高等代数习题解答

(北京大学丘维声教授编著的教材)

宿州学院数学系代数教研室

第 7 章: 多项式环

书后习题.1. $P_8, Ex4$

证明: 在 $K[x]$ 中, 若 $f(x)$ 可逆, 则存在 $g(x) \in K[x]$, 使得 $f(x)g(x) = 1$, 这时, $deg(f) + deg(g) = 0$, 所以 $deg(f) = deg(g) = 0$, $f(x)$ 是 0 次多项式.

假设 $deg(f(x)) = 0$, 即 $f(x) = a \neq 0, a \in K \subset K[x]$, 即 $f(x)$ 是 K 上的一个非 0 数, 取 $g(x) = a^{-1} \in K \subset K[x]$, 则 $f(x)g(x) = g(x)f(x) = 1$, 所以, $f(x)$ 在 $K[x]$ 中可逆. □

书后习题.2. $P_8, Ex5$

证明: 假设 $a \in R$ 是环 R 中的可逆元, 则存在 $b \in R$, 使得 $ab = ba = 1$, 1 为 R 的单位元. 假若 a 是零因子, 则存在 $c \in R, c \neq 0$, 使得 $ac = ca = 0$, 从而

$$b \cdot 0 = b(ac) = (ba)c = 1 \cdot c = c,$$

矛盾. 所以 a 不可能是零因子. □

书后习题.3. $P_8, Ex6$

解: 记矩阵

$$D=\begin{pmatrix}0&1&0&0&\cdots&0\\0&0&1&0&\cdots&0\\0&0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\0&0&0&0&\cdots&1\\0&0&0&0&\cdots&0\end{pmatrix},$$

则 $D^n=0$ 且 $A=I+bD+b^2D^2+...+b^{n-1}D^{n-1}$.

记 $f(x)=1+bx+b^2x^2+...+b^{n-1}x^{n-1}$，则 $A=f(D)$，
由等比数列的求和公式，

$$f(x)=\tfrac{1-b^nx^n}{1-bx},\quad (1-bx)f(x)=1-b^nx^n,$$

从而

$$(I-bD)f(D)=I-b^nD^n=I,$$

所以，$f(D)^{-1}=I-bD$，即 $A^{-1}=I-bD$. □

书后习题.4. $P_8, Ex7$

证明：由特征多项式和行列式的定义：

$$|\lambda I-A|=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{j_1j_2\cdots j_n}(\lambda\delta_{1j_1}-a_{1j_1})(\lambda\delta_{2j_2}-a_{2j_2})\cdots(\lambda\delta_{nj_n}-a_{nj_n}),$$

而 $k\neq 0$，从而

$|(\frac{1}{k}\lambda)I-A|$

$=\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{j_1j_2\cdots j_n}\big((\frac{1}{k}\lambda)\delta_{1j_1}-a_{1j_1}\big)\big((\frac{1}{k}\lambda)\delta_{2j_2}-a_{2j_2}\big)\cdots\big((\frac{1}{k}\lambda)\delta_{nj_n}-a_{nj_n}\big)$

$=\big(\frac{1}{k}\big)^n\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{j_1j_2\cdots j_n}(\lambda\delta_{1j_1}-ka_{1j_1})(\lambda\delta_{2j_2}-ka_{2j_2})\cdots(\lambda\delta_{nj_n}-ka_{nj_n})$

$=\big(\frac{1}{k}\big)^n|\lambda I-kA|$，

由于 $|\lambda I-A|=(\lambda-\lambda_1)^{l_1}(\lambda-\lambda_2)^{l_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{l_s}$，

所以 $|(\frac{1}{k}\lambda)I-A|=((\frac{1}{k}\lambda)-\lambda_1)^{l_1}((\frac{1}{k}\lambda)-\lambda_2)^{l_2}\cdots((\frac{1}{k}\lambda)-\lambda_s)^{l_s}$

$=\big(\frac{1}{k}\big)^n(\lambda-k\lambda_1)^{l_1}(\lambda-k\lambda_2)^{l_2}\cdots(\lambda-k\lambda_s)^{l_s}$，

所以 $|\lambda I-kA|=(\lambda-k\lambda_1)^{l_1}(\lambda-k\lambda_2)^{l_2}\cdots(\lambda-k\lambda_s)^{l_s}$，

即 $k\lambda_i$ 是矩阵 kA 的 l_i 重特征值. □

书后习题.5. $P_8, Ex8$

证明：因为 $|\lambda^2I-A^2|=|\lambda I+A||\lambda I-A|$. 记 $A^2=(b_{ij})$. 则

$|\lambda^2I-A^2|$

$= \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{j_1j_2\cdots j_n}(\lambda^2\delta_{1j_1} - b_{1j_1})(\lambda^2\delta_{2j_2} - b_{2j_2})\cdots(\lambda^2\delta_{nj_n} - b_{nj_n})$

而由 $Ex7$ 的结论，令 $k=-1$，则

$|\lambda I + A| = (\lambda+\lambda_1)^{l_1}(\lambda+\lambda_2)^{l_2}\cdots(\lambda+\lambda_s)^{l_s}$，所以

$|\lambda I + A||\lambda I - A| = (\lambda^2-\lambda_1^2)^{l_1}(\lambda^2-\lambda_2^2)^{l_2}\cdots(\lambda^2-\lambda_s^2)^{l_s}$，即

$|\lambda^2 I - A^2| = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{j_1j_2\cdots j_n}(\lambda^2\delta_{1j_1} - b_{1j_1})(\lambda^2\delta_{2j_2} - b_{2j_2})\cdots(\lambda^2\delta_{nj_n} - b_{nj_n})$

$= (\lambda^2-\lambda_1^2)^{l_1}(\lambda^2-\lambda_2^2)^{l_2}\cdots(\lambda^2-\lambda_s^2)^{l_s}$,

用 λ 代入 λ^2，得

$|\lambda I - A^2| = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{j_1j_2\cdots j_n}(\lambda\delta_{1j_1} - b_{1j_1})(\lambda\delta_{2j_2} - b_{2j_2})\cdots(\lambda\delta_{nj_n} - b_{nj_n})$

$= (\lambda-\lambda_1^2)^{l_1}(\lambda-\lambda_2^2)^{l_2}\cdots(\lambda-\lambda_s^2)^{l_s}$，即

λ_i^2 是矩阵 A^2 的 l_i 重特征值. □

书后习题.6. $P_{20}, Ex2$

证明: 因为 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个组合, 所以存在 $u(x),\ v(x) \in K[x]$, 使得

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = d(x).$$

任取 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个公因式 $c(x)$, 则 $c(x)|f(x),\ c(x)|g(x)$, 从而 $c(x)|d(x)$.

