

# 负载突变扰动下四足机器人的鲁棒稳定控制及仿真

一、	项目背景及意义.....	1
二、	外力扰动下的四足机器人建模 .....	2
2.1	机器人运动学 .....	2
2.2	机器人动力学 .....	5
2.2.1	腿部动力学.....	5
2.2.2	带有支撑相虚拟模型的完整动力学 .....	5
三、	四足机器人的 trot 步态规划.....	8
四、	负载突变下四足机器人的鲁棒稳定控制器设计.....	11
4.1	带有观测器的关节角滑模跟踪控制器设计 .....	11
4.1.1	非线性干扰观测器 .....	11
4.1.2	滑模跟踪控制器 .....	15
4.2	足端轨迹跟踪控制器的设计 .....	16
五、	MATLAB 和 ADAMS 的联合仿真 .....	18
5.1	仿真环境设置 .....	18
5.2	仿真结果分析 .....	18
5.2.1	仿真一：正常 trot 步态行走 .....	19
5.2.2	仿真二：静止状态机身前向突加负载 .....	21
5.2.3	仿真三：静止状态机身侧向突加负载 .....	23
5.2.4	仿真四：行进间机身任意位置突加负载.....	26
附录	.....	27
附录 A	机器人参数表.....	27
附录 B	四足机器人腿部动力学.....	27
附录 C	Schur 补不等式.....	29

## 一、 项目背景及意义

随着对自然环境下四足移动机器人替代人工的期望不断增加,四足机器人逐渐被赋予更多的功能需求。该研究领域正在经历由理想实验室环境到实际自然环境、由静态稳定控制到动态稳定控制、由单纯步态生成到运动能耗综合优化等方面的转变。因此,高适应性、高动态性和高负载能力成为当今四足机器人技术领域所关注的焦点。野外自然环境地形复杂,四足机器人容易受到不规则地面以及各种外力所造成的外部扰动作用影响。扰动的实质即影响并改变机器人系统运动过程中的速度方向及速度大小,过大的外部扰动作用可以使得系统偏离原来的运动状态甚至失稳摔倒,如负载突变等。为了实现机器人在以负载突变为代表的强扰动作用下的姿态平衡控制,需要同时满足系统运动实时性和动态稳定性的要求。此时运动规划和控制从单纯的几何问题演变为运动动力学问题,状态变量数量的显著增加使得计算规模急剧扩大,计算求解愈益复杂。因此,外力扰动下的姿态平衡控制成为制约四足机器人走向实地应用的瓶颈问题之一,在突发失稳状态下如何使机器人恢复平衡进而继续平稳行走的动态平衡控制显得尤为重要。

本课题以腿部具有 12 个自由度的四足机器人为研究对象,针对机身不同位置处负载突变扰动下机器人的突发失稳情况进行了深入的研究,搭建简化模型并对其进行运动学和动力学建模与分析,提出了在冲击作用下的动态稳定控制算法,并通过 MATLAB 与 ADAMS 联合仿真验证了其合理性和有效性,这为四足机器人动态平衡控制理论的完善及高动态性、强适应性和高稳定性的四足机器人的研制与应用提供了一定的技术支撑和理论基础。

## 二、 外力扰动下的四足机器人建模

当四足机器人工作时，由于环境的不可预知性，机器人不可避免的会受到外力扰动的作用，这对机器人的稳定性造成了很大的影响，限制四足机器人的应用。当外力扰动作用在四足机器人的机身上时，根据螺旋理论，可以把外力扰动分解为沿机身坐标系三个方向上的力及绕三个坐标轴的三个转矩，进而将这六个广义力分量分解为机身与支撑腿耦合点处的耦合扰动力。再把耦合扰动力分解到各个关节上，这样就把机身受到外力扰动的问题化简为关节处受到扰动的问题。本项目以图 2.1 中的机器人为例，建立了四足机器人运动学模型、外力扰动作用下动力学模型。

### 2.1 机器人运动学

针对四足机器人，建立关节坐标系并根据 Denavit-Hartenberg 方法建立对基坐标系的变换关系，确定四足机器人各腿之间的相对运动和位姿关系，基于坐标变换法对四足机器人进行运动学分析。

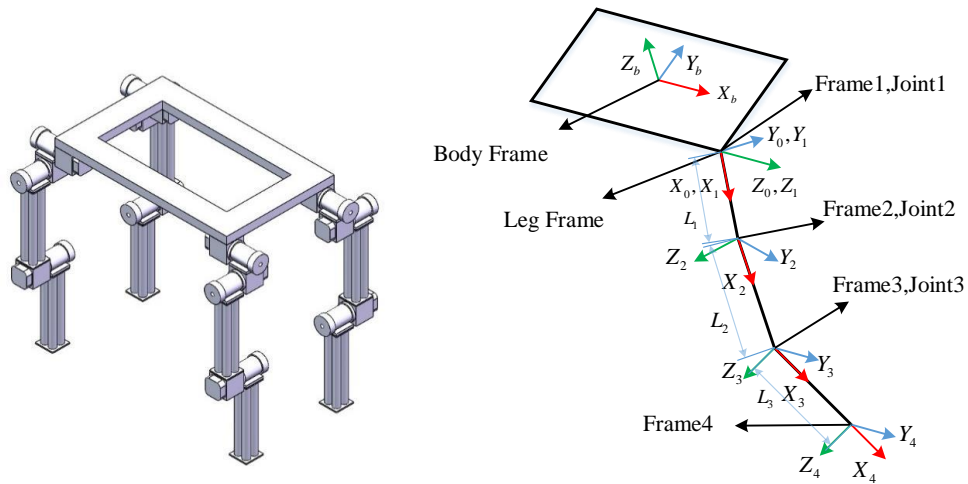


图 2.1 四足机器人的本体模型及单腿坐标系

根据机器人的 D-H 坐标系建立规则，四足机器人各条腿的 D-H 坐标系如图 2.1 所示。其中，躯干坐标系  $\{B\}$  在躯干的几何中心，单腿的 4 个坐标系分别是髋关节侧摆坐标系，髋关节前摆坐标系，膝关节前摆坐标系和足端坐标系。四条腿的结构一样，都是肘式结构。

建立机器人的 D-H 坐标系后，机器人单腿各连杆参数分别如表 2.1 所示

表 2.1 D-H 参数

连 杆 i	$\alpha_{i-1}$ 扭角	关节 转角	杆件长 度
1	0	$\theta_1$	0
2	$90^\circ$	$\theta_2$	$a_1$
3	0	$\theta_3$	$a_2$
4	0	0	$a_3$

根据 D-H 坐标表，坐标系  $\{i\}$  和坐标系  $\{i-1\}$  之间的变换公式为：

$${}^{i-1}T_i = Rot(x, \alpha_{i-1}) \times Trans(x, a_{i-1}) \times Rot(z, \theta_i) \quad (2.1)$$

其中， ${}^{i-1}T_i$  表示连杆坐标系  $\{i\}$  相对于  $\{i-1\}$  的位姿关系。

根据 D-H 坐标表，推出四足机器人的变换矩阵：

$$\begin{aligned} {}^0T_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & x_{ref} \\ s_1 & c_1 & 0 & y_{ref} \\ -c_1 & s_1 & 0 & z_{ref} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & {}^1T_2 &= \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ {}^2T_3 &= \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & a_2 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & {}^3T_4 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.2)$$

上面所有参数见表 2.1。将上述四个齐次变换矩阵相乘可以得到机身坐标系到足端坐标系的变换矩阵，如下：

$$\begin{aligned} {}^0T_4 &= {}^0T_1 {}^1T_2 {}^2T_3 {}^3T_4 \\ &= \begin{bmatrix} s_{23} & c_{23} & 0 & x_{ref} + a_2 s_2 + a_3 s_{23} \\ s_1 c_{23} & -s_1 s_{23} & c_1 & y_{ref} + s_1 (a_1 + a_3 c_{23} + a_2 c_2) \\ -c_1 c_{23} & c_1 s_{23} & s_1 & z_{ref} - c_1 (a_1 + a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.3)$$

则四足机器人各腿在机身坐标系下运动学正解为：

$$\begin{bmatrix} {}^B P_x \\ {}^B P_y \\ {}^B P_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{ref} + a_2 s_2 + a_3 s_{23} \\ y_{ref} + s_1(a_1 + a_3 c_{23} + a_2 c_2) \\ z_{ref} - c_1(a_1 + a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

其中，  $c_i = \cos(\theta_i)$ ，  $s_i = \sin(\theta_i)$ ，  $c_{ij} = \cos(\theta_i + \theta_j)$ ，  $s_{ij} = \sin(\theta_i + \theta_j)$ ，

$$x_{ref} = \begin{cases} b, (\text{front legs}) \\ -b, (\text{hind legs}) \end{cases}, \quad y_{ref} = \begin{cases} w, (\text{left legs}) \\ -w, (\text{right legs}) \end{cases}, \quad z_{ref} = -h。$$

对式(2.4)求关于各个关节角的偏微分，则机器人各足在躯干坐标系下的正微分运动学为：

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \\ \dot{p}_z \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

其中：

$$J = \begin{bmatrix} 0 & a_2 c_2 + a_3 c_{23} & a_3 c_{23} \\ c_1(a_1 + a_2 c_2 + a_3 c_{23}) & -s_1(a_2 s_2 + a_3 s_{23}) & -a_3 s_1 s_{23} \\ s_1(a_1 + a_2 c_2 + a_3 c_{23}) & c_1(a_2 s_2 + a_3 s_{23}) & a_3 c_1 s_{23} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

