第 5 讲　函数的概念

学习目标点

1. 理解函数的概念和函数的三个要素，尤其是对应关系的实质；

2. 掌握函数定义域、值域的求法，并能根据其意义解决一些逆向问题；

3. 理解复合函数的概念，能求一些复合函数的定义域，值域

知识集装箱

一、映射的概念：

设 A 、 B 是两个非空的集合，如果按某个确定的对应关系 f ，对于集合 A 中的任意一个元素，在集合 B 中都有唯一确定的元素和它对应，那么这样的对应（包括集合 A 、 B ，以及对应关系 f ）叫做集合 A 到集合 B 的映射，记作： $f:A\to B$.

二、象与原象的概念：

给定一个集合 A 到集合 B 的映射，且 $a\in A,b\in B$ ，如果元素 a 和元素 b 对应，那么我们把元素 b 叫做元素 a 的像，元素 a 叫做元素 b 的原像.

三、映射：

一般地，设 A ， B 是两个非空的集合， $f:A\to B$ 是集合 A 到集合 B 的映射，如果在这个映射下，对于集合 A 中的不同的元素，在集合 B 中有不同的象，而且 B 中每一个元素都有原象，那么这个映射叫做 A 到 B 的一一映射.

特别提醒：对一一映射概念的理解应注意以下两点：（1）集合 B 中的每一个元素都有原象，也就是说，集合 B 中不允许有剩余的元素。（2）对于集合 A 中的不同元素，在集合 B 中有不同的象，也就是说，不允许“多对一”；

四、函数的概念 ：

设 A 、 B 是两个非空的数集，如果按某一个确定的对应关系 f ,使对于集合 A 中的任意一个数 x ,在集合 B 中都有唯一确定的数 $f\left(x\right)$ 和它对应，那么就称 $f:A\to B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个函数，记作 $y=f\left(x\right),x\in A$ 。其中 x 叫自变量， x 的取值范围 A 叫做函数

$y=f(x)$的定义域；与x的值相对应的y的值叫做函数值，函数值的集合$\{f(x)\mid x\in A\}$叫做函数$y=f(x)$的值域.

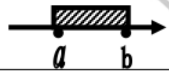
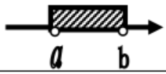
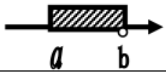
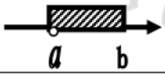
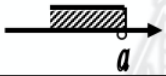
五、函数的值

$f(a)$表示当$x=a$时，函数$f(x)$的值，这个值就由“f”这一对应关系来确定；$f(x)$与$f(a)$是不同的，前者表示以x为自变量的函数，后者为常数

六、函数的三要素

我们通常把对应法则f、定义域A、值域$\{f(x)\mid x\in A\}$称为函数的三要素.由函数的定义可知，由于函数值域被函数的定义域和对应关系完全确定，这样确定一个函数只需两个要素：定义域和对应法则.如果两个函数的定义域和对应法则分别相同，我们就说这两个函数是同一函数.

七：区间的概念和记号

名称	定义	符号	数轴表示
闭区间	$\{x\|a\le x\le b\}$	$[a,b]$	
开区间	$\{x\|a<x<b\}$	(a,b)	
左闭右开区间	$\{x\|a\le x<b\}$	$[a,b)$	
左开右闭区间	$\{x\|a<x\le b\}$	$(a,b]$	
无穷区间	$\{x\|x\le a\}$	$(-\infty,a]$	
无穷区间	$\{x\|x<a\}$	$(-\infty,a)$	
无穷区间	$\{x\|x\ge a\}$	$[a,+\infty)$	
无穷区间	$\{x\|x>a\}$	$(a,+\infty)$	

八．分段函数

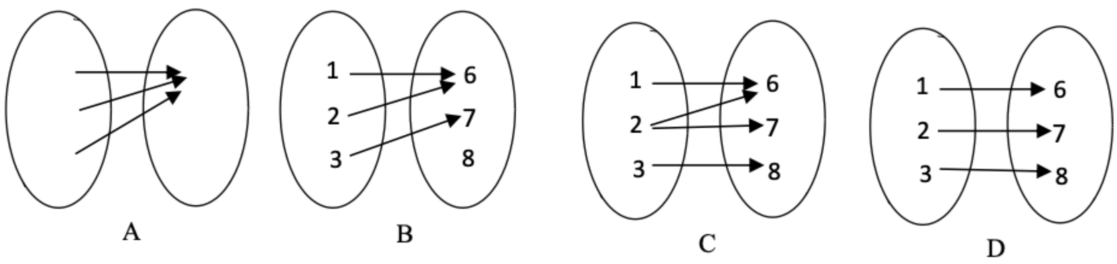
有些函数在它的定义域中，对于自变量x的不同取值范围，对应法则不同，这样的函数通常称为分段函数.如函数$y=|x|=\begin{cases}x,x>0\\0,x=0\\-x,x<0\end{cases}$.