又因为 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个公因式, 所以 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式. □

书后习题.7. $P_{20}, Ex3$

证明: 如果 $h(x)$ 是首项系数为 1，则 $\big(f(x),g(x)\big)h(x)$ 也是首项系数为 1. 由于存在 $u(x),\ v(x) \in K[x]$，使得

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = \big(f(x),g(x)\big),$$

所以

$$u(x)f(x)h(x) + v(x)g(x)h(x) = \big(f(x),g(x)\big)h(x),$$

且 $\big(f(x),g(x)\big)h(x)|f(x)h(x),\ \big(f(x),g(x)\big)h(x)|g(x)h(x)$, 所以 $\big(f(x),g(x)\big)h(x)$ 是 $f(x)h(x)$ 与 $g(x)h(x)$ 的一个首项系数为 1 的最大公因式. 所以

$$\big(f(x)h(x),\ g(x)h(x)\big) = \big(f(x),g(x)\big)h(x).$$

□

书后习题.8. $P_{20}, Ex4, 5$

证明: 因为 $f(x), g(x)$ 不全为 0, 所以 $\big(f(x), g(x)\big) \neq 0$. 且存在 $u(x),\ v(x) \in K[x]$, 使得

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = \big(f(x), g(x)\big),$$

且 $f(x) = \big(f(x), g(x)\big)\frac{f(x)}{(f(x),g(x))},\ g(x) = \big(f(x), g(x)\big)\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}$. 利用消去律,

$$u(x)\frac{f(x)}{(f(x),g(x))} + v(x)\frac{g(x)}{(f(x),g(x))} = 1,$$

所以

$$\Big(\frac{f(x)}{(f(x),g(x))},\ \frac{g(x)}{(f(x),g(x))}\Big) = 1,$$
$$\big(u(x),\ v(x)\big) = 1.$$

□

书后习题.9. $P_{20}, Ex6$

证明：因为 $\big(f(x),\ g(x)\big) = 1$，所以存在 $u(x),\ v(x) \in K[x]$，使得

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1,$$

所以

$$\big(u(x) - v(x)\big)f(x) + v(x)\big(g(x) + f(x)\big) = 1,$$
$$u(x)\big(f(x) + g(x)\big) + \big(v(x) - u(x)\big)g(x) = 1.$$

从而

$$\big(u(x) - v(x)\big)f(x) = 1 - v(x)\big(g(x) + f(x)\big),$$
$$\big(v(x) - u(x)\big)g(x) = 1 - u(x)\big(f(x) + g(x)\big).$$

将两式相乘，得

$$-\big(v(x) - u(x)\big)^2 f(x)g(x) =$$
$$1 - u(x)\big(f(x) + g(x)\big) - v(x)\big(f(x) + g(x)\big) + u(x)v(x)\big(f(x) + g(x)\big)^2,$$

$$-\big(v(x) - u(x)\big)^2 f(x)g(x) + \Big(u(x) + v(x) - u(x)v(x)\big(f(x) + g(x)\big)\Big)\big(f(x) + g(x)\big) = 1,$$

所以 $\big(f(x)g(x),\ f(x) + g(x)\big) = 1$. □

书后习题.10. $P_{20}, Ex7$

证明：记 $af(x) + bg(x) = f_1(x),\ cf(x) + dg(x) = f_2(x)$，则

$$f(x)=\frac{d}{ad-bc}f_1(x)-\frac{b}{ad-bc}f_2(x),$$
$$g(x)=-\frac{a}{ad-bc}f_1(x)+\frac{c}{ad-bc}f_2(x).$$

且 $\big(f(x),\ g(x)\big)|f_1(x),\ \big(f(x),\ g(x)\big)|f_2(x)$. 又因为存在 $u(x),\ v(x)\in K[x]$, 使得

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=\big(f(x),\ g(x)\big),$$

所以

$$u(x)[\frac{d}{ad-bc}f_1(x)-\frac{b}{ad-bc}f_2(x)]+v(x)[\frac{c}{ad-bc}f_2(x)-\frac{a}{ad-bc}f_1(x)]=\big(f(x),\ g(x)\big),$$

$$[\frac{d}{ad-bc}u(x)-\frac{a}{ad-bc}v(x)]f_1(x)+[\frac{c}{ad-bc}v(x)-\frac{b}{ad-bc}u(x)]f_2(x)=\big(f(x),\ g(x)\big).$$

所以 $\big(f_1(x),\ f_2(x)\big)=\big(f(x),\ g(x)\big)$. □

书后习题.11. $P_{20},Ex8$

bf 证明：因为 $\big(f(x),\ g(x)\big)=1$, 所以存在 $u(x),\ v(x)\in K[x]$, 使得

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1.$$

利用多项式的通用性质，将 x^m 代入 x 得

$$u(x^m)f(x^m)+v(x^m)g(x^m)=1.$$

所以

$$\big(f(x^m),\ g(x^m)\big)=1.$$

□

书后习题.12. $P_{20},Ex9$

证明: 假设 $\big(f(x),\ g(x)\big)\neq 1$. 由于 $f(x),\ g(x)$ 不全为 0, 所以 $deg[\big(f(x),\ g(x)\big)]>0$. 取 $u(x)=\frac{g(x)}{(f(x),\ g(x))}$, $v(x)=\frac{f(x)}{(f(x),\ g(x))}$, 则

$$deg(v(x))<deg(f(x)),\ deg(u(x))<deg(g(x)),$$

且

$$u(x)f(x)=\frac{g(x)f(x)}{(f(x),\ g(x))}=v(x)g(x).$$

假设存在 $u(x),\ v(x)\in K[x], deg(u(x))<deg(g(x)), deg(v(x))<deg(f(x))$, 使得

$$u(x)f(x)=v(x)g(x).$$

假设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素，即 $(f(x),\ g(x))=1$. 而由 $u(x)f(x)=v(x)g(x)$ 知

$$f(x)|v(x)g(x) \text{ 且 } g(x)|u(x)f(x),$$

利用整除的性质，得

$$f(x)|v(x) \text{ 且 } g(x)|u(x).$$

这与 $deg(u(x)) < deg(g(x)), deg(v(x)) < deg(f(x))$ 矛盾.

