



【思路岛课后习题答案网】为广大学子提供各科课后习题答案，不用积分，不用注册，就能下载！
全心打造一流的课后习题答案下载平台！

高等代数习题解答

(北京大学丘维声教授编著的教材)

宿州学院数学系代数教研室

第 3 章：线性方程组的进一步理论

书后习题.1. P_{64} , Ex3 (1)

解：假若 β 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出，则存在数 c_1, c_2, c_3 ，
满足： $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 = \beta$ ，即

$$\begin{cases} -1c_1 + 2c_2 - 4c_3 = 8 \\ 3c_1 + c_3 = 3 \\ 7c_2 - 2c_3 = -1 \\ -5c_1 - 3c_2 + 6c_3 = -25 \end{cases}$$

这是一个关于 c_1, c_2, c_3 的线性方程组，相应的增广矩阵

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 & 8 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & -2 & -1 \\ -5 & -3 & 6 & -25 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 & 8 \\ 0 & 1 & -9 & -28 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

从而解得： $\begin{cases} c_1 = 2 \\ c_2 = -1 \\ c_3 = -3 \end{cases}$

即： $\beta = 2\alpha_1 - \alpha_2 - 3\alpha_3$ ，表示法唯一。 □

书后习题.2. P_{73} , Ex7

证明：假设 β 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 唯一的线性表出，要证明 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关。考虑 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的线性组合 $l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \dots + l_s\alpha_s = 0$ 。
而由 β 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出，所以存在 k_1, k_2, \dots, k_s ，使得
 $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s$ ，从而



$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s + l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \dots + l_s\alpha_s$$

$= (k_1 + l_1)\alpha_1 + (k_2 + l_2)\alpha_2 + \dots + (k_s + l_s)\alpha_s$ 由. 表出的唯一性, 则

$$\begin{cases} k_1 + l_1 = k_1 \\ k_2 + l_2 = k_2 \\ \vdots \\ k_s + l_s = k_s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l_1 = 0 \\ l_2 = 0 \\ \vdots \\ l_s = 0 \end{cases}$$

所以, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关.

假设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 要证明 β 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 唯一的线性表出. 因为 β 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出, 所以存在 $k_1, k_2, \dots, k_s \in K$, 使得

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s,$$

$$\beta = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \dots + l_s\alpha_s.$$
 从而,

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s - (l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \dots + l_s\alpha_s) = 0$$

$\Rightarrow (k_1 - l_1)\alpha_1 + (k_2 - l_2)\alpha_2 + \dots + (k_s - l_s)\alpha_s = 0.$ 由于 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 所以

$$\begin{cases} k_1 - l_1 = 0 \\ k_2 - l_2 = 0 \\ \vdots \\ k_s - l_s = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l_1 = k_1 \\ l_2 = k_2 \\ \vdots \\ l_s = k_s \end{cases}$$

所以, 表示法唯一. □

书后习题.3. P₇₃, Ex8

证明: 我们用反证法.

假设 $\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \beta, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 则存在不全为 0 的数

$k_1, \dots, k_{i-1}, l, k_{i+1}, \dots, k_s \in K$, 使得:

$$k_1\alpha_1 + \dots + k_{i-1}\alpha_{i-1} + l\beta + k_{i+1}\alpha_{i+1} + \dots + k_s\alpha_s = 0 \text{ 成立.}$$

首先说明: $l \neq 0$. 若 $l = 0$, 由 $k_1, \dots, k_{i-1}, l, k_{i+1}, \dots, k_s$ 全为 0, 则 $k_1, \dots, k_{i-1}, k_{i+1}, \dots, k_s$ 不全为 0, 使得

$k_1\alpha_1 + \dots + k_{i-1}\alpha_{i-1} + k_{i+1}\alpha_{i+1} + \dots + k_s\alpha_s = 0$ 成立. 这与已知 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关矛盾. 所以, $l \neq 0$.

