高等代数习题解答

(北京大学丘维声教授编著的教材)

宿州学院数学系代数教研室

第 2 章：行列式

书后习题.1. $P_{22}, Ex4$

解： n 级排列 $n(n-1)\cdots321$ 中的任何两个数都构成一个逆序，所以 $\tau(n(n-1)\cdots321) = C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$.

要是得 $\frac{n(n-1)}{2}$ 使偶数，必须 n 或 $n-1$ 有一个是 4 的倍数，所以
当 $n = 4k$ 或 $4k+1$ 时，$\frac{n(n-1)}{2}$ 是偶数，$n(n-1)\cdots321$ 是偶排列.
当 $n = 4k+2$ 或 $4k+3$ 时，$\frac{n(n-1)}{2}$ 是奇数，$n(n-1)\cdots321$ 是奇排列. □

书后习题.2. $P_{22}, Ex5$

解： 在 n 元排列 $j_1j_2...j_{n-1}j_n$ (1) 和 n 元排列 $j_nj_{n-1}...j_2j_1$ (2)，任意两个数 (j_k,j_l)，若在 (1) 组成一个逆序，则在 (2) 中组成一个自然顺序；若在 (1) 组成一个自然序，则在 (2) 中组成一个逆序. 所以，
$\tau(j_1j_2...j_{n-1}j_n) + \tau(j_nj_{n-1}...j_2j_1) = C_n^2$
$\tau(j_1j_2...j_{n-1}j_n) + \tau(j_nj_{n-1}...j_2j_1) = C_n^2 - \tau(j_1j_2...j_{n-1}j_n) = \frac{n(n-1)}{2} - r.$ □

书后习题.3. $P_{26}, Ex1, (2), (3), (4)$

解： (2)

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \cdots & a_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ a_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

由行列式的定义，n 阶行列式表示 $n!$ 项的代数和. 但此行列式的非零项的取

法只有：
第 1 行取第 n 列的元素 a_1；第 2 行取第 $n-1$ 列的元素 a_2；……；第 $n-1$ 行取第 2 列的元素 a_{n-1}；第 n 行取第 1 列的元素 a_n.
所以它的非零项只有一项：$a_1a_2...a_{n-1}a_n$. 这恰好是行指标成自然顺序，列指标的顺序为排列：$n(n-1)...21$，列指标的逆序数为：$\tau(n(n-1)...21)=\frac{n(n-1)}{2}$
所以

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \cdots & a_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ a_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_1a_2...a_{n-1}a_n$$

(3)

$$\begin{vmatrix} 0 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

道理同 (2)，此行列式的非零项只有一项 $b_1b_2...b_{n-1}b_n$. 这恰好是行指标成自然顺序，列指标的顺序为排列：$23...n1$，列指标的逆序数为：
$\tau(23...n1)=n-1$，所以

$$\begin{vmatrix} 0 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{(n-1)}b_1b_2...b_{n-1}b_n$$

(4)

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & \cdots & a_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a_n \end{vmatrix}$$

道理同 (2)，此行列式的非零项只有一项 $a_1a_2...a_{n-1}a_n$. 这恰好是行指标成自然顺序，列指标的顺序为排列：$(n-1)(n-2)...1n$，列指标的逆序数为：$\tau((n-1)(n-2)...1n)=\frac{(n-1)(n-2)}{2}$，所以

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & \cdots & a_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a_n \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}a_1a_2...a_{n-1}a_n$$

□

书后习题.4. $P_{26}, Ex3$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

此行列式一般项可以表示为：$a_ib_jc_kd_le_m$. 其中 a,b,c,d,e 分别代表元素所在的行，$ijklm$ 是一个 5 元排列，表示 $a_ib_jc_kd_le_m$ 取自的列.
注意到行列式的元素 c_k,d_l,e_m 中，当 k,l,m 中有一个不小于 3 时，就有 $c_kd_le_m=0$. 而 $ijklm$ 是一个 5 元排列，而小于 3 的数只有两个，所以 k,l,m 中至少有一个不小于 3，所以，行列式的一般项 $a_ib_jc_kd_le_m=0$，所以

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

□

书后习题.5. $P_{27}, Ex6$

解：由行列式的定义，$|A|$ 有 $n!$ 项，$n\geq 2$ 时，$n!$ 是偶数. 又因为它的元素只是 1 或 (-1)，所以每一项连同它的符号，只有 1 或 (-1)，而 $|A|$ 的值恰好是这些 1 和 (-1) 的代数和. 总数为偶数的 1 和 (-1) 的代数和一定是偶数. 所以 $|A|$ 必为偶数.