本文只考虑机身的姿态而不考虑四足机器人在空间中的位置，所以设定大地坐标系位于机身质心，即随着机身的移动而移动，但不随机身的偏转而转动。机体的横滚角、俯仰角、航向角分别为  $\phi_x$ 、 $\phi_y$ 、 $\phi_z$ ，按照  $X-Y-Z$  轴的次序旋转变换，得到：

$${}^W_B T = \begin{bmatrix} \cos \phi_y \cos \phi_z & -\cos \phi_y \sin \phi_z & \sin \phi_y \\ \cos \phi_x \sin \phi_z + \sin \phi_x \sin \phi_y \cos \phi_z & \cos \phi_x \cos \phi_z - \sin \phi_x \sin \phi_y \sin \phi_z & -\sin \phi_x \cos \phi_y \\ \sin \phi_x \sin \phi_z - \cos \phi_x \sin \phi_y \cos \phi_z & \sin \phi_x \cos \phi_z + \cos \phi_x \sin \phi_y \sin \phi_z & \cos \phi_x \cos \phi_y \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

则机器人的足端在大地坐标系下的坐标为：

$$\begin{bmatrix} {}^W p_x \\ {}^W p_y \\ {}^W p_z \end{bmatrix} = {}^W_B T \begin{bmatrix} {}^B p_x \\ {}^B p_y \\ {}^B p_z \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

机器人参数及见附录 A，代入具体参数的动力学方程参数见附录 B。

## 2.2 机器人动力学

### 2.2.1 腿部动力学

如图 2，考虑四足机器人的每条腿有三个自由度，第  $i$  条腿 ( $i=1, \dots, k$ ) 的动力学模型可以描述为：

$$M_i(q_i)\ddot{q}_i + C(q_i, \dot{q}_i)\dot{q}_i + G_i(q_i) = \tau_i - J_{gi}^T F_{gi} \quad (2.9)$$

其中， $q_i \in \mathbb{R}^3$  是一个关节角度向量， $M_i(q_i) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  是单腿的一个  $3 \times 3$  对称半正定惯性矩阵， $C_i(q_i, \dot{q}_i) \in \mathbb{R}^3$  是一个  $3 \times 1$  的向心力和科氏力项， $G_i(q_i) \in \mathbb{R}^3$  是一个  $3 \times 1$  的重力项， $\tau_i \in \mathbb{R}^3$  是一个  $3 \times 1$  的关节力矩， $J_{gi} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  是和足端接触力的雅克比矩阵， $F_{gi} = [f_{ix}, f_{iy}, f_{iz}]^T \in \mathbb{R}^3$  是一个足端和地面的接触力向量。然而，四足机器人单腿只有在支撑相时与地面接触；在摆动阶段脚与地面没有接触，也就是  $F_{gi}$  等于零。所有腿的动力学可以表示为：

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau - J_g^T F_g \quad (2.10)$$

其中， $q = [q_1^T, \dots, q_k^T]^T \in \mathbb{R}^3$ ；

$$M_i(q_i) = \text{block diag}[M_1(q_1), \dots, M_k(q_k)] \in \mathbb{R}^{3k \times 3k}；$$

$$C(q, \dot{q}) = \text{block diag}[C_1(q_1, \dot{q}_1), \dots, C_k(q_k, \dot{q}_k)] \in \mathbb{R}^{3k \times 3k}；$$

$$G = [G_1^T, \dots, G_k^T]^T \in \mathbb{R}^{3k}；J_g^T = \text{block diag}[J_{g1}^T, \dots, J_{gk}^T]^T \in \mathbb{R}^{3k \times 3k}；$$

$$\tau = [\tau_1^T, \dots, \tau_k^T]^T \in \mathbb{R}^{3k \times 3k}；F_g = [F_{g1}^T, \dots, F_{gk}^T]^T \in \mathbb{R}^{3k}。$$

### 2.2.2 带有支撑相虚拟模型的完整动力学

上文只考虑了四足机器人的单腿动力学，而当腿部和地面接触时，则要分析足端的受力情况。此时需要满足以下两个假设。

假设 1：四足机器人的腿处于支撑项时，脚与地形的接触点认为不存在任何滑动，即不存在打滑现象。

假设 2：腿尖与地面的接触可以模拟一个带摩擦的尖点接触，说明腿尖与地面的相互作用受限于三个力分量：一个垂直向上的法向力和两个沿水平面的切向力。

作用在机身重心上的力旋量  $W = [F_x, F_y, F_z, M_x, M_y, M_z]^T$  包括了作用于机器人的重心上的力  $[F_x, F_y, F_z]^T$  和力矩  $[M_x, M_y, M_z]^T$ ，代表了机器人的有效荷载。其中包括：机器人机身的重力、受到的外部扰动力旋量  $W^{ext} = [F_x^{ext}, F_y^{ext}, F_z^{ext}, M_x^{ext}, M_y^{ext}, M_z^{ext}]^T$ （如推搡或负载突变）、机器人运动过程中的惯性力和四条腿对机身的支持力。在计算机身重心的力旋量时，需要忽略掉腿部的质量。在以上这些条件下，可以得到六个力和力矩的平衡方程如下：

$$\begin{aligned}
 F_x &= \sum_{i=1}^m f_{ix} + F_x^{ext} \\
 F_y &= \sum_{i=1}^m f_{iy} + F_y^{ext} \\
 F_z &= \sum_{i=1}^m f_{iz} + G + F_z^{ext} \\
 T_x &= \sum_{i=1}^m f_{iz} y_i - \sum_{i=1}^m f_{iy} z_i + T_x^{ext} \\
 T_y &= \sum_{i=1}^m f_{ix} z_i - \sum_{i=1}^m f_{iz} x_i + T_y^{ext} \\
 T_z &= \sum_{i=1}^m f_{iy} x_i - \sum_{i=1}^m f_{ix} y_i + T_z^{ext}
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

上述所有矢量都是相对于大地坐标系。其中， $i$  代表第几条腿， $m$  为机器人触地腿的数量， $F_{gi} = [f_{ix}, f_{iy}, f_{iz}]^T$  为第  $i$  条支撑腿与地面的接触力， $[x_i, y_i, z_i]^T$  为第  $i$  条腿的足端在大地坐标系下的位置， $G_b = [0, 0, G, 0, 0, 0]^T$  为机身重力。令：

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= \begin{bmatrix} I_3 & I_3 & I_3 \\ R_1 & R_2 & R_3 \end{bmatrix}_{6 \times 9} \\
 Q_2 &= \begin{bmatrix} I_3 & I_3 & I_3 & I_3 \\ R_1 & R_2 & R_3 & R_4 \end{bmatrix}_{6 \times 12} \\
 R_i &= \begin{bmatrix} 0 & -z_i & y_i \\ z_i & 0 & -x_i \\ -y_i & x_i & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \\
 f &= [F_{g1}^T, \dots, F_{gm}^T]^T
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

结合式 (2.11) 和式 (2.12)，可以写成如下：

$$W - W^{ext} - G_b = \begin{bmatrix} F_x - F_x^{ext} \\ F_y - F_y^{ext} \\ F_z - G - F_z^{ext} \\ T_x - T_x^{ext} \\ T_y - T_y^{ext} \\ T_z - T_z^{ext} \end{bmatrix} = Qf, \begin{cases} Q = Q_1, m = 3 \\ Q = Q_2, m = 4 \end{cases} \quad (2.13)$$

假设机器人足端工作空间合理，使  $Q$  矩阵满足行满秩或者列满秩，可以求得

$Q^+ = Q^T(QQ^T)^{-1}$ ，代入式(2.13)，有：

$$f = Q^+(W - W^{ext} - G_b) \quad (2.14)$$

令  $d = -J_g^T Q^+ W^{ext}$ ， $\tau_g = J_g^T Q^+(W - G_b)$ ， $d$  代表外力扰动项， $\tau_g$  是机器人腿处于支撑相时的额外关节转矩。再结合式(2.14)，代入到腿部动力学方程式(2.10)，可以得到带有扰动项完整的动力学方程：

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau - d - \tau_g \quad (2.15)$$



### 三、 四足机器人的 trot 步态规划

步态是各腿在时间和空间上的运动顺序，平整地面上多为周期步态。当腿与地面接触时，腿的状态为支撑相，腿在空中摆动时状态为摆动相。同一条腿到达相同状态所需时间为周期。单腿经过一个摆动相，机身质心相对于地面前进的距离为单腿步距。支撑相时长与周期的比为占空比。第  $n$  条腿的着地时刻与参考腿着地时刻的差值与运动周期的比为相位差。足端轨迹是机器人单腿足端在空间内走过的轨迹，在  $X, Z$  方向均是关于时间的函数。足端轨迹影响机器人行走时的速度及稳定性等，需满足以下条件：①轨迹平滑，无位置突变，保证机器人的行走过程平稳；②速度连续；③加速度不宜过大，否则会对足端产生较大冲击力，影响整机的稳定性；④各关节角变化连续。

对角小跑步态(trot)是稳定性极高的动步态，其对角线上的腿运动一致。选其占空比为 0.5，即每个时刻都有两条腿处于着地状态，另外两条腿处于空中摆动状态，Trot 步态的相位关系如图 3.1 所示。

LF	■	□	■	□
RF	□	■	□	■
LH	□	■	□	■
RH	■	□	■	□

图 3.1 trot 步态相位关系

Trot 步态时，对角线上两足运动状态一致，支撑相两足相对于各自髋部的速度是一致的，在机身坐标系下设计足端轨迹方程，如下式 (2.3) 和 (2.4) 所示，取参数  $S = 0.05m$ ， $T = 1s$ ， $h = 0.3m$ ， $H = 0.41m$ 。Trot 步态期望轨迹如图 3.2 所示。

$$X_{trot} = \begin{cases} X_{sw} = -\frac{16S}{T^3}t^3 + \frac{12S}{T^2}t^2 - \frac{S}{2}, 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ X_{st} = \frac{16S}{T^3}t^3 - \frac{36S}{T^2}t^2 + \frac{24S}{T}t - \frac{9S}{2}, \frac{T}{2} \leq t \leq T \end{cases} \quad (3.3)$$

$$Z_{trot} = \begin{cases} Z_{sw} = -\frac{128(H-h)}{T^3}t^3 + \frac{48(H-h)}{T^2}t^2 - H, 0 \leq t < \frac{T}{4} \\ Z_{sw} = \frac{128(H-h)}{T^3}t^3 - \frac{144(H-h)}{T^2}t^2 + \frac{48(H-h)}{T}t + 4h - 5H, \frac{T}{4} \leq t < \frac{T}{2} \\ Z_{st} = -H, \frac{T}{2} \leq t \leq T \end{cases} \quad (3.4)$$

