

高温作业专用服装设计问题研究

摘要

本文针对高温作业防护服的设计问题进行讨论与研究。

环境温度与人体健康息息相关，高温劳动环境会严重威胁作业人员的生命健康安全，热防护服作为避免灼伤的重要手段，在高温防护中的作用受到日益广泛的关注。在高温作业防护服的研究中，如何确定皮肤外侧的温度变化情况、根据不同的环境温度和在工作时间确定服装层厚度，成为设计讨论的焦点。

针对问题一，首先为方便问题研究，将各层介质简化为无限大平板，基于温度的空间分布连续性在假人皮肤外侧和内部之间设立一个虚拟均匀介质层。其次，将温度变化过程分为初始状态、中间非平稳传热状态和最终平稳传热状态三个部分进行讨论，先推导单层壁的热通量公式，进而讨论多层壁系统最终的平稳传热状态，接着分析中间非平稳传热过程，建立非平稳传热状态的偏微分方程组，采用有限差分法这一数值解法求解方程组，并从微元角度用能量守恒物理模型将介质分界面处边界条件简化。利用 MATLAB 求解出虚拟介质层相关参数并递推得出温度分布。

针对问题二，考虑到在设计高温作业专用服装时，要尽可能降低研发成本，故为确定 II 层的最优厚度，将实验中的环境温度、IV 层的厚度、工作时长、假人皮肤外侧温度符合题目要求的时长作为约束条件，以尽可能降低研发成本为目标，建立单目标优化模型。运用 MATLAB 进行定步长搜索和二分法求解，得到 II 层的最优厚度为 19.531mm。

针对问题三，在问题二考虑成本最少的基础上思考更全面的因素，得出一般性的优化解。在保持较好隔热效果的前提下，防护服总厚度越小越好，否则会对产品设计难度和实用性造成很大影响。通过比较 II 层和 IV 层的不同介质特性，对两者进行偏好性考虑，赋予 II 层的厚度合理权重，建立以赋权后的 II 层和 IV 层厚度和最小为目标的优化模型。在模型求解过程中，为避免程序运行时间过长，在保留真实最优解的条件下，采用等效介质层法对算法进行优化：将前四层介质等效为一层介质后，对两层介质导热模型求解得到符合约束的范围区间，在所得范围区间内定步长搜索求解五层介质导热模型下的最优解。最后运用 MATLAB 编程求解，并结合目标函数对 II 层和 IV 层的最优厚度进行讨论。

本文对高温作业专用服装的设计问题进行深入的讨论，严格按照科学性和严谨性的原则建立模型，解决了题目中提出的几个问题。同时，合理地评价模型的优缺点，并对模型进行改进和完善，以实际生活为出发点对模型适用性进行分析，建立的模型具有较好的推广应用价值。

【关键词】 虚拟均匀介质层 非平稳传热 有限差分法 单目标优化模型 等效介质层

1 问题重述

1.1 引言

在消防、金属冶炼等行业中，工作人员常处于高温环境，高温环境会为作业人员的身体健康带来严重的伤害。近年来，热防护服在高温防护中的作用备受关注，服装能实现人体与环境的有效隔热，这使得热防护服的设计研究成为热点问题。高温环境的复杂性为防护服的功能设计带来了严峻挑战，确定皮肤外侧的温度变化情况、根据不同的环境温度和工作时间确定服装层厚度，有助于为高温作业者设计提供性能优良的热防护服。

1.2 问题的提出

为了全面细致地研究高温作业防护服设计问题，本文依次提出了以下三个问题：

(1) 在环境温度为 75°C 、专用服装 II 层厚度为 6 mm 、IV 层厚度为 5 mm 、工作时间为 90 分钟的实验情形下，根据附件 1 中专用服装材料的参数值和附件 2 中假人皮肤外侧的温度，建立数学模型并计算温度分布，生成温度分布的 Excel 文件 problem1.xlsx。

(2) 确定 II 层的最优厚度，以保证在环境温度为 65°C 、IV 层的厚度为 5.5 mm 的条件下工作 60 分钟时，假人皮肤外侧温度超过 44°C 且不超过 47°C 的时间不超过 5 分钟。

(3) 确定专用服装 II 层和 IV 层的最优厚度，以保证在环境温度为 80°C 的条件下工作 30 分钟时，假人皮肤外侧温度超过 44°C 且不超过 47°C 的时间不超过 5 分钟。

2 模型假设

- (1) 从宏观角度考虑物质的传热，物体传热的微观机制暂不考虑。
- (2) 不同介质层之间紧密接触，接触热阻为零，分界面处温度空间分布连续。
- (3) 介质内部温度变化连续。
- (4) 不考虑材料的热胀冷缩，传热过程中所有材料的几何形状保持不变。
- (5) 不考虑空气层中水蒸气的影响。
- (6) 所有介质层均匀且各向同性且传热速率无限大，不考虑织物孔率的变化。
- (7) 基于绝对温度较小和空气层厚度较薄，忽略对流传热和热辐射。
- (8) 热传导率为恒定常数。

3 符号说明

ρ	密度
c	比热容
λ	热传导率
d	均匀介质的厚度
T	温度
T_L	外界温度
T_R	体内温度
t	时间
q	导热通量

4 模型的分析与求解

4.1 问题一

4.1.1 问题分析

一般情况下，传热情况与物体的环境条件、几何形状、物性条件和时间变化密切相关。本题中四个介质层的物性条件已经给出，为了简化模型、方便问题研究，我们对系统的环境条件、几何形状和时间变化做以下简化处理：

(1) 几何形状：由于防护服装的几何形状不规则，一般情况下整体形状接近圆柱，但由于防护服厚度较身体半径可忽略不计，取某一微小面元研究时，面元处曲率极小，且人体高度远远大于所取面元宽度，故把模型中各层介质简化为无限大平板。由于热量传递沿温度的梯度方向，故模型中热量传递方向垂直于介质平面，此问题可看作一维传热问题。

(2) 环境条件：将最外层结构（外界实验室）和最内层结构（假人体内）作为恒温热源处理。另外，假人体内温度保持恒定，而皮肤表面温度可受传热影响发生改变，由于温度的空间分布连续性，假人皮肤表面和内部温度不能发生突变，故在假人皮肤表面和假人内部之间设立一个虚拟均匀介质层（皮肤层），该均匀介质层的虚拟物性条件（仅仅是为了模拟假人皮肤表面和内部之间的温度连续性）可在模型求解过程中由题目给出的皮肤外侧温度实际测定结果（附件 2）求得。

(3) 时间变化：此问题的温度变化是一个连续的过程，我们把它分为三个部分即初始状态、中间非平稳传热状态和最终平稳传热状态。为了求得新置介质层的各项参数，我们先研究系统最终的平稳传热状态，接着建立非平稳传热状态微分方程组，并对模型进行求解。