九：复合函数

如果$y=f(u),u=g(x)$，那么$y=f[g(x)]$叫做f和g的复合函数，其中$g(x)$为内函数，$f(u)$为外函数.

案例 1

设 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{6,7,8\}$，如图给出的是从集合 A 到集合 B 的对应，其中不是从集合 A 到集合 B 的映射的是（　　）



实验 1

已知 $A=\{a_1, a_2\}$， $B=\{b_1, b_2\}$，则从 A 到 B 的不同映射共有（　　）

A．4 个　　　　B．3 个　　　　C．2 个　　　　D．1 个

案例 2

设 $f: A\to B$ 是集合 A 到 B 的映射，下列说法正确的是（　　）

A．A 中每一个元素在 B 中必有像　　　　B．B 中每一个元素在 A 中必有原像

C．B 中每一个元素在 A 中的原像是唯一的　　D．B 是 A 中所有元素的像的集合

实验 2

下列对应是集合 A 到集合 B 的映射的是(　　)

A． $A=N^*, B=N^*, f: x\to |x-3|$

B． A ={平面内的圆}； B ={平面内的矩形}， f： 每一个圆对应它的内接矩形

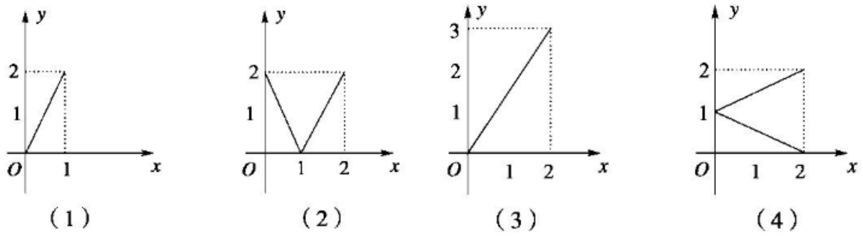
C． $A=\{x|0\le x\le 2\}, B=\{y|0\le y\le 6\}, f: x\to y=\frac{1}{2}x$

$D.A=\{0,1\}, B=\{-1,0,1\}, f$： A 中的数开平方

答案： C

案例 3

设$M=\{x|0\le x\le 2\}, N=\{y|0\le y\le 2\}$给出下列 4 个图形，其中能表示集合 M到集合 N的函数关系的有(　　)



A．0个　　B．1个　　　C．2个　　D．3个

答案： B.

实验 3-1： 判断下列对应是否构成集合 A 到集合 B 的函数：

(1) $A=R, B=\{y|y>0\}, f: x\to y=|x|$;

(2) $A=Z, B=Z, f: x\to y=x^2+x$；

答案： (1)否 (2)是

实验 3-2： 下列关于函数与区间的说法正确的是(　　)

A．函数定义域必不是空集，但值域可以是空集

B．函数定义域和值域确定后，其对应法则也就确定了

C．数集都能用区间表示

D．函数中一个函数值可以有多个自变量值与之对应

答案： D．

案例 4

下列各组函数是同一函数的是(　　)

① $f(x)=\sqrt{-2x^3}$ 与 $g(x)=x\sqrt{-2x}$；

② $f(x)=x$ 与 $g(x)=\sqrt{x}$；

③ $f(x)=x^0$ 与 $g(x)=\dfrac{1}{x^0}$；

④ $f(x)=x^2-2x-1$ 与 $g(t)=t^2-2t-1$.

