高等代数习题解答

(北京大学丘维声教授编著的教材)

宿州学院数学系代数教研室

第 10 章：具有度量的线性空间

书后习题.1. $P_{169}, Ex1$

证明：(*1*) 显然 f 是对称的，所以只要验证单侧线性就可以了.

任意 $\alpha_1=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T,\ \alpha_2=(z_1,z_2,z_3,z_4)^T,\ k_1,k_2\in K$，

$f(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2,\beta)$

$=(k_1x_1+k_2z_1)y_1+(k_1x_2+k_2z_2)y_2+(k_1x_3+k_2z_3)y_3-(k_1x_4+k_2z_4)y_4$

$=(k_1x_1y_1+k_1x_2y_2+k_1x_3y_3-k_1x_4y_4)+(k_2z_1y_1+k_2z_2y_2+k_2z_3y_3-k_2z_4y_4)$

$=k_1(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3-x_4y_4)+k_2(z_1y_1+z_2y_2+z_3y_3-z_4y_4)$

$=k_1f(\alpha_1,\beta)+k_2f(\alpha_2,\beta)$,

所以 f 是 K^4 上的双线性函数.

(*2*) 直接计算

$f(\varepsilon_i,\varepsilon_i)=1,\ i=1,2,3$;

$f(\varepsilon_4,\varepsilon_4)=-1$;

$f(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=0,\ i\neq j,\ \forall i,\ j=1,2,3,4.$,

所以在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 之下的度量矩阵是：

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}.$$

(*3*) 由于 f 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 之下的度量矩阵是满秩矩阵，所以 f 在 K^4 上的左根，右根都是 0，也就是：f 是非退化的.

(4) 由于 f 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 之下的度量矩阵是对称矩阵, 所以 f 是对称的.

(5) 取 $\alpha=(1,0,0,1)^T$, 容易计算: $f(\alpha,\alpha)=0$. □

书后习题.2. $P_{169},Ex2$

证明: 只证明左根. 同理可证明右根.

取 V 的一个基 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$, f 在这个基下的度量矩阵为 A, 则 $rank_m f=rankA$. 任意的 $\alpha\in V$, 设 α 在基 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ 之下的坐标为 X, 则

$\alpha\in rad_L V\Leftrightarrow f(\alpha,\beta)=0$, 对任意的 $\beta\in V$

$\Leftrightarrow X'AY=0$, 对任意的 $Y\in F^n$

$\Leftrightarrow X'A\varepsilon_i=0$, $i=1,2,...,n$

$\Leftrightarrow X'A(\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_2)=0$

$\Leftrightarrow X'AI=0$

$\Leftrightarrow X'A=0$

$\Leftrightarrow A'X=0$

$\Leftrightarrow X$ 属于齐次线性方程组 $A'X=0$ 的解空间,

所以 $rad_L V\cong$ 齐次线性方程组 $A'X=0$ 的解空间, 从而

$dimrad_L V=dimV-rankA'=dimV-rankA=dimV-rank_m f$. □

书后习题.3. $P_{169},Ex3$

证明: (1) 由于 f 是 V 上的双线性函数, 所以 $\alpha_L\in V^*$, 是 V 上的线性函数. 且任意的 $\alpha,\gamma\in V$ 以及任意的 $\beta\in V,k\in F$, 都有

$(\alpha+\gamma)_L(\beta)=f(\alpha+\gamma,\beta)=f(\alpha,\beta)+f(\gamma,\beta)=\alpha_L(\beta)+\gamma_L(\beta)$,

$(k\alpha)_L(\beta)=f(k\alpha,\beta)=kf(\alpha,\beta)=k(\alpha_L(\beta))=(k\alpha_L)(\beta)$,

所以 $(\alpha+\gamma)_L=\alpha_L+\gamma_L$, $(k\alpha)_L=k(\alpha_L)$. 从而

$L_f(\alpha+\gamma)=(\alpha+\gamma)_L=\alpha_L+\gamma_L=L_f(\alpha)+L_f(\gamma)$,

$L_f(k\alpha)=(k\alpha)_L=k(\alpha_L)=kL_f(\alpha)$.

所以 L_f 是 V 到 V^* 的线性映射.

同理可以证明: $R_f:\beta\mapsto\beta_R$ 是 V 到 V^* 的线性映射.

(2)$\alpha\in KerL_f\Leftrightarrow\alpha_L=0$

$\Leftrightarrow$ 任意的 $\beta\in V$, 都有 $\alpha_L(\beta)=0$

$\Leftrightarrow$ 任意的 $\beta\in V$, 都有 $f(\alpha,\beta)=0$

$\Leftrightarrow \alpha \in rad_L V$.

所以 $KerL_f = rad_L V$. 同理可以证明：$KerR_f = rad_R V$.

(3) 利用维数公式以及 $Ex2$ 的结论

$$\left.\begin{array}{rcl} dimKerL_f + rankL_f & = & dimV \\ dimKerR_f + rankR_f & = & dimV \\ dimrad_L V + rank_m f & = & dimV \\ rad_L V = KerL_f & = & KerR_f \end{array}\right\} \Rightarrow rankL_f = rank_m f = rankR_f.$$

(4) 因为 $dimV = dimV^*$，所以

L_f 是同构 $\Leftrightarrow KerL_f = 0$

$\Leftrightarrow rad_L V = 0$

$\Leftrightarrow f$ 是非退化的. □

书后习题.4. $P_{169}, Ex4$

证明：要证明 f 是非退化，只要证明：$rad_L V = 0$.

任意的 $A \in rad_L V$, 则对任意的 $B \in M_n(F)$, 都有 $f(A, B) = tr(AB) = 0$. 记 $A = (a_{ij})_n$，则对任意的 $1 \leq i, j \leq n$，矩阵单位 E_{ij}，都有

$$tr(AE_{ij}) = a_{ji} = 0.$$

由 i, j 的任意性，所以 $A = 0$. 即 $rad_L V = 0$. □

书后习题.5. $P_{169}, Ex5$

证明: (1) 因为 f 是复数域 C 上的线性空间 V 上的对称双线性函数，所以存在 V 的一个基 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$，使得 f 在这个基下的度量矩阵是:

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

如果 $r < n$，结论显然成立.

如果 $r = n$，取 $\xi = \alpha_1 + i\alpha_2$，则

$f(\xi, \xi) = f(\alpha_1 + i\alpha_2, \alpha_1 + i\alpha_2)$

$= f(\alpha_1, \alpha_1) + f(\alpha_1, i\alpha_2) + f(i\alpha_2, \alpha_1) + f(i\alpha_2, i\alpha_2)$

$= f(\alpha_1, \alpha_1) - f(\alpha_2, \alpha_2)$

$= 0$.

(2) 因为 f 是非退化的，所以存在一个基 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$，使得 f 在这个基下的度量矩阵是:I.