综合以上分析，建立服装-空气-皮肤热传导模型：

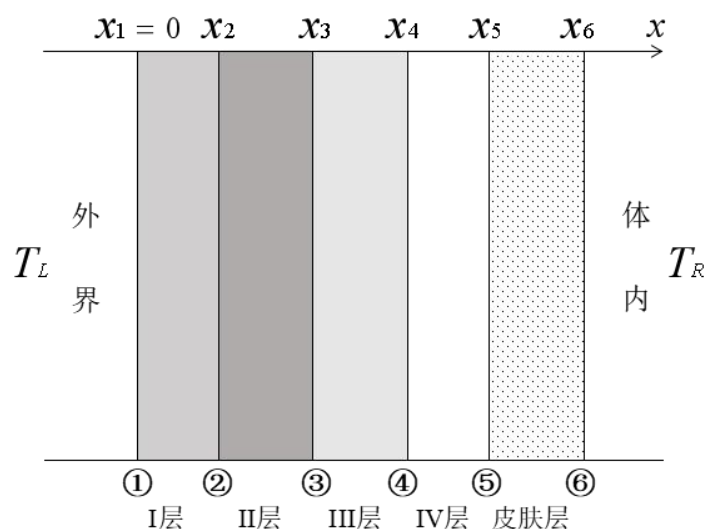


图 1 服装-空气-皮肤热传导模型

4.1.2 模型建立

(1) 多层壁稳定导热模型

先研究系统最终的平稳传热状态，从而确定虚拟介质层相关参数的表达式。为了考

虑问题中的多层壁情况，先推导单层壁的热通量公式。

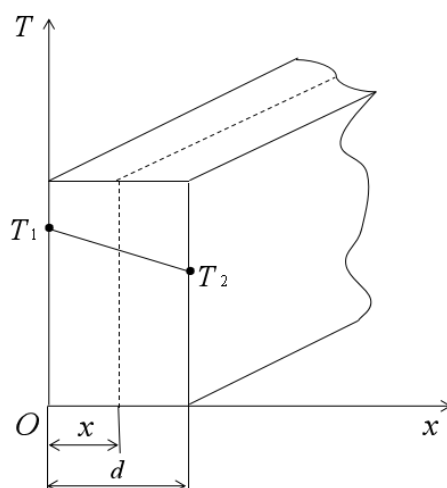


图 2 单层壁稳定导热

如图 2 所示，设有一厚度为 d 的单层均匀介质（视为无限大平面），热传导率 λ 为常数，介质左右两侧表面维持恒定的温度 T_1 和 T_2 ($T_1 > T_2$)，通过此平壁的导热通量为 q 。

该均匀介质的一维热传导微分方程^[1]为

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

两端边界条件为

$$T(0) = T_1 \quad T(d) = T_2$$

可得壁内温度分布为

$$T(x) = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{d}x$$

由傅里叶定律

$$q = -\lambda \frac{dT}{dx}$$

代入得单层平壁的热通量公式

$$q = \lambda \frac{T_1 - T_2}{d}$$

下面讨论该模型最终的平稳传热状态：

稳定导热时，通过各层壁的热通量相等，根据单层平壁的热通量公式，有

$$q = \frac{\lambda_1}{d_1}(T_1 - T_2) = \frac{\lambda_2}{d_2}(T_2 - T_3) = \frac{\lambda_3}{d_3}(T_3 - T_4) = \frac{\lambda_4}{d_4}(T_4 - T_5) = \frac{\lambda_5}{d_5}(T_5 - T_6)$$

变换得

$$q = \frac{T_1 - T_5}{\frac{d_1}{\lambda_1} + \frac{d_2}{\lambda_2} + \frac{d_3}{\lambda_3} + \frac{d_4}{\lambda_4}} = \frac{T_1 - T_6}{\frac{d_1}{\lambda_1} + \frac{d_2}{\lambda_2} + \frac{d_3}{\lambda_3} + \frac{d_4}{\lambda_4} + \frac{d_5}{\lambda_5}}$$

代入 $T_1=75^\circ\text{C}$ ， $T_5=37^\circ\text{C}$ 得

$$q = 95.4256 \text{ J}$$

反代 q 值解得虚拟介质层相关参数的表达式为

$$\frac{d_5}{\lambda_5} = 0.1161 \text{ W} / (\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$$

(2) 多层壁非稳定导热模型

讨论系统最终的平稳传热状态后，对中间非平稳传热过程进行分析，建立问题一的偏微分方程组。

(i) 初始状态温度分布的确定

根据题目所给附件 2 假人皮肤外界温度测定数据特点，假定各均匀介质层初始温度均为 37°C 。该假定的合理性将在模型求解后进行说明。

(ii) 偏微分方程组的建立

由于介质物性条件各不相同，非平稳传热过程中系统的温度分布函数应为分段函数，设为

$$T(x, t) = \begin{cases} T_1(x, t) \\ T_2(x, t) \\ T_3(x, t) \\ T_4(x, t) \\ T_5(x, t) \end{cases}$$

每类均匀介质中的导热微分方程（能量守恒定律）为

$$\rho_i c_i \frac{\partial T_i}{\partial t} = \lambda_i \frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2} \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5)$$

由温度空间分布的连续性及傅里叶定律得不同界面的边界条件
界面①：

$$T_1(x_1, t) = T_2$$

界面②：

$$T_1(x_2, t) = T_2(x_2, t)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x}(x_2, t) = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}(x_2, t)$$

界面③：

$$T_2(x_3, t) = T_3(x_3, t)$$

$$\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}(x_3, t) = \lambda_3 \frac{\partial T_3}{\partial x}(x_3, t)$$

界面④：

$$T_3(x_4, t) = T_4(x_4, t)$$

$$\lambda_3 \frac{\partial T_3}{\partial x}(x_4, t) = \lambda_4 \frac{\partial T_4}{\partial x}(x_4, t)$$

界面⑤:

$$T_4(x_5, t) = T_5(x_5, t)$$

$$\lambda_4 \frac{\partial T_4}{\partial x}(x_5, t) = \lambda_5 \frac{\partial T_5}{\partial x}(x_5, t)$$

界面⑥:

$$T_5(x_6, t) = T_R$$

此时，问题一的多层壁非稳定导热数学模型建立完成，下面对其进行求解。

4.1.3 模型求解

由于偏微分方程组解析解形式复杂且求解过程繁琐，我们采用数值解法求出近似解。在情形较为复杂的热学问题中，有限差分法^[2]（基本原理见附录一）常被使用。这里我们就采用这种数值解法求解该模型。