又由于 $\beta = b_1\alpha_1 + \dots + b_i\alpha_i + \dots + b_s\alpha_s$, 且 $b_i \neq 0$, 所以,

$$k_1\alpha_1 + \dots + k_{i-1}\alpha_{i-1} + l(b_1\alpha_1 + \dots + b_i\alpha_i + \dots + b_s\alpha_s) + k_{i+1}\alpha_{i+1} + \dots + k_s\alpha_s = 0$$

$$\Rightarrow (k_1 + lb_1)\alpha_1 + \dots + (k_{i-1} + lb_{i-1})\alpha_{i-1} + lb_i\alpha_i + (k_{i+1} + lb_{i+1})\alpha_{i+1} + \dots + (k_s +$$

$$lb_s)\alpha_s = 0$$

注意到 $lb_i \neq 0$, 所以, α_i 可以由 $\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_s$ 线性表出, 与已知矛盾.

所以, 命题成立. □

书后习题.4. P₇₃, Ex9

证明: 充分性. 假设每一个 $\alpha_i (1 < i \leq s)$ 都不能用它前面的向量线性表出, 要证明 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关. 我们反证.

假设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关. 因为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 都是非 0 向量, 所以 α_1 本身线性无关. 由于 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 所以存在数 $K (1 < k \leq s)$, 满足: $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}$ 线性无关, $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, \alpha_k$ 线性相关 (若这样的 k 不存在, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关).

再有前面的命题知道, α_k 可以由 $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}$ 线性表出. 这与已知矛盾. 充分性得证.

必要性. 显然. □

书后习题.5. P₇₃, Ex10

证明: 充分性. 假设 $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$, 要证明: $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ 线性无关.

我们考虑组合 $x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + \dots + x_r\beta_r = 0$, 由于

$$\begin{cases} \beta_1 = a_{11}\alpha_1 + \dots + a_{1r}\alpha_r \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \beta_r = a_{r1}\alpha_1 + \dots + a_{rr}\alpha_r \end{cases}$$

所以, $x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + \dots + x_r\beta_r = 0 \Leftrightarrow$

$$x_1(a_{11}\alpha_1 + \dots + a_{1r}\alpha_r) + \dots + x_r(a_{r1}\alpha_1 + \dots + a_{rr}\alpha_r) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(a_{11}x_1 + \dots + a_{r1}x_r)\alpha_1 + \dots + (a_{1r}x_1 + \dots + a_{rr}x_r)\alpha_r = 0$$

因为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关, 所以

$$(a_{11}x_1 + \dots + a_{r1}x_r)\alpha_1 + \dots + (a_{1r}x_1 + \dots + a_{rr}x_r)\alpha_r = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{r1}x_r = 0 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{1r}x_1 + \cdots + a_{rr}x_r = 0 \end{cases}$$

注意到关于 x_1, \dots, x_r 的方程组系数行列式为 $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix}^T \neq 0$, 所以

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{r1}x_r = 0 \\ \vdots \\ a_{1r}x_1 + \cdots + a_{rr}x_r = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ \vdots \\ x_r = 0 \end{cases}$$

所以, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ 线性无关.

必要性. 假设 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ 线性无关, 要证明: $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$.

因为

$$\begin{cases} \beta_1 = a_{11}\alpha_1 + \dots + a_{1r}\alpha_r \\ \vdots \\ \beta_r = a_{r1}\alpha_1 + \dots + a_{rr}\alpha_r \end{cases}$$

所以, $x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + \dots + x_r\beta_r = 0 \Leftrightarrow$

$$x_1(a_{11}\alpha_1 + \dots + a_{1r}\alpha_r) + \dots + x_r(a_{r1}\alpha_1 + \dots + a_{rr}\alpha_r) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(a_{11}x_1 + \dots + a_{r1}x_r)\alpha_1 + \dots + (a_{1r}x_1 + \dots + a_{rr}x_r)\alpha_r = 0$$

因为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关, 所以

$$(a_{11}x_1 + \dots + a_{r1}x_r)\alpha_1 + \dots + (a_{1r}x_1 + \dots + a_{rr}x_r)\alpha_r = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{r1}x_r = 0 \\ \vdots \\ a_{1r}x_1 + \cdots + a_{rr}x_r = 0 \end{cases}$$

从而, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ 线性无关 $\Rightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{r1}x_r = 0 \\ \vdots \\ a_{1r}x_1 + \cdots + a_{rr}x_r = 0 \end{cases}$ 只有 0 解.

