Bài toán. Cho số thực x, $\lfloor x \rfloor$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x. Ví dụ, $\lfloor 4.2 \rfloor = 4$ và $\lfloor 0.9 \rfloor = 0$.
Nếu S là tổng của tất cả các số nguyên k với $1 \leq k \leq 999999$ và k chia hết cho $\left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor$, thì S có giá trị là

(A) 999 500 000 (B) 999 000 000 (C) 999 999 000

(D) 998 999 500 (E) 998 500 500.

Giải

Giả sử $\left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor = a$ với $a \in \mathbb{Z}^+$. Khi đó $a^2 \leq k < (a+1)^2$ hay $a^2 \leq k < a^2 + 2a + 1$.
Vì k là số nguyên nên ta đặt $k = a^2 + r$ với $r \in [0; 2a+1) \cap \mathbb{Z}^+$.
Mặt khác, k chia hết cho $\left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor$, nên $\dfrac{k}{a} \in \mathbb{Z}^+$, tức là $\dfrac{a^2 + r}{a} \in \mathbb{Z}^+$. Suy ra $\dfrac{r}{a} \in \mathbb{Z}^+$.
Chú ý rằng do $0 \leq r < 2a + 1$ nên $r \in \{0; a; 2a\}$. Do đó $k \in \{a^2; a^2 + a; a^2 + 2a\}$.
Ta có $1 \leq k \leq 999999 \Rightarrow 1 \leq a \leq 999$.
Như vậy,

$$S = \sum_{a=1}^{999} a^2 + \sum_{a=1}^{999} (a^2 + a) + \sum_{a=1}^{999} (a^2 + 2a) = 3 \sum_{a=1}^{999} (a(a+1) - a) + 3 \sum_{a=1}^{999} a = 3 \sum_{a=1}^{999} a(a+1).$$

Ta có

$$\begin{aligned}
\sum_{a=1}^{999} a(a+1) &= 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + 999 \cdot 1000 \\
&= \frac{1}{3} (1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot (4 - 1) + \cdots + 999 \cdot 1000 \cdot (1001 - 998)) \\
&= \frac{1}{3} (1 \cdot 2 \cdot 3 + (2 \cdot 3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 \cdot 3) + \cdots + (999 \cdot 1000 \cdot 1001 - 998 \cdot 999 \cdot 1000) \\
&= \frac{1}{3} (999 \cdot 1000 \cdot 1001) = 333333000.
\end{aligned}$$

Suy ra $S = 999999000 \to$ Chọn **(C)**.