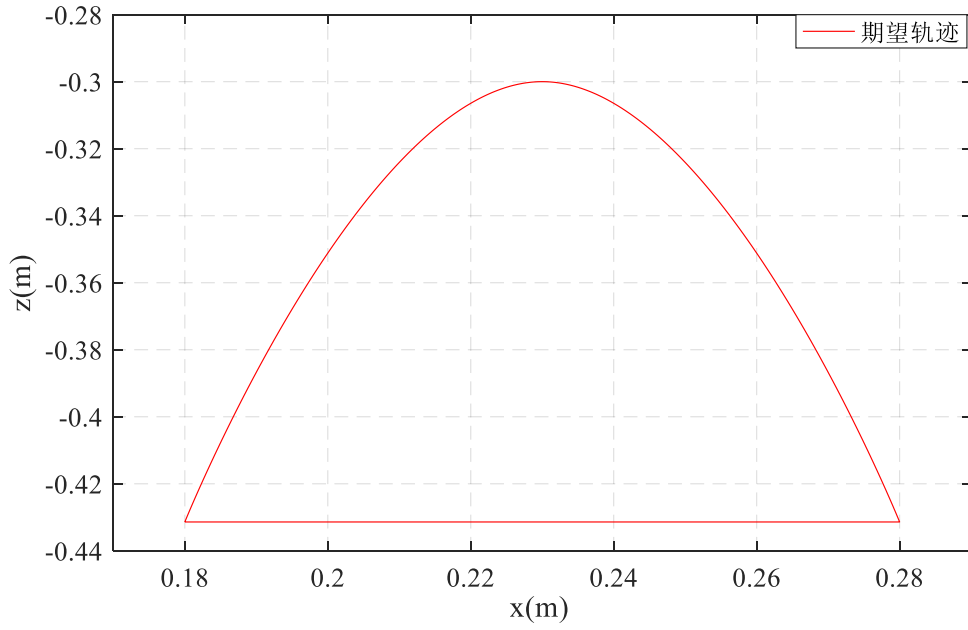


图 3.2 trot 步态期望足端轨迹

为了方便设计足端轨迹，在设计时，选取的参考坐标系为机身坐标系，然而实际机器人在运动过程中参考的是大地坐标系。这就需要将机身坐标下的足端轨迹转换到大地坐标系。设大地坐标系跟随机身质心坐标系，机体的横滚角、俯仰角、航向角分别为  $\phi_x$ 、 $\phi_y$ 、 $\phi_z$ ，按照  $X-Y-Z$  的旋转变换，得到变换矩阵如下：

$${}^W_B T = \begin{bmatrix} \cos \phi_y \cos \phi_z & -\cos \phi_y \sin \phi_z & \sin \phi_y \\ \cos \phi_x \sin \phi_z + \sin \phi_x \sin \phi_y \cos \phi_z & \cos \phi_x \cos \phi_z - \sin \phi_x \sin \phi_y \sin \phi_z & -\sin \phi_x \cos \phi_y \\ \sin \phi_x \sin \phi_z - \cos \phi_x \sin \phi_y \cos \phi_z & \sin \phi_x \cos \phi_z + \cos \phi_x \sin \phi_y \sin \phi_z & \cos \phi_x \cos \phi_y \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

则机器人四足在大地坐标系下的坐标为：

$$\begin{bmatrix} {}^W p_x \\ {}^W p_y \\ {}^W p_z \end{bmatrix} = {}^W_B T \begin{bmatrix} {}^B p_x \\ {}^B p_y \\ {}^B p_z \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

由此可得，基于大地坐标系的足端期望轨迹为：

$$\begin{bmatrix} {}^W X_{walk} \\ {}^W Y_{walk} \\ {}^W Z_{walk} \end{bmatrix} = {}^W_B T \bullet \begin{bmatrix} X_{walk} \\ Y_{walk} \\ Z_{walk} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

$$\begin{bmatrix} {}^W X_{trot} \\ {}^W Y_{trot} \\ {}^W Z_{trot} \end{bmatrix} = {}^W_B T \bullet \begin{bmatrix} X_{trot} \\ Y_{trot} \\ Z_{trot} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

之后，本文将在第三章所设计的 trot 步态下，进行行进间负载突变的机器人鲁棒稳定研究。

## 四、 负载突变下四足机器人的鲁棒稳定控制器设计

针对负载突变这一典型外力扰动，本项目所设计的鲁棒稳定控制系统结构如图 4.1 所示，控制系统由内环和外环组成。内环由基于关节角度和角速度跟踪误差的滑模面、计算力矩法的滑模控制、非线性干扰观测器(NLDO)和四足机器人这四个部分构成。其预期功能是使关节角能够跟踪期望的关节角度输入信号，具体实现方法如下：规划好四足机器人的步态，给出期望关节角度与角速度，根据与实际关节角度、角速度跟踪的误差，建立一个滑模面。非线性干扰观测器估计出扰动作用在关节上的分量，通过本文所设计控制策略的补偿控制，一方面可以抵消扰动或尽可能降低扰动带来的影响，另一方面本文所设计的非线性观测器还可降低切换增益和滑模面带来的抖振，从而使机体的实际关节角度能够跟踪上期望关节角度输入信号。外环是基于前馈信号和位置跟踪误差的位置控制器，使得输出的实际足端位置能够跟踪给定输入。

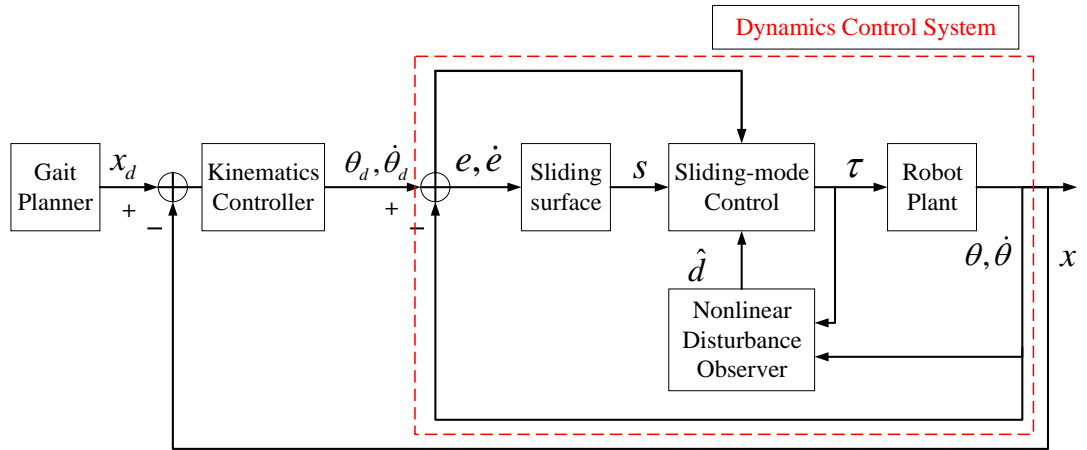


图 4.1 四足机器人的控制系统框图

### 4.1 带有观测器的关节角滑模跟踪控制器设计

#### 4.1.1 非线性干扰观测器

非线性干扰观测器设计为

$$\begin{cases} \dot{z} = L(q)(C\dot{q} + G - \tau + \tau_g) - L(q)\hat{d} \\ \hat{d} = z + p(\dot{q}) \end{cases} \quad (4.1)$$

式 (4.1) 干扰观测器的增益矩阵取

$$L(q) = X^{-1}M^{-1} \quad (4.2)$$

其中,  $X \in R^{3k \times 3k}$  是一个常数可逆的矩阵。

由于角加速度信号的难以获得, 向量  $\dot{p}(\dot{q})$  可以由改进的观测器增益矩阵  $L(q)$  得到:

$$\dot{p}(\dot{q}) = L(q)M\ddot{q} \quad (4.3)$$

结合式(4.2)和(4.3), 可得:

$$p(\dot{q}) = X^{-1}\dot{q} \quad (4.4)$$

从而, 式(4.1)、(4.2)和(4.4)构成了完整的非线性干扰观测器。

设计李雅普诺夫函数

$$V_o = \tilde{d}^T X^T M X \tilde{d} \quad (4.5)$$

由于  $M$  为对称正定矩阵,  $X$  也是可逆矩阵, 所以推出  $X^T M X$  也是正定的。

从而李雅普诺夫函数  $V_o$  也是正定的。观测误差定义为  $\tilde{d} = d - \hat{d}$ 。

取式(4.5)对时间的导数, 得到

$$\dot{V}_o = \dot{\tilde{d}}^T X^T M X \tilde{d} + \tilde{d}^T X^T \dot{M} X \tilde{d} + \tilde{d}^T X^T M X \dot{\tilde{d}} \quad (4.6)$$

