高等代数习题解答

(北京大学丘维声教授编著的教材)

宿州学院数学系代数教研室

第 6 章：二次型 · 矩阵的合同

书后习题.1. $P_{200}, Ex5$

证明：对任意 n 级矩阵 $B=(b_{ij})$ 以及

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

都有 $X'BX=$

$$\begin{array}{llll}
b_{11}x_1^2+ & (b_{12}+b_{21})x_1x_2+ & (b_{13}+b_{31})x_1x_3+\cdots+ & (b_{1n}+b_{n1})x_1x_n \\
 & +b_{22}x_2^2+ & (b_{23}+b_{32})x_2x_3+\cdots+ & (b_{2n}+b_{n2})x_2x_n \\
 & & +\cdots \quad \cdots & \cdots \\
 & & & +b_{nn}x_x^2.
\end{array}$$

对于反对称矩阵 $A=(a_{ij})$，则任意的 $1\le i,j\le n, a_{ii}=0, a_{ij}=-a_{ji}$.
所以任意的 $\alpha\in K^n$，都有 $\alpha' A\alpha=0$.

假设对任意的 $\alpha\in K^n$，都有 $\alpha' A\alpha=0$. 取 $\alpha=\varepsilon_i$，则 $\varepsilon_i' A\varepsilon_i=a_{ii}=0$；而对 $i\neq j$，取 $\alpha=\varepsilon_i+\varepsilon_j$，则

$$(\varepsilon_i+\varepsilon_j)'A(\varepsilon_i+\varepsilon_j)=\varepsilon_i'A\varepsilon_i+\varepsilon_j'A\varepsilon_i+\varepsilon_i'A\varepsilon_j+\varepsilon_j'A\varepsilon_j=a_{ij}+a_{ji}=0,$$

所以矩阵 A 满足：任意的 $1\le i,j\le n, a_{ii}=0, a_{ij}=-a_{ji}$，即 A 是反对称矩阵. □

书后习题.2. $P_{200}, Ex9$

证明：我们对反对称矩阵 A 的级数进行归纳.

$n=1$ 时，1 级反对称矩阵只有 0 矩阵，所以它合同于对角矩阵.

$n=2$ 时，2 级反对称矩阵为 $\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$.

若 $a=0$，则 $\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}=0$ 已经是对角矩阵，结论成立.

若 $a\neq 0$，则 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$，即矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$ 合同于 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$，结论成立.

假设对级数 $\leq n-1$ 的反对称矩阵，结论都成立.

对 n 级反对称矩阵 $A=(a_{ij})$.

(1) 若 $a_{1i}=0, i=2,...,n$，

则有 $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$，其中 A_1 是一个 $n-1$ 级反对称矩阵子块. 且

$$\begin{pmatrix} 0 & I_{n-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ I_{n-1} & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

利用归纳假定，存在 $n-1$ 级可逆矩阵 C_1，使得：

$$C_1'A_1C_1=diag\Big\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},...,\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},(0),...,(0)\Big\}.$$

令 $C=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ I_{n-1} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，则 $C'AC$

$=\Big(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ I_{n-1} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Big)'\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}\Big(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ I_{n-1} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Big)$

$=\begin{pmatrix} C_1' & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & I_{n-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ I_{n-1} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} C_1' & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} C_1' A_1 C_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= diag\Big\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, (0), ..., (0), (0) \Big\},$$

结论对 n 级反对称矩阵成立.

(2) 若 $a_{12} \neq 0$, 则 $a_{21} = -a_{12} \neq 0$.

