 $g(x) \in R[x]_3$，都有

$0 = (x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3) g(x) = x_1 \int_0^1 g(x)dx + x_2 \int_0^2 g(x)dx + x_3 \int_0^{-1} g(x)dx$,

分别取 $g(x) = 1, x, x^2$，可以得到：

$$\left\{\begin{array}{llll} x_1 + & 2x_2 - x_3 = & 0 \\ \frac{1}{2}x_1 + & 2x_2 - \frac{1}{2}x_3 = & 0 \\ x_1 + & 8x_2 - x_3 = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{lll} x_1 & = & 0 \\ x_2 & = & 0 \\ x_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

所以 f_1, f_2, f_3 线性无关. 它是 V^* 的一个基.

由于 $1, x, x^2$ 是 $R[x]_3$ 的一个基, 并设它的对偶基是 g_1, g_2, g_3 则 $f_i(1), f_i(x), f_i(x^2)$ 的象分别是 f_i 在基 g_1, g_2, g_3 之下的坐标第 1, 2, 3 个分量. 所以

$$\left\{\begin{array}{llll} f_1 & = & f_1(1)g_1 + & f_1(x)g_2 + & f_1(x^2)g_3 \\ f_2 & = & f_2(1)g_1 + & f_2(x)g_2 + & f_2(x^2)g_3 \\ f_3 & = & f_3(1)g_1 + & f_3(x)g_2 + & f_3(x^2)g_3 \end{array}\right.$$

所以

$$(f_1,f_2,f_3)=(g_1,g_2,g_3)\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{3} & 8 & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

g_1,g_2,g_3 到 f_1,f_2,f_3 的过渡矩阵

$$B=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{3} & \frac{8}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

假设基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的对偶基是 f_1,f_2,f_3，基 $1,x,x^2$ 到基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 过渡矩阵为 A，则

$(A^{-1})'=B$，$A=(B')^{-1}$. 而

$$(B')^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3}\\ 1 & 0 & 1\\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix},$$

所以 $\alpha_1=1+x-\frac{3}{2}x^2,\alpha_2=-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}x^2,\alpha_3=-\frac{1}{3}+x-\frac{1}{2}x^2.$ □

书后习题.76. $P_{161},Ex7$

(*1*) 证明：因为 $\mathbf{A}\in Hom(V,\ V)$，$f\in Hom(V,\ F)$.

所以 $f\mathbf{A}\in Hom(V,\ F)=V^*$.

(*2*) 任意的 $f_1,f_2\in V^*$，$k\in F$，则

$\mathbf{A}^*(f_1+f_2)=(f_1+f_2)\mathbf{A}=f_1\mathbf{A}+f_2\mathbf{A}=\mathbf{A}^*(f_1)+\mathbf{A}^*(f_2)$;

$\mathbf{A}^*(kf_1)=(kf_1)\mathbf{A}=k(f_1\mathbf{A})=k\mathbf{A}^*(f_1)$;

所以 $\mathbf{A}^*$ 是 V^* 上的一个线性变换.

(*3*) 因为 $\mathbf{A}$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ 之下的矩阵是 A，所以

$\mathbf{A}(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)A$,

所以 $A(i|j)$ 是 $\mathbf{A}\alpha_j$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ 之下的坐标的第 i 分量.

要求 $\mathbf{A}^*$ 在基 $f_1,f_2,...,f_n$ 之下的矩阵 B, 就要计算 $\mathbf{A}^*f_i$ 在基 $f_1,f_2,...,f_n$ 之下的坐标. 而 $(\mathbf{A}^*f_i)\alpha_j$ 恰好等于 $(\mathbf{A}^*f_i)$ 在基 $f_1,f_2,...,f_n$ 之下的坐标的第 j 个分量. 即

$(\mathbf{A}^*f_i)\alpha_j=B(j|i)$.

又因为 $(\mathbf{A}^*f_i)\alpha_j=f_i(\mathbf{A}\alpha_j)$ 恰好是 $\mathbf{A}\alpha_j$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ 之下的坐标的第 i 个分量，即

$(\mathbf{A}^* f_i)\alpha_j = A(i|j)$.

所以 $A(i|j) = B(j|i),\ B = A'$.

$\mathbf{A}^*$ 在基 $f_1, f_2, ..., f_n$ 之下的矩阵为 A'. $\square$

书后习题.77. $P_{161}, Ex8$

证明: *(1)* 显然, $W = \bigcap\limits_{i=1}^{s} [Ker f_i]$, 结论显然成立.

(2) 任取 V 的一个子空间 U, 在 U 中取一个基 $\alpha_1, ..., \alpha_m$, 扩充为 V 的一个基 $\alpha_1, ..., \alpha_m, \alpha_{m+1}, ..., \alpha_n$, 它的对偶基是 $f_1, ..., f_m, f_{m+1}, ..., f_n$.

则任意的 $\alpha \in V$, $\alpha = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i(\alpha)\alpha_i$, 从而

$$\alpha \in U \Leftrightarrow f_j\alpha = 0,\ j = m+1, ..., n.$$

所以 $U = \{\alpha | \alpha \in V \text{且} f_j\alpha = 0,\ j = m+1, ..., n\}$. $\square$.