第 2 讲 集合间的基本关系

学习目标点

1.理解集合之间包含与相等的含义，能识别一些给定集合的子集．在具体情境中，了解空集和全集的含义．

2.能够区分集合间的包含关系与元素与集合的属于关系．

3.掌握用数学符号语言以及韦恩图语言表示集合间的基本关系.

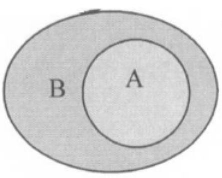
知识集装箱

知识点 1：子集

集合与集合之间的“包含”关系

集合 A 是集合 B 的部分元素构成的集合，我们说集合 B 包含集合 A；

子集：如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，我们说这两个集合有包含关系，称集合 A 是集合 B 的子集(subset).记作：$\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}(或\mathrm{B} \supseteq \mathrm{A})$，当集合 A 不包含于集合 B 时，记作 $A \nsubseteq B$，用 Venn 图表示两个集合间的“包含”关系：$\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}(或\mathrm{B} \supseteq \mathrm{A})$



知识点 2：集合相等

如果集合 A 是集合 B 的子集 $A \subseteq B$,且集合 $B \subseteq A$,因此集合 A 和集合 B 中的元素是一样的，就说 A 与 B 相等，记作 A=B.

符号语言：$A \subseteq B$，且 $B \subseteq A \Leftrightarrow A=B$

知识点 3：真子集

如果集合 A 是集合 B 的子集，但存在元素$x \in B$,且$x \notin B$，称集合 A 是集合 B 的真子集，

记作$A \subsetneqq B$

知识点 4：空集

不含任何元素的集合，记作ϕ

规定：空集是任何集合的子集，即$\phi \subseteq A$,空集是任何非空集合的真子集.

案例研究室

观察下面几个例子，你能发现两个集合之间的关系吗?

(1) A={1,2, 3}, B={1, 2, 3, 4 ,5};

(2) A={光明中学 09 届高一女生}，B={光明中学 09 届高一学生}；

(3) 设 C = {x|x 是两条边相等的三角形}, D={x|x 是等腰三角形}；

(4) A={1,2}, B={2,3}.

【答案】(1) $A \subsetneqq B$　(2) $A \subsetneqq B$　(3) $A = B$　(4) $A \neq B$

案例 1 集合间的关系

例 1.1 写出集合$\{0,1,2\}$的所有子集，并指出其中那些是它的真子集。

解：$\{0,1,2\}$的所有子集是：ϕ；$\{0\},\{1\},\{2\}$；$\{0,1\},\{0,2\},\{1,2\}$；

例 1.2 写出集合$\{a,b,c,d\}$的所有子集

解：含有 0 个的元素的子集，即空集：ϕ

含有 1 个的元素的子集：$\{a\},\{b\},\{c\},\{d\}$

含有 2 个的元素的子集：$\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{b,c\},\{b,d\},\{c,d\}$

含有 3 个的元素的子集：$\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d\}$

含有 4 个的元素的子集：$\{a,b,c,d\}$

例 1.2 集合 $A=\{a\mid a=2k,k\in N\}$，集合 $B=\left\{b\mid b=\frac{1}{8}\left[1-(-1)^{n}\right]\cdot(n^{2}-1),n\in N\right\}$，那么 A,B 间的关系是（　）.

A. $A\subsetneqq B$　　B. $B\subsetneqq A$　　C. $A=B$　　D.以上都不对

【答案】B

【解析】先用列举法表示集合 A、B，再判断它们之间的关系.由题意可知，集合 A 是非负偶数集，即 $A=\{0,2,4,6,8,\cdots\}$．集合 B 中的元素.$b=\frac{1}{8}\left[1-(-1)^{n}\right]\cdot(n^{2}-1)=\begin{cases}0 & n=2k,k>0\\ \frac{1}{4}(n+1)(n-1) & n=2k+1\end{cases}$ 而 $\frac{1}{4}(n+1)(n-1)$（n 为正奇数时）表示 0 或正偶数，但不是表示所有的正偶数，即 $n=1,3,5,7,\cdots$.由 $\frac{1}{4}(n+1)(n-1)$ 依次得 0,2,6,12，…，即 $B=\{0,2,6,12,20,\cdots\}$.

综上知，$B\subsetneqq A$，应选 B.

【总结升华】判断两个集合间的关系的关键在于：弄清两个集合的元素的构成，也就是弄清楚集合是由哪些元素组成的.这就需要把较为抽象的集合具体化（如用列举法来表示集合）、形象化（用 Venn 图，或数形集合表示）.

实验 1.1：

若集合 $A=\{x\mid x=2k-1,k\in z\},B=\{x\mid x=4l\pm1,l\in z\}$，则（　）.

A. $A\subsetneqq B$　　B. $B\subsetneqq A$　　C. $A=B$　　D. $A\cup B=Z$

【答案】C

实验 1.2：

写出集合{a，b，c}的所有不同的子集.

【解析】不含任何元素子集为$\varnothing$，只含 1 个元素的子集为{a}，{b}，{c}，含有 2 个元素的子集有{a，b}，{a，c}，{b，c}，含有 3 个元素的子集为{a，b，c}，即含有 3 个元素的集合共有 23=8 个不同的子集.如果集合增加第 4 个元素 d，则以上 8 个子集仍是新集合的子集，再将第 4 个元素 d 放入这 8 个子集中，会得到新的 8 个子集，即含有 4 个元素的集合共有 24=16 个不同子集，由此可推测，含有 n 个元素的集合共有 2n 个不同的子集.