则

$$A = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{12} & 0 \end{pmatrix} & B_1 \\ -B_1' & A_1 \end{pmatrix},$$

其中 B_1 是一个 $2 \times (n-2)$ 矩阵子块, 且

$$P(2(\frac{1}{a_{12}}))AP(2(\frac{1}{a_{12}})) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & B_2 \\ -B_2' & A_1 \end{pmatrix},$$

令 $C_1 = \begin{pmatrix} I_2 & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} B_2 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}$, 则 $C_1' = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ B_2' \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & I_{n-2} \end{pmatrix}$, 且

$$C_1' A C_1 = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ B_2' \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & I_{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & B_2 \\ -B_2' & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_2 & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} B_2 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & B_2 \\ 0 & A_1 + B_2' \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} B_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_2 & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} B_2 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & A_1 + B_2' \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} B_2 \end{pmatrix}, \text{ 而}$$

$$\Big(A_1 + B_2' \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} B_2\Big)' = -A_1 + B_2' \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}' B_2'' = -A_1 - B_2' \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} B_2,$$

$A_1+B_2'\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}B_2$ 是 $n-2$ 级反对称矩阵，由归纳假定，存在 $n-2$ 级可逆矩阵 C_2，使得：

$$C_2'\Big(A_1+B_2'\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}B_2\Big)C_2=diag\Big\{\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},...,\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},(0),...,(0),(0)\Big\},$$

令

$$C=P(2(\frac{1}{a_{12}}))\begin{pmatrix}I_2&\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}B_2\\0&I_{n-2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_2&0\\0&C_2\end{pmatrix},$$

则 $C'AC=\begin{pmatrix}I_2&0\\0&C_2\end{pmatrix}'\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}&0\\0&A_1+B_2'\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}B_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_2&0\\0&C_2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}&0\\0&C_2'\Big(A_1+B_2'\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}B_2\Big)C_2\end{pmatrix}$

$=diag\Big\{\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},...,\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},(0),...,(0),(0)\Big\},$

结论对 n 级反对称矩阵成立.

(3) 若存在某一个 $a_{1i}\neq 0, i=3,...,n$，则

$$P(2,i)AP(2,i)=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0&a_{1i}\\-a_{1i}&0\end{pmatrix}&B_1\\-B_1'&A_1\end{pmatrix}$$

其中 B_1 是一个 $2\times(n-2)$ 矩阵子块，且 A_1 是 $(n-2)\times(n-2)$ 级反对称矩阵子块. 问题化为 (2) 的情形.

由上，依据数学归纳法原理，结论对所有的 n 级反对称矩阵都成立. □

书后习题.3. $P_{200}, Ex11$

证明：因为矩阵 A 是实对称矩阵，且 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_n$ 是它 n 个特征值，所以存在正交矩阵 T，使得：

$$T'AT = diag\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\},$$

$$A = Tdiag\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}T',$$

对任意的 $\alpha \neq 0 \in R^n$，记

$$\beta = T'\alpha = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

由于 T 是正交矩阵，所以 $|\beta| = |T'\alpha| = |\alpha| \neq 0$，

且 $\alpha' A\alpha = \alpha' Tdiag\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}T'\alpha$

$= \beta' diag\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}\beta = \lambda_1 b_1^2 + \lambda_2 b_2^2 + ... + \lambda_n b_n^2$，

而 $\lambda_n(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2) \leq \lambda_1 b_1^2 + \lambda_2 b_2^2 + ... + \lambda_n b_n^2 \leq \lambda_1(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2)$

即 $\lambda_n|\alpha|^2 = \lambda_n|\beta|^2 \leq \lambda_1 b_1^2 + \lambda_2 b_2^2 + ... + \lambda_n b_n^2 \leq \lambda_1|\beta|^2 = \lambda_1|\alpha|^2$，

所以

$$\lambda_n|\alpha|^2 \leq \alpha' A\alpha \leq \lambda_1|\alpha|^2,$$

即

$$\lambda_n \leq \frac{\alpha' A\alpha}{|\alpha|^2} \leq \lambda_1.$$

□

书后习题.4. $P_{200}, Ex12$

证明：因为矩阵 A 是 n 级实对称矩阵，所以存在正交矩阵 T，使得

$$T'AT = diag\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\},\ A = Tdiag\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}T'.$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ 是矩阵 A 的实特征值.