（1）变量区域离散化

设空间变量 x 的取值范围为 $0 \leq x \leq d$ ，时间变量 t 的取值范围为 $0 \leq t \leq \tau$ 。

将空间和时间进行分割

$$\Delta x = \frac{d}{m}, \Delta t = \frac{\tau}{n}$$

则空间变量被离散化为 $x_i = i\Delta x$ ($i = 0, 1, \dots, m$)，共 $m+1$ 个节点，

时间变量被离散化为 $t_j = j\Delta t$ ($j = 0, 1, \dots, n$)，共 $n+1$ 个节点。

以 Δx 为空间步长， Δt 为时间步长，绘制二维时空网格，如图 3 所示。

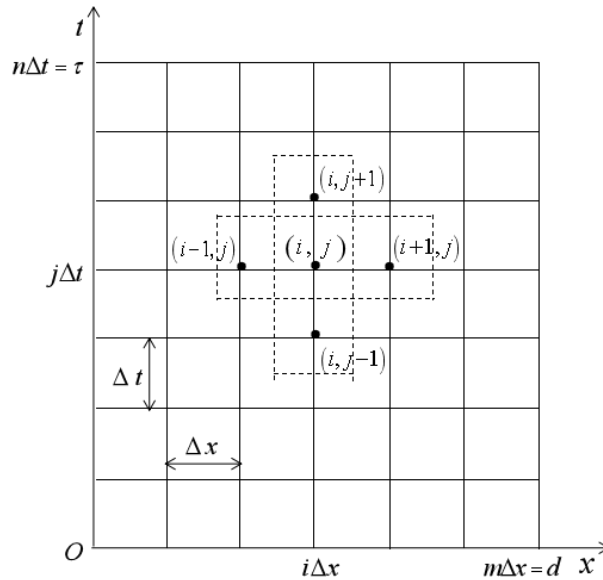


图 3 二维时空网格

（2）介质内部导热微分方程离散化

将温度对空间的二阶导数用中心差商近似，温度对时间的导数用向前差分近似，即

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{T_{i+1}^j - 2T_i^j + T_{i-1}^j}{\Delta x^2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} \approx \frac{T_i^{j+1} - T_i^j}{\Delta t}$$

代入导热微分方程

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

可得

$$\frac{T_i^{j+1} - T_i^j}{\Delta t} = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{T_{i+1}^j - 2T_i^j + T_{i-1}^j}{\Delta x^2}$$

转化为

$$T_i^{j+1} = \left(1 - 2 \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) T_i^j + \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (T_{i+1}^j + T_{i-1}^j)$$

得到该模型有限差分法的第一递推公式。

(3) 介质分界面边界条件离散化

由于介质分界面与介质内部导热方程不同，故界面②、③、④处的边界条件离散化需另外处理。建立界面处微元的能量守恒物理模型，从而将介质分界面边界条件离散化。

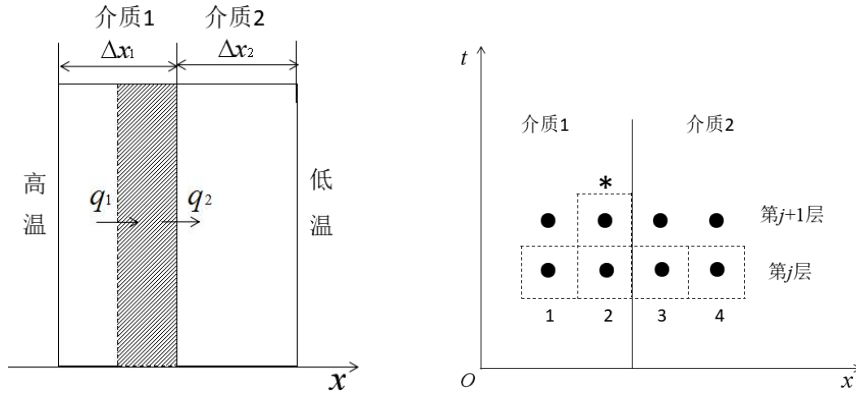


图4 能量守恒物理模型

设 T_1 、 T_2 、 T_3 、 T_4 、 T^* 为二维时空网格上的节点 1、2、3、4 和所求节点的温度。

对阴影微元，由能量守恒定律得

$$\lambda_1 \frac{T_1 - T_2}{\Delta x_1} - \lambda_2 \frac{T_3 - T_4}{\Delta x_2} = \rho_1 c_1 \cdot \frac{1}{2} \Delta x_1 \cdot \frac{T^* - T_2}{\Delta t}$$

转化为

$$T^* = T_2 + \frac{2 \left(\lambda_1 \frac{T_1 - T_2}{\Delta x_1} - \lambda_2 \frac{T_3 - T_4}{\Delta x_2} \right) \cdot \Delta t}{\rho_1 c_1 \Delta x_1}$$

得到该模型有限差分法的第二递推公式。

(4) 算法描述

运用 MATLAB 求解温度分布及虚拟介质层参数表达式，建立如下算法，代码详见附录二。

【Step 1】时空分割

设定时间步长，并按照稳定性要求^[3]计算并设立第 k 个介质层的空间分割份数 $m_k, k=1,2,3,4,5$;

【Step 2】初始化

将初始温度分布赋值到变量列 $T_{i,0}^k, i=1,2,3,\dots,m_k; k=1,2,3,4,5$ ，其中 $T_{1,0}^1 = 75^\circ\text{C}$

设定可接受的相对误差为 ε ，虚拟介质层的厚度 d 及比热容和密度的乘积 $c\rho$;

【Step 3】迭代法

根据有限差分法得到的第一递推公式，迭代计算变量列

$$T_{i,j}^k, i=1,2,3,\dots,m-1; j=0,1,2,\dots;k=1,2,3,4,5$$

对于分界面上的变量列，根据第二递推公式，迭代计算得到

$$T_{i,j}^k, i=m_k; j=0,1,2,\dots;k=1,2,3,4,5$$

最终得到系统温度分布;

【Step 4】确定最优理想层参数

计算假人皮肤外侧到达稳定温度的时长 $t_{\text{计算}}$ ，与题目附件 2 所给时长 $t_{\text{测}}$ 对比:

当相对时长差 $\left| \frac{t - t_{\text{真实}}}{t_{\text{真实}}} \right| < \varepsilon$ ，则增大 d 的值，并将初始温度分布重新赋值到变量列

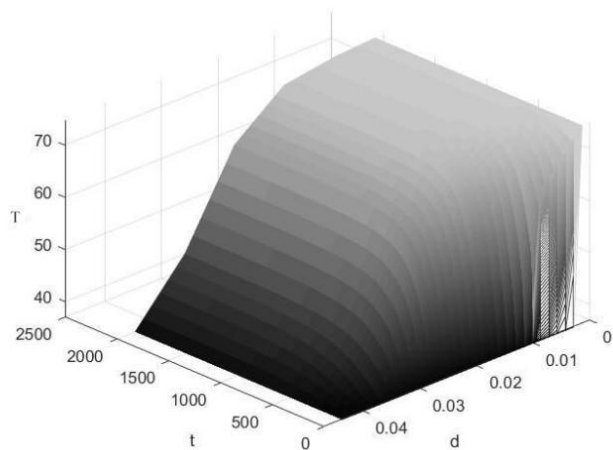
$T_{i,0}^k, i=1,2,3,\dots,m_k; k=1,2,3,4,5$ ，返回 Step3; 否则，进入 Step5;