A．①②　　B．①③　　C．③④　　D．①④

答案： C．

实验 4-1

下列四组函数，表示同一函数的是(　　)

$A.f(x)=\sqrt{x^2},g(x)=x$

$B.f(x)=x,g(x)=\dfrac{x^2}{x}$

$C.f(x)=\sqrt{x^2-4},g(x)=\sqrt{x-2}\bullet\sqrt{x+2}$

$D.f(x)=x,g(x)=\sqrt[3]{x^3}$

答案：D

实验 4-2

下列函数中哪个与函数 $y=x$ 是同一个函数，把序号填在横线上____。

① $y=\left(\sqrt{x}\right)^2$；　② $y=\sqrt[3]{x^3}$；　③ $y=\sqrt{x^2}$

答案：　②

案例 5

求下列函数的定义域：

(1) $y=3-\dfrac{1}{2}x$；

(2) $y=\sqrt{2x+3}-\dfrac{1}{\sqrt{2-x}}+\dfrac{1}{x}$；

答案：（1）R（2）$\left\{x\middle|-\dfrac{3}{2}\le x<2，且\ x\neq 0\right\}$.

实验 5-1

求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{x-1}{x^2-3x+2}$；

(2) $y=\sqrt{x^2-1}+\sqrt{1-x^2}$；

(3) $y=\dfrac{1}{1-|x|}+\sqrt{x^2-1}$.

答案：(1) $\{x\in\mathbf{R}|x\neq 1，且\ x\neq 2\}$. (2)$\{-1,1\}$. (3) $(-\infty，-1)\cup(1，+\infty)$.

实验 5-2

函数 $y=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x}$ 的定义域是(　　)

A．$[-1，+\infty)$　　　　B．$(0，+\infty)$

C．(－1，＋∞) D．[－1,0)∪(0，＋∞)

答案： D

例 6

若 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}(x\neq 1)$,求 $f(0)$，$f(1)$，$f(1-a)(a\neq 2), f[f(2)]$.

答案:

$$f(0)=\frac{1-0}{1+0}=1; f(1)=\frac{1-1}{1+1}=0;$$

$$f(1-a)=\frac{1-1-a}{1+1-a}=\frac{a}{2-a}(a\neq 2)$$

$$f[f(2)]=\frac{1-f(2)}{1+f(2)}=\frac{1-\dfrac{1-2}{1+2}}{1+\dfrac{1-2}{1+2}}=2.$$

实验 6-1

已知函数 $f(x)=3x^2-5x+2$,求 $f(3)$，$f(-\sqrt{2})$，$f(a+1)$

答案： $f(3)=14, f(-\sqrt{2})=8+5; f(a+1)=3a^2+a.$

实验 6-2

已知函数 $f(x)=x^2+x-1$.求 $f(2), f(\dfrac{1}{x})$;

答案： $f(2)=5, f(\dfrac{1}{x})=\dfrac{1+x+x^2}{x^2}.$

案例 7

(1)已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{1,2,3\}$,求 $f(x+1)$ 的定义域；

(2)已知函数 $f(x+1)$ 的定义域为 $\{x\mid x\geq 3\}$，求 $f(x)$ 的定义域；

实验 7

（1）已知函数$f(2x-1)$的定义域为$\left(-3,-1\right]$，求$f(x)+f(2x)$的定义域；

（2）已知函数$f(\sqrt{x+1})$的定义域为$\left(1,3\right]$，求$f(3x-5)$的定义域；

案例 8

已知函数$f(x)=\begin{cases}1-x^2, x\le 1\\ x^2-x-3, x>1\end{cases}$，则$f\left[\dfrac{1}{f(3)}\right]$的值为(　　)

$A.\dfrac{15}{16}$　　$B.-\dfrac{27}{16}$　　$C.\dfrac{8}{9}$　　$D.18$

答案： C

实验 8-1

已知$f(x)=\begin{cases}2x-1, x\ge 2\\ -x^2-3x, x<2\end{cases}$，$f(x)=\begin{cases}2x-1 & x\ge 2\\ -x^2-3x & x<2\end{cases}$，则$f(4)$的值为(　　)

$A.7$　　$B.3$　　$C.-8$　　$D.4$

答案： A

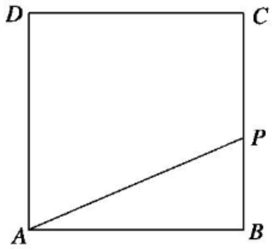
实验 8-2

设函数$f(x)=\begin{cases}x^2+1, x\le 1\\ \dfrac{2}{x}, x>1\end{cases}$，则$f\left[f(3)\right]=$_____.