从而存在正实数 c，使得 $max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, ..., |\lambda_n|\} \leq c$，

对任意的 $\alpha \in R^n$，记

$$\beta = T'\alpha = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

由于 T 是正交矩阵，所以 $\alpha'\alpha=\beta'\beta$，
$|\alpha' A\alpha|=|\alpha' T diag\{\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n\}T'\alpha|$
$=|\lambda_1 b_1^2+\lambda_2 b_2^2+...+\lambda_n b_n^2|$
$\leq |\lambda_1|b_1^2+|\lambda_2|b_2^2+...+|\lambda_n|b_n^2|$
$\leq c(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2)$
$=c\beta'\beta$
$=c\alpha'\alpha.$ □

书后习题.5. $P_{200}, Ex13$

证明：因为矩阵 A 是实对称矩阵，所以存在正交矩阵 T_1，使得

$$T_1^{-1}AT_1=diag\{\lambda_1 I_{r_1},\lambda_2 I_{r_2},...,\lambda_t I_{r_t}\},$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_t$ 是矩阵 A 的 t 个不同特征值.

由于 $AB=BA$，所以

$$T_1^{-1}AT_1T_1^{-1}BT_1=T_1^{-1}BT_1T_1^{-1}AT_1,$$

利用 $P_{143}, Ex18$ 的结论，则 $T_1^{-1}BT_1$ 是一个分块对角矩阵. 因而可设

$$T_1^{-1}BT_1=diag\{B_1,B_2,...,B_t\},$$

其中 B_i 是 r_i 级矩阵子块.
由于 T 是正交矩阵，$T^{-1}=T'$，所以 B_i 是 r_i 级对称子块.
对每一个 B_i，存在 r_i 正交矩阵 C_i，使得

$$C_i^{-1}B_iC_i=diag\{\lambda_{i1},...,\lambda_{ir_i}\}.$$

令 $T_2=diag\{C_1,C_2,...,C_t\}$，则 T_2 仍是正交矩阵，且
$T_2^{-1}=diag\{C_1^{-1},C_2^{-1},...,C_t^{-1}\}$,
$T_2^{-1}diag\{B_1,B_2,...,B_t\}T_2$
$=diag\{C_1^{-1},C_2^{-1},...,C_t^{-1}\}diag\{B_1,B_2,...,B_t\}diag\{C_1,C_2,...,C_t\}$
$=diag\{C_1^{-1}B_1C_1,C_2^{-1}B_2C_2,...,C_t^{-1}B_tC_t\}$
$=diag\{diag\{\lambda_{11},...,\lambda_{1r_1}\},diag\{\lambda_{21},...,\lambda_{2r_2}\},...,diag\{\lambda_{t1},...,\lambda_{tr_t}\}\}$,
而 $T_2^{-1}diag\{\lambda_1 I_{r_1},\lambda_2 I_{r_2},...,\lambda_t I_{r_t}\}T_2$
$=diag\{C_1^{-1},C_2^{-1},...,C_t^{-1}\}diag\{\lambda_1 I_{r_1},\lambda_2 I_{r_2},...,\lambda_t I_{r_t}\}diag\{C_1,C_2,...,C_t\}$

$= diag\big\{C_1^{-1}(\lambda_1 I_{r_1})C_1, C_2^{-1}(\lambda_2 I_{r_2})C_2, ..., C_t^{-1}(\lambda_t I_{r_t})C_t\big\}$
$= diag\big\{\lambda_1 I_{r_1}, \lambda_2 I_{r_2}, ..., \lambda_t I_{r_t}\big\}.$

令 $T = T_1T_2$，则 T 是两个正交矩阵的乘积，且有

$$T^{-1}AT,\quad T^{-1}BT$$

都是对角矩阵. □

书后习题.6. $P_{200}, Ex14$

证明：(方法 1)

因为 $X'AX$ 是 n 元实二次型，所以存在正交替换 $X = TY$，使得

$$X'AX = Y'(T'AT)Y = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + ... + \lambda_n y_n^2,$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ 是矩阵 A 的特征值.

对任意一个特征值 $\lambda_i, 1 \le i \le n$，取 $Y = \varepsilon_i$(第 i 个分量是 1，其余分量为 0)，记：$\alpha = T\varepsilon_i$，则
$|\alpha|^2 = 1$, 且 $\alpha' A\alpha = \varepsilon_i' diag\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}\varepsilon_i = \lambda_i$.
命题成立.