取 $\xi=\frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_1+\frac{1}{\sqrt{2}}i\alpha_2$，$\eta=\frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_1-\frac{1}{\sqrt{2}}i\alpha_2$，则

$f(\xi,\eta)=f(\frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_1+\frac{1}{\sqrt{2}}i\alpha_2,\frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_1-\frac{1}{\sqrt{2}}i\alpha_2)$
$=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}f(\alpha_1,\alpha_1)-\frac{1}{\sqrt{2}}i\frac{1}{\sqrt{2}}f(\alpha_1,\alpha_2)+\frac{1}{\sqrt{2}}i\frac{1}{\sqrt{2}}f(\alpha_2,\alpha_1)-\frac{1}{\sqrt{2}}i\frac{1}{\sqrt{2}}if(\alpha_2,\alpha_2)$
$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$,

$f(\xi,\xi)=f(\frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_1+\frac{1}{\sqrt{2}}i\alpha_2,\frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_1+\frac{1}{\sqrt{2}}i\alpha_2)$
$=0$,

$f(\eta,\eta)=f(\frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_1-\frac{1}{\sqrt{2}}i\alpha_2,\frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_1-\frac{1}{\sqrt{2}}i\alpha_2)$
$=0$. □

书后习题.6. $P_{169},Ex6$

证明：假设 f 是 V 上的斜对称双线性函数，则任意的 $\alpha,\beta\in V$，都有
$f(\alpha,\beta)=-f(\beta,\alpha)$，从而任意的 $\alpha\in V$，都有
$f(\alpha,\alpha)=-f(\alpha,\alpha),2f(\alpha,\alpha)=0$,
又因为 $charF\neq 2$，所以 $f(\alpha,\alpha)=0$.

假设对任意的 $\alpha\in V$，都有 $f(\alpha,\alpha)=0$，从而对任意的 $\alpha,\beta\in V$，都有
$0=f(\alpha+\beta,\alpha+\beta)$
$=f(\alpha,\alpha)+f(\alpha,\beta)+f(\beta,\alpha)+f(\beta,\beta)$
$=f(\alpha,\beta)+f(\beta,\alpha)$,
所以 $f(\alpha,\beta)=-f(\beta,\alpha)$. f 是 V 上的斜对称双线性函数. □

书后习题.7. $P_{169},Ex7$

证明：直接验证.

首先，$0\in W^{\perp}$；

$\forall\alpha,\beta\in W^{\perp},k\in F$，则对任意的 $\gamma\in W$，都有
$f(\alpha,\gamma)=f(\beta,\gamma)=0$，所以
$f(\alpha+\beta,\gamma)=f(\alpha,\gamma)+f(\beta,\gamma)=0$，$f(k\alpha,\gamma)=kf(\alpha,\gamma)=0$,
所以 $\alpha+\beta,k\alpha\in W^{\perp}$.

从而 $W^{\perp}$ 是 V 的子空间. □

书后习题.8. $P_{169},Ex8$

证明：(*1*) 因为 W 是 V 的子空间，取 W 的一个基 $\alpha_1,...,\alpha_m$，将其扩充为 V 的一个基 $\alpha_1,...,\alpha_m,\alpha_{m+1},...,\alpha_n$. 假设在基 $\alpha_1,...,\alpha_m,\alpha_{m+1},...,\alpha_n$ 之下

f 的度量矩阵为 A. 那么对任意的 $\alpha, \beta \in V$,
$\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_m, \alpha_{m+1}, ..., \alpha_n)X, \beta = (\alpha_1, ..., \alpha_m, \alpha_{m+1}, ..., \alpha_n)Y$, 都有

$$f(\alpha, \beta) = X'AY.$$

且由于 $\alpha_1, ..., \alpha_m$ 是 W 的基, 所以

$\alpha \in W^\perp \Leftrightarrow f(\alpha, \alpha_i) = 0,\ i = 1, 2, ..., m$

$\Leftrightarrow X'A\varepsilon_i = 0,\ i = 1, 2, ..., m$

$\Leftrightarrow X'A \begin{pmatrix} I_m \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow (A \begin{pmatrix} I_m \\ 0 \end{pmatrix})'X = 0$

$\Leftrightarrow X$ 属于齐次线性方程组 $(A \begin{pmatrix} I_m \\ 0 \end{pmatrix})'X = 0$ 解空间.

所以 $W^\perp \cong$ 齐次线性方程组 $(A \begin{pmatrix} I_m \\ 0 \end{pmatrix})'X = 0$ 解空间.

又因为 f 是非退化的, 所以 A 是可逆矩阵, 从而 $rank((A \begin{pmatrix} I_m \\ 0 \end{pmatrix})') = m$, 从而齐次线性方程组 $(A \begin{pmatrix} I_m \\ 0 \end{pmatrix})'X = 0$ 解空间的维数是 $dimV - m$.

所以 $dimW + dimW^\perp = dimV$.

(2) 由定义, $(W^\perp)^\perp = \{\alpha \in V | f(\alpha, \beta) = 0, \forall \beta \in W^\perp\}$.

因为 $\forall \gamma \in W, \forall \alpha \in W^\perp$, 都有 $f(\gamma, \alpha) = 0$, 所以 $\gamma \in (W^\perp)^\perp$. $W \subseteq (W^\perp)^\perp$.

又因为 $dimW + dimW^\perp = dimV = dimW^\perp + dim(W^\perp)^\perp$, 所以 $dimW = dim(W^\perp)^\perp$.

所以 $W = (W^\perp)^\perp$. □

书后习题.9. $P_{175}, Ex1$

解: 容易验证: (α, β) 是 R^2 上的双线性函数;

取 R^2 中的一个基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, 则 (α, β) 这个基下的度量矩阵是

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix},$$

是一个对称正定矩阵, 所以 (α,β) 是 R^2 上的一个内积. □

书后习题.10. $P_{175}, Ex2$

解: 在 $M_n(R)$ 中, 取 $A=E_{ij},\ i\neq j$, 则 $A^2=E_{ij}E_{ij}=0$.

从而 $f(E_{ij},E_{ij})=tr(E_{ij}^2)=0$, 所以 f 不满足正定性. f 不是 $M_n(R)$ 上的内积. □

书后习题.11. $P_{175}, Ex5$

解: 取 $R[x]_3$ 中一个基 $1,x,x^2$. 对其实施施密特正交化.

$\beta_1=1$;

$\beta_2=x-\frac{(x,1)}{(1,1)}\cdot 1=x$;

$\beta_3=x^2-\frac{(x^2,1)}{(1,1)}\cdot 1-\frac{(x^2,x)}{(x,x)}\cdot x=x^2-\frac{1}{3}$;

将 β_1,β_2,β_3 单位化:

$\gamma_1=\frac{1}{|\beta_1|}\beta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}$;

$\gamma_2=\frac{1}{|\beta_2|}\beta_2=\frac{\sqrt{6}}{2}x$;

$\gamma_3=\frac{1}{|\beta_3|}\beta_3=\frac{3\sqrt{10}}{4}x^2-\frac{\sqrt{10}}{4}$.

$\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ 是 $R[x]_3$ 的一个标准正交基. □

书后习题.12. $P_{175}, Ex6$

解: 先将 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 正交化.

