



第 1 讲 集合的含义与表示



学习目标点

- 1.了解集合的含义，会使用符号“ \in ”“ \notin ”表示元素与集合之间的关系.
- 2.能选择自然语言、图象语言、集合语言（列举法或描述法）描述不同的具体问题，感受集合语言的意义和作用.
- 3.理解集合的特征性质，会用集合的特征性质描述一些集合，如常用数集、解集和一些基本图形的集合等.



知识集装箱

知识点 1: 集合的定义与表示方法

定义：一般的，指定的某些对象的全体称为集合，集合中的每个对象叫做这个集合的元素.

集合的表示法：集合常用大写字母表示，元素常用小写字母表示.

知识点 2: 集合元素的特征

(1)确定性：集合中的元素必须是确定的.

设 A 是一个给定的集合， x 是某一个具体对象，则 x 或者是 A 的元素，或者不是 A 的元素，两种情况必有一种且只有一种成立.

(2)互异性：一个给定集合中的元素，指属于这个集合的互不相同的个体(对象)，因此，同一集合中不应重复出现同一元素.

(3)无序性：集合中的元素的次序无先后之分.如：由 1, 2, 3 组成的集合，也可以写成由 1, 3, 2 组成一个集合，它们都表示同一个集合.

要点诠释：

集合中的元素,必须具备确定性、互异性、无序性. 反过来, 一组对象若不具备这三性, 则这组对象也就不能构成集合, 集合中元素的这三大特性是我们判断一组对象是否能构成集合的依据.

解决与集合有关的问题时, 要充分利用集合元素的“三性”来分析解决, 也就是, 一方面, 我们要利用集合元素的“三性”找到解题的“突破口”; 另一方面, 问题被解决之时, 应注意检验元素是否满足它的“三性”.

知识点 3: 元素与集合的关系:

(1)如果 a 是集合 A 的元素, 就说 a 属于(belong to) A , 记作 $a \in A$

(2)如果 a 不是集合 A 的元素, 就说 a 不属于(not belong to) A , 记作 $a \notin A$

知识点 4: 集合的分类

(1)空集: 不含有任何元素的集合称为空集(empty set), 记作: ϕ .

(2)有限集: 含有有限个元素的集合叫做有限集.

(3)无限集: 含有无限个元素的集合叫做无限集.

知识点 5: 常用数集及其表示

非负整数集(或自然数集), 记作 N

正整数集, 记作 N^* 或 N_+

整数集, 记作 Z

有理数集, 记作 Q

实数集, 记作 R

知识点 6: 集合的表示方法

我们可以用自然语言来描述一个集合, 但这将给我们带来很多不便, 除此之外还常用列举法和描述法来表示集合.



(1) 自然语言法：用文字叙述的形式描述集合的方法.如：大于等于 2 且小于等于 8 的偶数构成的集合.

(2) 列举法：把集合中的元素一一列举出来，写在大括号内.如： $\{1,2,3,4,5\}$ ， $\{x^2, 3x+2, 5y^3-x, x^2+y^2\}$ ，....

(3) 描述法：把集合中的元素的公共属性描述出来，写在大括号{ }内.具体方法：在大括号内先写上表示这个集合元素的一般符号及取值(或变化)范围，再画一条竖线，在竖线后写出这个集合中元素所具有的共同特征，如 $\{(x,y) | x^2 + y^2 = 1\}$.

要点诠释：

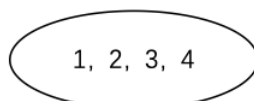
(1)用描述表示集合时应注意：

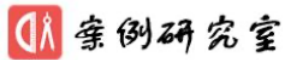
①弄清元素所具有的形式（即代表元素是什么），是数，还是有序实数对（点）还是其他形式.

②元素具有怎样的属性？当题目中用了其他字母来描述元素所具有的属性时，要去伪存真，而不能被表面的字母形式所迷惑.

(2) 用描述法表示集合时，若需要多层次描述属性时，可选用逻辑联结词“且”与“或”等连接；若描述部分出现元素记号以外的字母时，要对新字母说明其含义或指出其取值范围.