(方法 2)

由于 λ_i 是矩阵 A 的一个特征值，所以存在 $\alpha \ne 0 \in R^n$，使得

$$A\alpha = \lambda_i \alpha,$$

从而 $\alpha' A\alpha = \alpha'(A\alpha) = \alpha'(\lambda_i\alpha) = \lambda_i \alpha'\alpha$,
结论成立. □

书后习题.7. $P_{204}, Ex3$

解：实对称矩阵的是否合同有两个参数决定：(1) 矩阵的秩；(2) 正惯性指数.

n 级实对称矩阵的秩有 $n+1$ 类，即秩为 0，秩为 1，...，秩为 n；而对秩为 k 的实对称矩阵，其正惯性指数有 $k+1$ 类. 即正惯性指数 0，正惯性指数 1，...，正惯性指数 k.

所以 n 级实对称矩阵有

$$1 + 2 + ... + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

个合同类. $\square$

书后习题.8. $P_{204}, Ex4$

证明：因为 $X'AX$ 是 n 元实二次型，所以存在非退化的线性替换 $X=CY$，化二次型 $X'AX$ 为规范形

$$X'AX \xlongequal{X=CY} y_1^2+...+y_p^2-y_{p+1}^2-...-y_r^2.$$

对任意 $\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}\in R^n$，记 $\beta=C^{-1}\alpha=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$，即 $\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$，

则 $\alpha'A\alpha=b_1^2+...+b_p^2-b_{p+1}^2-...-b_r^2$.

因为存在 $\alpha_1\neq 0$，使得 $\alpha_1'A\alpha_1>0$，所以 $p>0$，即二次型 $X'AX$ 的正惯性指数 >0，又因为存在 $\alpha_2\neq 0$，使得 $\alpha_2'A\alpha_2<0$，所以 $r-p>0$，即二次型 $X'AX$ 的负惯性指数 >0.

取 $\beta=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_p\\b_{p+1}\\b_{p+2}\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$，并令 $\alpha=C\beta$.

由于 C 可逆，所以 $\alpha\neq 0$，且

$\alpha'A\alpha=\underbrace{1^2+0^2+...+0^2}_{p}\underbrace{-1^2-0^2-...-0^2}_{r-p}=0$. $\square$

书后习题.9. $P_{204}, Ex5$

证明：因为 A 是实对称矩阵，所以存在正交矩阵 T，使得

$$T^{-1}AT=diag\{\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n\},$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ 是矩阵 A 的特征值.

由于 $|A|<0$，所以矩阵 A 的特征值中至少有一个 <0，即存在 λ_i 为 A 的特征值，且 $\lambda_i<0$.

对特征值 λ_i，存在 $\alpha \neq 0 \in R^n$，使得 $A\alpha = \lambda_i \alpha$，从而
$\alpha' A\alpha = \lambda_i \alpha'\alpha < 0.$ □

书后习题.10. $P_{204}, Ex6$

证明：先证明充分性.

假设二次型的秩为 1，则存在非退化的线性替换 $X = CY$，使得

$$X'AX = y_1^2 \qquad \text{或者} \qquad X'AX = -y_1^2.$$

这时 $Y = C^{-1}X$，$y_1 = b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + ... + b_{1n}x_n$，从而

$$X'AX = (b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + ... + b_{1n}x_n)^2,$$

或者

$$X'AX = -(b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + ... + b_{1n}x_n)^2.$$

表成了两个实系数 1 次齐次多项式之积.

假设二次型的秩为 1，符号差为 2，则存在非退化的线性替换 $X = CY$，使得

$$X'AX = y_1^2 - y_2^2 = (y_1 + y_2)(y_1 - y_2).$$

这时 $Y = C^{-1}X$，

$$\begin{cases} y_1 & = \\ y_2 & = \quad b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + ... + b_{2n}x_n \end{cases}$$

从而：

$$X'AX = [(b_{11} + b_{21})x_1 + (b_{12} + b_{22})x_2 + ... + (b_{1n} + b_{2n})x_n] \cdot [(b_{11} - b_{21})x_1 + (b_{12} - b_{22})x_2 + ... + (b_{1n} - b_{2n})x_n].$$

表成了两个实系数 1 次齐次多项式之积.