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$$

□

书后习题.6. P₇₉, Ex3

证明: 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s \in K^n$ 的秩为 r , $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}$ 是它的一个极大线性无关组. 现假定 $\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_r}$ 是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中任意 r 个线性无

关的部分组. 我们要证明 $\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_r}$ 是极大线性无关组, 只要证明: 任取 $\alpha_t \in \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\}$, 都有 $\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_r}, \alpha_t$ 线性相关. 事实上, $\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_r}, \alpha_t$ 是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的一个部分组, 所以 $\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_r}, \alpha_t$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出, 而 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 可由 $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}$ 线性表出, 从而 $\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_r}, \alpha_t$ 可由 $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}$ 线性表出. 注意到它们的向量个数, 所以 $\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_r}, \alpha_t$ 线性相关. 命题得证.

□

书后习题.7. *P₇₉, Ex6*

证明: 要证明 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关, 只要证明 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 的秩为 n 即可. 在 K^n 中, 我们已经知道, 标准向量组 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 是线性无关的, 它的秩为 n , 而且任意的向量都可由 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 线性表出, 所以 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 可由 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 线性表出. 而已知任意向量都可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表出, 所以 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 与 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 等价. □

书后习题.8. *P₇₉, Ex7*

证明: 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s \in K^n$ 的秩为 r , $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}$ 是其 r 个向量组成的一部分组, 并且 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 可由 $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}$ 线性表出. 要证明 $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}$ 是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的一个极大线性无关组, 利用前面的结论, 只要证明: $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}$ 线性无关, 从而只要证明 $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}$ 的秩为 r .

因为已知 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 可由 $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}$ 线性表出, 且部分组 $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}$ 可由整体 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出, 所以 $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}$ 与 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 等价. 等价向量组有相同的秩, 所以 $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}$ 的秩为 r . 命题得证. □

书后习题.9. *P₇₉, Ex8*

证明: 线性方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\dots+x_n\alpha_n=\beta$ 有解 \Leftrightarrow 向量 β 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表出. 所以, 对任意的 β 方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\dots+x_n\alpha_n=\beta$ 都有解 \Leftrightarrow 任意的 $\beta \in K^n$ 都可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表出. 再由 *Ex5, Ex6* 任意的 $\beta \in K^n$ 都可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表出 $\Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关 \Leftrightarrow 以 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 为列向量的矩阵的行列式 $|A| \neq 0$. □

书后习题.10. *P₇₉, Ex9*

证明: 假设它们的秩为 r , 且 $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}$ 是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的一个极大线性无关组. 则 $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}$ 线性无关且是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta$ 一个部分组. 又因为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta$ 的秩也是 r , 由前面的结论, $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}$ 也是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta$ 的极大线性无关组. 从而 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta$ 可由 $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}$ 线性表出, 而 $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}$

可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出，所以 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出，所以 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出。 \square

书后习题.11. P_{79} , Ex10

证明: 假设 $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}$ 是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的一个极大线性无关组， $\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \dots, \beta_{j_m}$ 是 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 的一个极大线性无关组。则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 可由 $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}, \beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \dots, \beta_{j_m}$ 线性表出。所以

$$\text{rank}\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t\} \leq \text{rank}\{\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}, \beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \dots, \beta_{j_m}\}$$

$$\leq r + m = \text{rank}\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\} + \text{rank}\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t\}.$$