所以 $(f(x),\ g(x)) \neq 1$. □

书后习题.13. $P_{21}, Ex10$

证明：(1) 设 $d(x) = \big(f(x),\ g(x)\big)$，则存在 $f_1(x),\ g_1(x) \in K[x]$，使得

$$f(x) = d(x)f_1(x),\ g(x) = d(x)g_1(x) \text{ 且 } \big(f_1(x),\ g_1(x)\big) = 1.$$

令 $m(x) = d(x)f_1(x)g_1(x)$. 则显然有：

$$f(x)|m(x) \text{ 且 } g(x)|m(x),$$

即 $m(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个倍式.

假设 $m_1(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的任意一个倍式. 则

$$f(x)|m_1(x) \text{ 且 } g(x)|m_1(x),$$

存在 $h_1(x),\ h_2(x)$，使得

$$m_1(x) = f(x)h_1(x) = d(x)f_1(x)h_1(x),$$

且

$$m_1(x) = g(x)h_2(x) = d(x)g_1(x)h_2(x).$$

从而

$$d(x)f_1(x)h_1(x) = d(x)g_1(x)h_2(x).$$

如果 $d(x) = 0$，则 $f(x) = g(x) = 0$，这时 $m(x) = m_1(x) = 0$.

如果 $d(x) \neq 0$，则

$$f_1(x)h_1(x) = g_1(x)h_2(x).$$

即：$f_1(x)|g_1(x)h_2(x)$，而 $\big(f_1(x),\ g_1(x)\big) = 1$，所以

$$f_1(x)|h_2(x),\ h_2(x) = f_1(x)h(x).$$

所以

$$m_1(x) = d(x)g_1(x)h_2(x) = d(x)g_1(x)f_1(x)h(x) = m(x)h(x).$$

即 $m(x)|m_1(x)$. 所以 $m(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最小公倍式.

设 $m(x)$, $n(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的两个最小公倍式, 则 $m(x)|n(x)$ 且 $n(x)|m(x)$. 所以 $m(x)\sim n(x)$, 即在相伴的意义下, $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最小公倍式是唯一的.

(2) 上面的证明实际上已经证明了:

$$[f(x),\ g(x)]=\tfrac{f(x)g(x)}{(f(x),\ g(x))}.$$

□

书后习题.14. $P_{21},Ex11$

证明: 记 W_1,W_2,W 分别是 $f(A)X=0$ 与 $g(A)X=0$
以及 $d(A)X=0$ 的解空间.
因为 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式, 所以存在 $u(x),\ v(x)\in K[x]$, 使得

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=d(x).$$

利用多项式的通用性质, 则

$$u(A)f(A)+v(A)g(A)=d(A).$$

我们, 则

$$f(A)\alpha=0,\ g(A)\alpha=0,$$

从而

$$d(A)\alpha=[u(A)f(A)+v(A)g(A)]\alpha=u(A)f(A)\alpha+v(A)g(A)\alpha=0.$$

所以 $W_1\cap W_2\subset W$.

任取 $\beta\in W$, 则 $d(A)\beta=0$.

又因为 $d(x)|f(x),\ d(x)|g(x)$, 所以存在 $h_1(x),h_2(x)\in K[x]$, 使得

$$f(x)=h_1(x)d(x),\ g(x)=h_2(x)d(x).$$

利用多项式的通用性质, 则

$$f(A)=h_1(A)d(A),\ g(A)=h_2(A)d(A).$$

从而

$$f(A)\beta=h_1(A)d(A)\beta=0,\ g(A)\beta=h_2(A)d(A)\beta=0.$$

所以, $\beta\in W_1$ 且 $\beta\in W_2$. 从而 $W\subset W_1\cap W_2$.

综上, 结论成立. □

书后习题.15. $P_{21}, Ex12$

证明：记 W_1, W_2, W 分别是 $f_1(A)X=0$ 与 $f_2(A)X=0$
以及 $f(A)X=0$ 的解空间.

我们任取 $\alpha \in W$，则 $f(A)\alpha = 0$.

因为 $\big(f_1(x),\ f_2(x)\big) = 1$，所以存在 $h_1(x),\ h_2(x) \in K[x]$，使得

$$h_1(x)f_1(x) + h_2(x)f_2(x) = 1.$$

利用多项式的通用性质，则

$$h_1(A)f_1(A) + h_2(A)f_2(A) = I.$$

从而

$$\beta = h_1(A)f_1(A)\beta + h_2(A)f_2(A)\beta.$$

记 $\beta_1 = h_2(A)f_2(A)\beta,\ \beta_2 = h_1(A)f_1(A)\beta.$
因为 $f(x) = f_1(x)f_2(x)$，所以 $f(A) = f_1(A)f_2(A)$. 所以

$$f_1(A)\beta_1 = h_2(A)f_1(A)f_2(A)\beta = h_2(A)f(A) = 0,$$
$$f_2(A)\beta_2 = h_1(A)f_1(A)f_2(A)\beta = h_1(A)f(A)\beta = 0.$$

所以 $\beta_1 \in W_1, \beta_2 \in W_2$ 且 $\beta = \beta_1 + \beta_2$.