【Step 5】计算参量值及绘制时间分布

根据已求得的 λ 与 d 的表达式解出虚拟 λ 的值。将变量绘制成三维时空图，并将变量温度数据输出至 problem1.xlsx。

(5) MATLAB 计算结果

① 三维时空图

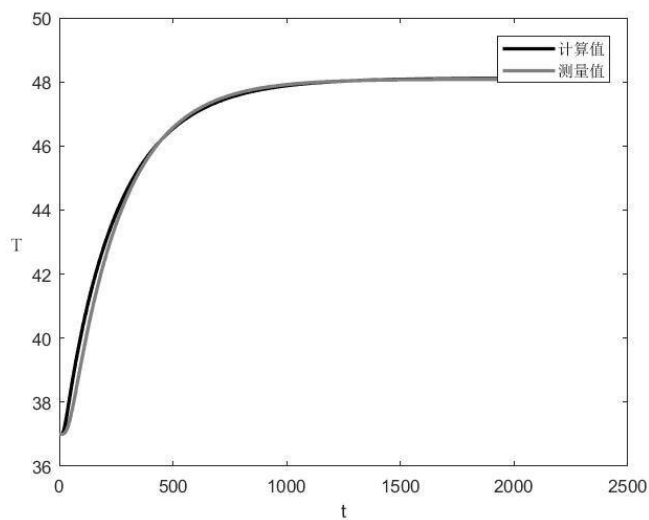


② d 的变步长选取与相对误差表
 设 t 为实验开始至皮肤外侧温度稳定的时间

厚度 d / mm	3.8	19	28.5	38
求解值 $t_{\text{计算}} / \text{s}$	893	1079	1653	1988
皮外温度稳定值 $T / ^\circ\text{C}$	48.01	48.03	48.10	48.02
测定值 $t_{\text{测定}} / \text{s}$	1645	1645	1645	1645
相对误差 ε	45.71%	34.41%	0.49%	20.85%

注：改变 d 使皮外温度稳定值发生小幅改变是由偏微分方程的数值解法带来的误差所致，与真实测定值 48.08°C 相对变化幅度小于 0.2% ，说明此模型稳定且精度较高。

选取最优 d 时，假人皮肤表面温度随时间的变化图像：



从图像可以看出，选取的 d 使计算值和材料 2 所给测量过程拟合较好，虚拟介质层各项虚拟参量模拟假人皮肤外侧和内部间的温度连续性效果较好。

③温度分布的 Excel 文件（见支撑材料 problem1.xlsx）

④虚拟介质层的各个虚拟参量为

$$c_5 \rho_5 = 4.022 \times 10^5 \text{ J} / (\text{m}^3 \cdot ^\circ\text{C})$$

$$d_5 = 28.5 \text{ mm}$$

$$\lambda_5 = 0.2455 \text{ W} / (\text{m} \cdot ^\circ\text{C})$$

4.1.4 初始条件假设的合理性说明

本题求解过程中，假定各均匀介质层初始温度均为 37°C 。该假定是考虑到题目所给假人皮肤表面温度（附件 2）最初保持 37°C 不变，如下图。

附件2. 假人皮肤外侧的测量温度	
时间 (s)	温度 ($^\circ\text{C}$)
0	37.00
1	37.00
2	37.00
3	37.00
4	37.00

一般情况下，总是假定防护服初始温度为室温 25°C ，然而在此情况下，由于右端温度比防护服温度高，试验开始，假人皮肤外侧温度应先下降（此情况具体温度分布见附录三）。未出现此情况，则说明各均匀介质层初始温度均为 37°C 的假定合理。

4.2 问题二

4.2.1 问题分析

依题意，在设计高温作业专用服装时，要尽可能降低研发成本，故为确定 II 层的最优厚度，将实验中的环境温度、IV 层的厚度、工作时长、假人皮肤外侧温度在某一范围的时间作为约束条件，以尽可能降低研发成本为目标，建立单目标优化模型。

4.2.2 模型建立

（1）决策变量

本题的独立变量只有 II 层的厚度，即 d_2 为本题的决策变量。

（2）目标函数

为使高温作业专用服装设计时的研发成本尽可能降低，II 层的厚度应尽可能小，即

$$\min d_2$$

（3）约束条件

设环境温度为 T_L ，IV 层厚度为 d_4 ，工作时间为 t_0 ，假人皮肤外侧温度超过 44°C 且不超过 47°C 的时间为 t_s ，60 分钟时假人皮肤表面温度为 T_e ，则有

$$\begin{cases} T_1 = 65^{\circ}\text{C} \\ d_4 = 5.5 \text{ mm} \\ t_0 = 60 \text{ min} \\ T_e \leq 47^{\circ}\text{C} \\ 0 \leq t_s \leq 5 \text{ min} \end{cases}$$

4.2.3 模型求解

(1) 算法描述

【Step 1】设定初始 d_2 值为 5，在 5—25 范围内以步长 5 求得温度分布；

【Step 2】筛除最终温度大于 47°C 的 d_2 值；

【Step 3】求剩余各个 d_2 值下温度超过 44°C 的时间 t_s ；

【Step 4】找到 t_s 大于 5 和小于 5 相对应的相邻两个 d_2 值，取平均后求相应 t_s 。当相对时差 $\varepsilon = \left| \frac{t_s - 5}{5} \right| > 4\%$ 且该 $t_s < 5$ ，重复 Step4；否则进入 Step5；

【Step 5】再次找 t_s 大于 5 和小于 5 相对应的相邻两个 d_2 值，重复取平均两次，输出两次中最小的 d_2 值。

(2) MATLAB 计算结果（代码见附录四）

d_2/mm	5	10	15	17.5	18.75	19.375	19.5313	19.6875	20	25
t_s/min	50.42	45.75	26.85	17.58	10.20	5.13	4.82	3.66	0.40	0.00
ε	908%	815%	437%	252%	104%	2.6%	3.6%	26.8%	92%	100%

则问题二所求最优厚度为 19.531mm

4.3 问题三

4.3.1 问题分析

在问题二中仅讨论 II 层的厚度，故在保证题目条件下只考虑成本问题，II 层的厚度越小越好，但在此问题中 II 层和 IV 层的厚度具有紧密的联系，需分别考虑两者的不同特性，按照一定规则权衡比较。

考虑实际情况下 II 层和 IV 层的不同特性：

①II 层：密度远大于 IV 层，比热容较大，热传导率较大。

②IV 层：密度较小，比热容较小，热传导率较小，可能发生对流传热。

由两层介质各自的特性可对二者材料做出评价：

①重量：II 层密度较大，增加 II 层厚度会使防护服整体重量提高更快，考虑到实际情况，防护服的重量不应过重，因此 II 层在重量角度考虑不能过厚。

②储热能力：II 层比热容较大，增大 II 层厚度会使防火服在外界高温条件下储存更多的热量，实际情况中会加大停止工作后人体皮肤烧伤的可能性。

③对流传热：增加 IV 层的厚度，空气对流传热的效应更加明显，会增大空气的传

热能力。但经过查询文献^[4]可知，当空气层的厚度小于 6.4mm 时，空气层隔热效果的增大速率比对流传热效应增大的速率大，故在题目所给（附件 2）的 6.4mm 毫米范围内，仍然是增大 IV 层厚度优先于 II 层。