再证明必要性.

因为实二次型 $X'AX$ 可以分解成两个实系数 1 次齐次多项式之积，所以可以假设

$$X'AX = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n)(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n).$$

我们考虑矩阵

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \end{pmatrix},$$

如果 $rank(B)=1$，则存在 $a_{1k}\neq 0$ 且 B 的两行对应成比例. 这时作线性替换

$$\begin{cases} y_1 & = x_1 \\ \vdots & \\ y_{k-1} & = x_k \\ y_k & = a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n \\ y_{k-1} = & x_k \\ \vdots & \\ y_n & = x_n \end{cases},$$

$$\begin{cases} x_1 & = y_1 \\ \vdots & \\ x_{k-1} & = y_k \\ x_k & = a_{1k}^{-1}a_{11}y_1+...+a_{1k}^{-1}y_k+...+a_{1k}^{-1}a_{1n}y_n \\ x_{k-1} & = y_k \\ \vdots & \\ x_n & = y_n \end{cases}$$

它是非退化的线性替换，且化原来的二次型 $X'AX=d_ky_k^2, d_k\neq 0.$
二次型的秩为 1.
如果 $rank(B)=2$，则存在 $\begin{vmatrix} a_{1k} & a_{1l} \\ a_{2k} & a_{2l} \end{vmatrix}\neq 0$，作线性替换

$$\begin{cases} y_1 & = x_1 \\ \vdots & \\ y_k & = a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n \\ \vdots & \\ y_l & = a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n \\ \vdots & \\ y_n & = x_n \end{cases},$$

则它是非退化的线性替换，化原二次型为 $X'AX=y_ky_l$，显然它的秩为 2，符号差为 0. □

书后习题.11. $P_{204}, Ex8$

证明：记 $L=\begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_{s+u} \end{pmatrix}$，$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$，则存在 $(s+u)\times n$ 阶矩阵 C，使得 $L=CX$. 即有

$$f(x_1,x_2,...,x_n) \xlongequal{L=CX} l_1^2+...+l_s^2-l_{s+1}^2-...-l_{s+u}^2.$$

因为 $f(x_1,x_2,...,x_n)$ 是 n 元实二次型，所以存在非退化的线性替换 $X=TY$，使得

$$f(x_1,x_2,...,x_n) \xlongequal{X=TY} y_1^2+...+y_p^2-y_{p+1}^2-...-y_{p+q}^2,$$

其中，p 是二次型 $f(x_1,x_2,...,x_n)$ 的正惯性指数，q 是二次型 $f(x_1,x_2,...,x_n)$ 的负惯性指数.

从而 $L=CX=(CT)Y$，则

$$(1)\qquad l_1^2+...+l_s^2-l_{s+1}^2-...-l_{s+u}^2 \xlongequal{L=(CT)Y} y_1^2+...+y_p^2-y_{p+1}^2-...-y_{p+q}^2$$

记

$$CT=\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{s1} & f_{s2} & \cdots & f_{sn} \\ f_{s+11} & f_{s+12} & \cdots & f_{s+1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{s+u1} & f_{s+u2} & \cdots & f_{s+un} \end{pmatrix},$$

则

$$\begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_s \\ l_{s+1} \\ \vdots \\ l_{s+u} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{s1} & f_{s2} & \cdots & f_{sn} \\ f_{s+11} & f_{s+12} & \cdots & f_{s+1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{s+u1} & f_{s+u2} & \cdots & f_{s+un} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

假设 $p > s$，令

$$
(2) \qquad \begin{cases}
f_{11}y_1 & +f_{12}y_2 & +\ldots & +f_{1n}y_n & = & 0 \\
\vdots & & & \vdots & \vdots & \\
f_{s1}y_1 & +f_{s2}y_2 & +\ldots & +f_{sn}y_n & = & 0 \\
 & & & y_{p+1} & = & 0 \\
 & & & \vdots & \vdots & \\
 & & & y_n & = & 0
\end{cases}
$$

显然，(2) 的方程个数小于未知量个数，从而 (2) 有非 0 解. 其非 0 解使得 (1) 的左侧 ≤ 0，而使得 (1) 的右侧 > 0，矛盾.