下证：表示唯一.
假设 $\forall \beta \in W$，存在 $\alpha_1, \gamma_1 \in W_1;\ \alpha_2, \gamma_2 \in W_2$，使得

$$\beta = \alpha_1 + \alpha_2 = \gamma_1 + \gamma_2,$$

则

$$\alpha_1 - \gamma_1 = \alpha_2 - \gamma_2 \in W_1 \cap W_2,$$

而 $\forall \gamma \in W_1 \cap W_2$，则 $f_1(A)\gamma = f_2(A)\gamma = 0$. 所以

$$\gamma = [h_1(A)f_1(A) + h_2(A)f_2(A)]\gamma = h_1(A)f_1(A)\gamma + h_2(A)f_2(A)\gamma = 0.$$

所以 $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. 从而

$$\alpha_1 - \gamma_1 = \alpha_2 - \gamma_2 = 0,$$

所以

$$\alpha_1 = \gamma_1,\ \alpha_2 = \gamma_2,$$

表示法唯一. $\square$

书后习题.16. $P_{27}, Ex3$

证明：假设 $f(x)|g(x)$，则存在 $q(x)\in K[x]$，使得

$$g(x)=q(x)f(x)\Rightarrow g^2(x)=q^2(x)f^2(x),$$

所以 $f^2(x)|g^2(x)$.

假设 $f^2(x)|g^2(x)$，并假设

$$f(x)=p_1(x)\ p_2(x)\cdots p_m(x),$$

其中，$p_1(x),\ p_2(x),\cdots,p_m(x)$ 是 $f(x)$ 的不可约因式；

$$g(x)=q_1(x)\ q_2(x)\cdots q_s(x),$$

其中，$q_1(x),\ q_2(x),\cdots,q_s(x)$ 是 $g(x)$ 的不可约因式. 则

$$f^2(x)=p_1^2(x)\ p_2^2(x)\cdots p_m^2(x),$$
$$g^2(x)=q_1^2(x)\ q_2^2(x)\cdots q_s^2(x).$$

由于 $f^2(x)|g^2(x)$，所以 $p_1(x),\ p_2(x),\cdots,p_m(x)$ 都是 $g(x)$ 的因子，
所以 $f(x)|g(x)$. □

书后习题.17. $P_{27}, Ex4$

证明：反证. 假设 $p(x)$ 可约，则存在 $p_1(x),\ p_2(x)$，使得

$$p(x)=p_1(x)p_2(x),$$

且

$$0<deg(p_1(x))<deg(p(x))；0<deg(p_2(x))<deg(p(x)).$$

从而

$$p(x)|p_1(x)p_2(x),$$

但

$$p(x)\nmid p_1(x)\text{ 且 }p(x)\nmid p_2(x).$$

矛盾.

所以 $p(x)$ 是不可约多项式. □

书后习题.18. $P_{27}, Ex5$

证明：假设 $f(x)=p^m(x)$，$p(x)$ 是数域 K 上的不可约多项式. 对任意的 $g(x)\in K[x]$，则

$$p(x)|g(x) \text{ 或者 } \big(p(x),g(x)\big)=1.$$

如果 $p(x)|g(x)$，则 $p^m(x)|g^m(x)$，即 $f(x)|g^m(x)$.
如果 $\big(p(x),g(x)\big)=1$，因为 $p(x)$ 是不可约多项式，所以 $p^m(x)$ 的因式只能是 $p(x)$ 的幂，从而 $p^m(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式只能是 0 次多项式或者是 $p(x)$ 的幂，而 $\big(p(x),g(x)\big)=1$，所以 $p^m(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式只能是 0 次多项式.
即 $\big(p^m(x),g(x)\big)=1$.

假设对任意的多项式 $g(x)$，都有 $\big(f(x),g(x)\big)=1$ 或者 $f(x)|g^m(x)$，要证 $f(x)$ 是某一个不可约多项式 $p(x)$ 的幂.

因为 $f(x)$ 是次数 >0，所以存在不可约多项式 $p(x)$ 和正整数 k 以及多项式 $h(x)$，使得

$$f(x)=p^k(x)h(x) \text{ 且 } \big(p(x),h(x)\big)=1.$$

如果 $deg(h(x))>0$，取 $g(x)=h(x)$，则 $\big(f(x),g(x)\big)\neq 1$ 且对任意的正整数 m，都有 $f(x)\nmid h^m(x)$.

事实上，如果 $f(x)|h^m(x)$，由 $p(x)|f(x)$ 知，$p(x)|h^m(x)$. 所以 $p(x)|h(x)$. 矛盾.

所以 $deg(h(x))=0$. 从而结论成立. □

书后习题.19. $P_{27}, Ex6$

证明：假设 $f(x)=p^m(x)$，$p(x)$ 是数域 K 上的不可约多项式. 并设 $g(x)$，$h(x)\in K[x]$，有 $f(x)|g(x)h(x)$.

如果 $f(x)|g(x)$，则结论已经成立.

如果 $f(x)\nmid g(x)$，因为 $p(x)$ 是不可约多项式，所以存在整数 k，$k<m$ 以及多项式 $q(x)$，使得

$$g(x)=p^k(x)q(x) \text{ 且 } \big(p(x),q(x)\big)=1.$$

又因为 $f(x)|g(x)h(x)$，利用消去律，有 $p^{m-k}(x)|q(x)h(x)$.
注意到 $\big(p(x),q(x)\big)=1$，从而 $\big(p^{m-k}(x),q(x)\big)=1$，所以 $p^{m-k}(x)|h(x)$，即 $p(x)|h(x)$，所以存在正整数 m，使得 $f(x)|h^m(x)$.

假设对任意的 $g(x)$，$h(x)\in K[x]$，由 $f(x)|g(x)h(x)$ 可以得到 $f(x)|g(x)$，或者存在一个正整数 m，使得 $f(x)|h^m(x)$. 要证明：$f(x)$ 是一个不可约多项式的幂.

由于 $f(x)$ 的次数 >1，所以一定存在一个不可约多项式 $p(x)$ 和正整数 k 以及多项式 $q(x)$，使得

$$f(x)=p^k(x)q(x) \text{ 且 } \big(p(x),q(x)\big)=1.$$

如果 $deg(q(x))\neq 0$，取 $g(x)=p^k(x)$，$h(x)=q(x)$，则 $f(x)|g(x)h(x)$ 且 $f(x)\nmid g(x)$.