注.6. 上题可以改为：设 $n \geq 2$，证明：如果 n 级矩阵 A 的元素为 m 或 $(-m)$，m 是整数，则 $|A|$ 必为偶数.

$\square$

书后习题.7. $P_{35}, Ex2, (1)(2)$

解:

(1)$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a \end{vmatrix}$

注意各行元素之和相等，各列均加到第一列

$$= \begin{vmatrix} a+n-1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a+n-1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a+n-1 & 1 & 1 & \cdots & a \end{vmatrix}$$

将第一行乘(-1)加到以下各列，成三角形行列式

$$= \begin{vmatrix} a+n-1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-1 \end{vmatrix} = (a+n-1)(a-1)^{n-1}$$

(2)$\begin{vmatrix} a_1-b & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2-b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n-b \end{vmatrix}$

注意各行元素之和相等，各列均加到第一列

$$= \begin{vmatrix} -b+\sum\limits_{i=1}^{n} a_i & a_2 & \cdots & a_n \\ -b+\sum\limits_{i=1}^{n} a_i & a_2-b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -b+\sum\limits_{i=1}^{n} a_i & a_2 & \cdots & a_n-b \end{vmatrix}$$

将第一行乘(-1)加到以下各列，成三角形行列式

$$= \begin{vmatrix} -b+\sum\limits_{i=1}^{n} a_i & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & -b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -b \end{vmatrix} = \left(-b+\sum_{i=1}^{n} a_i\right)(-b)^{n-1}. \qquad \square$$

书后习题.8. $P_{35}, Ex4, (2)(3)$

解:

(2) 对于 $n=1$ 或 $n=2$ 的情形，我们可以直接计算.$n \geq 3$ 时，

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}$$

按第一列写成两个行列式的和

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ b_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_1 & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}$$

前一个行列式的第一列乘 (-1) 加到以后各列; 后一个行列式的第一列乘 $-\frac{b_k}{b_1}$ 加到第 $k,(k\geq 2)$ 列

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ a_2 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & b_2 & \cdots & b_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ b_1 & a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_1 & a_n & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

两行对应成比例，行列式为零

$$= 0 \qquad \square$$

在 $n\geq 3$ 时，也可以直接将第一列乘 (-1) 加到以后各列

$$= \begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_2-b_1 & \cdots & b_n-b_1 \\ a_2+b_1 & b_2-b_1 & \cdots & b_n-b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n+b_1 & b_2-b_1 & \cdots & b_n-b_1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(2)\begin{vmatrix} x_1-a_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-a_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3-a_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n-a_n \end{vmatrix}$$

按第一列写成两个行列式的和

$$=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-a_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3-a_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n-a_n \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -a_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ 0 & x_2-a_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ 0 & x_2 & x_3-a_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n-a_n \end{vmatrix}$$

第一个行列式的第一行乘 (-1) 加到下面各行，即使三角形行列式；第二个行列式再按第二列写成两个行列式的和

$$=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ 0 & -a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_n \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} -a_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ 0 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ 0 & x_2 & x_3-a_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n-a_n \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -a_1 & 0 & x_3 & \cdots & x_n \\ 0 & -a_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ 0 & 0 & x_3-a_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & x_3 & \cdots & x_n-a_n \end{vmatrix}$$