\square

书后习题.12. P_{83} , Ex4

证明: 因为 U 是 K^n 的一个 r 维子空间，所以存在 β_1, \dots, β_r 为 U 的一个基。从而 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 中的每一个向量都可由 β_1, \dots, β_r 线性表出，又已知 U 中的任何向量都可由 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 线性表出，所以 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 与 β_1, \dots, β_r 等价，从而它们有相同的秩。而 β_1, \dots, β_r 的秩为 r ，所以 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 线性无关，即它们是 r 维子空间中的 r 个线性无关的向量，所以它是 U 的基。 \square

书后习题.13. P_{83} , Ex5

证明: 假设 U 的维数为 r ， $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 是 U 中 s 个线性无关的向量组。若 $r = s$ ，则 $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_s \rangle = U$ 。即 $\alpha_1, \dots, \alpha_s (s = r)$ 就是 U 的一个基。若 $r < s$ ，则 $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_s \rangle \neq U$ 。

我们对 $r - s$ 进行归纳。当 $r - s = 1$ 时，由于 $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_s \rangle \neq U$ ，所以存在 $\alpha_{s+1} \in U$ 且 $\alpha_{s+1} \notin \langle \alpha_1, \dots, \alpha_s \rangle$ 。因为 α_{s+1} 不能由 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 线性表出，所以 $\alpha_1, \dots, \alpha_s, \alpha_{s+1}$ 线性无关，而 $s + 1 = r$ ，所以 $\alpha_1, \dots, \alpha_s, \alpha_{s+1}$ 是 U 的一个基。

假定 $r - s = k$ 时结论成立。当 $r - s = k + 1$ 时，同样由于 $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_s \rangle \neq U$ ，所以存在 $\alpha_{s+1} \in U$ 且 $\alpha_{s+1} \notin \langle \alpha_1, \dots, \alpha_s \rangle$ 。因为 α_{s+1} 不能由 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 线性表出，所以 $\alpha_1, \dots, \alpha_s, \alpha_{s+1}$ 线性无关。而 $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_s, \alpha_{s+1} \rangle$ 是 $s + 1$ 维的，从而 $r - \text{rank}\{\alpha_1, \dots, \alpha_s, \alpha_{s+1}\} = k$ ，由归纳假定，存在 $\alpha_{s+2}, \dots, \alpha_r$ ，使得 $\alpha_1, \dots, \alpha_s, \alpha_{s+1}, \alpha_{s+2}, \dots, \alpha_r$ 是 U 的一个基。 \square

书后习题.14. P_{89} , Ex3.

解: 我们对矩阵 A 进行初等行变换，就可以求出矩阵的秩以及矩阵列向量组的极大线性无关组所在的列。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -7 \\ 0 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & -11 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -7 \\ 0 & -1 & -3 & 4 \\ 0 & -13 & 10 & 36 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -7 \\ 0 & -1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 49 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以 $r(A) = 3$, 且 A 的前三列是线性无关的.

从而: A 的行空间的维数为 3, A 的前三列是其列空间的一个基. \square

书后习题.15. P_{89} , Ex4.

解: 对矩阵实施初等变换:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 0 & -1 - 2\lambda & \lambda + 2 & 1 \\ 0 & 10 - \lambda & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & \lambda \\ 0 & 1 & \lambda + 2 & -1 - 2\lambda \\ 0 & -1 & -5 & 10 - \lambda \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & \lambda \\ 0 & 1 & \lambda + 2 & -1 - 2\lambda \\ 0 & 0 & \lambda - 3 & 9 - 3\lambda \end{pmatrix}$$

所以, 当 $\lambda = 3$ 时, $r(A) = 2$; 当 $\lambda \neq 3$ 时, $r(A) = 3$. \square

书后习题.16. P_{89} , Ex6.