假设存在正整数 m, 使得 $f(x)|q^m(x)$. 注意到 $p(x)|f(x)$, 所以 $p(x)|q^m(x)$.

而由 $\big(p(x),q(x)\big)=1$ 可以得到：对任意的自然数 k,l，都有 $\big(p^k(x),q^l(x)\big)=1$. 所以 $\big(p(x),q^m(x)\big)=1$. 矛盾.
所以 $deg(q(x))=0$. 从而 $f(x)=p^k(x)$. 结论成立. □

书后习题.20. $P_{27},Ex7$

证明：因为 $\big(f(x),\ g_i(x)\big)=1,\ i=1,2$，所以存在 $u_i(x),v_i(x),\ i=1,2,3$，使得

$$u_1(x)f(x)+v_1(x)g_1(x)=1,\ u_2(x)f(x)+v_2(x)g_2(x)=1,$$
$$u_3(x)g_1(x)+v_3(x)g_2(x)=\big(g_1(x),\ g_2(x)\big).$$

从而

$$\big[u_2(x)f(x)+v_2(x)g_2(x)\big]\big[u_3(x)g_1(x)+v_3(x)g_2(x)\big]=\big(g_1(x),\ g_2(x)\big)$$

即

$$u_2u_3fg_1+\big[v_2u_3g_1+u_2v_3f+v_2v_3g_2\big]g_2=\big(g_1(x),\ g_2(x)\big).$$

又因为 $\big(g_1(x),\ g_2(x)\big)|f(x)g_1(x)$ 且 $\big(g_1(x),\ g_2(x)\big)|g_2(x)$,
即 $\big(g_1(x),\ g_2(x)\big)$ 也是 $f(x)g_1(x)$ 与 $g_2(x)$ 的公因式. 由 $P_{20},Ex2$ 的结论，有

$$\big(f(x)g_1(x),\ g_2(x)\big)=\big(g_1(x),\ g_2(x)\big).$$

□

书后习题.21. $P_{32},Ex4$

证明：因为不可约多项式 $p(x)|f(x)$，设 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 $l,\ l\geq 1$ 重因式，则 $p(x)$ 是 $f'(x)$ 的 $l-1$ 重因式. 即

$$p^{l-1}(x)|f'(x) \text{ 且 } p^l(x)\nmid f'(x).$$

而已知 $p(x)$ 是 $f'(x)$ 的 $k-1$ 重因式. 所以

$$p^{k-1}(x)|f'(x) \text{ 且 } p^k(x) \nmid f'(x).$$

对一般的多项式 $g(x)$, $h(x)$, 以及自然数 $s \geq t$, 则

$$g^s(x)|h(x) \Rightarrow g^t(x)|h(x);$$
$$g^t(x) \nmid h(x) \Rightarrow g^s(x) \nmid h(x).$$

假设 $k > l$, 则

$$k-1 \geq l,\ p^{k-1}(x)|f'(x) \text{ 且 } p^l(x) \nmid f'(x).$$

矛盾.
假设 $k < l$, 则

$$k \leq l-1,\ p^k(x) \nmid f'(x) \text{ 且 } p^{l-1}(x)|f'(x).$$

矛盾.
所以, $k = l$. 即 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 k 重因式. □

书后习题.22. $P_{32}, Ex5$

证明: 假设. 由定理的结论, $p(x)$ 是 $f'(x)$ 的 $k-1$ 重因式.
如果 $k-1 \geq 1$, 则 $p(x)$ 是 $(f'(x))' = f''(x)$ 的 $k-1-1 = k-2$ 重因式.
反复利用定理, 可以得到:
如果 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 k $(k \geq 1)$ 重因式, 则对 $l \leq k$, $p(x)$ 是 $f^{(l)}(x)$ 的 $k-l$ 重因式.
特别, $p(x)$ 是 $f^{(k-1)}(x)$ 的单因式, 是 $f^{(k)}(x)$ 的 0 重因式.

假设 $p(x)$ 是 $f(x), f'(x), ..., f^{(k-1)}(x)$ 的公因式, 不是 $f^{(k)}(x)$ 的因式. 我们对 k 进行归纳.

当 $k = 1$ 时, $p(x)$ 是 $f(x)$ 的因式, 不是 $f'(x)$ 的因式, 所以 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的单因式;

假设结论对 $k = n-1$ 成立. 当 $k = n$ 时, 则已知 $p(x)$ 是 $f(x), f'(x), ..., f^{(n-1)}(x)$ 的公因式, 不是 $f^{(n)}(x)$ 的因式. 所以 $p(x)$ 是 $f'(x), f''(x), ..., (f')^{(n-1)}(x)$ 的公因式, 不是 $(f')^{(n-1)}(x)$ 的因式. 由归纳假定, $p(x)$ 是 $f'(x)$ 的因式.

又已知 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的因式, 由上一题的结论, $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 n 重因式. □

书后习题.23. $P_{32}, Ex6$

解: 利用辗转相除法, 我们可以求出

$$\big(f(x), f'(x)\big) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1,$$

且

$$\frac{f(x)}{(f(x),f'(x))} = x^2 - 1.$$

所以

$$f(x) = [x^2-1][x^3-3x^2+3x-1] = (x+1)(x-1)^4.$$

□

书后习题.24. $P_{32}, Ex7$

证明：假设 $f(x)$ 与一个 1 次多项式的 n 次幂相伴，即：

$$f(x) \sim (x+b)^n，即\ f(x) = a(x+b)^n, a \neq 0.$$

这时显然有：

$$f'(x) = an(x+b)^{n-1},\ f'(x)|f(x).$$

假设 $f'(x)|f(x)$. 则

$$\big(f(x), f'(x)\big) = cf'(x),$$

设 $f(x) = h(x)\big(f(x), f'(x)\big) = h(x)cf'(x)$，由次数关系知：

$$deg(h(x)) = 1,$$

注意到 $h(x)$ 与 $f(x)$ 有完全相同的不可约因式，所以 $f(x)$ 除 $h(x)$ 以外没有其它不可约因式，而 $deg(f(x)) = n$，所以 $f(x) \sim h^n(x)$. □

