第 4 讲 集合的基本运算（全集与补集）

学习目标点

1、了解全集、补集的含义及其符号表示.

2．理解给定集合中一个子集的补集的含义，并会求给定子集的补集.

3．会用 Venn 图、数轴进行集合的运算.

知识集装箱

知识点 1：全集

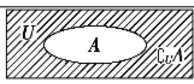
(1)定义：如果一个集合含有我们所研究问题中涉及的所有元素，那么就称这个集合为全集.

(2)记法：全集通常记作 $\underline{U}$.

思考：全集一定是实数集 R 吗？

[提示]　全集是一个相对概念，因研究问题的不同而变化，如在实数范围内解不等式，全集为实数集 $\mathbf{R}$，而在整数范围内解不等式，则全集为整数集 $\mathbf{Z}$.

知识点 2：补集

文字语言	对于一个集合 A，由全集 U 中不属于集合 $\underline{A}$ 的所有元素组成的集合称为集合 A 相对于全集 U 的补集，记作 $\underline{\complement_U A}$
符号语言	$\complement_U A=\underline{\{x\mid x\in U，且\ x\notin A\}}$
图形语言	

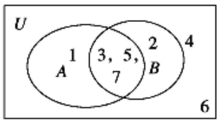
案例研究室

案例 1：补集的基本运算

已知全集 U，集合 $A=\{1,3,5,7\}$，$\complement_U A=\{2,4,6\}$，$\complement_U B=\{1,4,6\}$，求集合 B.

[思路分析]　先由集合 A 与 $\complement_U A$ 求出全集，再由补集定义求出集合 B，或利用 Venn 图求出集合 B.

[解析]　解法一：$A=\{1,3,5,7\}$，$\complement_U A=\{2,4,6\}$，



$\therefore U=\{1,2,3,4,5,6,7\}$，

又 $\complement_U B=\{1,4,6\}$，$\therefore B=\{2,3,5,7\}$.

解法二：借助 Venn 图，如图所示，由图可知 $B=\{2,3,5,7\}$

『规律方法』　求集合补集的基本方法及处理技巧

(1)基本方法：定义法.

(2)两种处理技巧：

①当集合用列举法表示时，可借助 Venn 图求解.

②当集合是用描述表示的连续数集时，可借助数轴，利用数轴分析求解.

实验 1.1

(1)设全集 $U=\{x\in\mathbf{N}|x\geqslant 2\}$，集合 $A=\{x\in\mathbf{N}|x^2\geqslant 5\}$，则 $\complement_U A=$(　B　)

A．∅　　　　B．{2}

C．{5}　　　　D．{2,5}

实验 1.2

已知全集 $U=\{x|1\leqslant x\leqslant 5\}$，$A=\{x|1\leqslant x<a\}$，若 $\complement_U A=\{x|2\leqslant x\leqslant 5\}$，则 $a=$__2__.

[解析]　(1)由题意知集合 $A=\{x\in\mathbf{N}|x\geqslant\sqrt{5}\}$，则 $\complement_U A=\{x\in\mathbf{N}|2\leqslant x<\sqrt{5}\}=\{2\}$，故选 B.

(2)$\because A\cup(\complement_U A)=U$，且 $A\cap(\complement_U A)=\varnothing$，

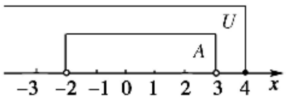
$\therefore A=\{x|1\leqslant x<2\}$，$\therefore a=2$.

案例 2：交集、并集、补集的综合运算

已知全集 $U=\{x|x\leqslant 4\}$，集合 $A=\{x|-2<x<3\}$，$B=\{x|-3\leqslant x\leqslant 2\}$，求 $A\cap B$，$(\complement_U A)\cup B$，$A\cap(\complement_U B)$.

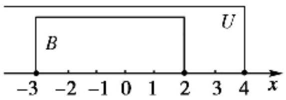
[思路分析]　对于无限集，可以利用数轴，分别表示出全集 U 及集合 A、B，先求出 $\complement_U A$ 及 $\complement_U B$，再求解.

[解析]　如图，



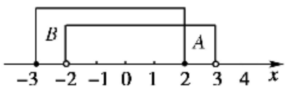
由图可得 $\complement_U A=\{x|x\leqslant -2$，或 $3\leqslant x\leqslant 4\}$.

如图，



由图可得 $\complement_U B=\{x|x<-3$，或 $2<x\leqslant 4\}$.