由观测器式(4.1)可得

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{d}} &= \dot{d} - \dot{\hat{d}} = \dot{d} - \dot{z} - \dot{p}(\dot{q}) \\ &= \dot{d} - L(q)(C\dot{q} + G - \tau + \tau_g) + L(q)\hat{d} - L(q)M\ddot{q} \\ &= \dot{d} + L(q)\hat{d} - L(q)(M\ddot{q} + C\dot{q} + G - \tau + \tau_g) \\ &= \dot{d} + L(q)\hat{d} - L(q)d \\ &= \dot{d} - L(q)\tilde{d} \end{aligned} \quad (4.7)$$

假设干扰力矩  $d$  为常值扰动, 则有  $\dot{d} = 0$ , 在机器人学的文献中, 这样的假设很常见。因而可以通过式 (4.7) 得到观测误差方程为

$$\dot{\tilde{d}} + L(q)\tilde{d} = 0 \quad (4.8)$$

这等价于:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{d}} &= -L(q)\tilde{d} = -X^{-1}M^{-1}\tilde{d} \\ \dot{\tilde{d}}^T &= -(X^{-1}M^{-1}\tilde{d})^T = -\tilde{d}^T M^{-T} X^{-T} \end{aligned} \quad (4.9)$$

将式(4.9)代入式(4.6), 得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_o &= \dot{\tilde{d}}^T X^T M X \tilde{d} + \tilde{d}^T X^T \dot{M} X \tilde{d} + \tilde{d}^T X^T M X \dot{\tilde{d}} \\ &= -\tilde{d}^T M^{-T} X^{-T} X^T M X \tilde{d} + \tilde{d}^T X^T \dot{M} X \tilde{d} - \tilde{d}^T X^T M X X^{-1} M^{-1} \tilde{d} \\ &= -\tilde{d}^T X \tilde{d} + \tilde{d}^T X^T \dot{M} X \tilde{d} - \tilde{d}^T X^T \tilde{d} \\ &= -\tilde{d}^T (X - X^T \dot{M} X + X^T) \tilde{d} \end{aligned} \quad (4.10)$$

假设存在一个对称正定的矩阵  $\Gamma$  满足如下不等式:

$$X + X^T - X^T \dot{M} X \geq \Gamma \quad (4.11)$$

于是

$$\dot{V}_o \leq -\tilde{d}^T \Gamma \tilde{d} \quad (4.12)$$

由式(4.10)和(4.11)可知,  $\dot{V}_o$  对于所有的观测误差  $\tilde{d} \in R^{3k}$  都负定。因此, 观测误差会渐进收敛到 0: 对于  $\forall \tilde{d} \in R^{3k}$  都有  $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{d} = 0$ 。

继续考虑李雅普诺夫函数的收敛速度问题, 由式(4.5)可以得出:

$$\lambda_{\min}(X^T M X) \|\tilde{d}\|^2 \leq V_o \leq \lambda_{\max}(X^T M X) \|\tilde{d}\|^2. \quad (4.13)$$

定义  $M$  的下确界为  $\sigma_1$ , 上确界为  $\sigma_2$ , 则  $\sigma_1 \leq \|M\| \leq \sigma_2$ 。由式(4.13)可以得出如下方程:

$$V_o \leq \|X^T M X\| \leq \sigma_1 \|X\|^2 \cdot \|\tilde{d}\|^2. \quad (4.14)$$

同理, 由式(4.12)可以得出:

$$\dot{V}_o \leq -\lambda_{\min}(\Gamma) \|\tilde{d}\|^2 \quad (4.15)$$

联立(4.14)与(4.15)，得到

$$\dot{V}_0 \leq -\frac{\lambda_{\min}(\Gamma)}{\sigma_1 \|X\|^2} V_0 \Rightarrow V_0(t) \leq V_0(t_0) \exp\left(-\frac{\lambda_{\min}(\Gamma)}{\sigma_1 \|X\|^2} t\right) \quad (4.16)$$

所以，李雅普诺夫标量函数  $V_0$  的最小收敛速率为  $\frac{\lambda_{\min}(\Gamma)}{\sigma_1 \|X\|^2}$ 。

由式 (4.5) 可以得到：

$$V_0 \geq \sigma_1 \tilde{d}^T X^T X \tilde{d} \geq \sigma_1 \lambda_{\min}(X^T X) \|\tilde{d}\|^2 \quad (4.17)$$

联立式(4.16)、(4.17)，可得：

$$\|\tilde{d}\|^2 \leq \frac{V_0(t_0)}{\sigma_1 \lambda_{\min}(X^T X)} \exp\left(-\frac{\lambda_{\min}(\Gamma)}{\sigma_1 \|X\|^2} t\right) \quad (4.18)$$

式 (4.18) 左右两边同时开根号，就可以得出干扰观测器跟踪信号误差最小收敛速率为  $\lambda_{\min}(\Gamma) / 2\sigma_1 \|X\|^2$ 。由此得出， $\lambda_{\min}(\Gamma)$  越大， $\|X\|$  越小，观测器跟踪误差最小收敛速率越大。

由不等式(4.11)可见，式中含有非线性项，必须转化为线性矩阵不等式 (LMI) 才能求解。令  $Y = X^{-1}$ ，将  $Y^T = (X^{-1})^T$  和  $Y = X^{-1}$  分别乘以式(4.11)的左右两边，得

$$Y^T + Y - \dot{M} \geq Y^T \Gamma Y \quad (4.19)$$

即

$$Y^T + Y - Y^T \Gamma Y \geq \dot{M} \quad (4.20)$$

定义  $\dot{M}$  的上界为  $\zeta$ ，则  $\|\dot{M}\| \leq \zeta$ ，可以推出  $\dot{M} \leq \zeta I$ ，则式(4.20)成立的充分条件为

$$Y^T + Y - \zeta I - Y^T \Gamma Y \geq 0 \quad (4.21)$$

根据 Schur 补定理（参考附录 C），则上式(4.21)等价于

$$\begin{bmatrix} Y^T + Y - \zeta I & Y^T \\ Y & \Gamma^{-1} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (4.22)$$

通过 MATLAB 下的 LMI 控制工具箱求解式(4.22)，便可以得到  $Y$ ，从而得到  $X$ 。

#### 4.1.2 滑模跟踪控制器

采用观测器式(4.1)观测的干扰  $d$ ，在滑模控制中对干扰进行补偿，可有效地降低切换增益和降低抖振，从而使机体的关节角度能够跟踪上期望的关节角度输入信号。

假设关节的期望输入角度为  $q_d$ ，定义跟踪误差  $e = q - q_d$ ，取辅助变量  $\dot{q}_r = \dot{q}_d - \Lambda_1 e$ ，即有  $\ddot{q}_r = \ddot{q}_d - \Lambda_1 \dot{e}$ 。

其中， $\Lambda_1 = \lambda_1 I_{12 \times 12}$ ， $\lambda_1 > 0$ 。定义滑模函数为

$$s = \dot{e} + \Lambda_1 e \quad (4.23)$$

于是

$$\dot{s} = \ddot{q} - \ddot{q}_d + \Lambda_1 \dot{e} = M^{-1}(\tau - C\dot{q} - G - J_g^T F_g + d) - \ddot{q}_d + \Lambda_1 \dot{e} \quad (4.24)$$

设计控制器为

$$\tau = M\ddot{q}_r + C\dot{q}_r + G - \eta \operatorname{sgn} s - \hat{d} - K_D s + J_g^T F_g \quad (4.25)$$

从而有

$$M\dot{s} = M\ddot{q}_r - \eta \operatorname{sgn} s + \tilde{d} + C(\dot{q}_r - \dot{q}) + M(\Lambda_1 \dot{e} - \ddot{q}_d) - K_D s = -\eta \operatorname{sgn} s + \tilde{d} - Cs - K_D s \quad (4.26)$$

其中， $\tilde{d} = d - \hat{d}$ ， $K_D = \lambda_2 I_{12 \times 12}$ ， $\lambda_2 > 0$ 。

由于  $M$  为正定阵，设计闭环系统 Lyapunov 函数为

$$V_1 = \frac{1}{2} s^T M s \quad (4.27)$$

由于干扰观测器指数收敛，则  $\|\tilde{d}\| \leq \|\tilde{d}(t_0)\|$ 。取  $\eta > \|\tilde{d}(t_0)\|$ ，则有

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= s^T M \dot{s} + \frac{1}{2} s^T \dot{M} s = s^T (-\eta \operatorname{sgn} s + \tilde{d} - Cs - K_D s) + \frac{1}{2} s^T \dot{M} s \\ &= -\eta \|s\| + s^T \tilde{d} - s^T K_D s + \frac{1}{2} s^T (\dot{M} - 2C) s \end{aligned} \quad (4.28)$$

由于  $\dot{M} - 2C$  为一个反对称矩阵，则有

$$\dot{V}_1 = -\eta \|s\| + s^T \tilde{d} - s^T K_D s \leq -s^T K_D s \quad (4.29)$$



由上式可得

$$\dot{V}_1 \leq -s^T K_D s \leq -\mu V_1 \quad (4.30)$$

其中,  $\mu = \frac{2\lambda_{K_d \min}}{\lambda_{M \max}}$ ,  $\lambda_{K_d \min}$  和  $\lambda_{M \max}$  分别为  $K_D$  和  $M$  的最小和最大特征值。

采用不等式求解式(4.30), 不等式方程  $\dot{V}_1 \leq -\mu V_1$  的解为

$$V_1(t) \leq e^{-\mu(t-t_0)} V_1(t_0) \quad (4.31)$$

从而可得, 当  $t \rightarrow \infty$  时, 滑模函数  $s$  趋近于零, 即  $\tilde{q} \rightarrow 0$ ,  $\dot{\tilde{q}} \rightarrow 0$  且指数收敛,