解: 矩阵 A 有一个 4 阶子式

$$A \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & i^m & i^{2m} & i^{3m} \\ 1 & i^{m+1} & i^{2(m+1)} & i^{3(m+1)} \\ 1 & i^{m+2} & i^{2(m+2)} & i^{3(m+2)} \\ 1 & i^{m+3} & i^{2(m+3)} & i^{3(m+3)} \end{vmatrix} = i^{6m} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & i^2 & i^3 \\ 1 & i^2 & i^4 & i^6 \\ 1 & i^3 & i^6 & i^9 \end{vmatrix}$$

为范得蒙行列式的转置, 且非 0. 所以此矩阵的秩为 4, 且它的前 4 列就是它的列向量组的极大线性无关组. \square

书后习题.17. P_{90} , Ex8.

证明: 假设 A_1 的行向量组的极大线性无关组为 $\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2}, \dots, \alpha_{k_l}$, 则其可以通过添加 A 的行向量, 使之成为 A 的行向量组的极大线性无关组. 由于 $r(A) = r$, 所以所要添加的向量个数为 $r - l$, 而 A_1 有 s 行, 所以添加的行

数不会超过 $m - s$, 从而 $r - l \leq m - s \Rightarrow l \geq r + s - m$.

即 A_1 的秩不小于 $r + s - m$. □

书后习题.18. P_{90} , Ex9, 10.

解: n 阶方阵的 0 元素至少有 $n^2 - (n - 1)$ 时, 它的非 0 元的个数至多有 $n - 1$ 个. 因而方阵至少有一行全为 0. 所以矩阵不是满秩矩阵. 其最大秩可能是非 0 元素的个数

矩阵的非 0 元素排列在不同行不同列时, 秩最大. □

书后习题.19. P_{90} , Ex11.

证明: (1) 我们用反证法. 假设 $|A| = 0$, 则矩阵 A 的列向量组一定线性相关. 我们记 A 的列向量组为: $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, 则存在不全为 0 的数 k_1, k_2, \dots, k_n , 使得: $k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \dots + k_n\beta_n = 0$.

设 $|k_{i_0}|$ 是 $|k_1|, |k_2|, \dots, |k_n|$ 中最大者, 则 $|k_{i_0}| \neq 0$.

由 $k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \dots + k_n\beta_n = 0$ 知: $k_1a_{i_01} + k_2a_{i_02} + \dots + k_{i_0}a_{i_0i_0} + \dots + k_na_{i_0n} = 0$

从而 $k_1a_{i_01} + \dots + k_{i_0-1}a_{i_0i_0-1} + k_{i_0+1}a_{i_0i_0+1} + \dots + k_na_{i_0n} = -k_{i_0}a_{i_0i_0}$

$\frac{k_1}{-k_{i_0}}a_{i_01} + \dots + \frac{k_{i_0-1}}{-k_{i_0}}a_{i_0i_0-1} + \frac{k_{i_0+1}}{-k_{i_0}}a_{i_0i_0+1} + \dots + \frac{k_n}{-k_{i_0}}a_{i_0n} = a_{i_0i_0}$

而 $|\frac{k_1}{-k_{i_0}}|, |\frac{k_{i_0-1}}{-k_{i_0}}|, |\frac{k_{i_0+1}}{-k_{i_0}}|, \dots, |\frac{k_n}{-k_{i_0}}|$ 均不大于 1, 所以

$$\left| \frac{k_1}{-k_{i_0}}a_{i_01} + \dots + \frac{k_{i_0-1}}{-k_{i_0}}a_{i_0i_0-1} + \frac{k_{i_0+1}}{-k_{i_0}}a_{i_0i_0+1} + \dots + \frac{k_n}{-k_{i_0}}a_{i_0n} \right| \leq \sum_{l \neq i_0}^n \left| \frac{k_l}{-k_{i_0}}a_{i_0l} \right|$$

$$= \sum_{l \neq i_0}^n \left| \frac{k_l}{-k_{i_0}} \right| |a_{i_0l}| \leq \sum_{l \neq i_0}^n |a_{i_0l}| < |a_{i_0i_0}|$$

这与已知矛盾. 所以, $|A| \neq 0$.