书后习题.25. $P_{38}, Ex5$

证明：因为 $(x+1)|f(x^{2n+1})$，所以 $x=-1$ 是多项式 $f(x^{2n+1})$ 的一个根，从而 $f((-1)^{2n+1}) = 0$. 而 $(-1)^{2n+1} = -1$，所以 $f(-1) = 0$. 从而有 $x=-1$ 是多项式 $f(x)$ 的一个根. 所以 $(x+1)|f(x)$，即存在 $h(x) \in K[x]$，使得 $f(x) = (x+1)h(x)$. 利用多项式的通用性质得：

$$f(x^{2n+1}) = (x^{2n+1}+1)h(x^{2n+1}).$$

所以 $(x^{2n+1}+1)|f(x^{2n+1})$. □

书后习题.26. $P_{38}, Ex6$

证明：因为在 Q 上，$(x^2+x+1)|f_1(x^3)+xf_2(x^3)$. 所以在复数域上，也有 $(x^2+x+1)|f_1(x^3)+xf_2(x^3)$. 由于在复数域上，$x^2+x+1$ 有根 $\omega_1 = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，$\omega_2 = -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$. 所以 ω_1，ω_2 也是多项式) 在复数域上的根，从而

$$\begin{cases} f_1(\omega_1^3)+\omega_1 f_2(\omega_1^3) &= 0 \\ f_1(\omega_2^3)+\omega_2 f_2(\omega_2^3 &= 0 \end{cases}$$

而 $\omega_1^3=\omega_2^3=1$，所以

$\begin{cases} f_1(1)+\omega_1 f_2(1) &= 0 \\ f_1(1)+\omega_2 f_2(1) &= 0 \end{cases}$，可以解得：$\begin{cases} f_1(1) &= 0 \\ f_2(1) &= 0 \end{cases}$.

所以 1 是 $f_i(x)$ 的根，$i=1,2$. □

书后习题.27. $P_{38}, Ex7$

证明: 设 c 是 $f(x)$ 在复数域上的一个根, 则 $f(c)=0$. 又因为 $f(x)|f(x^m)$, 所以 c 也是 $f(x^m)$ 的一个根. 即 $f(c^m)=0$. 所以 c^m 也是多项式 $f(x)$ 的根.

任取 $f(x)$ 在复数域上的一个根 c_1，考虑集合

$$A=\{c_1,c_1^m,c_1^{m^2},...,c_1^{m^n},...\},$$

则 A 中的每一个元素都是多项式 $f(x)$ 的根，从而 A 是一个有限集合，所以存在自然数 $k<l$，使得 $c_1^{m^k}=c_1^{m^l}$.

如果 $c_1\neq 0$，则 $c_1^{m^l-m^k}=1$，c_1 是单位根. □

书后习题.28. $P_{38}, Ex8$

解: 在复数域中, 1 的 n 次方根为：$\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$，$k=0,1,...,n-1$. 所以，多项式 x^n-1 在复数域上的标准分解式为

$$x^n-1=\prod_{k=0}^{n-1}[x-(\cos\tfrac{2k\pi}{n}+i\sin\tfrac{2k\pi}{n})].$$

□

书后习题.29. $P_{38}, Ex9$

证明: 因为 $J_a\neq\{0\}$，所以 J_a 中存在非 0 多项式. 取 J_a 中次数最小的一个非 0 多项式 $h(x)$. 则 $deg(h(x))\geq 1$.

对 J_a 的任意多项式 $g(x)\in J_a$，作带余除法：则存在 $q(x),r(x)\in K[x]$，使得

$$g(x)=q(x)h(x)+r(x),\ deg(r(x))<deg(h(x)),$$

因为 R 是 K 的一个交换扩环，所以 K 是 R 的一个含有单位元的子环. 由多项式的通用性质，则

$$g(a)=q(a)h(a)+r(a),$$

所以 $r(a)=0$. $r(x)\in J_a$，而 $deg(r(x))<deg(h(x))$，且 $h(x)$ 是 J_a 中次数最小的多项式一个非 0 多项式，所以 $r(x)=0$. 从而 $h(x)|g(x)$.

设 $m_1(x)$, $m_2(x)$ 是 J_a 中两个次数最小的非 0 多项式, 由于次数最小的非 0 多项式整除 J_a 中的所有多项式, 所以 $m_1(x) \sim m_2(x)$. 即在相伴的意义下次数最小的具有唯一性.

所以存在唯一的次数最少的首 1 多项式 $m(x)$, 其整除 J_a 中的所有多项式.

(2) 假设 $m(x)$ 在 $K[x]$ 可约, 则存在 $p(x), q(x) \in K[x]$, 使得

$$m(x) = p(x)q(x),$$

且

$$0 < deg(p(x)) < deg(m(x)), 0 < deg(q(x)) < deg(m(x)).$$

由多项式的通用性质, 在 R 中, 有

$$m(a) = p(a)q(a) = 0,$$

而环 R 没有 0 因子, 所以由 $p(a)q(a) = 0$ 得

$$p(a) = 0 \text{ 或 } q(a) = 0,$$

所以

$$p(x) \in J_a \text{ 或 } q(x) \in J_a.$$

这与 $m(x)$ 整除 J_a 中的所有多项式矛盾.
所以 $m(x)$ 是不可约多项式. □

书后习题.30. $P_{38}, Ex10$

证明: 设 $p(x)$ 是数域 K 上的不可约多项式. 由于不可约多项式只有当然因式, 所以在 K 上, 有

$$\big(p(x),\ p'(x)\big) = 1,$$

而互素不随数域的扩大而改变, 所以在复数域上仍有

$$\big(p(x),\ p'(x)\big) = 1,$$

所以在复数域上, $p(x)$ 没有重根. □

书后习题.31. $P_{38}, Ex12$

证明: 假设在数域 K 上, $p(x) \nmid g(x)$, 由于 $P(x)$ 不可约, 则 $\big(p(x),\ g(x)\big) = 1$. 而互素不随数域的扩大而改变, 所以在复数域上也有 $\big(p(x),\ g(x)\big) = 1$. 这与已知 $P(x)$ 与 $g(x)$ 在复数域上有一个公共根矛盾. 所以在数域 K 上, $\big(p(x),\ g(x)\big) \neq 1$, 从而 $p(x)|g(x)$. □