收敛速度取决于参数  $\mu$  的值。

## 4.2 足端轨迹跟踪控制器的设计

本节的控制目标是在给定足端运动轨迹的情况下, 产生相应的关节角度使得实际的足端位置能够跟踪给定输入。要解决这一问题, 可以采用末端执行器位置的期望值与实际值之间的误差来进行控制, 控制框图如图 4.2, 其中  $J(\theta)$  是雅克比矩阵, 且有关系:

$$\dot{x} = J(\theta)\dot{\theta} \quad (4.32)$$

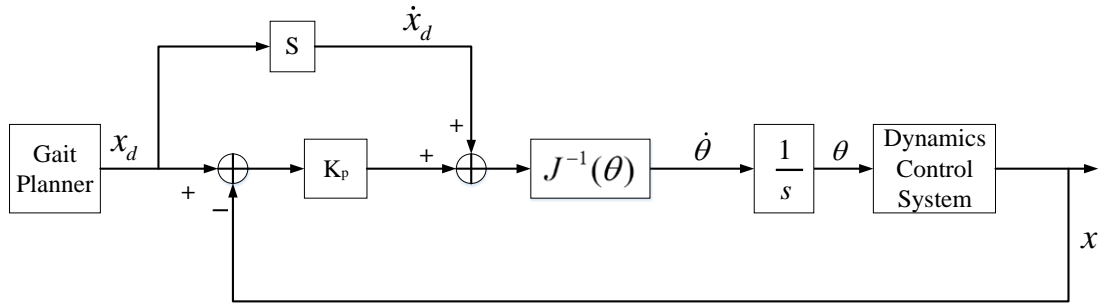


图 4.2 足端轨迹跟踪框图

定义足端位置跟踪误差为:

$$e = x_d - x \quad (4.32)$$

将式(4.32)对时间求导, 得:

$$\dot{e} = \dot{x}_d - \dot{x} \quad (4.33)$$

根据微分运动学(4.32)，上式可以写为：

$$\dot{e} = \dot{x}_d - J(\theta)\dot{\theta} \quad (4.34)$$

为了让误差  $e$  收敛到零，必须选择  $\dot{q}$  和  $e$  之间得关系。

在矩阵  $J(\theta)$  为非奇异方阵的情况下，由图 4.2 可以得到如下关系：

$$\dot{\theta} = J^{-1}(\theta)(\dot{x}_d + K_p e) \quad (4.35)$$

将式(4.34)代入到式(4.35)得到等价的线性系统

$$\dot{e} + K_p e = 0 \quad (4.36)$$

如果  $K_p$  为一个正定矩阵，则系统是渐进稳定的，误差沿轨迹趋于零，收敛速度取决于矩阵  $K_p$  的特征值，特征值越大，收敛速度越快。

## 五、 MATLAB 和 ADAMS 的联合仿真

### 5.1 仿真环境设置

由于需要同时对多个参数变量进行实时检测、计算和调整并且需要模拟实际系统的动力学特性，控制过程相对复杂，因此选择 MATLAB 与 ADAMS 联合仿真技术来进行算法仿真验证。仿真环境设置如下：

第一步，在 ADAMS 里建立四足机器人的模型，四足机器人有四条结构一样的腿，每条腿有三个自由度。下面仿真中髋关节侧摆关节指关节 1，髋关节前摆关节指关节 2，膝关节前摆关节指关节 3。使四条腿关节 1 的初始位置为 0 度，关节 2 的初始位置为-30 度，关节 3 的初始位置为 60 度，在每个关节处添加旋转副，在足端设置与地面的接触。

第二步，建立 ADAMS 和 SIMULINK 交互的数据，ADAMS 的输入就是 SIMULINK 的输出，ADAMS 的输出就是 SIMULINK 的输入。设置 ADAMS 的输入为 12 个关节的力矩，ADAMS 的输出为 12 个关节的角度和角速度，机身的姿态角和姿态角速度。

第三步，设置仿真步长为 0.001s，仿真求解器为 ode15s，动画模式为交互式，仿真模型为离散型。仿真软件为 MATLAB2016a 和 ADAMS2017。

### 5.2 仿真结果分析

为测试本文所提出控制策略的正确性及有效性，设计了以下 4 个仿真。其中仿真二三四分别包括不加观测器和加观测器两种情况，因此共有 7 段仿真视频，为便于观看，将以上 4 个仿真的 7 段视频拼接成一段时长 73 秒的视频，见附件。

仿真一：正常 trot 步态行走（00:00-00:12）

仿真二：静止状态机身前向突加负载（00:14-00:23 常规滑模控制器，00:24-00:31 带观测器的滑模控制）

仿真三：静止状态机身侧向突加负载（00:32-00:46 常规滑模控制器，00:47-00:55 带观测器的滑模控制）

仿真四：行进状态机身任意位置突加负载（00:56-01:02 常规滑模控制器，01:03-01:13 带观测器的滑模控制）

仿真内容囊括了四足机器人在无外力扰动下的常规运动和有外力扰动下的应急反应。其中外力扰动下机体的应急反应仿真按如下方式展开：分别在静止和运动、有观测器和无观测器作用的状态下，对机身突加负载。以四足机器人的关节角变化或姿态角变化为切入口，对其运动性能和姿态稳定性进行 MATLAB 仿真曲线分析，并在视频中直观展示机体的姿态变化。