④厚度：增加 II 层和 IV 层的厚度，都会使防护服整理厚度增大，而实际情况中防护服的厚度不宜过大。

⑤费用成本：增加 II 层厚度比增加 IV 层厚度的材料成本更大。

⑥技术因素：虽然 IV 层是更为理想且效果更为显著的隔热层，但是随着 IV 层厚度的增加，防护服结构设计的技术难度会加大。

综合上述分析，II 层和 IV 层的厚度具有紧密的联系，单纯地增加或减少一者均达到综合最优效果。因此，对两者进行偏好性考虑，建立单一目标优化模型。

4.3.2 模型建立

（1）决策变量

该题中，II 层和 IV 层的厚度 d_2 和 d_4 相互独立，为该题的决策变量。

（2）目标函数

在实际生活中，衣服总厚度对产品设计难度和实用性有很大影响，在保持隔热效果较好的前提下，衣服总厚度越小越好。则建立目标为：

$$\min d_2 + d_4$$

但此目标无法体现对 II 层和 IV 层的偏好差异，为了体现对二者的偏好差异，在 II 层的厚度前设置权重 ξ ，即

$$\min \xi \cdot d_2 + d_4$$

权重 ξ 综合了二者的重量、成本、储热、技术难度的优劣影响，体现出对二者的综合性偏好，同时也保留了总体防护服厚度最小的目标。

当 $0 < \xi < 1$ 时，则表示考虑各项因素后，II 层比 IV 层综合更优；当 $\xi = 1$ 时，则表示 II 层和 IV 层的综合偏好相同；当 $\xi > 1$ 时，则表示考虑各项因素后，IV 层比 II 层综合更优。

ξ 的具体取值由 II 层、IV 层各项重量、成本、储热等指标的值决定，但由于此题并未给出各项详细指标，我们选取一系列 ξ 值，最终求解出一系列参考最优解。

（3）约束条件

题目已知的 d_2 、 d_4 范围为

$$0.6 \text{ mm} < d_2 < 25 \text{ mm}$$

$$0.6 \text{ mm} < d_4 < 6.4 \text{ mm}$$

超过 44℃ 时间

$$0 \leq t_s \leq 5 \text{ min}$$

设 30 分钟时假人皮肤表面温度为 T_e ，则

$$T_e \leq 47\text{ }^{\circ}\text{C}$$

外界温度

$$T_L = 80\text{ }^{\circ}\text{C}$$

工作时间

$$t_0 = 30\text{ min}$$

(4) 数学模型

综上，所得数学模型为

$$\begin{aligned} & \min \xi \cdot d_2 + d_4 \\ & s.t. \begin{cases} 0.6\text{ mm} < d_2 < 25\text{ mm} \\ 0.6\text{ mm} < d_4 < 6.4\text{ mm} \\ 0 \leq t_s \leq 5\text{ min} \\ T_e \leq 47\text{ }^{\circ}\text{C} \\ t_0 = 30\text{ min} \\ T_L = 80\text{ }^{\circ}\text{C} \end{cases} \end{aligned}$$

4.3.3 模型求解

(1) 优化算法

本题只考虑假人皮肤表面温度变化，仍如问题一、二具体考虑前四层介质导热情况，则会造成算法繁杂、程序运行时间过长，因此进行如下优化：将前四层介质等效为一层介质后，对两层介质导热模型编程求得符合约束的范围区间，再在所得范围区间内定步长搜索求解五层介质导热模型下的最优解。

由质量等效方程

$$\rho(d_1 + d_2 + d_3 + d_4) = \rho_1 d_1 + \rho_2 d_2 + \rho_3 d_3 + \rho_4 d_4$$

热量等效方程

$$c(\rho_1 d_1 + \rho_2 d_2 + \rho_3 d_3 + \rho_4 d_4) = c_1 \rho_1 d_1 + c_2 \rho_2 d_2 + c_3 \rho_3 d_3 + c_4 \rho_4 d_4$$

热通量等效方程（稳态条件）

$$q = \frac{\lambda_1}{d_1}(T_1 - T_2) = \frac{\lambda_2}{d_2}(T_2 - T_3) = \frac{\lambda_3}{d_3}(T_3 - T_4) = \frac{\lambda_4}{d_4}(T_4 - T_5) = \frac{\lambda}{d_1 + d_2 + d_3 + d_4}(T_1 - T_5)$$

得到等效方法为

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{\rho_1 d_1 + \rho_2 d_2 + \rho_3 d_3 + \rho_4 d_4}{d_1 + d_2 + d_3 + d_4} \\ c &= \frac{c_1 \rho_1 d_1 + c_2 \rho_2 d_2 + c_3 \rho_3 d_3 + c_4 \rho_4 d_4}{\rho_1 d_1 + \rho_2 d_2 + \rho_3 d_3 + \rho_4 d_4} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{\frac{1}{\lambda_1}d_1 + \frac{1}{\lambda_2}d_2 + \frac{1}{\lambda_3}d_3 + \frac{1}{\lambda_4}d_4}{d_1 + d_2 + d_3 + d_4}$$

注：用 Matlab 编程将方法对问题一情形进行等效，发现假人皮肤表面温度达到稳定的时间变短，是因为 λ 的等效方法由稳态时热通量 q 守恒求得，实际非稳态条件下，还要考虑物体将一部分热能转化为内能的升温过程，故该等效情况下的 λ 比实际情况低。

由于该模型等效下传热变慢，则满足实际模型约束的解，都会满足该模型下的约束条件，即包含于该模型的解集中。故我们通过该模型求得约束条件下的解，再进一步代入实际模型中再一次筛选，最终通过目标函数求得最优解。