4.图示法：图示法主要包括 Venn 图、数轴上的区间等.为了形象直观，我们常常画一条封闭的曲线，用它的内部来表示一个集合，这种表示集合的方法称为韦恩（Venn）图法. 如下图，就表示集合 $\{1,2,3,4\}$.





案例 1：集合元素及元素的性质

例 1. 下列各组对象哪些能构成一个集合？

- (1) 著名的数学家；
- (2) 比较小的正整数的全体；
- (3) 某校 2011 年在校的所有高个子同学；
- (4) 不超过 20 的非负数；
- (5) 方程 $x^2 - 9 = 0$ 在实数范围内的解；
- (6) $\sqrt{2}$ 的近似值的全体.

【答案】(4)、(5)

【解析】从集合元素的“确定”、“互异”、“无序”三种特性判断.

“著名的数学家”、“比较小的正整数”、“高个子同学”对象不确定，所以(1)、(2)、(3)

不是集合，同理(6)也不是集合.(4)、(5)可构成集合，故答案是(4)、(5) .

【总结升华】

(1) 判断指定的对象能不能构成集合，关键在于能否找到一个明确标准，对于任何一个对象，都能确定它是不是给定集合的元素，同时还要注意集合中元素的互异性、无序性.

(2) “有限集”和“无限集”是通过集合里面元素的个数来定义的，集合里面元素的个数很多，但不一定是无限集.

实验 1.1：

判断下列语句能否确定一个集合？如果能表示一个集合，指出它是有限集还是无限集

- (1) 你所在的班，体重超过 75kg 的学生的全体；
- (2) 举办 2008 年奥运会的城市；



(3)高一数学课本中的所有难题;

(4)在 2011 年 3 月 11 日日本地震海啸中遇难的人的全体;

(5)大于 0 且小于 1 的所有的实数.

【答案】集合: (1)、(2)、(4)、(5); 有限集: (1)、(2)、(4) .

【解析】紧扣“集合”、“有限集”、“无限集”的定义解决问题.

(1)你所在的班, 体重超过 75kg 的学生是确定的, 不同的, 能组成一个集合, 且为有限集;

(2)举办 2008 年奥运会的城市也能组成一个集合, 为有限集;

(3)不能构成集合. “难题”的概念是模糊的, 不确定的, 无明确标准, 对于一道数学题是否是“难题”无法客观判断.

(4) 在 2011 年 3 月 11 日日本地震海啸中遇难的人是确定的, 不同的, 因而能构成集合, 是有限集.

(5) 大于 0 且小于 1 的所有的实数也是确定的, 互异的, 因此这样的实数能构成一个集合, 是无限集.

实验 1.2:

集合 A 由形如 $m + \sqrt{3}n (m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z})$ 的数构成的, 判断 $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$ 是不是集合 A 中的元素?

【答案】是

【解析】由分母有理化得, $\frac{1}{2-\sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$. 由题中集合 A 可知 $m = 2, n = 1$, 均有

$m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}, \therefore 2 + \sqrt{3} \in A$, 即 $\frac{1}{2-\sqrt{3}} \in A$.

【总结升华】(1) 解答本题首先要理解 \in 与 \notin 的含义, 然后要弄清所给集合是由一些怎样

的数构成的, $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$ 能否化成此形式, 进而去判断 $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$ 是不是集合 A 中的元素.

判断一个元素是不是某个集合的元素,就是判断这个元素是否具有这个集合的元素的共同特征.此类题,主要看能否将所给对象的表达式转化为集合中元素所具有的形式.

实验 1.3:

定义集合运算 $A \otimes B = \{z \mid z = xy(z+y), x \in A, y \in B\}$, 设集合 $A = \{0, 1\}$, $B = \{2, 3\}$, 则集合 $A \otimes B =$

【思路点拨】利用集合中新定义的元素的属性得出集合中元素的构成是解决该问题的关键, 集合中元素不多时, 将各个元素列举出来从而得到所求的集合.