第一个行列式是三角形行列式，可以计算. 第二个行列式的第二行乘 (-1) 加到以下各行，即为三角形行列式；第三个行列式再按第三列写成两个行列式的和

$$=(-1)^{n-1}x_1\prod_{k=2}^{n}a_k+\begin{vmatrix} -a_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ 0 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ 0 & 0 & -a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_n \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} -a_1 & 0 & x_3 & \cdots & x_n \\ 0 & -a_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ 0 & 0 & x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & x_3 & \cdots & x_n-a_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -a_1 & 0 & 0 & \cdots & x_n \\ 0 & -a_2 & 0 & \cdots & x_n \\ 0 & 0 & -a_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_n-a_n \end{vmatrix}$$

三角形行列式已经可以计算. 而第二个行列式只要将第三行乘 (-1) 加到以下各行就化为三角形行列式. 最后一个行列式再按第四列写成两个行列式的和, 并进行同样的操作

$$= (-1)^{n-1}x_1\prod_{k=2}^{n}a_k + (-1)^{n-1}x_2\prod_{\substack{k=1\\k\neq 2}}^{n}a_k + (-1)^{n-1}x_3\prod_{\substack{k=1\\k\neq 3}}^{n}a_k$$

$$+\begin{vmatrix} -a_1 & 0 & 0 & \cdots & x_n \\ 0 & -a_2 & 0 & \cdots & x_n \\ 0 & 0 & -a_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_n-a_n \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n-1}\sum_{i=1}^{n}\Big(x_i\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}a_k\Big). \qquad \square$$

书后习题.9. $P_{43}, Ex1, (1)(3)$

解:

$$(1)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 2 & -5 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & -2 & 6 \\ -3 & 2 & 7 & 1 \end{vmatrix}$$

将第一行分别乘 $(-2),(-4,)(3)$ 加到第二、第三、第四行

$$= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 9 & -2 & -10 \\ 0 & -4 & 7 & 13 \end{vmatrix} \text{按第一列展开} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -11 \\ 9 & -2 & -10 \\ -4 & 7 & 13 \end{vmatrix}$$

$$= 26 + 40 - 693 + 88 - 70 - 117 = -726$$

$$(2)\begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 2 \\ -2 & \lambda-5 & 4 \\ 2 & 4 & \lambda-5 \end{vmatrix}$$

第二行加到第三行；第三列乘 (-1) 加到第二列. 再按第三行展开

$$=\begin{vmatrix} \lambda-2 & -4 & 2 \\ -2 & \lambda-9 & 4 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\big((\lambda-9)(\lambda-2)-8\big)$$

$$= (\lambda-1)^2(\lambda-10) \qquad \square$$

书后习题.10. $P_{43}, Ex2$

解:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 1-n \end{vmatrix}$$

各列都加到第一列.

$$= \begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} a_i & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 1-n \end{vmatrix}$$

按第一列展开.

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n-1 & 1-n \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1)!\sum_{i=1}^{n} a_i. \qquad \square$$

书后习题.11. $P_{43}, Ex4$

证明: $n=2$ 时，命题显然成立.

假设结论对 $n-1$ 阶行列式成立. 现在对 n 阶行列式，我们按第一行展开，可以写成两个行列式的和

$$= x\begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_1 \\ -1 & x & \cdots & 0 & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & x & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & x+a_{n-1} \end{vmatrix} + (-1)^{n+1}a_0 \begin{vmatrix} -1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}_{n-1}$$

对第一个行列式，利用归纳假定；第二个行列式直接展开

$= x(x^{n-1} + a_{n-1}x^{n-2} + ... + a_2x + a_1) + a_0.$ □

书后习题.12. $P_{43}, Ex5$

解：记原 n 阶行列式为 D_n，我们将其按第一行展开

$$= 2\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}_{n-1} + \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}_{n-1}$$

第一个行列式是原来的行列式形式，为 D_{n-1}；第二个行列式再按第一列展开，也是原来的形式，为 D_{n-2}. 我们得到关于行列式阶数的递推公式

$$D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}$$

从而，我们可以得到关系式：

$D_n - D_{n-1} = D_{n-1} - D_{n-2} = D_{n-2} - D_{n-3} = ...$

$= D_3 - D_2 = D_2 - D_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 2 = 1$