书后习题.32. $P_{40}, Ex1$

证明：实数域上不可约多项式的次数只有 1 次或 2 次的，所以实数域上的奇数次多项式至少有一个 1 次因式，所以至少有一个实数根. □

书后习题.33. $P_{40}, Ex2$

解：当 n 是偶数，x^n-1 有两个实数根 ±1，且

$$\cos\tfrac{2k\pi}{n}+i\sin\tfrac{2k\pi}{n},\ \cos\tfrac{2(n-k)\pi}{n}+i\sin\tfrac{2(n-k)\pi}{n},\ k=1,2,...,\tfrac{n}{2}-1$$

是多项式 x^n-1 的共轭复数根. 所以

$$x^n-1=(x-1)(x+1)\prod_{k=1}^{\frac{n}{2}-1}(x^2-2\cos\tfrac{2k\pi}{n}x+1).$$

当 n 是奇数时，x^n-1 有一个实数根 1，且

$$\cos\tfrac{2k\pi}{n}+i\sin\tfrac{2k\pi}{n},\ \cos\tfrac{2(n-k)\pi}{n}+i\sin\tfrac{2(n-k)\pi}{n},\ k=1,2,...,\tfrac{n-1}{2}$$

是多项式 x^n-1 的共轭复数根. 所以

$$x^n-1=(x-1)\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}(x^2-2\cos\tfrac{2k\pi}{n}x+1).$$

□

书后习题.34. $P_{40}, Ex4$

证明：假设在复数域上，矩阵 A 与 B 相似，则存在可逆矩阵 U，使得

$$U^{-1}AU=B,\ AU=UB.$$

注意到 $U\in M_n(\mathbf{C})$，从而可以将写成

$$P+iQ$$

的形式，其中 $P,Q\in M_n(\mathbf{R})$，所以

$$A(P+iQ)=(P+iQ)B,\ AP+iAQ=PB+iBQ,$$

而 $A,\ B,\ P,\ Q\in M_n(\mathbf{R})$，所以 $AP=PB$ 且 $AQ=QB$.

考虑行列式 $f(x)=|P+xQ|$，则它是一个实系数多项式，且在 $f(i)\neq0$ 时，所以 $f(x)\neq0$. 从而在实数域上 $f(x)=|P+xQ|$ 只有有限个根，所以存在实数 t_0，使得 $f(t_0)\neq0$.

取 $V=P+t_0Q$，则 $V\in M_n(\mathbf{R})$ 且 $|V|\neq0$. 即 V 是实数域上的可逆矩阵，满足 $AV=AP+t_0AQ=PB+t_0QB=VB$，从而 $V^{-1}AV=B$. 在实数域上矩阵 A 与 B 相似，矛盾.

所以命题结论成立. □

书后习题.35. $P_{47}, Ex3$

证明：设 $p_1, p_2, ..., p_n$ 是 n $(n > 1)$ 个不同的素数.
假设 $\sqrt[n]{p_1 p_2 \cdots p_n}$ 是有理数，则多项式 $x^n - p_1 p_2 \cdots p_n$ 有有理根，从而在 $\mathbf{Q}$ 上多项式 $x^n - p_1 p_2 \cdots p_n$ 是可约多项式，但素数 p_1 满足 $Eisenstein$ 判别定理的条件，所以 $x^n - p_1 p_2 \cdots p_n$ 在 $\mathbf{Q}$ 上不可约，从而 $\sqrt[n]{p_1 p_2 \cdots p_n}$ 不是有理数. □

书后习题.36. $P_{47}, Ex4$

证明：由于 $a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0$ 是奇数，$a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0 \neq 0$，所以 $f(1) \neq 0$，即 1 不是 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ 的根.

假设 -1 是 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ 的根，则 $f(-1) = (-1)^n a_n + (-1)^{n-1} a_{n-1} + ... + (-1) a_1 + a_0 = 0$，这时将 $f(1)$ 与 $f(-1)$ 相加，则 $f(1) + f(-1)$ 是多项式 $f(x)$ 偶次项系数的 2 倍，是一个偶数，但在 $f(-1) = 0$ 时，$f(1) + f(-1)$ 是奇数与 0 的和，应该是奇数. 矛盾. 所以 $f(-1) \neq 0$，即 -1 也不是 $f(x)$ 的根. □

书后习题.37. $P_{48}, Ex5$

证明：因为 $f(x)$ 是首项系数为 1 的多项式，所以如果 $f(x)$ 在 $\mathbf{Q}$ 上有根，则一定是整数根. 设

$$f(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0,$$

且 m 是 $f(x)$ 的一个整数根. 因为 $f(0)$ 是奇数，所以 a_0 是奇数，注意到 $m | a_0$，从而 m 是也是奇数. 又因为 $f(1)$ 也是奇数，即 $f(1) = 1 + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0$ 是奇数. 所以 $1 + a_{n-1} + ... + a_1$ 是偶数.

由于 m 是奇数，$a_k m^k$, $k = 1, 2, ..., n$ 与 a_k 的奇偶性相同，所以 $1, a_{n-1}, ..., a_1$ 中奇偶数的个数与 $m^n, a_{n-1} m^{n-1}, ..., a_1 m$ 中的奇偶数的个数相同，所以 $m^n + a_{n-1} m^{n-1} + ... + a_1 m$ 仍是一个偶数. 从而

$$f(m) = m^n + a_{n-1} m^{n-1} + ... + a_1 m + a_0$$

是奇数. 矛盾.
所以 $f(x)$ 没有有理根. □

书后习题.38. $P_{48}, Ex6$

证明：因为 $(a+b)c$ 是奇数，所以 c 是奇数且 $a+b+c$ 是偶数. 所以对多项式 $f(x)$，$f(0)$ 与 $f(1)=1+a+b+c$ 都是奇数. 由上一题的结论，$f(x)$ 没有有理根. □

书后习题.39. $P_{48}, Ex7$

证明：在 $n=1$ 时，结论显然成立.