假设 $q > u$，令

$$
(3) \qquad \begin{cases}
 & & & y_1 & = & 0 \\
 & & & \vdots & \vdots & \\
 & & & y_p & = & 0 \\
f_{s+11}y_1 & +f_{s+12}y_2 & +\ldots & +f_{s+1n}y_n & = & 0 \\
\vdots & & & \vdots & \vdots & \\
f_{s+u1}y_1 & +f_{s+u2}y_2 & +\ldots & +f_{s+un}y_n & = & 0 \\
 & & & y_{p+q+1} & = & 0 \\
 & & & \vdots & \vdots & \\
 & & & y_n & = & 0
\end{cases}
$$

显然，(3) 的方程个数小于未知量个数，从而 (3) 有非 0 解. 其非 0 解使得 (1) 的左侧 ≥ 0，而使得 (1) 的右侧 < 0，矛盾. $\square$

书后习题.12. $P_{209}, Ex1$

证明：(方法1) 因为 A, B 是正定矩阵，所以对任意的 $\alpha \neq 0 \in R^n$，都有

$$\alpha' A\alpha > 0, \qquad \alpha' B\alpha > 0,$$

从而

$$\alpha'(A+B)\alpha = \alpha' A\alpha + \alpha' B\alpha > 0,$$

即 $A + B$ 仍是正定矩阵.

(方法2) 因为 A 是正定矩阵，所以存在可逆矩阵 C_1，使得

$$C_1'AC_1 = I,$$

又因为 B 也是正定矩阵，所以 $C_1'BC_1$ 仍是正定矩阵，从而存在正交矩阵 T，使得

$$T'(C_1'BC_1)T = diag\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\},$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ 是 $C_1'BC_1$ 的特征值，且全 > 0，并且有 $T'T = I$.
取 $C = C_1T$，则

$$\begin{aligned} C'(A+B)C &= C'AC + C'BC = I + diag\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\} \\ &= diag\{1+\lambda_1, 1+\lambda_2, ..., 1+\lambda_n\} \end{aligned}$$

所以矩阵 $A+B$ 的合同标准形为 $diag\{1+\lambda_1, 1+\lambda_2, ..., 1+\lambda_n\}$，且 $1+\lambda_i > 0, \quad i = 1, 2, ..., n$. 所以 $A+B$ 正定. □

书后习题.13. $P_{209}, Ex2, 3$

证明：(方法 1) 因为 A 是正定矩阵，所以 $A' = A$，从而 $(A^{-1})' = A^{-1}$，即 A^{-1} 也是对称矩阵，且存在可逆矩阵 C，使得 $C'AC = I$，从而

$$C^{-1}A^{-1}(C')^{-1} = I, \text{ 即：} ((C')^{-1})'A^{-1}(C')^{-1} = I,$$

矩阵 A^{-1} 也与单位矩阵合同，所以 A^{-1} 仍然正定.

(方法 2) 因为 A 是正定矩阵，所以 $A' = A$，从而 $(A^{-1})' = A^{-1}$，即 A^{-1} 也是对称矩阵，且 A 的特征值全 > 0. 设 λ 是矩阵 A 的一个特征值，由 $P_{178}, Ex8$ 的结论，则 λ^{-1} 是 A^{-1} 的特征值，即 A^{-1} 的特征值也全 > 0，所以 A^{-1} 仍是正定矩阵.

假设 A 是正定矩阵，则对 $k > 0$，容易验证：kA 也是正定矩阵.