答案： $\dfrac{13}{9}$

案例 9

如图(1)所示，在边长为 4 的正方形 $ABCD$ 边上有一点 p，沿着折线 $BCDA$，由点 B (起点)向点 A (终点)运动．设点 p 运动的路程为 x，ΔAPB 的面积为 y，求：y 与 x 之间



(1)

的函数关系式；

解析： 当点 P 在 BC 上，即 $0\le x\le 4$ 时，$S_{\triangle ABP}=\frac{1}{2}\times 4x=2x$,

当点 P 在 CD 上，即 $4<x\le 8$ 时，

$S_{\triangle ABP}=\frac{1}{2}\times 4\times 4=8$,

当点 P 在 DA 上，即 $8<x\le 12$ 时，$S_{\triangle ABP}=\frac{1}{2}\times 4\times(12-x)=24-2x$,

$$\therefore y=\begin{cases}2x & 0\le x\le 4\\ 8 & 4<x\le 8\\ 24-2x & 8<x\le 12\end{cases}.$$

答案： $y=\begin{cases}2x,0\le x\le 4\\ 8,4<x\le 8\\ 24-2x,8<x\le 12\end{cases}$

实验 9-1

已知 A、B 两地相距 $150km$，某人开汽车以 $60km/h$ 的速度从 A 地到达 B 地；在 B 地停留 $1h$ 后再以 $50km/h$ 的速度返回 A 地，把汽车离开 A 地的距离 S 表示为时间 $t(h)$ 的函数表达式为(　　)

$A.S=60t$　　　　$B.S=60t+50t$

$C.S=\begin{cases}60t,0\le t\le 2.5\\ 150-50t,t>3.5\end{cases}$　　　　$D.S=\begin{cases}60t,0\le t\le 2.5\\ 150,2.5<t\le 3.5\\ 150-50t-3.5,3.5<t\le 6.5\end{cases}$

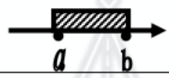
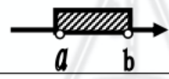
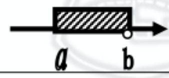
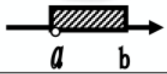
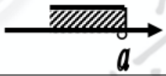
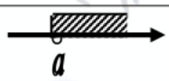
答案： D

实验 9-2

某市区住宅电话通话费为前 $3\,\text{min}$ 0.20 元，以后每分钟 0.10 元(不足 $3\,\text{min}$ 按 $3\,\text{min}$ 计，以后不足 $1\,\text{min}$ 按 $1\,\text{min}$ 计)．在直角坐标系内，画出接通后通话在 $6\,\text{min}$ 内(不包括 $0\,\text{min}$，包括 $6\,\text{min}$)的通话费 y (元)关于通话时间 $t(\text{min})$ 的函数图象，并写出函数解析式及函数的值域．

答案： 这个函数的解析式为 $y=\begin{cases}0.2, t\in(0,3]\\0.3, t\in(3,4]\\0.4, t\in(4,5]\\0.5, t\in(5,6]\end{cases}$，函数的值域为 $\{0.2,0.3,0.4,0.5\}$．

思维导图

名称	定义	符号	数轴表示
闭区间	$\{x\mid a\le x\le b\}$	$[a,b]$	
开区间	$\{x\mid a<x<b\}$	(a,b)	
左闭右开区间	$\{x\mid a\le x<b\}$	$[a,b)$	
左开右闭区间	$\{x\mid a<x\le b\}$	$(a,b]$	
无穷区间	$\{x\mid x\le a\}$	$(-\infty,a]$	
无穷区间	$\{x\mid x<a\}$	$(-\infty,a)$	
无穷区间	$\{x\mid x\ge a\}$	$[a,+\infty)$	
无穷区间	$\{x\mid x>a\}$	$(a,+\infty)$	

能力训练场

1. 给出下列关于从集合 A 到集合 B 的映射的论述，其中正确的有________.

①B 中任何一个元素在 A 中必有原象；②A 中不同元素在 B 中的象也不同；③A 中任何一个元素在 B 中的象是唯一的；④A 中任何一个元素在 B 中可以有不同的象；⑤B 中某一元素在 A 中的原象可能不止一个；⑥集合 A 与 B 一定是数集；⑦记号 $f:A\to B$ 与 $f:B\to A$ 的含义是一样的.

答案：③⑤

2. 下列集合 A 到集合 B 的对应中，判断哪些是 A 到 B 的映射？判断哪些是 A 到 B 的一一映射？

(1) $A=N$，$B=Z$，对应法则 $f:x\to y=-x$，$x\in A$，$y\in B$；

(2) $A=R^+$，$B=R^+$，$f:x\to y=\dfrac{1}{x}$，$x\in A$，$y\in B$；

答案：(1)是映射，不是一一映射，(2)是映射，是一一映射.