【答案】 $\{0, 6, 12\}$

【解析】当 $x=0, y=2$ 时, $z_1 = 0$;

当 $x=0, y=3$ 时, $z_2 = 0$;

当 $x=1, y=2$ 时, $z_3 = 1 \times 2 \times (1+2) = 6$;

当 $x=1, y=3$ 时, $z_4 = 1 \times 3 \times (1+3) = 12$,

$\therefore A \otimes B = \{0, 6, 12\}$, 故答案为: $\{0, 6, 12\}$.

【总结升华】本例题考查学生对新定义的题型的理解和把握程度, 弄准集合中元素的构造方式, 考查列举法写集合, 分类讨论思想.

案例 2: 元素与集合间关系

判断下列六个关系是否正确:

- | | | |
|----------------------------------|--------------------------|-----------------------------|
| (1) $0 \in N^*$ | (2) $0 \notin \{-1, 1\}$ | (3) $\emptyset \in \{0\}$ |
| (4) $\emptyset \subsetneq \{0\}$ | (5) $\{0\} \in \{0, 1\}$ | (6) $\{0\} \subseteq \{0\}$ |

其中正确的关系是 .

【答案】(2) (4) (6)

【思路点拨】首先要熟悉集合的常用符号，空集，记作 \emptyset ， N 表示自然数集， N_+ 或 N^* 表示正整数集， Z 表示正整数集， Q 表示有理数集， R 表示实数集；然后要明确元素与集合，集合与集合的关系及符号表示，以及子集的性质．给定一个对象 a ，它与一个给定的集合 A 之间的关系为 $a \in A$ ，或者 $a \notin A$ ，二者必居其一．解答这类问题的关键是：弄清 a 的结构，弄清 A 的特征，然后才能下结论．

【解析】(1) 0 不是正整数，故错误；

(2) 0 不是集合 $\{-1, 1\}$ 中的元素，故正确；

(3) 空集是一个集合，使用的符号错误，故错误；

(4) 空集是任何一个集合的真子集，故正确；

(5) 是集合与集合的关系，应该使用符号 \subseteq 或 \supseteq ，故错误；

(6) 一个集合是它本身的子集，故正确．

【总结升华】本题主要是区别 0 ， $\{0\}$ ， \emptyset 和非空数集以及常用的集合之间的关系．此类问题在解答时，既要熟悉集合的常用符号，又要明确元素与集合，集合与集合的关系及符号表示，以及子集的性质，特别是 $\{0\}$ 与 \emptyset ，最容易混淆，必须在学习中引起足够的重视．

实验 2.1:

用符号“ \in ”或“ \notin ”填空

(1) 若 $A=Z$, 则 $-\frac{1}{2}$ _____ A ; -2 _____ A .

(2) 若 $B=\{x \mid 2x^2 - x - 1 = 0\}$, 则 $-\frac{1}{2}$ _____ B ; -2 _____ B .

【答案】

(1) \notin , \in (2) \in , \notin

案例 3: 集合中元素性质的应用

已知集合 $A = \{x \in R \mid ax^2 - 3x + 2 = 0, a \in R\}$.

- (1) 若 A 是空集, 求 a 的取值范围;
- (2) 若 A 中只有一个元素, 求 a 的值, 并把这个元素写出来;
- (3) 若 A 中至多只有一个元素, 求 a 的取值范围.

【答案】 (1) $a > \frac{9}{8}$; (2) 若 $a=0$, 则有 $A = \left\{ \frac{2}{3} \right\}$; 若 $a = \frac{9}{8}$, 则有 $A = \left\{ \frac{4}{3} \right\}$; (3)

$$a=0 \text{ 或 } a \geq \frac{9}{8}$$

【思路点拨】 (1) A 为空集, 表示方程 $ax^2 - 3x + 2 = 0$ 无解, 根据一元二次方程根的个数与 Δ 的关系, 我们易得到一个关于 a 的不等式, 解不等式即可得到答案。