在 $n>1$ 时，假设 $f(x)$ 可约，则存在 $f_1(x),\ f_2(x)\in\mathbf{Z}[x]$，使得

$$f(x)=f_1(x)f_2(x) \text{ 且 } 0<deg(f_i(x))<deg(f(x)),\ i=1,2.$$

从而对每一个整数 a_i，都有

$$f(a_i)=f_1(a_i)f_2(a_i),\ i=1,2,...,n,$$

又因为

$$f_1(a_i),\ f_2(a_i)\in\mathbf{Z} \text{ 且 } f(a_i)=1,$$

所以 $f_1(a_i),\ f_2(a_i)$ 同为 1 或同为 -1，即

$$f_1(a_i)=f_2(a_i),\ i=1,2,...,n.$$

即 $f_1(a_i)-f_2(a_i)=0,\ i=1,2,...,n.$

记 $g(x)=f_1(x)-f_2(x)$，则 $deg(g(x))<\max\{deg(f_1(x)),\ deg(f_2(x))\}<n.$ 且 $g(a_i)=0,\ i=1,2,...,n.$ 又因为 $a_1,a_2,...,a_n$ 是互不相等的整数，所以 $g(x)=0$. 即 $f_1(x)=f_2(x)$. 所以 $f(x)=(f_1(x))^2$. $f(x)$ 是偶数次多项式.

所以当 $f(x)$ 的次数为奇数时，$f(x)$ 一定不可约.

n 是偶数时，$f(x)$ 可能可约也可能不可约.

$f(x)=(x-1)(x+1)+1=x^2$ 在 $\mathbf{Q}$ 上是可约的；

$f(x)=(x-1)(x+3)+1=x^2+2x-2$ 在 $\mathbf{Q}$ 上是不可约的. □

书后习题.40. $P_{48}, Ex8$

证明：在 $n=1$ 时，结论显然成立.

在 $n>1$ 时，假设 $f(x)$ 可约，则存在 $f_1(x),\ f_2(x)\in\mathbf{Z}[x]$，使得

$$f(x)=f_1(x)f_2(x) \text{ 且 } 0<deg(f_i(x))<deg(f(x)),\ i=1,2.$$

从而对每一个整数 a_i，都有

$$f(a_i)=f_1(a_i)f_2(a_i),\ i=1,2,...,n,$$

又因为

$$f_1(a_i),\ f_2(a_i) \in \mathbf{Z} \text{ 且 } f(a_i) = -1,$$

所以 $f_1(a_i)f_2(a_i) = -1$，所以 $f_1(a_i)$ 与 $f_2(a_i)$ 中一个为 1 另一个为 -1，即

$$f_1(a_i) + f_2(a_i) = 0,\ i = 1, 2, ..., n.$$

记 $g(x) = f_1(x) + f_2(x)$，则 $deg(g(x)) < \max\{deg(f_1(x)),\ deg(f_2(x))\} < n$. 且 $g(a_i) = 0,\ i = 1, 2, ..., n$. 又因为 $a_1, a_2, ..., a_n$ 是互不相等的整数，所以 $g(x) = 0$. 即 $f_1(x) = -f_2(x)$. 所以 $f(x) = -(f_1(x))^2$.

注意 $f(x)$ 是首项系数为 1 的多项式. 而 $-(f_1(x))^2$ 是首项系数为负数. 矛盾.

所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{Q}$ 上不可约. □

书后习题.41. $P_{48}, Ex9$

证明：假设 $f(x)$ 可约，则存在 $f_1(x),\ f_2(x) \in \mathbf{Z}[x]$，使得

$$f(x) = f_1(x)f_2(x) \text{ 且 } 0 < deg(f_i(x)) < deg(f(x)),\ i = 1, 2.$$

从而对每一个整数 a_i，都有

$$f(a_i) = f_1(a_i)f_2(a_i),\ i = 1, 2, ..., n,$$

又因为

$$f_1(a_i),\ f_2(a_i) \in \mathbf{Z} \text{ 且 } f(a_i) = 1,$$

所以 $f_1(a_i),\ f_2(a_i)$ 同为 1 或同为 -1.

由于在实数域 $\mathbf{R}$ 上，多项式 $f(x)$ 显然没有实数根，所以在 $\mathbf{R}$ 上多项式 $f_1(x),\ f_2(x)$ 也没有实数根. 由多项式函数的连续性知，在实数域上 $f_1(x),\ f_2(x)$ 不会改变符号，所以 $f_1(a_i),\ i = 1, 2, ..., n$ 都是 1，或者都是 -1.

不妨设 $f_1(a_1) = f_1(a_2) = ... = f_1(a_n) = 1$，则
$f_2(a_1) = f_2(a_2) = ... = f_2(a_n) = 1$.

(1) 由于 $0 < deg(f_i(x)) < deg(f(x)),\ i = 1, 2$, 所以有可能 $f_i(x),\ i = 1, 2$ 中有一个次数 $< n$. 比如 $0 < deg(f_1(x)) < deg(f(x))$. 由于 $f_1(a_1) = f_1(a_2) = ... = f_1(a_n) = 1$ 且 $a_1, a_2, ..., a_n$ 是 n 个不同的整数，所以 $f(x) - 1 = 0$，即 $f(x) = 1$. 矛盾.

(2) 设 $deg(f_1(x)) = deg(f_2(x)) = n$.

由于 $f_1(a_i) = 1,\ i = 1, 2, ..., n$ 且 $f_2(a_i) = 1,\ i = 1, 2, ..., n$，所以

$$f_1(x) - 1 = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n),$$
$$f_2(x) - 1 = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n).$$

所以

$$f(x) = f_1(x) f_2(x) = [(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n) + 1]^2.$$

即

$$f(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - a_i)^2 + 2 \prod_{i=1}^{n} (x - a_i) + 1.$$

比较两边的系数，得 $2 \prod\limits_{i=1}^{n} (x - a_i) = 0$，矛盾.

所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{Q}$ 上不可约. $\square$