即，D_n 组成了一个首项为 2，“公差”为 1 的等差数列，从而

$D_n = n + 1.$ □

书后习题.13. $P_{44}, Ex6$

解：记原 n 阶行列式为 D_n，将行列式按第一行展开

$$= 2a\begin{vmatrix} 2a & a^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2a & a^2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2a & a^2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2a \end{vmatrix}_{n-1} - a^2\begin{vmatrix} 1 & a^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2a & a^2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2a & a^2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2a \end{vmatrix}_{n-1}$$

第一个行列式是原来的行列式形式，为 D_{n-1}；第二个行列式再按第一列展

开，也是原来的形式，为 D_{n-2}. 我们得到关于行列式阶数的递推公式

$$D_n = 2aD_{n-1} - a^2 D_{n-2}$$
$$D_n - aD_{n-1} = a(D_{n-1} - aD_{n-2})$$

而 $D_2 - aD_1 = a^2$，所以 $D_k - aD_{k-1} = a^k$. 我们有一组等式：

$$\left.\begin{array}{lcl} D_n - aD_{n-1} & = & a^n \\ D_{n-1} - aD_{n-2} & = & a^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \\ D_3 - aD_2 & = & a^3 \\ D_2 - aD_1 & = & a^2 \end{array}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} D_n - aD_{n-1} & = & a^n \\ a(D_{n-1} - aD_{n-2}) & = & a^n \\ \vdots & & \vdots \\ a^{n-3}(D_3 - aD_2) & = & a^n \\ a^{n-2}(D_2 - aD_1) & = & a^n \end{array}\right.$$

把这 $n-1$ 个式子相加，即可以得到：

$$D_n - a^{n-1}D_1 = (n-1)a^n,\ D_n = (n-1)a^n + a^{n-1}D_1 = (n+1)a^n$$

□

书后习题.14. $P_{44}, Ex8$

解：将第二行乘 (-1) 加到其余各行，行列式即化为特殊

$$= \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n-2 \end{vmatrix}$$

直接展开计算，即得：

$= (-2)(n-2)!$ □

书后习题.15. $P_{44}, Ex9$

解：记原 n 阶行列式为 D_n，将行列式按最后一列写成两个行列式的和

$$= \begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y & y & y \\ z & x & y & \cdots & y & y & y \\ z & z & x & \cdots & y & y & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ z & z & z & \cdots & z & x & y \\ z & z & z & \cdots & z & z & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y & y & 0 \\ z & x & y & \cdots & y & y & 0 \\ z & z & x & \cdots & y & y & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ z & z & z & \cdots & z & x & 0 \\ z & z & z & \cdots & z & z & x-y \end{vmatrix}$$

将第一个行列式从第 $n-1$ 行开始，依次将上一行乘 (-1) 加到下一行，第

二个行列式按最后一列展开

$$=\begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y & y & y \\ z-x & x-y & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z-x & x-y & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & z-x & x-y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & z-x & 0 \end{vmatrix} + (x-y)\begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y & y \\ z & x & y & \cdots & y & y \\ z & z & x & \cdots & y & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ z & z & z & \cdots & z & x \\ z & z & z & \cdots & z & z \end{vmatrix}_{n-1}$$

$= (-1)^{n+1}y(z-x)^{n-1} + (x-y)D_{n-1}$

即：$D_n = (x-y)D_{n-1} + (-1)^{n+1}y(z-x)^{n-1}$

注意到行列式中，字母 y,z 的对称，计算 D_n 的转置行列式，我们可以得到：

$D_n = (x-z)D_{n-1} + (-1)^{n+1}z(y-x)^{n-1}$

从而：

$$\left.\begin{array}{lcl} D_n & = & (x-y)D_{n-1} + (-1)^{n+1}y(z-x)^{n-1} \\ D_n & = & (x-z)D_{n-1} + (-1)^{n+1}z(y-x)^{n-1} \end{array}\right\} \longrightarrow D_n = \frac{y(x-z)^n - z(x-y)^n}{y-z} \qquad \square$$