(2) 若 A 中只有一个元素, 表示方程为一次方程, 或有两个等根的二次方程, 分别构造关于 a 的方程, 即可求出满足条件的 a 的值。

(3) 若 A 中至多只有一个元素, 则集合 A 为空集或 A 中只有一个元素, 由 (1), (2) 的结论, 将 (1), (2) 中的 a 的取值并进来即可得到答案。

实验 3.1:

定义集合运算: $A * B = \{z \mid z = xy, x \in A, y \in B\}$, 设 $A = \{1, 2\}$, $B = \{0, 2\}$, 则集合 $A * B$ 的所有元素之和为 ()

- A. 0 B. 2 C. 3 D. 6

【答案】 D

【解析】 $\because z = xy, x \in A, y \in B$, 且 $A = \{1, 2\}$, $B = \{0, 2\}$,

$\therefore z$ 的取值有: 0, 2, 4

故 $A * B = \{0, 2, 4\}$,

\therefore 集合 $A * B$ 的所有元素之和为: $0 + 2 + 4 = 6$.

实验 3.2:

设集合 $A = \{x \in \mathbf{R} \mid ax^2 + 2x + 1 = 0\}$, 当集合 A 为单元素集时, 求实数 a 的值.

【答案】0, 1

【解析】由集合 A 中只含有一个元素可得, 方程 $ax^2 + 2x + 1 = 0$ 有一解, 由于本方程并没有注明是一个二次方程, 故也可以是一次方程, 应分类讨论:

当 $a=0$ 时, 可得是一次方程, 故满足题意.

当 $a \neq 0$ 时, 则为一个二次方程, 所以有一根的含义是该方程有两个相等的根, 即为判别式为 0 时的 a 的值, 可求得为 $a=1$. 故 a 的取值为 0, 1.

案例 4: 集合的表示方法

试分别用列举法和描述法表示下列集合:

(1) 方程 $x^2 - 3 = 0$ 的所有实数根组成的集合;

(2) 由大于 15 小于 25 的所有整数组成的集合.

【答案】(1) $\{\sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$; (2) $\{16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24\}$.

【解析】(1) 设方程 $x^2 - 3 = 0$ 的实数根为 x , 并且满足条件 $x^2 - 3 = 0$

因此, 用描述法表示为 $A = \{x \mid x^2 - 3 = 0, x \in \mathbf{R}\}$;

方程 $x^2 - 3 = 0$ 有两个实数根 $\sqrt{3}, -\sqrt{3}$

因此, 用列举法表示为 $A = \{\sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$.

(2) 设大于 15 小于 25 的整数为 x , 它满足条件 $x \in \mathbf{Z}$, 且 $15 < x < 25$,

因此, 用描述法表示为 $B = \{x \mid 15 < x < 25, x \in \mathbf{Z}\}$;

大于 15 小于 25 的整数有 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24,

因此, 用列举法表示为 $B = \{16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24\}$.

【总结升华】(1) 列举法表示集合, 元素不重复、不计次序、不遗漏, 且元素与元素之间用 “,” 隔开.

(2) 列举法适合表示有限集，当集合中元素的个数较少时，用列举法表示集合较为方便，而且一目了然.

(3) 用描述法表示集合时，要注意代表元素是什么，同时要注意代表元素所具有的性质.

实验 4.1:

下列四个选项表示的集合中，有一个集合不同于另三个集合，这个集合是 ()

- A. $\{x|x=0\}$ B. $\{a|a^2=0\}$ C. $\{a=0\}$ D. $\{0\}$

【答案】C

【解析】本题是描述法与列举法的互化，一定要理解描述法的定义.

选项 A, B 都是描述法，用列举法表示为 $\{0\}$ ，选项 D 是列举法，其中的元素是 0，而选项 C，是列举法，其中的元素是 $a=0$ ，故选 C.

【总结升华】通过此例题，应该明确用描述表示集合应注意：①弄清元素所具有的形式（即代表元素是什么），是数，还是有序实数对（点）还是其他形式②元素具有怎样的属性，当题目中用了其他字母来描述元素所具有的属性时，要去伪存真，而不能被表面的字母形式所迷惑.