### 5.2.1 仿真一：正常 trot 步态行走

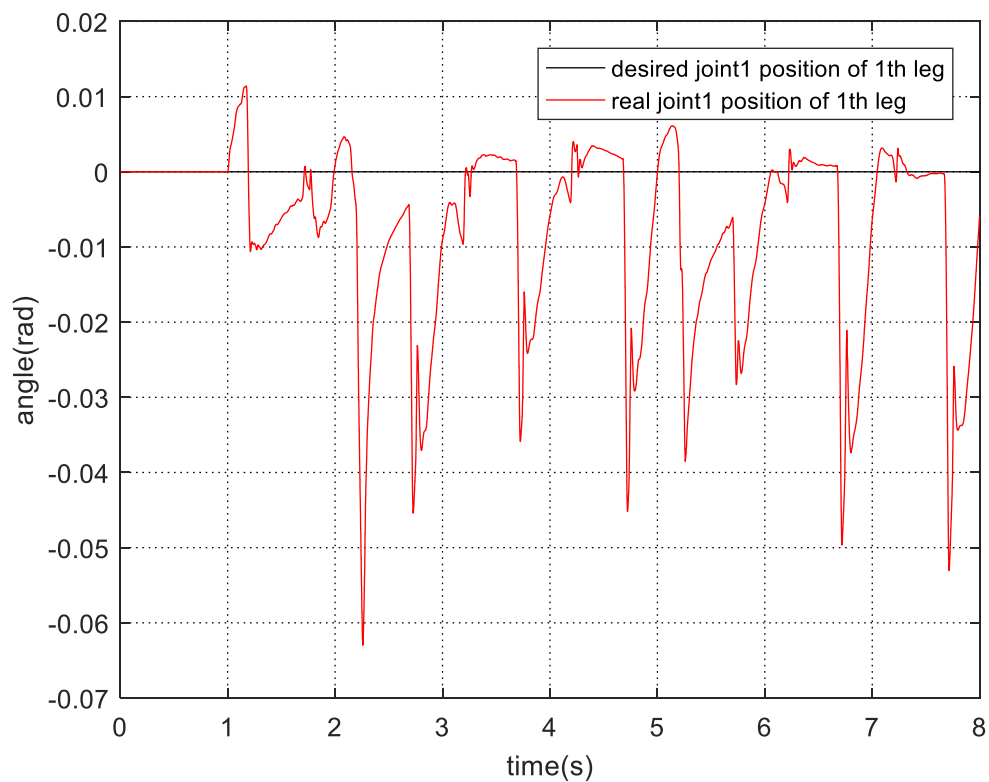


图 5.1 髋关节侧摆的关节角度

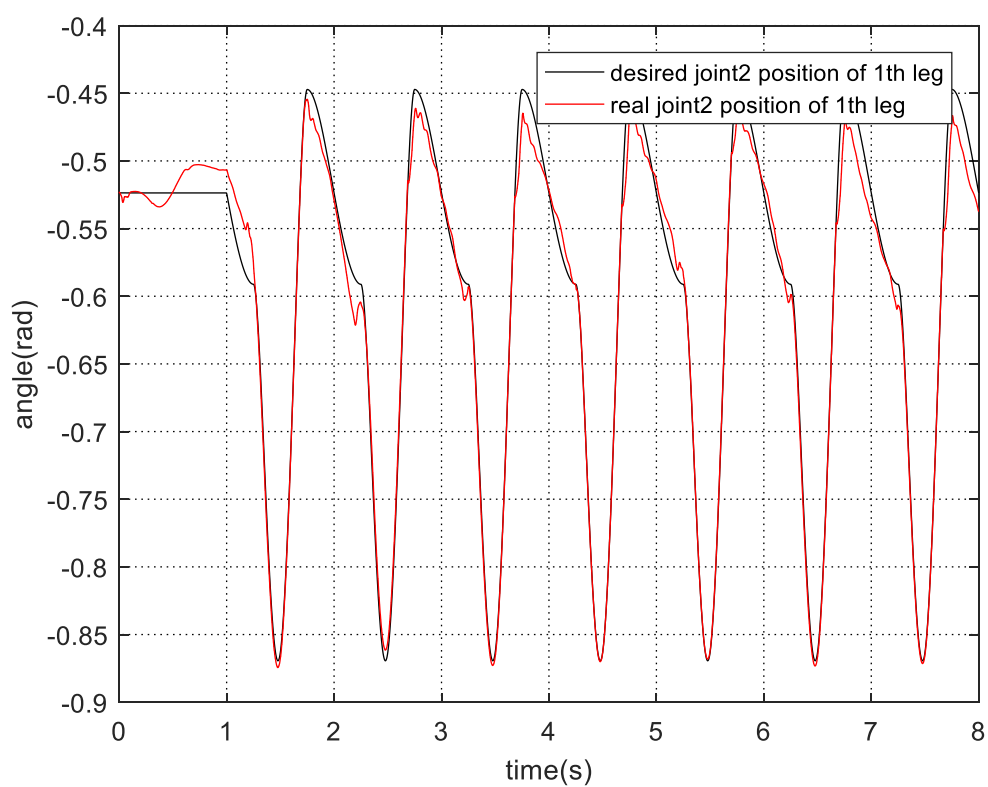


图 5.2 髋关节前摆的关节角度

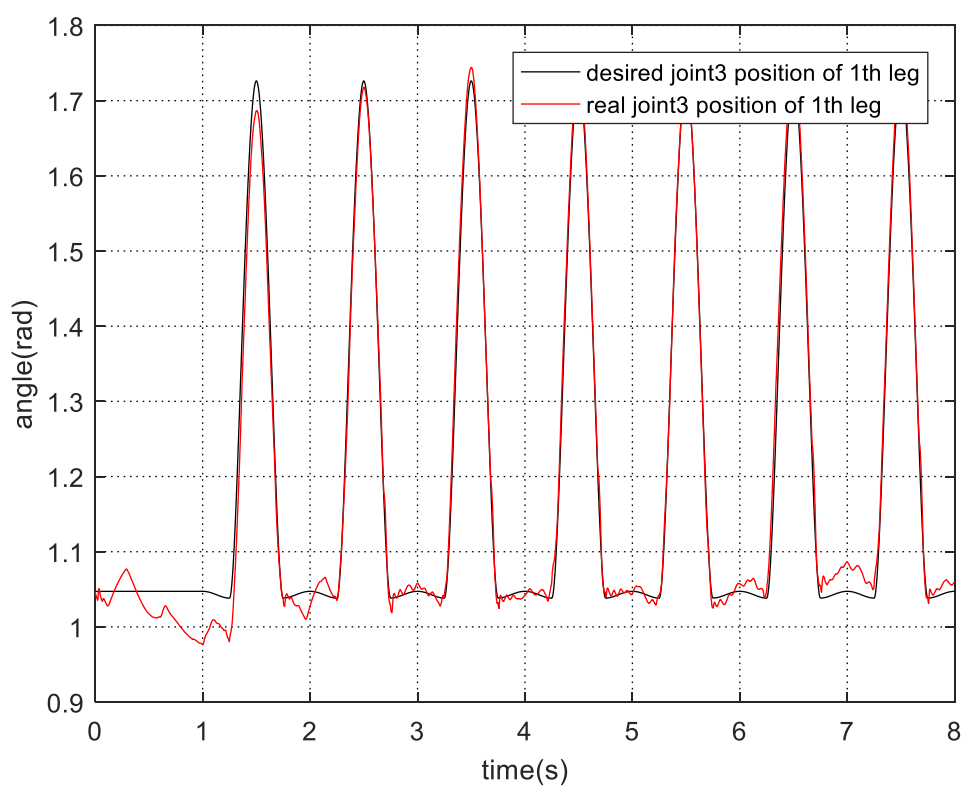


图 5.3 膝关节前摆的关节角度

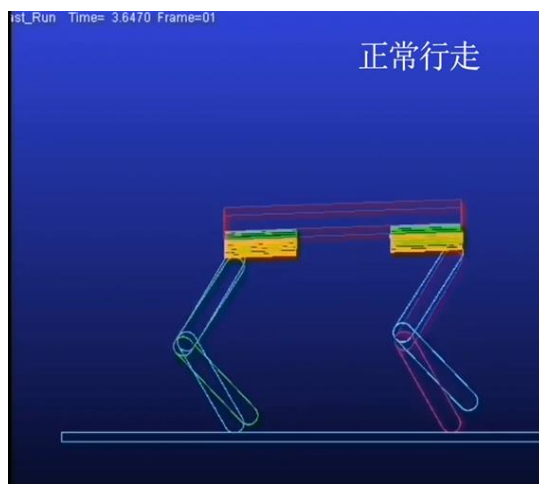


图 5.4 仿真一正常 trot 步态行走仿真视频截图

图 5.1 至 5.3 分别为四足机器人以 trot 步态行走过程中腿部三个关节角的变化曲线图。如图 5.1 所示，髋关节的侧摆关节角设定值为  $0\text{rad}$ ，即设定机身仅有前向运动无侧摆运动，实际角度在  $-0.06\text{rad}$  至  $+0.01\text{rad}$  之间小幅度波动，可见跟踪效果较好。如图 5.2 和 5.3 所示，对于髋关节前摆的关节角和膝关节前摆的关节角，实际曲线与给定曲线基本重合，跟踪效果较好，验证了所设计的带有观测器的关节角滑模跟踪控制器的有效性。图 5.4 为仿真过程截图，00:00-00:12 的视频展示了机器人在控制策略作用下按照规划好的步态稳定行走的过程。

### 5.2.2 仿真二：静止状态机身前向突加负载

如图 5.5 所示，仿真初始时刻，机器人面向前向静止，初始机身质心离地面高度设置为  $0.43\text{m}$ 。质量为  $11.7\text{kg}$  的长方体负载在距机身  $0.22$  米处进行自由落体运动，落在左前腿与右前腿连线的中点处。四条腿将在外力冲击下产生关节角位移，机身有向前倾覆趋势，主要体现为俯仰角发生变化。

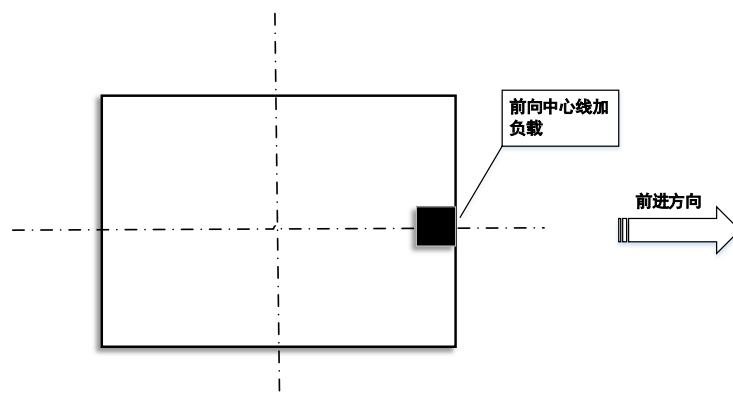


图 5.5 机身前向中心线突加负载俯视示意图

由于机身俯仰角的变化综合体现了机器人四条腿共 12 个关节角的变化，为简化分析过程，在这里以机器人的机身俯仰角为参量来分析前向中心线处突加负载情况下机器人的运动情况，图 5.6 分别给出了有无观测器作用下机身俯仰角绝对值变化曲线，红线对应未加观测器的情况，蓝线对应带观测器的情况。如图 5.6 中红色曲线所示， $t=0.23\text{s}$  时，在负载作用下机身俯仰角绝对值迅速由 0 变为  $0.025\text{rad}$  即  $1.43^\circ$ ， $t=0.23\text{s}$  后，角度恢复过程的响应时间较长，在  $t=1\text{s}$  时刻，恢复为  $0.005\text{rad}$  即  $0.29^\circ$ 。可以看出，在负载突变扰动下，虽然机器人最终趋于恢复原有站立状态，但整个反应过程较慢，恢复效果不佳，这一点在 00:14-00:23 不加观测器的演示视频中也得到了直观体现。图 5.7 为四足机器人机身在外力作用下被压至最低时的视频截图。