书后习题.16. $P_{44}, Ex10$

解：注意到各行元素之和相等，将各列均加到第一列

$$=\begin{vmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ \frac{n(n+1)}{2} & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ \frac{n(n+1)}{2} & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{n(n+1)}{2} & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \frac{n(n+1)}{2} & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$$

注意到相邻两行之间的元素相差为 1(除个别)，依次将上一行乘 (-1) 加到下一行 (从第 $n-1$ 行开始). 再按第一列展开

$$=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}_{n-1}$$

注意到各行元素之和为 -1，把各列加到第一列

$$= \frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} -1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ -1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}_{n-1}$$

将第 1 列元素加到其余各列

$$= \frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & -n \\ -1 & 0 & \cdots & -n & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -n & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}(-1)^{n-1+1}(-1)\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & -n \\ 0 & \cdots & -n & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -n & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}_{n-2}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}(-1)^{n-1+1}(-1)(-1)^{\frac{(n-2)(n-3)}{2}}(-n)^{n-2}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{n+1}{2}n^{n-1}$$ □

书后习题.17. $P_{45}, Ex11$

解：$$A(t) = \begin{vmatrix} a_{11}+t & a_{12}+t & \cdots & a_{1n-1}+t & a_{1n}+t \\ a_{21}+t & a_{22}+t & \cdots & a_{2n-1}+t & a_{2n}+t \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}+t & a_{n2}+t & \cdots & a_{nn-1}+t & a_{nn}+t \end{vmatrix}$$

将 $A(t)$ 按第一列写成两个行列式的和

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+t & \cdots & a_{1n-1}+t & a_{1n}+t \\ a_{21} & a_{22}+t & \cdots & a_{2n-1}+t & a_{2n}+t \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}+t & \cdots & a_{nn-1}+t & a_{nn}+t \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} t & a_{12}+t & \cdots & a_{1n-1}+t & a_{1n}+t \\ t & a_{22}+t & \cdots & a_{2n-1}+t & a_{2n}+t \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ t & a_{n2}+t & \cdots & a_{nn-1}+t & a_{nn}+t \end{vmatrix}$$

将第一个行列式按第二列写两个行列式的和, 第二个行列式的第 1 列乘 -1 加到其余各列

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1}+t & a_{1n}+t \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1}+t & a_{2n}+t \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1}+t & a_{nn}+t \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11} & t & \cdots & a_{1n-1}+t & a_{1n}+t \\ a_{21} & t & \cdots & a_{2n-1}+t & a_{2n}+t \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & t & \cdots & a_{nn-1}+t & a_{nn}+t \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} t & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ t & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ t & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

最后一个行列式按第一列展开，第二个行列式的第 2 列乘 -1 加到以后各列，并按第二列展开

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+t & \cdots & a_{1n}+t \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+t & \cdots & a_{2n}+t \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3}+t & \cdots & a_{nn}+t \end{vmatrix} + t\sum_{k=1}^{n} A_{k2} + t\sum_{k=1}^{n} A_{k1}$$

对第一个行列式，进行同样的操作，即得：

$$A(t) = |A| + t\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} A_{kl}$$

$\square$

书后习题.18. $P_{45}, Ex12, (1), (2)$

(1)**解**：套用 $Ex11$ 中的结论.

$$|A| = \begin{vmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & x_1y_3 & \cdots & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & x_2y_3 & \cdots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & x_ny_3 & \cdots & x_ny_n \end{vmatrix},\ t = 1$$

$$A_{kl} = (-1)^{k+l} \begin{vmatrix} x_1y_1 & \cdots & x_1y_{l-1} & x_1y_{l+1} & \cdots & x_1y_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{k-1}y_1 & \cdots & x_{k-1}y_{l-1} & x_{k-1}y_{l+1} & \cdots & x_{k-1}y_n \\ x_{k+1}y_1 & \cdots & x_{k+1}y_{l-1} & x_{k+1}y_{l+1} & \cdots & x_{k+1}y_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ x_ny_1 & \cdots & x_ny_{l-1} & x_ny_{l+1} & \cdots & x_ny_n \end{vmatrix}$$

在 $n \geq 3$ 时，$|A| = 0$，$A_{kl} = 0$. 所以，原行列式为零.$n < 3$ 时，可以直接计

算.