注意到 $AA^* = |A|I$，即 $A^* = |A|A^{-1}$. 而 A 正定，所以 $|A| > 0$ 且 A^{-1} 正定. 所以 A^* 仍是正定矩阵. □

书后习题.14. $P_{209}, Ex4$

证明：因为 A 是实对称矩阵，所以存在正交矩阵 T，使得

$$T'AT = diag\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}.$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ 是矩阵 A 的特征值，且 $T'T = I$. 从而

$$T'(tI + A)T = T'(tI)T + T'AT = diag\{t+\lambda_1, t+\lambda_2, ..., t+\lambda_n\},$$

若 $t > Sr(A)$，则 $t+\lambda_i > 0,\quad i=1,2,...,n$，所以 $tI+A$ 正定. $\square$

书后习题.15. $P_{209}, Ex8, 9$

证明：充分性. 设存在可逆实对称矩阵 C，使得 $A=C^2$. 因为 C 是实对称矩阵，所以存在正交矩阵 T，使得

$$T'CT = diag\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\},$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ 是矩阵 A 的特征值，且 $\lambda_i \neq 0,\quad i=1,2,...,n, T'T=I$，从而

$$T'AT = T'C^2T = T'CTT'CT = diag\{\lambda_1^2, \lambda_2^2, ..., \lambda_n^2\},$$

其中 $\lambda_1^2, \lambda_2^2, ..., \lambda_n^2$ 是矩阵 A 的全部特征值，且 $\lambda_i^2 > 0,\quad i=1,2,...,n$. 所以矩阵 A 是正定矩阵.

必要性. 假设矩阵 A 是正定矩阵，则存在正定矩阵 T，使得

$$T'AT = diag\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\},$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ 是矩阵 A 的全部特征值. 由于 A 是正定矩阵，所以 $\lambda_i > 0,\quad i=1,2,...,n$. 从而

$$T'AT = diag\{\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, ..., \sqrt{\lambda_n}\} \cdot diag\{\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, ..., \sqrt{\lambda_n}\},$$

所以

$$A = (T'^{-1} diag\{\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, ..., \sqrt{\lambda_n}\} T^{-1}) \cdot (T'^{-1} diag\{\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, ..., \sqrt{\lambda_n}\} T^{-1}),$$

记 $C = T'^{-1} diag\{\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, ..., \sqrt{\lambda_n}\} T^{-1}$，从而 $A=C^2$，矩阵 C 的特征值为 $\sqrt{\lambda_i} > 0,\quad i=1,2,...,n.$
所以 C 可逆.

其实，C 仍然是实对称矩阵，且 C 的全部特征值
$\sqrt{\lambda_i} > 0,\quad i=1,2,...,n$，所以 C 是正定矩阵. $\square$

书后习题.16. $P_{209}, Ex10$

证明：因为矩阵 A 是正定矩阵，所以存在可逆矩阵 C_1，使得 $C_1'AC_1 = I$，且 $C_1'BC_1$ 仍然是实对称矩阵.
对实对称矩阵 $C_1'B$，存在正交矩阵 T，使得

$$T'(C_1'BC_1)T = diag\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\},$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ 是矩阵 $C_1'BC_1$ 的特征值.
取 $C = C_1T$，则

$$C'AC = T'(C_1'AC_1)T = I, \quad C'BC = T'(C_1'BC_1)T.$$

所以结论成立. □

书后习题.17. $P_{209}, Ex11$

证明：因为矩阵 A, B 是实对称矩阵，且 $AB = BA$，利用 $P_{200}, Ex13$ 的结论，存在正交矩阵 T，使得

$$T'AT = diag\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}, \quad T'BT = diag\{\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n\}.$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n; \mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$ 分别是矩阵 A, B 的特征值.
由于 A, B 是正定矩阵，所以 $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n; \mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$ 都 > 0.
从而

$$T'ABT = T'AT'TBT = diag\{\lambda_1\mu_1, \lambda_2\mu_2, ..., \lambda_n\mu_n\},$$

所以 AB 的特征值全大于 0，AB 是正定矩阵. □

书后习题.18. $P_{209}, Ex12$

证明：充分性. 设 A 的主子式全 > 0, 则 A 的所有顺序主子式也全 > 0(顺序主子式都是主子式), 从而矩阵 A 正定.