3. 下列各式能否确定 y 是 x 的函数？

(1) $x^2+y^2=1$；(2) $x^2-y+3=0$；(3) $y=\sqrt{x-3}+\sqrt{2-x}$

答案：(1) 不能 (2) 能；(3) 不能.

4. 已知 $f(x)=x^2-3x+1$，则 $f(1)=$________；$f(-5)=$__________；$f(\sqrt{2})=$________；$f(a)=$________；$f(2a-1)=$______________.

答案：-1；41；$3-3\sqrt{2}$；a^2-3a+1；$4a^2-10a+5$.

5．下列各组函数中，把表示同一函数组的序号填在横线上_________.

①$y=x, y=\left(\sqrt{x}\right)^2$；②$y=\sqrt{x^2}, y=\left(\sqrt{x}\right)^2$；③$y=x+1, y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$；④$y=x^0, y=1$ ⑤$y=|x|, y=\sqrt{x^2}$

答案：⑤

6. 已知函数 $f(x)=x^2+px+q$ 满足 $f(1)=f(2)=0$，则 $f(-1)=$__.

答案：6

7. 下列函数中哪个与函数 $y=x$ 是同一个函数，把序号填在横线上____.

①$y=\left(\sqrt{x}\right)^2$；②$y=\sqrt[3]{x^3}$；③$y=\sqrt{x^2}$

答案：②

8. 已知 $f(x)=x^2-1$　$g(x)=\sqrt{x}+1$　求 $f[g(x)], g[f(x)]$

答案：$f[g(x)]=\left(\sqrt{x}+1\right)^2-1=x+2\sqrt{x}$；$g[f(x)]=\sqrt{x^2-1}+1$

9. 已知 $f(x)=\begin{cases}0 & (x<0)\\ \pi & (x=0)\\ x+1 & (x>0)\end{cases}$ ，分别求 $f(1),f(-1),f(0),f\left\{f\left[f(-1)\right]\right\}$的值.

答案：$f(1)=2$； $f(-1)=0$； $f(0)=\pi$； $f\{f[f(-1)]\}=\pi+1$;

10. 将下列集合用区间表示：

(1) $\left\{x\left|\dfrac{x-2}{x-1}\geq 0\right.\right\}$； (2) $\left\{x\left|x=1或2<x\leq 3\right.\right\}$； (3) $\left\{x\left|x\neq\pm 1,x\in R\right.\right\}$.

答案：(1) $(-\infty,1)\cup[2,+\infty)$； (2) $\{1\}\cup(2,3]$； (3) $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

1．下列对应是从集合 A 到集合 B 的映射的是（　　）

A. $A=R,B=\left\{x\left|x>0且x\in R\right.\right\},x\in A,f:x\to|x|$

B. $A=N,B=N^{*},x\in A,f:\to|x-1|$

C. $A=\left\{x\left|x>0且x\in R\right.\right\},B\in R,x\in A,f:x\to x^{2}$

D. $A=Q,B=Q,x\in A,f:x\to\dfrac{1}{x}$

答案：C

2. 已知 $P=\left\{x\left|0\leq x\leq 4\right.\right\},Q=\left\{y\left|0\leq y\leq 2\right.\right\}$，下列对应不表示从 P 到 Q 的函数的是（　　）

A、$f:x\to y=\dfrac{1}{2}x$　　B、$f:x\to y=\dfrac{1}{3}x$　　C、$f:x\to y=\dfrac{3}{2}x$　　D、$f:x\to y=\sqrt{x}$

答案：C

3.函数 $f(x)=\sqrt{2-x}+\sqrt{x-2}$的定义域为__________.

答案：2

4. $f:A\to B$ 是从 A 到 B 的映射，其中 $A=R$，$B=\left\{(x,y)\left|x,y\in R\right.\right\}$，$f:x\to(x+1,x^{2}+1)$，则 A 中元素 $\sqrt{2}$ 的象是______；B 中元素 $(2,2)$ 的原象________.

答案：$(\sqrt{2}+1,3)$　　1

5. 已知集合 $A=\{1,2,3,k\},B=\{4,7,a^{4},a^{2}+3a\}$，且 $a\in N_{+},x\in A,y\in B$, 使 B 元素 $y=3x+1$ 和 A 中的元素 x 对应，则 $a=$____， k =____.

答案：2　5