【总结升华】要写出一个集合的所有子集，我们可以按子集的元素个数的多少来分别写出.当元素个数相同时，应依次将每个元素考虑完后，再写剩下的子集.如本例中要写出 2 个元素的子集时，先从 a 起，a 与每个元素搭配有{a，b}，{a，c}，然后不看 a，再看 b 可与哪些元素搭配即可.同时还要注意两个特殊的子集：$\varnothing$ 和它本身.

实验 1.3：已知$\left\{a,b\right\}\subseteq A\subsetneqq\left\{a,b,c,d,e\right\}$，则这样的集合 A 有 ______个.

【答案】7 个

实验 1.4：已知集合 A={1，2，3}，平面内以（x，y）为坐标的点集合 B={（x，y）| x∈A，y∈A，x+y∈A}，则 B 的子集个数为（　　）

A．3　　B．4　　C．7　　D．8

【答案】D

【解析】∵ 集合 A={1，2，3}，平面内以（x，y）为坐标的点集合 B={（x，y）| x∈A，y∈A，x+y∈A}，

∴B={（1，1），（1，2），（2，1）}

∴B 的子集个数为：$2^3=8$个.

故选 D.

案例 2．集合 $A=\{x\mid y=x^2+1\}$，$B=\{y\mid y=x^2+1\}$，$C=\{(x,y)y\mid y=x^2+1\}$，$D=\{y=x^2+1\}$是否表示同一集合?

【答案】以上四个集合都不相同

【解析】集合 $A=\{x|y=x^2+1\}$ 的代表元素为 x，故集合 A 表示的是函数 $y=x^2+1$ 中自变量 x 的取值范围，即函数的定义域 A= $(-\infty,+\infty)$；

集合 $B=\{y|y=x^2+1\}$ 的代表元素为 y，故集合 B 表示的是函数 $y=x^2+1$ 中函数值 y 的取值范围，即函数的值域 B= $[1,+\infty)$；

集合 $C=\{(x,y)y|y=x^2+1\}$ 的代表元素为点 (x, y)，故集合 C 表示的是抛物线 $y=x^2+1$ 上的所有点组成的集合；

集合 D={y=x2+1}是用列举法表示的集合，该集合中只有一个元素：方程 $y=x^2+1$.

【总结升华】认清集合的属性，是突破此类题的关键.首先应当弄清楚集合的表示方法，是列举法还是描述法；其次对于用描述法表示的集合一定要认准代表元素，准确理解对代表元素的限制条件.

思维军械库

1、求集合子集、真子集个数的 3 个步骤

判断：根据子集、真子集的概念判断出集合中含有元素的可能情况

分类：根据集合中元素的多少进行分类

列举：采用列举法逐一写出每种情况的子集

图示法：韦恩图

2、空集是任何集合的子集，空集是任何非空集合的真子集

3、假设非空集合 A 中含有 n 个元素，则有

A 的子集个数为 2^n

A 的真子集的个数为 2^n-1

A 的非空子集的个数为 2^n-1

A 的非空真子集的个数为 2^n-2

能力训练场

一、选择题

1．集合 $M=\{1,2,3\}$ 的真子集个数是（　　）

A．6　　B．7　　C．8　　D．9

2．集合 $\{1,2\}$，$M\subseteq\{1,2,3,4,5\}$ 的集合 M 有 4 个子集则实数 M （　　）

A． 6　 B． 7　 C． 8　 D． 9

3．已知集合 $M=\{x\in Z\,|\,1\le x\le m\}$，若集合 M 有四个子集则实数 $m=$（　　）

A． 1　 B． 2　 C． 3　 D． 4

4．下列表述正确的是(　)

A．$\phi=\{0\}$　B．$\phi\subseteq\{0\}$　C．$\phi\supseteq\{0\}$　D．$\phi\in\{0\}$

5 已知 $A=\{x\,|\,x=a+\frac{1}{6},a\in Z\},B=\{x\,|\,x=\frac{b}{2}+\frac{1}{3},b\in Z\},C=\{x\,|\,x=\frac{c}{2}+\frac{1}{6},c\in Z\}$

则集合 A、B、C 满足的关系是（　）

A．$\mathrm{A}=\mathrm{B}\not\subset\mathrm{C}$　B．$\mathrm{A}\not\subset\mathrm{B}=\mathrm{C}$　C．$\mathrm{A}\not\subset\mathrm{B}\not\subset\mathrm{C}$　D．$\mathrm{B}\not\subset\mathrm{C}\not\subset\mathrm{A}$

二、解答题

6. $A=\{x\,|\,y=x^2-2x+1\},B=\{y\,|\,y=x^2-2x+1\},C=\{x\,|\,x^2-2x+1=0\},$ $D=\{x\,|\,x^2-2x+1<0\},E=\{(x,y)\,|\,y=x^2-2x+1\}$ 求 A,B,C,D 之间关系

.

【答案与解析】

1. 【答案】 B
2. 【答案】 B
3. 【答案】 B
4. 【答案】 B
5. 【答案】 B
6. 【答案】 $\mathrm{D} \subsetneq \mathrm{C} \subsetneq \mathrm{B} \subsetneq A$