必要性. 假设矩阵 A 是正定的, 则对任意可逆矩阵 C, 都有 $C'AC$ 仍是正定矩阵. 考虑矩阵 A 的任意一个 k 阶主子式

$$A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix}, \quad 1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n,$$

对矩阵 A，取 $C = P(1, i_1)P(2, i_2)\cdots P(k, i_k)$，则

$$B = C'AC = P(k, i_k)\cdots P(2, i_2)P(1, i_1)AP(1, i_1)P(2, i_2)\cdots P(k, i_k),$$

仍是正定矩阵，且

$$B\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k \\ 1 & 2 & \cdots & k \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix},$$

从而由矩阵 B 正定，得

$$A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k \\ 1 & 2 & \cdots & k \end{pmatrix} > 0.$$

命题结论成立. □

书后习题.19. $P_{209}, Ex13$

证明：(方法 1) 因为 A, B 都是实对称矩阵，所以 $A+B$ 也是实对称矩阵. 又因为 A 是正定矩阵，B 是半正定矩阵，所以对任意的 $\alpha \in R^n$，都有

$$\alpha' A\alpha > 0, \quad \alpha' B\alpha \geq 0,$$

从而

$$\alpha'(A+B)\alpha = \alpha' A\alpha + \alpha' B\alpha > 0,$$

所以 $A+B$ 是正定矩阵.

(方法 2) 因为 A 是正定矩阵，所以存在可逆矩阵 C_1，使得

$$C_1' A C_1 = I,$$

又因为 B 是半正定矩阵，所以 $C_1' B C_1$ 仍是半正定矩阵，从而存在正交矩阵 T，使得

$$T'(C_1' B C_1)T = diag\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\},$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ 是矩阵 $C_1' B C_1$ 的特征值，且 $\lambda_i \geq 0, \quad i = 1, 2, ..., n$.
取 $C = C_1 T$，则

$$C'(A+B)C = T'(C_1' A C_1)T + T'(C_1' B C_1)T = diag\{1+\lambda_1, 1+\lambda_2, ..., 1+\lambda_n\}.$$

而 $1+\lambda_i > 0, \quad i = 1, 2, ..., n$，所以 $A+B$ 是正定矩阵. □

书后习题.20. $P_{209}, Ex14$

解：矩阵 J 是一个实对称矩阵，利用 $P_{187}, Ex7(1)$ 的结论，存在正交矩阵 T，使得

$$T' J T = diag\{0, ..., 0, n\},$$

即 J 是一个半正定矩阵，而 I 是一个正定矩阵，由 $Ex13$ 的结论，得 $I+J$ 是一个正定矩阵. □

书后习题.21. $P_{209}, Ex15$

证明: 充分性. 设 $X'AX$ 的正惯性指数为它的秩, 则存在非退化的线性替换 $X = CY$, 使得

$$X'AX \overset{X=CY}{=\!=\!=} y_1^2 + y_2^2 + ... + y_p^2,$$

对任意的 $\neq 0 \in R^n$, 令 $\beta = C^{-1}\alpha = (b_1, b_2, ..., b_n)'$, 则

$$\alpha' A\alpha \overset{\beta=C^{-1}\alpha}{=\!=\!=} b_1^2 + b_2^2 + ... + b_p^2 \geq 0,$$

所以 $X'AX$ 是半正定矩阵.

必要性. 假设 $X'AX$ 是半正定实二次型. 若 $X'AX$ 的正惯性指数 $<$ 它的秩, 则存在非退化的线性替换 $X = CY$, 使得

$$X'AX \overset{X=CY}{=\!=\!=} y_1^2 + ... + y_p^2 - y_{p+1}^2 - ... - y_r^2,$$

其中 r 是二次型的秩, p 为 $X'AX$ 的正惯性指数, 且 $p < r$.
取 $\beta = (\underbrace{0, ..., 0}_{p}, 1, 0, ..., 0)'$, 令 $\alpha = C\beta$, 则 $\alpha \neq 0$ 且

$$\alpha' A\alpha \overset{\alpha=C\beta}{=\!=\!=} -1 < 0,$$

与 $X'AX$ 是半正定二次型矛盾. 所以 $r = p$. 即命题成立. $\square$