(2) 考虑行列式 $|A(t)| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}t & \cdots & a_{1n}t \\ a_{21}t & a_{22} & \cdots & a_{2n}t \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1}t & a_{n2}t & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$, 则

(1°) $|A(t)|$ 是关于变量 t 的一个连续函数;

(2°) 在 $t \in [-1, 1]$ 时, 满足 $a_{kk} > \sum_{l \neq k}^n |a_{kl}| \geq \sum_{l \neq k}^n |a_{kl}t|$;

(3°) 利用前面的结论, 对任意的 $t \in [-1, 1]$, 都有 $|A(t)| \neq 0$. 又由于 $|A(0)| = \prod_{k=1}^n a_{kk} > 0$, 所以 $|A| = |A(1)| > 0$. □

书后习题.20. P_{92} , Ex1, 2, 3.

解: (1) 方程组的系数行列式



$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & i^m & i^{2m} & i^{3m} \\ 1 & i^{m+1} & i^{2(m+1)} & i^{3(m+1)} \\ 1 & i^{m+2} & i^{2(m+2)} & i^{3(m+2)} \\ 1 & i^{m+3} & i^{2(m+3)} & i^{3(m+3)} \end{vmatrix} \neq 0, \text{ 方程组有解且有唯一解.}$$

(2) 方程组的增广矩阵的前 s 列构成的子式为:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a^{s-1} \\ 1 & a^2 & \cdots & a^{2(s-1)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & a^s & \cdots & a^{s(s-1)} \end{vmatrix} \neq 0$$

而方程组含 s 个方程, 其系数矩阵, 增广矩阵的秩最多为 s . 所以 $r(A) = r(\bar{A}) = s < n$, 方程组有无穷多解.

$$(3) \text{ 方程组的增广矩阵 } \bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{pmatrix}$$

它的系数矩阵有一个 3 阶子式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \neq 0$, 而且方程组只含 3 个未知数, 所以 $r(A) = 3$. 而它的增广矩阵的行列式不为 0, 所以 $r(A) \neq r(\bar{A})$. 方程组无解. \square

书后习题.21. P_{92} , Ex4.

证明: 方程组的系数矩阵 A 是矩阵 B 的一个子阵, 而它们有相同的秩, 所以矩阵 A 的不为 0 的最高阶子式也是矩阵 B 的最高阶不为 0 的子式. 又因为方程组的增广矩阵 \bar{A} 也是矩阵 B 的一个子阵, 且 A 的子式都是 \bar{A} 的子式, 所以矩阵 \bar{A} 有一个阶数等于 $r(B)$ 的不为 0 子式, 所以 $r(\bar{A}) \geq r(B)$. 而子阵的秩不会超过原矩阵的秩, 所以 $r(\bar{A}) = r(B)$. 从而方程组满足: $r(A) = r(\bar{A})$. 方程组有解. \square

书后习题.22. P_{99} , Ex2.

证明: 假设向量组 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s$ 是与方程组的基础解系 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$ 等价的线性无关的向量组. 则:

因为齐次线性方程组的解的组合仍然是解, 而 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s$ 可以由 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$



线性表出，所以 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s$ 是方程组的解向量组；

$\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s$ 线性无关；

对于方程组的任意一个解 η , η 可以由 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$ 线性表出，而 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$ 也可以由 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s$ 线性表出，所以， η 可以由 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s$ 线性表出.

所以， $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s$ 是与方程组的基础解系. \square

书后习题.23. P_{99} , Ex3.

证明：因为 n 元齐次线性方程组系数矩阵的秩为 r , 所以它的解空间的维数为 $n - r$. 因而它的任意 $n - r$ 线性无关的解都是解空间的基. 也就是方程组的基础解系. \square

书后习题.24. P_{99} , Ex4.