$\beta_1=\alpha_1$;

$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\alpha_2$;

$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2=\alpha_3-\frac{1}{1}\alpha_1-\frac{-2}{10}\alpha_2$

$=\alpha_3-\alpha_1+\frac{1}{5}\alpha_2$;

再将它们单位化:

$\gamma_1=\frac{1}{|\beta_1|}\beta_1=\alpha_1$;

$\gamma_2=\frac{1}{|\beta_2|}\beta_2=\frac{\sqrt{10}}{10}\alpha_2$;

$\gamma_3=\frac{1}{|\beta_3|}\beta_3=-\frac{\sqrt{15}}{3}\alpha_1+\frac{\sqrt{15}}{15}\alpha_2+\frac{\sqrt{15}}{3}\alpha_3$;

$\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ 是 V 的一组标准正交基. □

书后习题.13. $P_{176}, Ex7$

证明：因为 η_1,η_2,η_3 是 V 的一个标准正交基，且 η_1,η_2,η_3 到 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵是

$$A=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\end{pmatrix},$$

且

$$A'A=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\end{pmatrix}'\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\end{pmatrix}=I,$$

所以矩阵 A 是正交矩阵，从而 β_1,β_2,β_3 仍是 V 的一个标准正交基.

本题也可以直接计算 (β_i,β_j) 而得出结论. □

书后习题.14. $P_{176},Ex8$

解：(*1*) 由于 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4,\eta_5$ 是 V 的一个标准正交基，且已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 在标准正交基下的坐标，所以

$(\alpha_1,\alpha_1)=1\times1+2\times2+(-1)\times(-1)=6$;

$(\alpha_2,\alpha_2)=1\times1+(-1)\times(-1)+1\times1=3$;

$(\alpha_3,\alpha_3)=1\times1+(-1)\times(-1)+1\times1+1\times1=3$;

$(\alpha_1,\alpha_2)=(\alpha_2,\alpha_1)=1\times0+0\times1+2\times(-1)+0\times1+(-1)\times0=-2$;

$(\alpha_1,\alpha_3)=(\alpha_3,\alpha_1)=1\times0+0\times1+2\times(1)+0\times0+(-1)\times1=1$;

$(\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_3,\alpha_2)=0\times0+1\times(-1)+(-1)\times(1)+1\times0+0\times1=-2$;

将 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 实施施密特正交化：

$\beta_1=\alpha_1$;

$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\frac{1}{3}\alpha_1+\alpha_2$;

$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2=\frac{1}{14}\alpha_1+\frac{5}{7}\alpha_2+\alpha_3$.

β_1,β_2,β_3 是 V 的一个正交基. □

书后习题.15. $P_{176},Ex9$

解：$\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\varepsilon_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

是 V 的一个基，也是标准内积的欧氏空间 R^2 的标准正交基. 由 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 在 V 中进行正交化，得：

$\beta_1 = \varepsilon_1$;

$\beta_2 = \varepsilon_2 - \frac{(\varepsilon_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 = \varepsilon_2$;

再单位化，得

$\gamma_1 = \frac{1}{|\beta_1|}\beta_1 = \beta_1 = \varepsilon_1$;

$\gamma_2 = \frac{1}{|\beta_2|}\beta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\beta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_1$;

则 γ_1, γ_2 是 V 的一个标准正交基.

$\forall \alpha \in V$，设 $\alpha = x_1\gamma_1 + x_2\gamma_2$，定义

$$\sigma : V \to R^2, \quad \alpha \mapsto x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2,$$

则容易验证：σ 是 $V \to R^2$ 的欧氏空间的同构.

事实上，只要验证：内积保持即可. 而注意到标准正交基下，向量的内积等于它们在标准正交基下的坐标对应分量乘积的和，结论即显然. □

书后习题.16. $P_{179}, Ex1$

解：U 是 R^4 的一个 2 维子空间，所以 $U^{\perp}$ 是 2 维的.

又因为 $U =< \alpha_1, \alpha_2 >$，$\alpha_1, \alpha_2$ 是 U 的一个基. 任取 $\beta \in R^4$，则 $\beta \in U^{\perp} \Leftrightarrow (\alpha_1, \beta) = (\alpha_2, \beta) = 0$. 设 $\beta = (x_1, x_2, x_3, x_4)$，则

$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in U^{\perp} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + \quad x_2 + \quad 2x_3 + \quad x_4 = \quad 0 \\ x_1 + \qquad\qquad - \qquad 2x_4 = \quad 0 \end{cases}$

有基础解系 $\beta_1 = (0, -2, 1, 0), \beta_2 = (2, -3, 0, 1)$，它是 $U^{\perp}$ 的一个基，将其正交化，得

$\gamma_1 = (0, -2, 1, 0)$;

$\gamma_2 = \beta_2 - \frac{(\beta_2, \gamma_1)}{(\gamma_1, \gamma_1)}\gamma_1 = (2, -3, 0, 1) - \frac{6}{5}(0, -2, 1, 0) = (2, -\frac{3}{5}, -\frac{6}{5}, 1)$;

γ_1, γ_2 是 $U^{\perp}$ 的一个正交基. □

书后习题.17. $P_{179}, Ex2$

解：利用维数关系 $dim < \alpha > + dim < \alpha >^{\perp} = dimV$，则有：

$dim < \alpha >^{\perp} = n - 1$. □

书后习题.18. $P_{179}, Ex3$

证明：由定义 $(U^{\perp})^{\perp}=\{\alpha\in V|(\alpha,\beta)=0,\ \forall\beta\in U^{\perp}\}$，
而 $\forall\gamma\in U,\forall\beta\in U^{\perp}$，都有 $(\gamma,\beta)=0$，所以 $U\subseteq(U^{\perp})^{\perp}$.

再由维数关系：$dimU+dimU^{\perp}=dimV$；$dim(U^{\perp})^{\perp}+dimU^{\perp}=dimV$；所以 $dimU=dim(U^{\perp})^{\perp}$.

所以 $U=(U^{\perp})^{\perp}$. □

书后习题.19. $P_{179},Ex4$

证明：在欧氏空间 R^n 中，U 是 R^n 的一个子空间，则 $R^n=U\oplus U^{\perp}$.

取 U 的一个基 $\alpha_1,...,\alpha_m$，$U^{\perp}$ 的一个基 $\beta_1,...,\beta_s$，则 $m+s=n$ 且 $(\beta_i,\alpha_j)=0,\ i=1,...,s;\ j=1,...,m$.

以 $\beta_1',...,\beta_s'$ 为行向量构作矩阵 A，则 A 的秩为 s，从而齐次线性方程组 $AX=0$ 的基础解系中含 $n-s=m$ 个解. 又因为 $(\beta_i,\alpha_j)=0,\ i=1,...,s;\ j=1,...,m$，所以 $A\alpha_j=0,j=1,...,m$. 即 $\alpha_j=0,j=1,...,m$ 是齐次线性方程组 $AX=0$ 的 m 个线性无关的解. 所以 $\alpha_j=0,j=1,...,m$ 是 $AX=0$ 的基础解系.