（2）算法描述

【Step 1】对时间和空间定步长分割，初始化变量，按照问题一的递推关系得到温度分布。

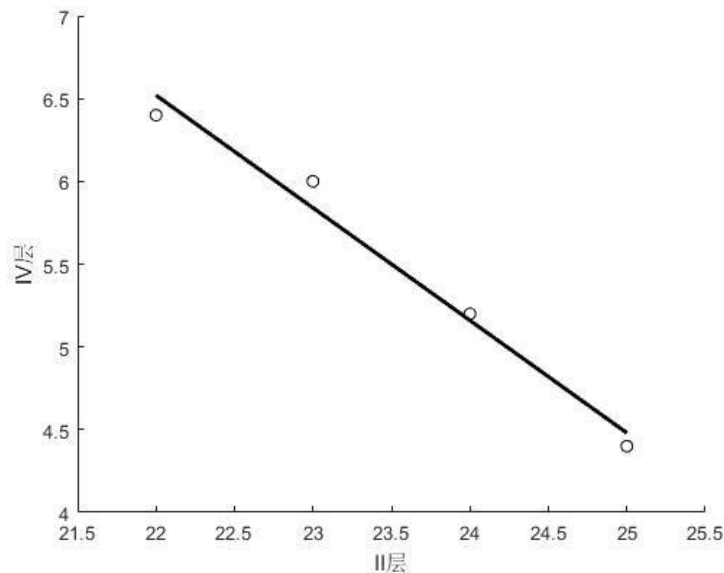
【Step 2】按照本问约束条件对温度分布进行第一轮筛选

【Step 3】将筛选得到的时间和空间范围定步长分割。再次按照问题一的递推关系得到该范围内新的温度分布。

【Step 4】对新的温度分布按照本问的约束条件进行第二轮筛选，得到符合约束的解

【Step 5】将离散化的解连续化，得到解集直线。

（3）MATLAB 计算结果（代码见附录五）



此直线上的点均为满足约束条件的优化解，具体直线上最优点的选取，需要考虑评判人对各项因素的综合偏好即赋权 ξ 的大小。

5 模型评价、改进与推广

5.1 模型的评价

5.1.1 模型的优点

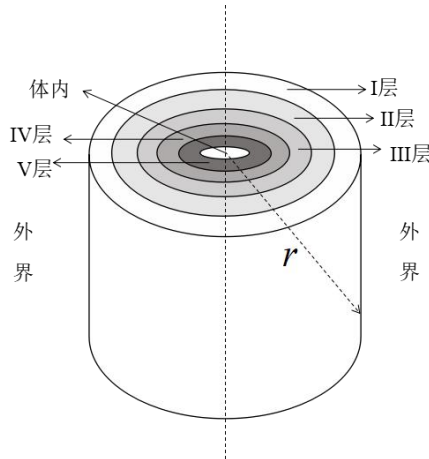
- (1) 建立皮肤分界面虚拟介质层，解决了皮肤分界面温度分布不连续的矛盾，根据题目数据得到虚拟介质层各项虚拟参数，方便了后续问题求解，具有一定的创新性。
- (2) 考虑到偏微分方程组解析解形式复杂且求解过程繁琐，采用有限差分法这一数值解法将偏微分方程离散化并求出近似解，从而简化了温度分布的求解过程。
- (3) 等效介质层使算法得到优化且真实最优解不丢失，方法独特合理。
- (4) 模型运算约束条件全面，且最终开放式优化讨论考虑因素较全面，充分利用了题目附件中的各种信息，得到了较理想的结果。
- (5) 模型建立以热学知识为基础背景，逻辑清晰，条理鲜明，具备科学性和严谨性。关注影响问题的主要因素，设置合理假设，根据题目要求建立模型解决问题。
- (6) 改变参数值对模型进行误差分析，得出模型稳定性强且精度较高的结论。
- (7) 从微元角度用能量守恒物理模型将介质分界面处边界条件简化，方便微分方程组的离散求解。

5.1.2 模型的不足

- (1) 主要考虑了温度传递方式中的热传导过程，基于绝对温度较小和空气层厚度较薄，忽略对流传热和热辐射对结果的影响。
- (2) 考虑到衣服厚度相对于假人直径长度可忽略不计，把系统当成平面一维问题处理。
- (3) 已知参数较少，无法精确求出问题三的准确最优解。

5.2 模型的改进

在问题一的模型中，为了方便问题研究，我们对系统的几何形状做简化处理，取某一微小面元研究，因面元处曲率极小，且人体高度远远大于所取面元宽度，故把模型中各层介质简化为无限大平板。而在实际生活中，人体宽度就高度而言可忽略不计，系统整体形状接近无限高的圆柱（如图所示），将人体假定为沿径向一维传热的圆柱体，两种方法求得结果可能会存在一定的偏差。



针对以上不足之处，我们对原有模型进行改进，建立了柱坐标下的导热微分方程组及不同界面的边界条件：

$$\rho_i c_i \frac{\partial T_i}{\partial t} = \lambda_i \frac{\partial \left(r \frac{\partial T_i}{\partial r} \right)}{\partial r} \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5)$$

$$T_i(r_{i+1}, t) = T_{i+1}(r_{i+1}, t) \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

$$\lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial r}(r_{i+1}, t) = \lambda_{i+1} \frac{\partial T_{i+1}}{\partial r}(r_{i+1}, t) \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

5.3 模型的推广

本文模型及设计思路具有良好的适用性和极强的现实意义。在消防、金属冶炼等行业中，工作人员常处于高温环境，高温环境会为作业人员的身体健康带来严重的伤害，本文模型可广泛应用于高温作业专用服装设计问题，有助于改善和优化服装性能，更好地保护作业人员使其免受灼伤，为进一步研究开发性能优异的热防护服装提供参考。

同时，本文模型具有较强的可推广性，模型的设计思路还可以用于依据人体表层温度变化对皮肤烧伤程度进行预测，这将为皮肤烧伤的诊断和治疗提供一定的科学依据，也为医学临床相关方向的研究提供思路。

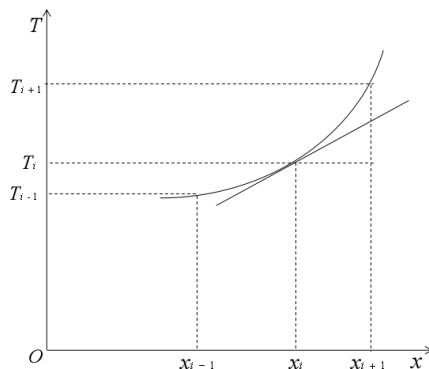
6 参考文献

- [1]张靖周，高等传热学，北京：科学出版社，2009
- [2]朱光俊，孙亚琴，传输原理，北京：冶金工业出版社，2009.7
- [3]<http://www.doc88.com/p-2971208396439.html>
- [4]卢琳珍，多层热防护服装的热传递模型及参数最优决定[D]，浙江理工大学, 2017

附录

附录一 有限差分法基本原理

如果物体内部温度分布 $T(x)$ 是一连续函数，如图在 $x = x_i$ 处，温度 T 对 x 的导数为



$$\begin{aligned}\left(\frac{dT}{dx}\right)_i &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta x} \\ &= \frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta x} + o(\Delta x) \approx \frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta x}\end{aligned}$$

称为向前差商。

也可以用向后差商和中心差商来表示，一阶和二阶处理如下表所示：

	一阶	二阶
向前差商	$\left(\frac{dT}{dx}\right)_i = \frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta x} + o(\Delta x) \approx \frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta x}$	$\left(\frac{d^2T}{dx^2}\right)_i \approx \frac{\Delta T_{i+1} - \Delta T_i}{\Delta x^2} = \frac{T_{i+2} - 2T_{i+1} + T_i}{\Delta x^2}$
向后差商	$\left(\frac{dT}{dx}\right)_i = \frac{T_i - T_{i-1}}{\Delta x} + o(\Delta x) \approx \frac{T_i - T_{i-1}}{\Delta x}$	$\left(\frac{d^2T}{dx^2}\right)_i \approx \frac{\Delta T_i - \Delta T_{i-1}}{\Delta x^2} = \frac{T_i - 2T_{i-1} + T_{i-2}}{\Delta x^2}$
中心差商	$\left(\frac{dT}{dx}\right)_i = \frac{T_{i+\frac{1}{2}} - T_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x} + o(\Delta x) \approx \frac{T_{i+\frac{1}{2}} - T_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x}$	$\left(\frac{d^2T}{dx^2}\right)_i \approx \frac{\Delta T_{i+\frac{1}{2}} - \Delta T_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x^2} = \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta x^2}$