实验 4.2:

用适当的方法表示下列集合：

- (1) 比 5 大 3 的数；
- (2) 方程 $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 13 = 0$ 的解集；
- (3) 二次函数 $y = x^2 - 10$ 的图象上的所有点组成的集合.

【答案】(1) $\{8\}$ ； (2) $\{(2, -3)\}$ ； (3) $\{(x, y) | y = x^2 - 10\}$

【解析】(1) 比 5 大 3 的数显然是 8，故可表示为 $\{8\}$.

(2) 方程 $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 13 = 0$ 可化为 $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 0$,



$$\therefore \begin{cases} x=2, \\ y=-3, \end{cases} \therefore \text{方程的解集为} \{(2, -3)\}.$$

(3) 用描述法表示为 $\{(x, y) | y = x^2 - 10\}$.

【总结升华】用列举法与描述法表示集合时，一要明确集合中的元素；二要明确元素满足的条件；三要根据集合中元素的个数来选择适当的方法表示集合。



思维军械库

1、集合的表示方法：

列举法：把集合元素一一列举出来写在大括号的方法.

描述法：用确定条件表示某些对象是否属于这个集合的方法.

图示法：韦恩图

2、集合的分类：

有限集：含有有限个元素集合.

无限集合：含有限无数个元素集合.

空集：不含任何元素的集合，记作 ϕ

3、集合中元素的性质：

确定性、互异性、无序性.

4、一些常用数集的记法：

自然数集，正整数集 $N^+ (N^*)$ ，整数集 Z ，有理数集 Q ，实数集 R





能力训练场

一、选择题

1. 下列四个集合中, 是空集的是()

A. $\{x | x+3=3\}$ B. $\{(x,y) | y^2 = -x^2, x, y \in R\}$

C. $\{x | x^2 \leq 0\}$ D. $\{x | x^2 - x + 1 = 0, x \in R\}$

2. 集合 $\{x \in Z | (3x-1)(x-4) = 0\}$ 可化简为 ()

A. $\{\frac{1}{3}\}$ B. $\{4\}$ C. $\{\frac{1}{3}, 4\}$ D. $\{-\frac{1}{3}, -4\}$

3. 集合 $A = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$ 用描述法可表示为 ()

A. $\{x | x = n, n \in N\}$ B. $\{x | x = 2n-1, n \in N\}$

C. $\{x | x = 2n+1, n \in N\}$ D. $\{x | x = n+2, n \in N\}$

4. 若以集合 $S = \{a, b, c\}$ 中的三个元素为边长可构成一个三角形, 则这个三角形一定不是()

A. 锐角三角形 B. 直角三角形 C. 钝角三角形 D. 等腰三角形

5. 已知 x, y, z 为非零实数, 代数式 $\frac{x}{|x|} + \frac{y}{|y|} + \frac{z}{|z|} + \frac{|xyz|}{|xyz|}$ 的值所组成的集合是 M 则

下列判断正确的是 ()

A. $0 \notin M$ B. $2 \in M$ C. $-4 \notin M$ D. $4 \in M$

6. 已知集合 $A = \{t^2 + s^2 | t, s \in Z\}$, 且 $x \in A, y \in A$ 则下列结论正确的是 ()

A. $x+y \in A$ B. $x-y \in A$ C. $xy \in A$ D. $\frac{x}{y} \in A$

7. 设集合 $A = \{x \in Q | x > -1\}$, 则 ()

A. $2 \notin A$ B. $\{\sqrt{2}\} \notin A$ C. $2 \in A$ D. $\{\sqrt{2}\} \subseteq A$



$(\sqrt{h+2})$

二、解答题

8. 方程组 $\begin{cases} x+y=2 \\ x-y=0 \end{cases}$ 的解用列举法表示为

9. 已知集合 $A = \{x \in N \mid \frac{8}{6-x} \in N\}$, 试用列举法表示集合 A .



10. 已知集合 $A = \{x \mid ax^2 + 2x + 1 = 0, x \in R\}$, a 为实数.

(1) 若 A 是空集, 求 a 的取值范围

(2) 若 A 是单元素集, 求 a 的值.