从而 U 是 $AX=0$ 的解空间. □

书后习题.20. $P_{179},Ex5$

证明：取 $U^{\perp}$ 的一个标准正交基 $\xi_1,\xi_2,...,\xi_s$. 因为 $V=U\oplus U^{\perp}$，且 $(\eta_i,\xi_j)=0,\ i=1,2,...,m;\ j=1,2,...,s$，所以 $\eta_1,...,\eta_m,\xi_1,...,\xi_s$ 是 V 的一个标准正交基.

$\forall\alpha\in V$，则 $\alpha=\sum\limits_{i=1}^{m}(\alpha,\eta_i)\eta_i+\sum\limits_{j=1}^{s}(\alpha,\xi_j)\xi_j$,
$\sum\limits_{i=1}^{m}(\alpha,\eta_i)\eta_i\in U$; $\sum\limits_{j=1}^{s}(\alpha,\xi_j)\xi_j\in U^{\perp}$,
所以 $\sum\limits_{i=1}^{m}(\alpha,\eta_i)\eta_i$ 是 α 在 U 上的正交投影. □

书后习题.21. $P_{179},Ex6$

解：将 U 的基 γ_1,γ_2 进行标准正交化. 先正交化：

$\alpha_1=\gamma_1$；

$\alpha_2=\gamma_2-\frac{(\gamma_2,\alpha_1)}{(\alpha_1,\alpha_1)}\alpha_1=(\frac{7}{6},\frac{2}{6},-\frac{11}{6})$；

单位化得：

$\eta_1=\frac{1}{|\alpha_1|}\alpha_1=(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}})$；

$\eta_2 = \frac{1}{|\alpha_2|}\alpha_2 = (\frac{7}{\sqrt{174}}, \frac{2}{\sqrt{174}}, -\frac{11}{\sqrt{174}})$;

利用 $Ex5$ 的结论，α 在 U 上的正交投影是

$\alpha_1 = (\alpha, \eta_1)\eta_1 + (\alpha, \eta_2)\eta_2 = (-\frac{23}{29}, -\frac{48}{29}, -\frac{26}{29})$. □

书后习题.22. $P_{180}, Ex7$

证明：取 U 的一个标准正交基 $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_m$，把它扩充为 V 的一个标准正交基 $\eta_1, ..., \eta_m, \eta_{m+1}, ..., \eta_n$，则

$\alpha = \sum\limits_{i=1}^{m}(\alpha, \eta_i)\eta_i + \sum\limits_{j=m+1}^{n}(\alpha, \eta_j)\eta_j$;

$\beta = \sum\limits_{i=1}^{m}(\beta, \eta_i)\eta_i + \sum\limits_{j=m+1}^{n}(\beta, \eta_j)\eta_j$;

$\mathbf{P}\alpha = \sum\limits_{i=1}^{m}(\alpha, \eta_i)\eta_i$;

$\mathbf{P}\beta = \sum\limits_{i=1}^{m}(\beta, \eta_i)\eta_i$;

从而

$(\mathbf{P}\alpha, \beta) = (\sum\limits_{i=1}^{m}(\alpha, \eta_i)\eta_i, \sum\limits_{i=1}^{m}(\beta, \eta_i)\eta_i + \sum\limits_{j=m+1}^{n}(\beta, \eta_j)\eta_j)$

$= \sum\limits_{i=1}^{m}(\alpha, \eta_i)\sum\limits_{j=1}^{n}(\beta, \eta_j)(\eta_i, \eta_j)$

$= \sum\limits_{i=1}^{m}(\alpha, \eta_i)\sum\limits_{i=1}^{m}(\beta, \eta_i)$;

$(\alpha, \mathbf{P}\beta) = (\sum\limits_{i=1}^{m}(\alpha, \eta_i)\eta_i + \sum\limits_{j=m+1}^{n}(\alpha, \eta_j)\eta_j, \sum\limits_{i=1}^{m}(\beta, \eta_i)\eta_i)$

$= \sum\limits_{i=1}^{n}(\alpha, \eta_i)\sum\limits_{j=1}^{m}(\beta, \eta_j)(\eta_i, \eta_j)$

$= \sum\limits_{i=1}^{m}(\alpha, \eta_i)\sum\limits_{i=1}^{m}(\beta, \eta_i)$;

所以 $(\mathbf{P}\alpha, \beta) = (\alpha, \mathbf{P}\beta)$. □

书后习题.23. $P_{180}, Ex8$

证明: 由于 $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_m$ 是 V 的一个标准正交向量组, 记 $W =< \varepsilon_1, ..., \varepsilon_m >$, 则

$V = W \oplus W^{\perp}$，且

$\forall \alpha \in V$，存在唯一的 $\alpha_1 \in W$，$\alpha_2 \in W^{\perp}$，使得

$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$；$\alpha_1$ 是 α 在 W 上的正交投影.

利用勾股定理，$|\alpha|^2=|\alpha_1|^2+|\alpha_2|^2\geq|\alpha_1|^2$,
且等号成立 $\Leftrightarrow \alpha_2=0 \Leftrightarrow \alpha=\alpha_1$.

而 $\alpha_1=\sum\limits_{i=1}^{m}(\alpha,\varepsilon_i)\varepsilon_i$,
$|\alpha_1|^2=\sum\limits_{i=1}^{m}(\alpha,\varepsilon_i)^2$,

所以 $\sum\limits_{i=1}^{m}(\alpha,\varepsilon_i)^2\leq|\alpha|^2$，且等号成立 $\Leftrightarrow \alpha=\alpha_1=\sum\limits_{i=1}^{m}(\alpha,\varepsilon_i)\varepsilon_i$. □

书后习题.24. $P_{180}, Ex9$

解： $R[x]_4$ 是 4 维欧氏空间，$W=<1>$ 是 $R[x]_4$ 的一个 1 维子空间，而 $R[x]_4=W\oplus$，所以 $W^{\perp}$ 是 3 维的，且 $f(x)\in W^{\perp}\Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx=0$.

又 $f(x),g(x)\in R[x]_4$ 的次数不同，则它们一定线性无关，所以我们为了求 $W^{\perp}$ 的基，可以分别考虑 $f(x)=x+a,\ x^2+b,\ x^3+c$ 的情形.

又因 $\int_0^1(x+a)dx=\frac{1}{2}+a,\ \int_0^1(x^2+b)dx=\frac{1}{3}+b,\ \int_0^1(x^3+c)dx=\frac{1}{4}+c$,
所以 $x-\frac{1}{2},\ x^2-\frac{1}{3},\ x^3-\frac{1}{4}\in W^{\perp}$ 是 $W^{\perp}$ 的一个基. □

书后习题.25. $P_{180}, Ex10$

解: 显然 $dimW=n$, 且 E_{ii} 是 W 的一个标准正交基, 这是因为 $(E_{ii},E_{ii})=tr(E_{ii}E_{ii}')=1, i=1,2,...,n$,
$(E_{ii},E_{jj})=tr(E_{ii}E_{jj}')=0,\ i\neq j,\ i,j=1,2,...,n$.

又因为在 $i\neq j$ 时,

$$(E_{kk},E_{ij})=tr(E_{kk}E_{ij}')=tr(E_{kk}E_{ji})$$
$$=\begin{cases} tr(E_{ki}) & k=j \\ tr(0) & k\neq j \end{cases}=0;$$

所以 $i\neq j$ 时，$E_{ij}\in W^{\perp}$.