附录二 问题一求解代码

```
clc, clear
n = 6;
m = 150000;
T1(1, [1:n])=37;
T2(1, [1:n])=37;
T3(1, [1:n])=37;
T4(1, [1:n])=37;
T5(1, [1:n])=37;
T1([1:m], 1)=75;
```

```

T5([1:m],end)=37;

data = textread('data1.txt');
data(:,4) = data(:,4).*0.001;
houdu = [data(:,4);mean(data(:,4))*7.5];
alpha = data(:,3)./(data(:,2).*data(:,1));
alpha = [alpha;mean(alpha)*0.1];
h = 2000/m;
k = houdu./n;
r = alpha.*h./(k.^2);

format long
for i = 1:m
    %T1
    for j = 2:n-1
        T1(i+1,j) = (1-2*r(1)).*T1(i,j)+r(1).*(T1(i,j-1)+T1(i,j+1));
    end
    T1(i+1,n) = T1(i,n) +
2*r(1)*(T1(i,n-1)-T1(i,n))-(2*data(2,3)*h/(k(1)*k(2)*data(1,1)*data(1,2)))*(T2(i,1)-T2(i,2)
);
    %T2
    T2(i+1,1) = (1-2*r(2)).*T2(i,1)+r(2).*(T1(i,n)+T2(i,2));
    for j = 2:n-1
        T2(i+1,j) = (1-2*r(2)).*T2(i,j)+r(2).*(T2(i,j-1)+T2(i,j+1));
    end
    T2(i+1,n) = T2(i,n) +
2*r(2)*(T2(i,n-1)-T2(i,n))-(2*data(3,3)*h/(k(2)*k(3)*data(2,1)*data(2,2)))*(T3(i,1)-T3(i,2)
);
    %T3
    T3(i+1,1) = (1-2*r(3)).*T3(i,1)+r(3).*(T2(i,n)+T3(i,2));
    for j = 2:n-1
        T3(i+1,j) = (1-2*r(3)).*T3(i,j)+r(3).*(T3(i,j-1)+T3(i,j+1));
    end
    T3(i+1,n) = T3(i,n) +
2*r(3)*(T3(i,n-1)-T3(i,n))-(2*data(4,3)*h/(k(3)*k(4)*data(3,1)*data(3,2)))*(T4(i,1)-T4(i,2)
);
    %T4
    T4(i+1,1) = (1-2*r(4)).*T4(i,1)+r(4).*(T3(i,n)+T4(i,2));
    for j = 2:n-1
        T4(i+1,j) = (1-2*r(4)).*T4(i,j)+r(4).*(T4(i,j-1)+T4(i,j+1));
    end
    T4(i+1,n) = T4(i,n) +
2*r(4)*(T4(i,n-1)-T4(i,n))-(2*7.5*mean(data(:,4))/0.116115*h/(k(4)*k(5)*data(4,1)*data(4,2)
))*T5(i,1)-T5(i,2));

```

```

    %T5
    T5(i+1,1) = (1-2*r(5)).*T5(i,1)+r(5).*(T4(i,n)+T5(i,2));
    for j = 2:n-1
        T5(i+1,j) = (1-2*r(5)).*T5(i,j)+r(5).*(T5(i,j-1)+T5(i,j+1));
    end
end

T = [T1, T2, T3, T4, T5];
T_choice = [T(1,:)]
for i = 75:75:150001
    T_choice=[T_choice;T(i,:)];
end

time = h.*[1:m+1];
jiange = sum(houdu)./(5*n);
jiange = repmat(jiange,1,5*n);
jiange = cumsum(jiange);
[x,y] = meshgrid(time,jiange);
i = mesh(x,y,T');colormap gray
xlabel('t');ylabel('d');zlabel('T');
axis([0,2500,0,0.047,37,75])
caxis([35,85])

sample = textread('data3.txt');
Ttest = [time',T(:,n*4)];
plot(Ttest(:,1),Ttest(:,2),'k','linewidth',2);
hold on
plot(sample(:,1),sample(:,2),'linewidth',2,'color',[.5 .5 .5])
hold off
legend('计算值','测量值')
xlabel('t')
ylabel('T')

plot(time',T(:,5),'-k','linewidth',2)
hold on
plot(time',T(:,10),'--k','linewidth',2)
plot(time',T(:,15),':k','linewidth',2)
plot(time',T(:,20),'k','linewidth',2)
hold off
axis([0,2500,35,75]);
legend('②','③','④','⑤')
xlabel('t')
ylabel('T')

```

colormap gray

附录三

37
35.30003
34.80418
34.52603
34.43549
34.38695
34.3521
34.30962
34.25898
34.20178
34.14136
34.08019
34.01996
33.96157
33.90546
33.85175
33.8004
33.75133
33.7044

附录四 问题二求解代码

定步长:

%确定 n

clc,clear

n = 6;

m = 210000;

T1(1,[1:n])=37;

T2(1,[1:n])=37;

T3(1,[1:n])=37;

T4(1,[1:n])=37;

T5(1,[1:n])=37;

T1([1:m],1)=65;

T5([1:m],end)=37;

data = textread('data1.txt');

data(:,4) = data(:,4).*0.001;

data(4,4) = 0.0055;

result = [];

for i = 5:5:25

data(2,4) = i*0.001;

houdu = [data(:,4);0.0285];

alpha = data(:,3)./(data(:,2).*data(:,1));