如图，

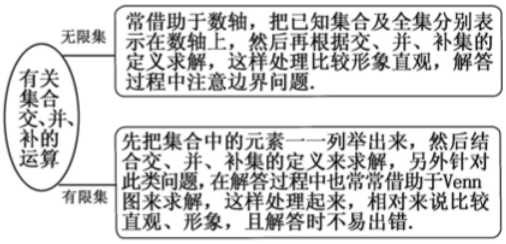


由图可得 $A\cap B=\{x|-2<x\leqslant 2\}$，

$\therefore(\complement_U A)\cup B=\{x|x\leqslant 2$ 或 $3\leqslant x\leqslant 4\}$，

$A\cap(\complement_U B)=\{x|2<x<3\}$.

『规律方法』　求集合交、并、补运算的方法



实验 2.1：

已知集合 $U=\{1,2,3,4\}$，$A=\{1,3\}$，$B=\{1,3,4\}$，则 $A\cup(\complement_U B)=$__$\{1,2,3\}$__；

实验 2.2：

设 $U=\mathbf{R}$，$A=\{x|x>0\}$，$B=\{x|x>1\}$，则 $A\cap(\complement_U B)=$(　B　)

A．$\{x|0\leqslant x<1\}$　　B．$\{x|0<x\leqslant 1\}$

C．$\{x|x<0\}$　　D．$\{x|x>1\}$

案例 3：忽视空集或补集的性质易致错

已知全集 $U=\{1,2,3,4,5\}$，$A=\{x|x^2-5x+q=0\}$，$A\subseteq U$，求 $\complement_U A$ 及 q 的值.

[错解]　当 $q=0$ 时，$x^2-5x+q=0$ 的根为 $x=5$，$x=0$，$5\in U$，此时 $A=\{5\}$，$\complement_U A=\{1,2,3,4\}$.

当 $q\neq 0$ 时, 由韦达定理知方程 $x^2-5x+q=0$ 的根在 1,2,3,4,5 中取时, 只可能是 3 或 2,1 或 4，因此

$q=6$ 时，$A=\{2,3\}$，$\complement_U A=\{1,4,5\}$．$q=4$ 时，$A=\{1,4\}$，$\complement_U A=\{2,3,5\}$.

所以 $q=0$ 时，$\complement_U A=\{1,2,3,4\}$，

$q=4$ 时，$\complement_U A=\{2,3,5\}$，$q=6$ 时，$\complement_U A=\{1,4,5\}$.

[错因分析]　错解中没有注意到 $A\subseteq U$，当 $q=0$ 时，$A=\{0,5\}U$，另外，当 $A=\varnothing$ 时，$\complement_U A=U$，此时方程 $x^2-5x+q=0$ 无实数解.

[正解]　①若 $A=\varnothing$，则 $\complement_U A=U$，此时方程 $x^2-5x+q=0$ 无实数解．$\therefore\Delta<0$，即 $25-4q<0$，$\therefore q>\dfrac{25}{4}$.

②若 $A\neq\varnothing$，由于方程 $x^2-5x+q=0$ 的两根之和为 5，又由于两根只能从 1,2,3,4,5 中取值，因此 $A=\{1,4\}$或$\{2,3\}$

当 $A=\{1,4\}$时，$\complement_U A=\{2,3,5\}$，$q=4$；

当 $A=\{2,3\}$时，$\complement_U A=\{1,4,5\}$，$q=6$.

[警示]　本题易错点：(一)忽略 $A\subseteq U$，求出 q 的值后不验证 $A\subseteq U$ 是否成立；(二)不考察 $A=\varnothing$ 的情形.

实验 3.1

设全集 $I=\{2,3,x^2+2x-3\}$，$A=\{5\}$，$\complement_I A=\{2,y\}$，求实数 x、y 的值.

[解析] 因为 $A=\{5\}$，$\complement_I A=\{2,y\}$.

所以 $I=\{2,5,y\}$，

又 $I=\{2,3,x^2+2x-3\}$，

所以 $\begin{cases}x^2+2x-3=5\\y=3\end{cases}$，

所以 $\begin{cases}x=-4\\y=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}$.

故 $x=2$，$y=3$ 或 $x=-4$，$y=3$.

案例 4： “正难则反”思想的应用

“正难则反”策略是指当某一问题从正面解决较困难时，我们可以从其反面入手解决．已知全集 U，求子集 A，若直接求 A 困难，可运用“正难则反”策略先求 $\complement_U A$，再由 $\complement_U(\complement_U A)=A$ 求 A.

补集作为一种思想方法给我们研究问题开辟了新思路，今后要有意识地去体会并运用．在顺向思维受阻时，改用逆向思维，可能“柳暗花明”．从这个意义上讲，补集思想具有转换研究对象的功能，这是转化思想的又一体现.