又因为 $(E_{ij},E_{ij})=tr(E_{ij}E_{ij}')=tr(E_{ii})=1$;

而在 $i\neq k$ 或 $j\neq l$ 时,

$$(E_{ij},E_{kl})=tr(E_{ij}E_{kl}')=tr(E_{ij}E_{lk})$$
$$=\begin{cases} tr(E_{ik}) & j=l \\ tr(0) & j\neq l \end{cases}=0,$$

所以 $i\neq j$ 时，$\{E_{ij}|i\neq j, i,j=1,2,...,n\}$ 是 $W^{\perp}$ 一组标准正交向量组，从而是 $W^{\perp}$ 一个标准正交基.

所以 $W^\perp=\{(a_{ij})|(a_{ij})\in M_n(R)\text{且}a_{ii}=0\}$. $\square$

书后习题.26. $P_{182},Ex1$

证明：$\mathbf{A}$ 是实内积空间 V 上的正交变换，所以任意的 $\alpha,\beta\in V$，都有 $(\mathbf{A}\alpha,\mathbf{A}\beta)=(\alpha,\beta)$.

假设 $\mathbf{A}$ 有特征值 λ，α 是属于特征值 λ 的特征向量，则 $\mathbf{A}\alpha=\lambda\alpha$，从而 $(\alpha,\alpha)=(\mathbf{A}\alpha,\mathbf{A}\alpha)=(\lambda\alpha,\lambda\alpha)=\lambda^2(\alpha,\alpha)$,
且 $(\alpha,\alpha)>0$，所以，$\lambda^2=1$，$\lambda=\pm1$. $\square$

书后习题.27. $P_{183},Ex2$

证明：取 $<\eta>^\perp$ 的一个标准正交基 $\eta_1,...,\eta_{n-1}$，则 $\eta,\eta_1,...,\eta_{n-1}$ 是 V 的一个标准正交基，且 $\forall\alpha,\beta\in V$，$\mathbf{P}\alpha=(\alpha,\eta)\eta$，$\mathbf{P}\beta=(\beta,\eta)\eta$，这时
$(\mathbf{A}\alpha,\mathbf{A}\beta)=(\alpha-2\mathbf{P}\alpha,\beta-2\mathbf{P}\beta)$
$=(\alpha,\beta)-2(\mathbf{p}\alpha,\beta)-2(\alpha,\mathbf{p}\beta)+4(\mathbf{p}\alpha,\mathbf{p}\beta)$
$=(\alpha,\beta)-2(\alpha,\eta)(\eta,\beta)-2(\beta,\eta)(\alpha,\eta)+4(\alpha,\eta)(\beta,\eta)(\eta,\eta)$
$=(\alpha,\beta)$.

所以 $\mathbf{A}$ 是正交变换.

计算 $\mathbf{A}$ 在标准正交基 $\eta,\eta_1,...,\eta_{n-1}$ 之下的矩阵：
$\mathbf{A}\eta=\eta-2\mathbf{P}\eta=-\eta$
$\mathbf{A}\eta_i=\eta_i-2\mathbf{P}\eta_i=\eta_i,\ i=1,2,...,n-1$.

所以 $\mathbf{A}$ 在标准正交基 $\eta,\eta_1,...,\eta_{n-1}$ 之下的矩阵为
$$A=\begin{pmatrix}-1&0\\0&I_{n-1}\end{pmatrix},$$
$|A|=-1$，所以 $\mathbf{A}$ 是第二类型的. $\square$

书后习题.28. $P_{183},Ex3$

证明：因为 1 是 $\mathbf{A}$ 的一个特征值，且属于特征值 1 的特征子空间 V_1 是 $n-1$ 维的，所以 V_1 有标准正交基 $\eta_1,...,\eta_{n-1}$，且 $(V_1)^\perp$ 是 1 维的，取 $(V_1)^\perp$ 中的一个单位向量 η，则 $\eta,\eta_1,...,\eta_{n-1}$ 是 V 的一个标准正交基. 记 $\mathbf{P}$ 是 V 在 $<\eta>$ 上的正交投影，则
$$\mathbf{P}\eta_i=0,\ i=1,2,...,n-1,\ \mathbf{P}\eta=\eta;$$
$$\mathbf{A}\eta_i=\eta_i=(\mathbf{I}-2\mathbf{P})\eta_i,\ i=1,2,...,n-1;$$

而 $\mathbf{A}$ 是 V 上的正交变换，所以
$(\mathbf{A}\eta, \eta_i) = (\mathbf{A}\eta, \mathbf{A}\eta_i) = (\eta, \eta_i) = 0,\ i = 1, 2, ..., n-1$,
从而 $\mathbf{A}\eta \in <V_1>^{\perp} = <\eta>$，所以 $\mathbf{A}\eta = k\eta$. 又因为
$(\eta, \eta) = (\mathbf{A}\eta, \mathbf{A}\eta) = (k\eta, k\eta) = k^2(\eta, \eta)$，所以
$k^2 = 1$，$k = \pm 1$，注意到 η 不是属于特征值 1 的特征向量，所以
$k = -1$，所以
$\mathbf{A}\eta = -\eta = (\mathbf{I} - 2\mathbf{P})\eta$.

所以 $\mathbf{A} = \mathbf{I} - 2\mathbf{P}$. $\mathbf{A}$ 是镜面反射变换. □

书后习题.29. $P_{183}, Ex4$

证明：假设 $\mathbf{A}$ 是 V 上的正交变换，所以对任意的 $\alpha, \beta \in V$，都有 $(\mathbf{A}\alpha, \mathbf{A}\beta) = (\alpha, \beta)$，从而 $\forall \alpha \in V$，有
$|\mathbf{A}\alpha|^2 = (\mathbf{A}\alpha, \mathbf{A}) = (\alpha, \alpha) = |\alpha|^2$,
所以 $|\mathbf{A}\alpha| = |\alpha|$;

假设 $\mathbf{A}$ 是 V 到自身的满的线性变换，且保持向量长度不变. 对任意的 $\alpha, \beta \in V$，则
$|\mathbf{A}\alpha| = |\alpha|$; $|\mathbf{A}\beta| = |\beta|$; $|\mathbf{A}(\alpha + \beta)| = |(\alpha + \beta)|$，即
$(\mathbf{A}\alpha, \mathbf{A}\alpha) = (\alpha, \alpha)$; $(\mathbf{A}\beta, \mathbf{A}\beta) = (\beta, \beta)$;
$(\mathbf{A}(\alpha + \beta), \mathbf{A}(\alpha + \beta)) = (\alpha + \beta, \alpha + \beta)$,
又由于
$(\mathbf{A}(\alpha + \beta), \mathbf{A}(\alpha + \beta)) = (\mathbf{A}\alpha + \mathbf{A}\beta, \mathbf{A}\alpha + \mathbf{A}\beta)$
$= (\mathbf{A}\alpha, \mathbf{A}\alpha) + (\mathbf{A}\alpha, \mathbf{A}\beta) + (\mathbf{A}\beta, \mathbf{A}\alpha) + (\mathbf{A}\beta, \mathbf{A}\beta)$
$= (\alpha, \alpha) + 2(\mathbf{A}\alpha, \mathbf{A}\beta) + (\beta, \beta)$;
$(\alpha + \beta, \alpha + \beta) = (\alpha, \alpha) + 2(\alpha, \beta) + (\beta, \beta)$;
所以 $(\mathbf{A}\alpha, \mathbf{A}\beta) = (\alpha, \beta)$，$\mathbf{A}$ 是 V 上的正交变换. □