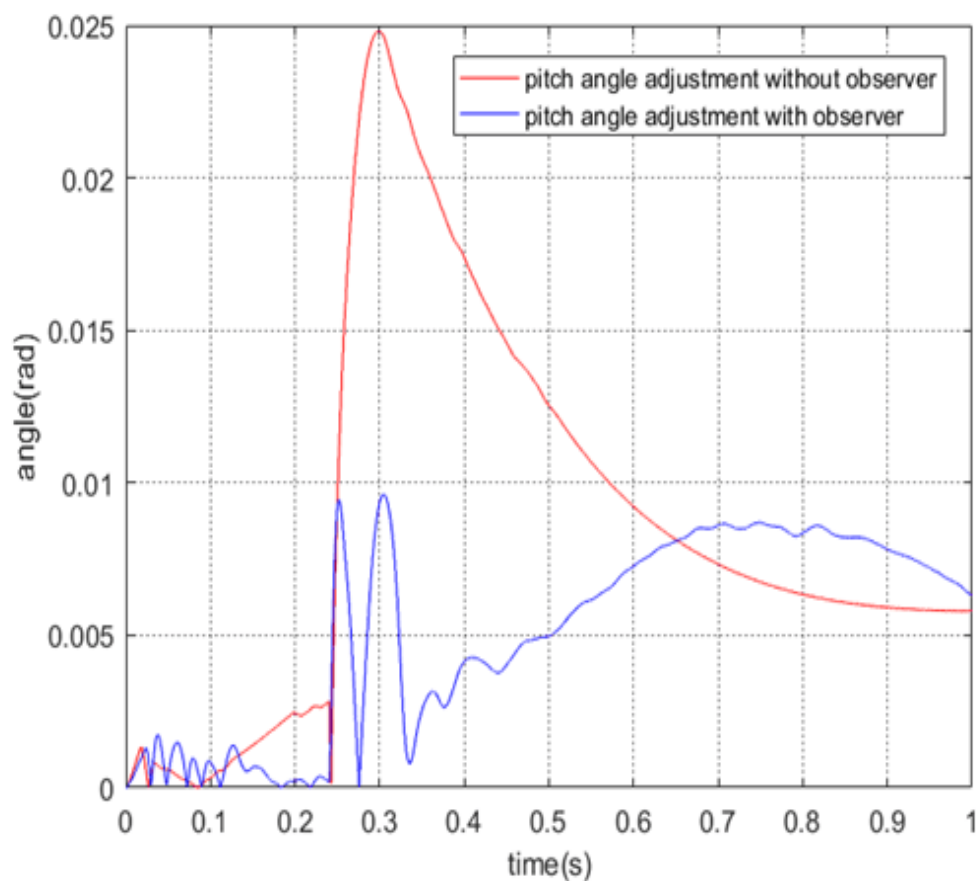


图 5.6 仿真二机身俯仰角绝对值变化曲线

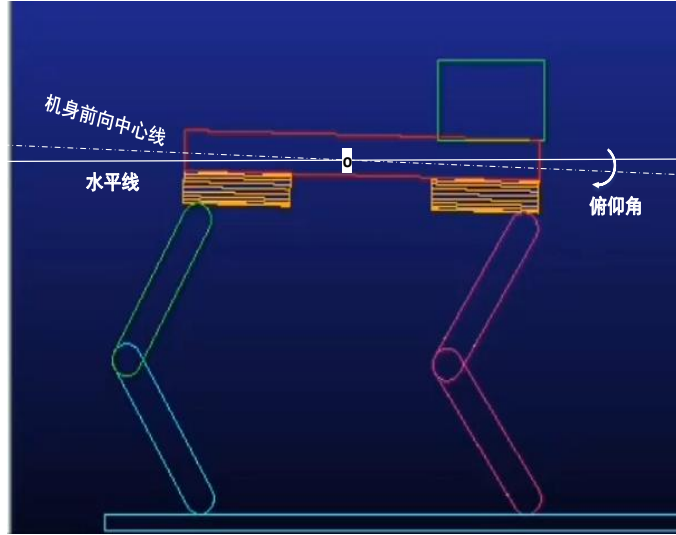


图 5.7 仿真二机身俯仰角示意图

静止状态下的机器人由于四条腿均处于支撑相，本身就具有一定的稳定性，在可承受的外力扰动范围内不至于发生倾倒，但会产生剧烈形变。我们希望机器人能够很好地对抗外力扰动，机体形变程度降低，从而减少恢复至稳定状态的时间，这正是本文所设计带观测器的滑模控制器的控制目标。机器人出现失稳现象时，对系统施加应对外力扰动的控制策略，即在观测器作用下，观察机身俯仰角的变化，与无观测器作用时的情况进行对比分析，进行了平衡恢复仿真：

同样在仿真初始时刻，质量为 11.7kg 的长方体负载在距机身 0.22 米处进行自由落体运动，落在左前腿与右前腿连线的中点处。00:24-00:31 的演示视频展示了有观测器作用下，在机器人前向中心线突加负载，机身及腿部关节的运动细节，从视频中可以直观看出来，机身有向前倾覆趋势，机器人两条前腿 LF 与 RF 处于机体向下倾斜的一侧，机身俯仰角改变，在带观测器的滑模控制器作用下，四条腿的髋、膝关节角位移进行相应调整，对抗向下的压力，机身向上抬起俯仰角几乎恢复为零，最终趋于平稳站立，整个恢复过程相较无观测器作用时机体形变更小，恢复过程更加迅速。如图 5.6 中蓝色曲线所示，相比红线，俯仰角变化幅度更小，证明加观测器之后，鲁棒稳定性更好，仿真验证了策略的有效性。

### 5.2.3 仿真三：静止状态机身侧向突加负载

为了分析负载加在机身不同位置处产生的影响，在仿真二的基础上开展了仿真三。如图 5.8 所示，仿真初始时刻，机器人面向前向静止，质量为 11.7kg 的长



方体负载在距机身 0.22 米处进行自由落体运动，落在左前腿与左后腿连线的中点处。机器人四条腿将在外力冲击下产生关节角位移，有侧翻趋势，机身三个姿态角的变化主要体现在横滚角，若不加以控制调整，系统将会在冲击扰动下产生大幅形变甚至失稳倾覆。

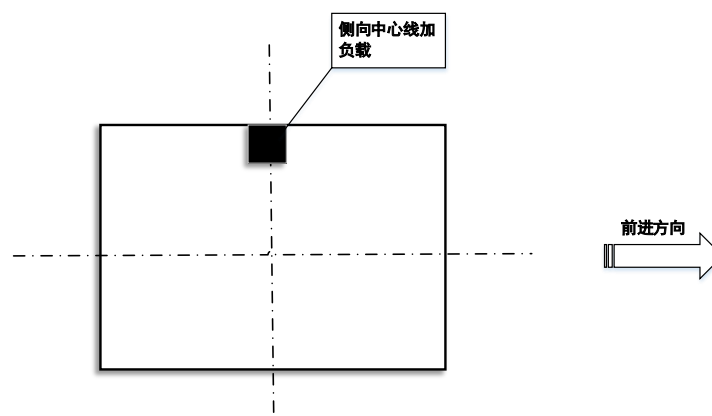


图 5.8 机身侧向中心线突加负载俯视示意图

由于机身横滚角的变化综合体现了机器人四条腿共 12 个关节角的变化，为简化分析过程，在这里选取机器人的机身横滚角为参量来分析侧向中心线处突加负载情况下机器人的运动情况。00:32-00:46 的视频展示出，无观测器作用下机器人形变程度较大。图 5.9 分别给出了有无观测器作用下机身横滚角绝对值变化曲线，红线对应未加观测器的情况，蓝线对应带观测器的情况。对图 5.9 中的红色曲线进行定量数值分析，红色曲线表示无观测器作用下横滚角的变化， $t=0.23s$  时，在负载作用下机身横滚角迅速由 0 变为  $0.05rad$  即  $2.87^\circ$ ，说明机身形变较为剧烈，随后横滚角恢复至稳定范围的响应时间较长，直到仿真结束时刻也未有大幅变化，图 5.10 为仿真结束时刻所截，此时机身横滚角仍然较大，说明曲线变化与视频展示基本一致。

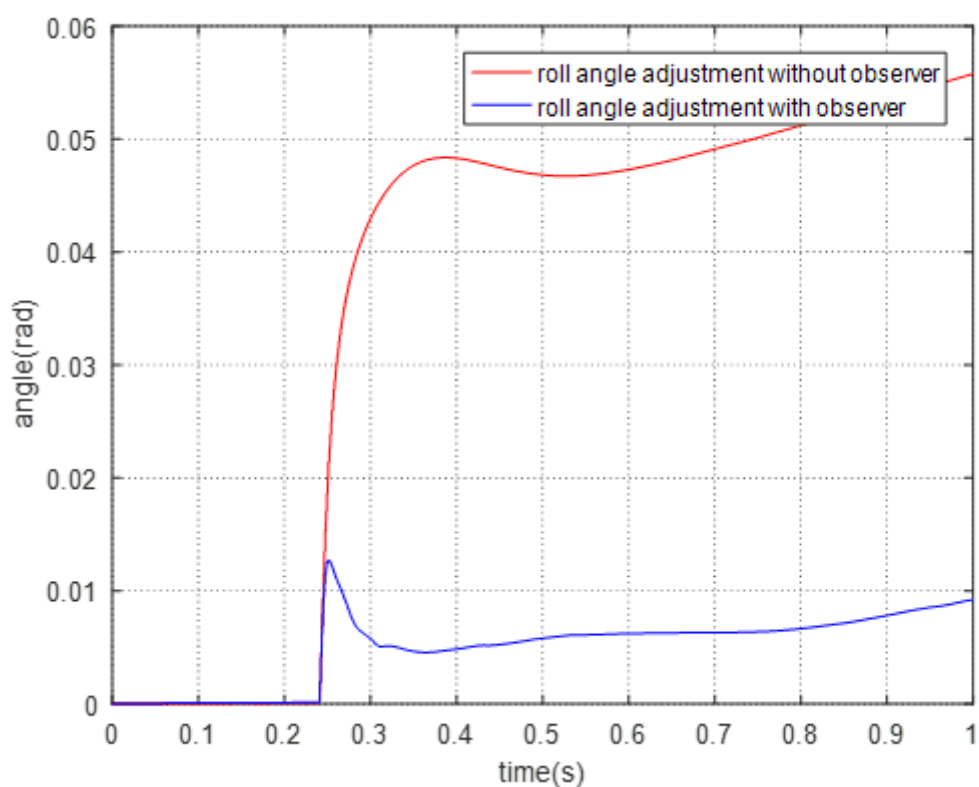


图 5.9 仿真三机身横滚角变化曲线

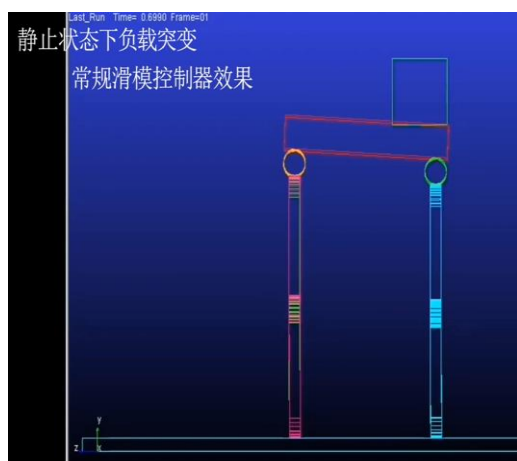


图 5.10 仿真三无观测器视频截图

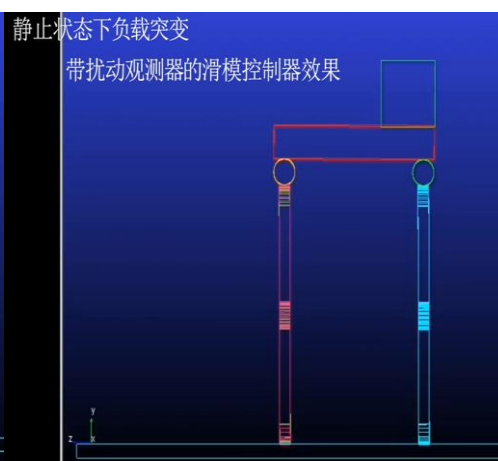


图 5.11 仿真三无观测器视频截图

在观测器作用下，观察机身横滚角的变化，与无观测器作用时的情况进行对比分析，进行了平衡恢复仿真：

同样在仿真初始时刻，质量为 11.7kg 的长方体负载在距机身 0.22 米处进行自由落体运动，落在左前腿与右前腿连线的中点处。00:47-00:55 的视频展示了有观测器作用情况下，在机器人侧向中心线突加负载，机身及腿部关节的运动细节，机器人两条腿 LF 与 LH 处于机体向下倾斜的一侧，机身横滚角改变，在观测器