11. 已知集合 $A = \{x \in R \mid ax^2 + 2x + 1 = 0\}$.

(1) 若 A 中只有一个元素, 实数 a 的取值范围.

(2) 若 A 中至少有一个元素, 实数 a 的取值范围.

(3) 若 A 中元素至多只有一个, 求实数 a 的取值范围.

12. 设集合 $M = \{a \mid a = x^2 - y^2, x, y \in \mathbb{Z}\}$.

求证：(1) 一切奇数属于集合 M ；

(2) 偶数 $4k - 2 (k \in \mathbb{Z})$ 不属于 M ；

(3) 属于 M 的两个整数，其乘积仍属于 M .



【答案与解析】

1. 【答案】 D

2. 【答案】 B

3. 【答案】 C

4. 【答案】 D

5. 【答案】 D

6. 【答案】 C

7. 【答案】 B

8. 【答案】 $\{(-1,1)\}$ 9. 【答案】 $\{2,4,5\}$ 10. 【答案】 (1) $a > 1$; (2) 0 或 111. (1) 若 $a \neq 0$ 时, 则 $\Delta = 4 - 4a = 0$, 解得 $a = 1$, 此时 $x = -1$.若 $a = 0$ 时, 则 $x = -\frac{1}{2}$ $\therefore a = 0$ 或 $a = 1$ 时, A 中只有一个元素.(2) ① A 中只有一个元素时, 同上 $a = 0$ 或 $a = 1$.② A 中有两个元素时, $\begin{cases} a \neq 0, \\ \Delta > 0 \end{cases}$, 解得 $a < 1$ 且 $a \neq 0$. 综上 $a \leq 1$.(3) ① $a = 0$ 时, 原方程为 $2x + 1 = 0$, 得 $x = -\frac{1}{2}$, 符合题意;② $a \neq 0$ 时, 方程 $ax^2 + 2x + 1 = 0$ 为一元二次方程, 依题意 $\Delta = 4 - 4a \leq 0$, 解得 $a \geq 1$.综上, 实数 a 的取值范围是 $a \geq 1$ 或 $a = 0$.12. 证明: (1) 设 a 为任意奇数, 则 $a = 2k - 1 (k \in \mathbb{Z})$, 因为 $2k - 1 = k^2 - (k - 1)^2$, 且 $k, k - 1$ 均为整数, $\therefore a \in M$. 由 a 的任意性知, 一切奇数属于 M .

(2) 首先我们证明如下命题:

设: $x, y \in \mathbb{Z}$, 则 $x + y$ 与 $x - y$ 具有相同的奇偶性.

以下用反证法证明.

假设 $(4k - 2) \in M$, 则存在 $x, y \in \mathbb{Z}$, 使得
 $(\sqrt{h+2})$

$x^2 - y^2 = 4k - 2 \Rightarrow (x+y)(x-y) = 2(2k-1)$. 若 $x+y$ 与 $x-y$ 同为奇数, 则 $(x+y)$ ($x-y$) 必定为奇数, 而 $2(2k-1)$ 表示偶数, 矛盾; 若 $x+y$ 与 $x-y$ 同为偶数, 则 $(x+y)$ ($x-y$) 必定被 4 整除, 但 $2(2k-1)$ 表示不能被 4 整除的偶数, 也导致矛盾.

综上所述, 形如 $4k-2$ 的偶数不属于 M .

(3) 设 $a, b \in M$, 则存在 $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{Z}$, 使得 $a = x_1^2 - y_1^2, b = x_2^2 - y_2^2$.

$$\begin{aligned} \because ab &= (x_1^2 - y_1^2)(x_2^2 - y_2^2) \\ &= x_1^2 x_2^2 + y_1^2 y_2^2 - 2x_1 x_2 y_1 y_2 + 2x_1 x_2 y_1 y_2 - x_1^2 y_2^2 - x_2^2 y_1^2 \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2)^2 - (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2, \end{aligned}$$

又因为 $x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 - x_2 y_1$ 均为整数,

$\therefore ab \in M$.



$(\sqrt{h+2})$