书后习题.30. $P_{183}, Ex5$

证明：任取二维欧氏空间的一个标准正交基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$，则正交变换 $\mathbf{A}$ 在 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 下的矩阵是正交矩阵 A，设为 $A = (a_{ij})$. 记
$\alpha = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$; $\beta = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} \in R^2$; 则
α, β 是 R^2 中的标准正交向量组. 也就是, 在平面直角坐标系中, 点 $P(a_{11}, a_{21})$, $Q(a_{12}, a_{22})$ 在单位圆上，且 OP, OQ 的夹角为 $\frac{\pi}{2}$. 记

$\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$ 与 X 轴正向的夹角分别为 θ, φ，则
$(a_{11}, a_{21}) = (\cos\theta, \sin\theta)$; $(a_{12}, a_{22}) = (\cos\varphi, \sin\varphi)$，且 $\theta = \varphi + \frac{\pi}{2}$ 或 $\varphi = \theta + \frac{\pi}{2}$. 从而
$(a_{12}, a_{22}) = (\cos(\theta + \frac{\pi}{2}), \sin(\theta + \frac{\pi}{2})) = (-\sin\theta, \cos\theta)$ 或
$(a_{12}, a_{22}) = (\cos(\theta - \frac{\pi}{2}), \sin(\theta - \frac{\pi}{2})) = (\sin\theta, -\cos\theta)$.
所以

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ 或 } \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

□

书后习题.31. $P_{183}, Ex6$

证明：假设有镜面反射变换 $\mathbf{A} = (\mathbf{I} - 2\mathbf{P})\alpha = \alpha - 2\mathbf{P}\alpha$，使得 $\mathbf{A}\alpha = \beta$，即 $\mathbf{P}\alpha = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$，则正交投影 $\mathbf{P}$ 与 $\alpha - \beta$ 相关.

取 $\eta = \frac{1}{|\alpha - \beta|}(\alpha - \beta) = \frac{1}{\sqrt{2 - 2(\alpha, \beta)}}(\alpha - \beta)$，并记 $\mathbf{P}$ 是 V 在 $< \eta >$ 上的正交投影，则
$\mathbf{P}\alpha = (\alpha, \eta)\eta = (\alpha, \frac{1}{\sqrt{2-2(\alpha,\beta)}}(\alpha - \beta))\frac{1}{\sqrt{2-2(\alpha,\beta)}}(\alpha - \beta)$
$= \frac{1}{2-2(\alpha,\beta)}(\alpha, \alpha - \beta)(\alpha - \beta) = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$.

取 $\mathbf{A} = \mathbf{I} - 2\mathbf{P}$ 是关于超平面 $< \eta >^{\perp}$ 的镜面反射变换，则
$\mathbf{A}\alpha = \mathbf{I}\alpha - 2\mathbf{P}\alpha = \alpha - (\alpha - \beta) = \beta$. □

书后习题.32. $P_{183}, Ex7$

证明：设 A 是一个正交矩阵，在复数域上有特征值 λ_0，α 是属于特征值 λ_0 特征向量，则 $A\alpha = \lambda_0\alpha$，所以 $(\overline{A\alpha})' = (\overline{\lambda_0\alpha})'$，即 $\alpha^* A' = \overline{\lambda_0}\alpha^*$，所以
$\alpha^*\alpha = \alpha^* A' A\alpha = \overline{\lambda_0}\lambda_0\alpha^*\alpha$，$|\lambda_0| = 1$.

所以 λ_0 是 1 或 -1 或 $\cos\theta \pm i\sin\theta, \theta \in R, 0 < \theta < 2\pi$. □

书后习题.33. $P_{183}, Ex8$

证明：假设存在 V 中的一个标准正交基 $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n$，使得 $\mathbf{A}$ 在这个基下的矩阵是对角矩阵 $D = diag\{d_1, ..., d_n\}$，则 $\mathbf{A}\varepsilon_i = d_i\varepsilon_i$, $i = 1, 2, ..., n$.
$(\mathbf{A}\varepsilon_i, \varepsilon_j) = d_i\delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, ..., n$.

任意的 $\alpha, \beta \in V$，可设
$\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + ... + x_n\varepsilon_n$;
$\beta = y_1\varepsilon_1 + y_2\varepsilon_2 + ... + y_n\varepsilon_n$，则

$(\mathbf{A}\alpha, \beta) = (x_1\mathbf{A}\varepsilon_1 + x_2\mathbf{A}\varepsilon_2 + ... + x_n\mathbf{A}\varepsilon_n, y_1\varepsilon_1 + y_2\varepsilon_2 + ... + y_n\varepsilon_n)$
$= x_1d_1y_1 + x_2d_2y_2 + ... + x_nd_ny_n.$
$(\alpha, \mathbf{A}\beta) = (x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + ... + x_n\varepsilon_n, y_1\mathbf{A}\varepsilon_1 + y_2\mathbf{A}\varepsilon_2 + ... + y_n\mathbf{A}\varepsilon_n)$
$= x_1d_1y_1 + x_2d_2y_2 + ... + x_nd_ny_n.$

所以 $\mathbf{A}$ 是 V 上的一个对称变换.

假设 $\mathbf{A}$ 是 n 维欧氏空间 V 上的一个对称变换. 则存在标准正交基 $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n$, 使得 $\mathbf{A}$ 在这个基下的矩阵是对称矩阵, 所以 $\mathbf{A}$ 存在特征值.

下面对 $\mathbf{A}$ 的维数进行归纳.

$n = 1$ 时, 结论显然成立.

假设对 $n-1$ 维欧氏空间上的对称变换 $\mathbf{A}$, 存在一个标准正交基, 使得它的矩阵为对角阵.

对 n 为欧氏空间 V, 假设 $\mathbf{A}$ 是 V 上的一个对称变换, 则 $\mathbf{A}$ 有特征值. 取 $\mathbf{A}$ 的一个特征值 λ_1, 并设 η_1 是对称变换 $\mathbf{A}$ 的属于特征值 λ_1 的长度为 1 的特征向量. 则
$V =< \eta_1 > \oplus < \eta_1 >^{\perp}$. 且 $< \eta_1 >^{\perp}$ 是 $n-1$ 维的, 如果 $< \eta_1 >^{\perp}$ 是 $\mathbf{A}$ 的不变子空间, 则 $\mathbf{A}$ 仍是 $< \eta_1 >^{\perp}$ 上的对称变换, 而 $< \eta_1 >^{\perp}$ 是 $n-1$ 维的, 由归纳假定, 存在 $< \eta_1 >^{\perp}$ 的标准正交基 $\eta_2, ..., \eta_n$, 使得 $\mathbf{A}$ 在这个基下的矩阵是对角矩阵. 从而取 $V =< \eta_1 > \oplus < \eta_1 >^{\perp}$ 的标准正交基 $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n$, $\mathbf{A}$ 在这个基下的矩阵是对角矩阵.