alpha = [alpha;6.09e-7];

```

h = 3600/m;
k = houdu./n;
r = alpha.*h./(k.^2)
format long
for i = 1:m
    %T1
    for j = 2:n-1
        T1(i+1,j) = (1-2*r(1)).*T1(i,j)+r(1).*(T1(i,j-1)+T1(i,j+1));
    end
    T1(i+1,n) = T1(i,n) +
2*r(1)*(T1(i,n-1)-T1(i,n))-(2*data(2,3)*h/(k(1)*k(2)*data(1,1)*data(1,2)))*(T2(i,1)-T2(i,2)
);

    %T2
    T2(i+1,1) = (1-2*r(2)).*T2(i,1)+r(2).*(T1(i,n)+T2(i,2));
    for j = 2:n-1
        T2(i+1,j) = (1-2*r(2)).*T2(i,j)+r(2).*(T2(i,j-1)+T2(i,j+1));
    end
    T2(i+1,n) = T2(i,n) +
2*r(2)*(T2(i,n-1)-T2(i,n))-(2*data(3,3)*h/(k(2)*k(3)*data(2,1)*data(2,2)))*(T3(i,1)-T3(i,2)
);

    %T3
    T3(i+1,1) = (1-2*r(3)).*T3(i,1)+r(3).*(T2(i,n)+T3(i,2));
    for j = 2:n-1
        T3(i+1,j) = (1-2*r(3)).*T3(i,j)+r(3).*(T3(i,j-1)+T3(i,j+1));
    end
    T3(i+1,n) = T3(i,n) +
2*r(3)*(T3(i,n-1)-T3(i,n))-(2*data(4,3)*h/(k(3)*k(4)*data(3,1)*data(3,2)))*(T4(i,1)-T4(i,2)
);

    %T4
    T4(i+1,1) = (1-2*r(4)).*T4(i,1)+r(4).*(T3(i,n)+T4(i,2));
    for j = 2:n-1
        T4(i+1,j) = (1-2*r(4)).*T4(i,j)+r(4).*(T4(i,j-1)+T4(i,j+1));
    end
    T4(i+1,n) = T4(i,n) +
2*r(4)*(T4(i,n-1)-T4(i,n))-(2*0.245*h/(k(4)*k(5)*data(4,1)*data(4,2)))*(T5(i,1)-T5(i,2));

    %T5
    T5(i+1,1) = (1-2*r(5)).*T5(i,1)+r(5).*(T4(i,n)+T5(i,2));
    for j = 2:n-1
        T5(i+1,j) = (1-2*r(5)).*T5(i,j)+r(5).*(T5(i,j-1)+T5(i,j+1));
    end
end
result = [result,T4(:,n)];
end
二分法:

```

```

%确定 n
clc,clear
n = 6;
m = 210000;
T1(1,[1:n])=37;
T2(1,[1:n])=37;
T3(1,[1:n])=37;
T4(1,[1:n])=37;
T5(1,[1:n])=37;
T1([1:m],1)=65;
T5([1:m],end)=37;

data = textread('data1.txt');
data(:,4) = data(:,4).*0.001;
data(4,4) = 0.0055;
result = [];
lis = [15,20];
for i = 1:5%进行五次二分法
    data(2,4) = sum(lis)*0.001/2;
    houdu = [data(:,4);0.0285];
    alpha = data(:,3)./(data(:,2).*data(:,1));
    alpha = [alpha;6.09e-7];
    h = 3600/m;
    k = houdu./n;
    r = alpha.*h./(k.^2);
    format long
    for i = 1:m
        %T1
        for j = 2:n-1
            T1(i+1,j) = (1-2*r(1)).*T1(i,j)+r(1).*(T1(i,j-1)+T1(i,j+1));
        end
        T1(i+1,n) = T1(i,n) +
2*r(1)*(T1(i,n-1)-T1(i,n))-(2*data(2,3)*h/(k(1)*k(2)*data(1,1)*data(1,2)))*(T2(i,1)-T2(i,2)
);
        %T2
        T2(i+1,1) = (1-2*r(2)).*T2(i,1)+r(2).*(T1(i,n)+T2(i,2));
        for j = 2:n-1
            T2(i+1,j) = (1-2*r(2)).*T2(i,j)+r(2).*(T2(i,j-1)+T2(i,j+1));
        end
        T2(i+1,n) = T2(i,n) +
2*r(2)*(T2(i,n-1)-T2(i,n))-(2*data(3,3)*h/(k(2)*k(3)*data(2,1)*data(2,2)))*(T3(i,1)-T3(i,2)
);
        %T3
        T3(i+1,1) = (1-2*r(3)).*T3(i,1)+r(3).*(T2(i,n)+T3(i,2));
    end
end

```

```

    for j = 2:n-1
        T3(i+1, j) = (1-2*r(3)).*T3(i, j)+r(3).*(T3(i, j-1)+T3(i, j+1));
    end
    T3(i+1, n) = T3(i, n) +
2*r(3)*(T3(i, n-1)-T3(i, n))-(2*data(4, 3)*h/(k(3)*k(4)*data(3, 1)*data(3, 2)))*(T4(i, 1)-T4(i, 2)
);

    %T4
    T4(i+1, 1) = (1-2*r(4)).*T4(i, 1)+r(4).*(T3(i, n)+T4(i, 2));
    for j = 2:n-1
        T4(i+1, j) = (1-2*r(4)).*T4(i, j)+r(4).*(T4(i, j-1)+T4(i, j+1));
    end
    T4(i+1, n) = T4(i, n) +
2*r(4)*(T4(i, n-1)-T4(i, n))-(2*0.245*h/(k(4)*k(5)*data(4, 1)*data(4, 2)))*(T5(i, 1)-T5(i, 2));
    %T5
    T5(i+1, 1) = (1-2*r(5)).*T5(i, 1)+r(5).*(T4(i, n)+T5(i, 2));
    for j = 2:n-1
        T5(i+1, j) = (1-2*r(5)).*T5(i, j)+r(5).*(T5(i, j-1)+T5(i, j+1));
    end
end
end
result = [result, T4(:, n)];
temp = T4(:, n);
if temp(192500)>44
    list = [mean(list), list(2)];
else
    list = [list(1), mean(list)];
end
end
end

```

附录五 问题三求解代码

```

clc, clear
nlist = [4, 4];
m = 1800;
T1(1, [1:nlist(1)])=37;
T2(1, [1:nlist(2)])=37;
T1([1:m], 1)=80;
T2([1:m], end)=37;
data = textread('data1.txt');
data(:, 4) = data(:, 4).*0.001;
result = [0, 0];
for u = 18:1:25
    for v = 4:0.4:6.4
        data(2, 4) = 0.001*u;
        data(4, 4) = 0.001*v;
        midu = sum(data(:, 1).*data(:, 4))./sum(data(:, 4));
    end
end

```

```

c = sum(data(:,1).*data(:,2).*data(:,4))./sum(data(:,1).*data(:,4));
lambda = sum(data(:,4))./sum(data(:,4)./data(:,3));
d = sum(data(:,4));
newdata = [midu*c, lambda, d; 402200, 0.245, 0.0285];
alpha = newdata(:,2)./newdata(:,1);
h = 1800/m;
k = newdata(:,3)./nlist(1,:)' ;
r = alpha.*h./(k.^2);
format long
for i = 1:m
    %T1
    n = nlist(1);
    for j = 2:n-1
        T1(i+1, j) = (1-2*r(1)).*T1(i, j)+r(1).*(T1(i, j-1)+T1(i, j+1));
    end
    T1(i+1, n) = T1(i, n) +
2*r(1)*(T1(i, n-1)-T1(i, n))-(2*newdata(2,2)*h/(k(1)*k(2)*newdata(1,1)))*(T2(i,1)-T2(i,2));
    %T2
    n = nlist(2);
    T2(i+1, 1) = (1-2*r(2)).*T2(i, 1)+r(2).*(T1(i, nlist(1))+T2(i, 2));
    for j = 2:n-1
        T2(i+1, j) = (1-2*r(2)).*T2(i, j)+r(2).*(T2(i, j-1)+T2(i, j+1));
    end
end
temp = T1(:, nlist(1));
if temp(1500)<44
    result = [result;u,v];
end
end
end

```