作用下，系统能够估计扰动大小，使得四条腿的髋、膝关节角位移更快地进行相应调整，对抗向下的压力，机身向上抬起横滚角几乎恢复为零，最终趋于平稳站立，整个过程中机身的形变程度较小。如图 5.9 中蓝色曲线所示，相比红线，横滚角变化幅度更小，仅增大了  $0.01\text{rad}$ ，且恢复速度更快，迅速恢复至较小数值  $0.005\text{rad}$  即  $0.29^\circ$ ，几乎为 0，图 5.11 为仿真结束时刻所截，可见机身几乎恢复水平，与曲线描述一致，这充分证明此策略可行。

#### 5.2.4 仿真四：行进间机身任意位置突加负载

为了分析负载突变对行进间机器人的影响，在仿真一的基础上进行了仿真四。仿真开始时，机器人以正常步态前进，质量为  $11.7\text{kg}$  的长方体负载在距机身  $0.22$  米处进行自由落体运动，随机落在机身某一位置。机器人四条腿在外力冲击下产生关节角位移，机器人机身有侧翻趋势。无观测器作用时，00:56-01:02 的视频显示，四足机器人机身三个姿态角变化剧烈，机器人在外力扰动下失去平稳，发生侧翻，图 5.13 为四足机器人倾覆时刻的视频截图。

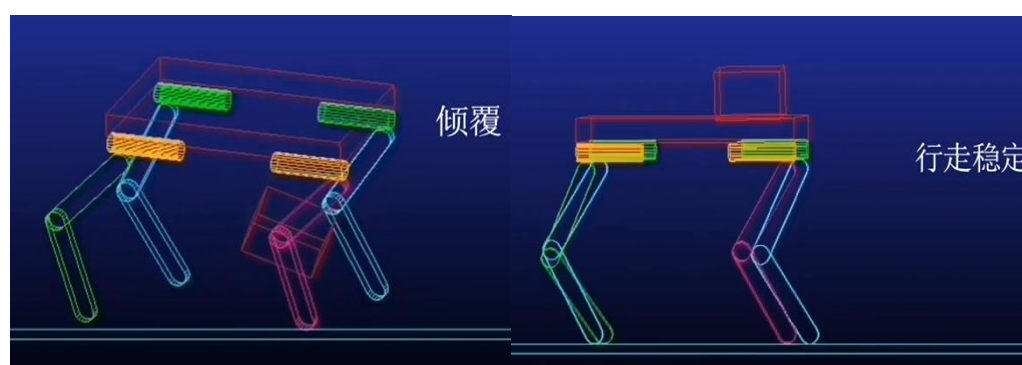


图 5.13 仿真四未加观测器视频截图

图 5.13 仿真四加观测器视频截图

在观测器作用下，观察负载突变对行进间机器人稳定性的影响，与无观测器作用时的情况进行对比分析。同样在开始时刻，机器人以正常步态前进，质量为  $11.7\text{kg}$  的长方体负载在距机身  $0.22$  米处进行自由落体运动，落在机身任意位置。01:03-01:13 的视频显示，与不加观测器的情况相比，机身的姿态变化更小，四足机器人在外力作用下能保持行走稳定，图 5.14 为四足机器人倾覆时刻的视频截图。

附录

附录 A 机器人参数表

参数	定义	数值
$b$	前后侧摆髋关节距离的一半	0.23(m)
$w$	左右侧摆髋关节距离的一半	0.13(m)
$h$	躯干质心与侧摆髋关节垂直距离	0.045m
$a_1$	髋部连杆长度	0.04m
$a_2$	大腿连杆长度	0.2m
$a_3$	小腿连杆长度	0.2m
$M$	躯干质量	58kg
$m_0$	髋部连杆质量	1.2kg
$m_1$	大腿连杆质量	1.4kg
$m_2$	小腿连杆质量	1.4kg

附录 B 四足机器人腿部动力学

考虑四足机器人腿部结构如图 2.1，腿部参数参考表 1.2，式 (2.9) 中第  $i$  条腿部动力学的具体参数如下：

$$M_i = \begin{bmatrix} M_{11} & 0 & 0 \\ 0 & M_{22} & M_{23} \\ 0 & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix}, \quad C_i(\theta_i, \dot{\theta}_i)\dot{\theta}_i = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix}, \quad G_i(\theta_i) = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{bmatrix},$$

$$J_{gi} = \begin{bmatrix} 0 & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix}$$

$$M_{11} = \frac{1}{6}(2L_1^2 m_1 + 6L_1^2 m_2 + 6L_1^2 m_3 + L_3^2 m_3 + 2L_2^2 m_2 \cos^2 \theta_{i2} + 6L_2^2 m_3 \cos^2 \theta_{i2} \\ + L_3^2 m_3 \cos(2\theta_{i2} + 2\theta_{i3}) + 6L_1 L_3 m_3 \cos(\theta_{i2} + \theta_{i3}) + 6L_1 L_2 m_2 \cos \theta_{i2} \\ + 12L_1 L_2 m_3 \cos \theta_{i2} + 3L_2 L_3 m_3 \cos(2\theta_{i2} + \theta_{i3}))$$

$$M_{22} = L_2^2 m_3 + \frac{L_3^2 m_3}{3} + \frac{L_2^2 m_2}{3} + L_2 L_3 m_3 \cos \theta_{i3}$$

$$M_{23} = M_{32} = \frac{L_3^2 m_3}{3} + \frac{L_2 L_3 m_3 \cos \theta_{i3}}{2}$$

$$M_{33} = \frac{L_3^2 m_3}{3}$$

$$C_1 = -\frac{1}{3}\dot{\theta}_{i1}\dot{\theta}_{i2}\left(L_2^2(m_2 + 3m_3)\sin(2\theta_{i2}) + L_3^2 m_3 \sin(2\theta_{i2} + 2\theta_{i3}) + 3L_1 L_3 m_3 \sin(\theta_{i2} + \theta_{i3})\right) \\ - \frac{1}{6}\dot{\theta}_{i1}\dot{\theta}_{i3}\left(2L_3^2 m_3 \sin(2\theta_{i2} + 2\theta_{i3}) + 6L_1 L_3 m_3 \sin(\theta_{i2} + \theta_{i3}) + 3L_2 L_3 m_3 \sin \theta_{i3} + 3L_2 L_3 m_3 \sin(2\theta_{i2} + \theta_{i3})\right)$$

$$C_2 = \frac{1}{6}\dot{\theta}_1^2\left(L_2^2 m_2 \sin(2\theta_{i2}) + L_3^2 m_3 \sin(2\theta_{i2} + 2\theta_{i3}) + 3L_2 L_3 m_3 \sin(2\theta_{i2} + \theta_{i3})\right) \\ - \left(\frac{1}{2}\dot{\theta}_3^2 + \dot{\theta}_2\dot{\theta}_3\right)L_2 L_3 m_3 \sin \theta_{i3}$$

$$G_1 = \frac{g \sin \theta_{i1}}{2}(L_1 m_1 + 2L_1 m_2 + L_3 m_3 \cos(\theta_{i2} + \theta_{i3}) + 2L_1 m_3 + L_2 m_2 \cos \theta_{i2} + 2L_2 m_3 \cos \theta_{i2})$$

$$G_2 = \frac{L_3 m_3 g \sin(\theta_{i2} + \theta_{i3})}{2} + \frac{L_2 m_2 g \cos \theta_{i1} \sin \theta_{i2}}{2} + L_2 m_3 g \cos \theta_{i1} \sin \theta_{i2}$$

$$G_3 = \frac{1}{2}L_3 m_3 g \sin(\theta_{i2} + \theta_{i3}) \cos \theta_{i1}$$

$$J_{12} = L_2 \cos \theta_{i2} + L_3 \cos(\theta_{i2} + \theta_{i3})$$

$$J_{13} = L_3 \cos(\theta_{i2} + \theta_{i3})$$

$$J_{21} = \cos \theta_{i1}(L_1 + L_2 \cos \theta_{i2} + L_3 \cos(\theta_{i2} + \theta_{i3}))$$

$$J_{22} = -\sin\theta_{i1}(L_2\sin\theta_{i2} + L_3\sin(\theta_{i2} + \theta_{i3}))$$

$$J_{23} = -L_3\sin\theta_{i1}\sin(\theta_{i2} + \theta_{i3})$$

$$J_{31} = \sin\theta_{i1}(L_1 + L_2\cos\theta_{i2} + L_3\cos(\theta_{i2} + \theta_{i3}))$$

$$J_{32} = \cos\theta_{i1}(L_2\sin\theta_{i2} + L_3\sin(\theta_{i2} + \theta_{i3}))$$

$$J_{23} = L_3\cos\theta_{i1}\sin(\theta_{i2} + \theta_{i3})$$

## 附录 C Schur 补不等式

假设矩阵  $C$  正定，则有以下关系成立：

$$A - BC^{-1}B^T \geq 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} \geq 0$$