所以下只要证明: $< \eta_1 >^{\perp}$ 是 $\mathbf{A}$ 的不变子空间.

事实上, $\beta \in < \eta_1 >^{\perp} \Leftrightarrow (\eta_1, \beta) = 0$, 而
$\forall \alpha \in < \eta_1 >^{\perp}$, 有
$0 = (\lambda_1\eta_1, \alpha) = (\mathbf{A}\eta_1, \alpha) = (\eta_1, \mathbf{A}\alpha)$, 所以
$\mathbf{A}\alpha \in < \eta_1 >^{\perp}$. 即 $< \eta_1 >^{\perp}$ 是 $\mathbf{A}$ 的不变子空间. □

书后习题.34. $P_{187}, Ex2$

解: 先正交化. 取
$\beta_1 = \alpha_1$;
$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \end{pmatrix}$;

再单位化. 取

$\gamma_1 = \frac{1}{|\beta_1|}\beta_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$;

$\gamma_2 = \frac{1}{|\beta_2|}\beta_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i \end{pmatrix}$.

γ_1, γ_2 是与 α_1, α_2 等价的标准正交基. $\square$

书后习题.35. $P_{187}, Ex4$

解: 设 1 级酉矩阵 $A = (a)$, 则 $A^*A = (\overline{a}a) = (1)$, $\overline{a}a = 1$. 所以 $a = \cos\theta + i\sin\theta$, $\theta \in R$ 是任意实数. $\square$

书后习题.36. $P_{187}, Ex5$

证明: 设矩阵 A 是酉矩阵, 则 $A^*A = I$, 所以 $|A^*||A| = 1$. 而
$|A^*| = |\overline{A}| = \overline{|A|}$, 所以 $|\det A|^2 = 1$. $\square$

书后习题.37. $P_{187}, Ex6$

证明: 设 $\mathbf{A}$ 是酉空间 V 上的一个酉变换, λ 是 $\mathbf{A}$ 的一个特征值, α 是属于特征值 λ 的一个特征向量. 即
$\mathbf{A}\alpha = \lambda\alpha$.

由于 $\mathbf{A}$ 是酉变换, 所以
$(\alpha, \alpha) = (\mathbf{A}\alpha, \mathbf{A}\alpha) = (\lambda\alpha, \lambda\alpha) = \lambda\overline{\lambda}(\alpha, \alpha)$,
所以 $\lambda\overline{\lambda} = 1$, $|\lambda| = 1$. $\square$

书后习题.38. $P_{187}, Ex8$

证明: 假设 $\mathbf{A}$ 是酉空间 V 上的一个 Hermite 变换. 任取 V 的一个标准正交基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n$, $\mathbf{A}$ 在这个基下的矩阵是 $A = (a_{ij})$. 则
a_{ij} 是 $\mathbf{A}\varepsilon_j$ 被基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n$ 表出的第 i 个分量. 即
$a_{ij} = (\mathbf{A}\varepsilon_j, \varepsilon_i), \forall 1 \le i, j \le n$.
a_{ji} 是 $\mathbf{A}\varepsilon_i$ 被基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n$ 表出的第 j 个分量. 即
$a_{ji} = (\mathbf{A}\varepsilon_i, \varepsilon_j), \forall 1 \le i, j \le n$.

又因为 $\mathbf{A}$ 是 Hermite 变换, 所以
$a_{ij} = (\mathbf{A}\varepsilon_j, \varepsilon_i) = (\varepsilon_j, \mathbf{A}\varepsilon_i) = \overline{(\mathbf{A}\varepsilon_i, \varepsilon_j)} = \overline{a_{ji}}$, $\forall 1 \le i, j \le n$.

所以 A 是 Hermite 矩阵.

假设酉空间 V 上的线性变换 $\mathbf{A}$ 在标准正交基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n$ 之下的矩阵是 Hermite 矩阵 $A = (a_{ij})$. 则

$a_{ij} = (\mathbf{A}\varepsilon_j, \varepsilon_i), \forall 1 \le i, j \le n$,

$a_{ji} = (\mathbf{A}\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \overline{a_{ij}}, \forall 1 \le i, j \le n$.

对任意的 $\alpha, \beta \in V$，设

$\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + ... + x_n\varepsilon_n$；$\beta = y_1\varepsilon_1 + y_2\varepsilon_2 + ... + y_n\varepsilon_n$. 则

$$(\mathbf{A}\alpha, \beta) = (x_1\mathbf{A}\varepsilon_1 + x_2\mathbf{A}\varepsilon_2 + ... + x_n\mathbf{A}\varepsilon_n, y_1\varepsilon_1 + y_2\varepsilon_2 + ... + y_n\varepsilon_n)$$

$$= (x_1, x_2, ..., x_n)\begin{pmatrix} (\mathbf{A}\varepsilon_1, \varepsilon_1) & (\mathbf{A}\varepsilon_1, \varepsilon_2) & \cdots & (\mathbf{A}\varepsilon_1, \varepsilon_n) \\ (\mathbf{A}\varepsilon_2, \varepsilon_1) & (\mathbf{A}\varepsilon_2, \varepsilon_2) & \cdots & (\mathbf{A}\varepsilon_2, \varepsilon_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\mathbf{A}\varepsilon_n, \varepsilon_1) & (\mathbf{A}\varepsilon_n, \varepsilon_2) & \cdots & (\mathbf{A}\varepsilon_n, \varepsilon_n) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{y_1} \\ \overline{y_2} \\ \vdots \\ \overline{y_n} \end{pmatrix}$$

$$= (x_1, x_2, ..., x_n)A\begin{pmatrix} \overline{y_1} \\ \overline{y_2} \\ \vdots \\ \overline{y_n} \end{pmatrix}.$$

$$(\alpha, \mathbf{A}\beta) = (x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + ... + x_n\varepsilon_n, y_1\mathbf{A}\varepsilon_1 + y_2\mathbf{A}\varepsilon_2 + ... + y_n\mathbf{A}\varepsilon_n)$$

$$= (x_1, x_2, ..., x_n)\begin{pmatrix} (\varepsilon_1, \mathbf{A}\varepsilon_1) & (\varepsilon_1, \mathbf{A}\varepsilon_2) & \cdots & (\varepsilon_1, \mathbf{A}\varepsilon_n) \\ (\varepsilon_2, \mathbf{A}\varepsilon_1) & (\varepsilon_2, \mathbf{A}\varepsilon_2) & \cdots & (\varepsilon_2, \mathbf{A}\varepsilon_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\varepsilon_n, \mathbf{A}\varepsilon_1) & (\varepsilon_n, \mathbf{A}\varepsilon_2) & \cdots & (\varepsilon_n, \mathbf{A}\varepsilon_n) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{y_1} \\ \overline{y_2} \\ \vdots \\ \overline{y_n} \end{pmatrix}$$