证明：因为 n 元齐次线性方程组系数矩阵的秩为 r , 所以它的解空间的维数为，从而解空间中线性无关的向量个数最多为 $n - r$. 所以解空间中任何解向量组的秩都不会大于 $n - r$. 所以， $\text{rank}\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m\} \leq n - r$. \square

书后习题.25. P_{99} , Ex5.

证明：因为矩阵 A 的行列式有一个余子式 $A_{kl} \neq 0$, 所以 A 有一个非 0 的 $n - 1$ 子式. 又因为 $|A| = 0$, 所以 $r(A) = n - 1$. 齐次线性方程组的基础解系含有一个解向量.

$$\text{又因为 } a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \dots + a_{in}A_{kn} = \begin{cases} |A| & (= 0) \quad i = k \\ 0 & \quad i \neq k \end{cases} = 0,$$

$i = 1, 2, \dots, n$.

所以， η_1 是方程组的一个解. 又 $\eta_1 \neq 0$, 由前面的结论， η_1 是方程组的基础解系. \square

书后习题.26. P_{99} , Ex6.

证明：在矩阵 B 的下面再添加一行 0, 得到矩阵 A . 则以矩阵 A 为系数矩阵的齐次线性方程组与以矩阵 B 为系数矩阵的齐次线性方程组同解.

且：矩阵 A 满足 Ex5 的条件； D_j 是矩阵 A 的 (n, j) 位置元素的代数余子式.

利用 Ex5 的结论，即得. \square

书后习题.27. P_{99} , Ex7.

证明：因为以 A_1 为系数矩阵的齐次线性方程组与以矩阵 A 为系数矩阵的齐次线性方程组同解，所以它们有相同的基础解系.

从而 $n - r(A_1) = n - r(A)$, $r(A_1) = r(A)$.

又因为 A_1 是 A 的前 s 行组成的子阵, 所以 A_1 的行向量组的极大线性无关组也是矩阵 A 的行向量组的极大线性无关组. 从而 A 的第 s 行可以由 A_1 的行线性表出. \square

书后习题.28. P_{103} , Ex1, (1).

解: 方程组的增广矩阵 $\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -3 & 11 \\ -3 & 1 & -4 & 2 & -5 \\ -1 & -9 & & -4 & 17 \\ 5 & 3 & 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -3 & 11 \\ 0 & -14 & 2 & -7 & 28 \\ 0 & -14 & 2 & -7 & 28 \\ 0 & 28 & -4 & 14 & 56 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -3 & 11 \\ 0 & -14 & 2 & -7 & 28 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以方程组同解与 $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 11 \\ -14x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 28 \end{cases}$

它有一个特解: $\eta_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

它的导出齐次线性方程组同解与 $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ -14x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}$

它有两个自由未知量, x_3, x_4 , 分别取 $x_3 = 1, x_4 = 0$ 以及 $x_3 = 0, x_4 = 1$ 可

以得到导出齐次线性方程组的基础解系: $\eta_1 = \begin{pmatrix} -\frac{9}{7} \\ \frac{1}{7} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \eta_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

所以, 方程组的解集为 $\{\eta | \eta = \eta_0 + k_1\eta_1 + k_2\eta_2, k_1, k_2 \in K\}$

$$= \left\{ \eta | \eta = \begin{pmatrix} 1 - \frac{9}{7}k_1 + \frac{1}{2}k_2 \\ -2 + \frac{1}{7}k_1 - \frac{1}{2}k_2 \\ k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}, k_1, k_2 \in K \right\}$$

\square

书后习题.29. P_{104} , Ex2.

- 证明: n 个方程的 n 元非齐次线性方程组有唯一解
 \Leftrightarrow 它的系数矩阵的秩等于未知量个数 n
 \Leftrightarrow 它的导出齐次线性方程组系数矩阵的秩也等于未知量个数
 \Leftrightarrow 它的导出齐次线性方程组只有 0 解. □