(2)**解**： 套用 $Ex11$ 中的结论.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} = n!,\ t = t$$

$$A_{kk} = (-1)^{k+k} \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & k-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & k+1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} = \frac{n!}{k}, \text{ 而 } k \neq l \text{ 时, } A_{kl} = 0.$$

所以，原式 $= n! + n!t \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ □

书后习题.19. $P_{50}, Ex3$

解：方程组的系数矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} \lambda-2 & -3 & -2 \\ -1 & \lambda-8 & -2 \\ 2 & 14 & \lambda+3 \end{pmatrix}$$

其行列式为：

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -3 & -2 \\ -1 & \lambda-8 & -2 \\ 2 & 14 & \lambda+3 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-3)^2$$

而由齐次线性方程组由非零解的充要条件知：方程组有非零解 $\Leftrightarrow$ 系数行列式 $|A| = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$ 或 $\lambda = 3$ □

书后习题.20. $P_{51}, Ex4, 5, 6, 7$

解：方程组的系数矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 2b & 1 \end{pmatrix}$$

其行列式为：

$$|A|=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 2b & 1 \end{vmatrix}=-b(a-1)$$

由方程有唯一解的充要条件知：

方程组有唯一解 $\Leftrightarrow$ 系数行列式 $|A|\neq 0 \Leftrightarrow a\neq 1$ 且 $b\neq 0$.

方程组无解或有无穷多解 $\Leftrightarrow$ 系数行列式 $|A|=0 \Leftrightarrow a=1$ 或 $b=0$.

在 $Ex6$ 中，在 $a=1$ 时，方程组的增广矩阵为：

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & b & 1 & 1 \\ 1 & 2b & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

将其进行初等行变换，化为阶梯阵：

$$\overline{A}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & b-1 & 0 & -1 \\ 0 & b & 0 & 1 \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2b \end{pmatrix}$$

所以，在 $a=1,b=\frac{1}{2}$ 时，方程组有无穷多解；在 $a=1,b\neq\frac{1}{2}$ 时，方程组无解.

在 $b=0$ 时，方程组的增广矩阵是：

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

将其进行初等行变换，化为阶梯阵：

$$\overline{A}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1-a & 2-a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

所以，在 $b=0$ 时，方程组无解. □

书后习题.21. $P_{56}, Ex4$

解：在关于 $1,2,...,n$ 这 n 个数的范德蒙行列式中

$A\begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n-1 \\ 2 & 3 & ... & n \end{pmatrix}$ 是关于 $2,3,...,n$ 这 $n-1$ 个数的范德蒙行列式. 它应该是 $2,3,...,n$ 这 $n-1$ 个数的所有可能的差 (大于零) 的乘积. 而 $2,3,...,n$

这 $n-1$ 个数的所有可能的 (大于零) 差有 $n-2$ 个 1, $n-3$ 个 2, ..., 1 个 $n-2$. 所以,

$$A\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n-1\\ 2 & 3 & \dots & n\end{pmatrix}=\prod_{k=1}^{n-2}(k!)$$

同理, $A\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n-1\\ 2 & 3 & \dots & n\end{pmatrix}$ 是关于 $1,3,...,n$ 这 $n-1$ 个数的范德蒙行列式. 它应该是 $1,3,...,n$ 这 $n-1$ 个数的所有可能的差 (大于零) 的乘积. 而 $1,3,...,n$ 这 $n-1$ 个数的所有可能的 (大于零) 差有 $n-3$ 个 1, $n-3$ 个 2, ..., 1 个 $n-2$, 1 个 $n-2$. 所以,

$$A\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n-1\\ 2 & 3 & \dots & n\end{pmatrix}=(n-1)\prod_{k=1}^{n-2}(k!)$$ □