$$= (x_1, x_2, ..., x_n)\begin{pmatrix} \overline{(\mathbf{A}\varepsilon_1, \varepsilon_1)} & \overline{(\mathbf{A}\varepsilon_2, \varepsilon_1)} & \cdots & \overline{(\mathbf{A}\varepsilon_n, \varepsilon_1)} \\ \overline{(\mathbf{A}\varepsilon_1, \varepsilon_2)} & \overline{(\mathbf{A}\varepsilon_2, \varepsilon_2)} & \cdots & \overline{(\mathbf{A}\varepsilon_n, \varepsilon_2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \overline{(\mathbf{A}\varepsilon_1, \varepsilon_n)} & \overline{(\mathbf{A}\varepsilon_2, \varepsilon_n)} & \cdots & \overline{(\mathbf{A}\varepsilon_n, \varepsilon_n)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{y_1} \\ \overline{y_2} \\ \vdots \\ \overline{y_n} \end{pmatrix}$$

$$= (x_1, x_2, ..., x_n)\overline{A'}\begin{pmatrix} \overline{y_1} \\ \overline{y_2} \\ \vdots \\ \overline{y_n} \end{pmatrix}$$

$$= (x_1, x_2, ..., x_n)A^*\begin{pmatrix} \overline{y_1} \\ \overline{y_2} \\ \vdots \\ \overline{y_n} \end{pmatrix}.$$

又因为 A 是 Hermite 矩阵，所以 $A = A^*$. 从而 $(\mathbf{A}\alpha, \beta) = (\alpha, \mathbf{A}\beta)$.
所以 $\mathbf{A}$ 是酉空间 V 上的 Hermite 变换. □

书后习题.39. $P_{188}, Ex9$

证明：设 $\mathbf{A}$ 是酉空间 V 上的一个 Hermite 变换，λ 是 $\mathbf{A}$ 的一个特征值，η 是 $\mathbf{A}$ 的属于特征值 λ 的一个特征向量. 即 $\mathbf{A}\eta = \lambda\eta$. 所以
$\lambda(\eta,\eta) = (\lambda\eta,\eta) = (\mathbf{A}\eta,\eta) = (\eta,\mathbf{A}\eta) = (\eta,\lambda\eta) = \overline{\lambda}(\eta,\eta)$，从而
$\lambda = \overline{\lambda}$，$\lambda$ 是实数. □

书后习题.40. $P_{191}, Ex1$

证明：(*1*) f 显然是 $\mathbf{R}^2$ 上的一个双线性函数，且在基
$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 下的度量矩阵
$$A = \begin{pmatrix} f(\varepsilon_1,\varepsilon_1) & f(\varepsilon_1,\varepsilon_2) \\ f(\varepsilon_2,\varepsilon_1) & f(\varepsilon_2,\varepsilon_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
是一个非退化矩阵，即 f 是 $\mathbf{R}^2$ 上的非退化双线性函数，所以 $(\mathbf{R}^2, f)$ 是一个正则的正交空间.

(*2,3*) f 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 之下的度量矩阵
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$
所以 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 是 $(\mathbf{R}^2, f)$ 的一个标准正交基.

(*4*) 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 之下，线性变换 $\mathbf{T}$ 的矩阵为 T，所以
$$\begin{cases} \mathbf{T}\varepsilon_1 = \sqrt{2}\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ \mathbf{T}\varepsilon_2 = \varepsilon_1 + \sqrt{2}\varepsilon_2 \end{cases}$$
任意的 $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^2$，设
$\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2$，$\beta = y_1\varepsilon_1 + y_2\varepsilon_2$，则
$$\mathbf{T}\alpha = (\varepsilon_1,\varepsilon_2)\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}x_1 + x_2 \\ x_1 + \sqrt{2}x_2 \end{pmatrix},$$
$$\mathbf{T}\beta = (\varepsilon_1,\varepsilon_2)\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}y_1 + y_2 \\ y_1 + \sqrt{2}y_2 \end{pmatrix},$$
所以
$f(\alpha,\beta) = x_1y_1 - x_2y_2$;
$f(\mathbf{T}\alpha,\mathbf{T}\beta) = (\sqrt{2}x_1 + x_2)(\sqrt{2}y_1 + y_2) - (x_1 + \sqrt{2}x_2)(y_1 + \sqrt{2}y_2)$

$= x_1y_1 - x_2y_2$.

所以 $\mathbf{T}$ 保持正交空间 $(\mathbf{R}^2, f)$ 的内积不变，$\mathbf{T}$ 是正交变换.

(5) 因为 $\mathbf{T}$ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 之下的矩阵为
$T = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$,
所以 $\mathbf{T}$ 有两个特征值 $\lambda_1 = \sqrt{2}+1,\ \lambda_2 = \sqrt{2}-1$. 且容易求出：
属于特征值 $\lambda_1 = \sqrt{2}+1$ 的所有特征向量为 $\alpha = k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ k \neq 0,\ k \in \mathbf{R}$,
属于特征值 $\lambda_2 = \sqrt{2}-1$ 的所有特征向量为 $\beta = k\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ k \neq 0,\ k \in \mathbf{R}$,
而显然 $f(\alpha, \alpha) = 0,\ f(\beta, \beta) = 0$.

所以 $\mathbf{T}$ 的特征向量都是迷向向量. □

书后习题.41. $P_{192}, Ex2$

证明：设 $\beta = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + ... + x_n\alpha_n$，注意到 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ 是正交基，所以 $f(\beta, \alpha_i) = x_i f(\alpha_i, \alpha_i),\ i = 1, 2, ..., n$，由于 (V, f) 是正则的，所以可以取 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ 为非迷向向量组成的正交基，从而有
$f(\alpha_i, \alpha_i) \neq 0,\ i = 1, 2, ..., n$. 所以 $x_i = \frac{f(\beta, \alpha_i)}{f(\alpha_i, \alpha_i)}$，即公式成立. □

书后习题.42. $P_{192}, Ex3$

证明：因为 (V, f) 是有限维正则辛空间，所以 f 在辛基 $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_r, \varepsilon_{-1}, ..., \varepsilon_{-r}$ 下的度量矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ -I_r & 0 \end{pmatrix},$$

对任意的 $\alpha, \beta \in V$.
设 $\alpha = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_r, \varepsilon_{-1}, ..., \varepsilon_{-r})X,\ \beta = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_r, \varepsilon_{-1}, ..., \varepsilon_{-r})Y$. 则
$\mathbf{B}\alpha = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_r, \varepsilon_{-1}, ..., \varepsilon_{-r})BX$，$\mathbf{B}\beta = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_r, \varepsilon_{-1}, ..., \varepsilon_{-r})BY$，
$f(\alpha, \beta) = X'AY$
$f(\mathbf{B}\alpha, \mathbf{B}\beta) = (BX)'A(BY) = X'(B'AB)Y$.
所以线性变换 $\mathbf{B}$ 是辛变换 $\Leftrightarrow f(\mathbf{B}\alpha, \mathbf{B}\beta) = f(\alpha, \beta)$
$\Leftrightarrow X'(B'AB)Y = X'AY \Leftrightarrow B'AB = A$. □