已知 $A=\{x|x^2-2x-8=0\}$，$B=\{x|x^2+ax+a^2-12=0\}$．若 $B\cup A\neq A$，求实数 a 的取值集合．

[思路分析] 要求 $B\cup A\neq A$，可先求 $B\cup A=A$ 时，a 的取值集合，再求出该集合在实数集 **R** 中的补集即可.

[解析] 若 $B\cup A=A$，则 $B\subseteq A$．$\because A=\{x|x^2-2x-8=0\}=\{-2,4\}$，$\therefore$集合 B 有以下三种情况：

①当 $B=\varnothing$ 时，$\Delta=a^2-4(a^2-12)<0$，即 $a^2>16$，$\therefore a<-4$ 或 $a>4$；

②当 B 是单元素集时，$\Delta=a^2-4(a^2-12)=0$，$\therefore a=-4$ 或 $a=4$.

若 $a=-4$，则 $B=\{2\}$；若 $a=4$，则 $B=\{-2\}\subseteq A$；

③当 $B=\{-2,4\}$时，$-2,4$ 是方程 $x^2+ax+a^2-12=0$ 的两根，$\therefore\begin{cases}-a=-2+4\\a^2-12=-2\times4\end{cases}$，

$\therefore a=-2$.

综上可得，$B\cup A=A$ 时，a 的取值集合为$\{a|a<-4$ 或 $a=-2$ 或 $a\geq4\}$.

$\therefore B\cup A\neq A$ 的实数 a 的取值集合为$\{a|-4\leq a<4$ 且 $a\neq-2\}$.

实验 4.1

已知全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x|x<-1\}$，$B=\{x|2a<x<a+3\}$，且 $B\subseteq\complement_{\mathbf{R}}A$，求 a 的取值范围.

[解析]　由题意得$\complement_{\mathbf{R}}A=\{x|x\geq-1\}$.

(1)若 $B=\varnothing$，则 $a+3\leq2a$，即 $a\geq3$，满足 $B\subseteq\complement_{\mathbf{R}}A$.

(2)若 $B\neq\varnothing$，则由 $B\subseteq\complement_{\mathbf{R}}A$，得 $2a\geq-1$ 且 $2a<a+3$，

即$-\frac{1}{2}\leq a<3$.综上可得 $a\geq-\frac{1}{2}$.

$\therefore B\cup A\neq A$ 的实数 a 的取值集合为$\{a|-4\leq a<4$ 且 $a\neq-2\}$.

实验 4.2

已知集合 $A=\{x|x^2+ax+12b=0\}$和 $B=\{x|x^2-ax+b=0\}$，满足$(\complement_UA)\cap B=\{2\}$，$A\cap(\complement_UB)=\{4\}$，$U=\mathbf{R}$，求实数 a，b 的值.

[解析]　$\because(\complement_UA)\cap B=\{2\}$，$\therefore 2\in B$，

$\therefore 4-2a+b=0$.①

又$\because A\cap(\complement_UB)=\{4\}$，$\therefore 4\in A$，

$\therefore 16+4a+12b=0$.②

联立①②，得$\begin{cases}4-2a+b=0\\16+4a+12b=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=\frac{8}{7}\\b=-\frac{12}{7}\end{cases}$.

经检验，符合题意：$\therefore a=\frac{8}{7}$，$b=-\frac{12}{7}$.

思维军械库

1、求集合补集的基本方法及处理技巧

(1)基本方法：定义法.

(2)两种处理技巧：

①当集合用列举法表示时，可借助 Venn 图求解.

②当集合是用描述表示的连续数集时，可借助数轴，利用数轴分析求解.

2、“正难则反”策略是指当某一问题从正面解决较困难时，我们可以从其反面入手解决．已知全集 U，求子集 A，若直接求 A 困难，可运用“正难则反”策略先求$\complement_U A$，再由

$\complement_U(\complement_U A)=A$ 求 A.

补集作为一种思想方法给我们研究问题开辟了新思路,今后要有意识地去体会并运用.在顺向思维受阻时，改用逆向思维，可能“柳暗花明”．从这个意义上讲，补集思想具有转换研究对象的功能，这是转化思想的又一体现.

能力训练场

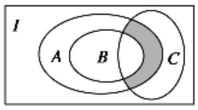
一、选择题

1．已知全集 $U=\{1,2,3,4\}$，集合 $A=\{1,2\}$，$B=\{2,3\}$，则 $\complement_U(A\cup B)=$(D)

A．$\{1,3,4\}$ B．$\{3,4\}$

C．$\{3\}$ D．$\{4\}$

2．如图，I 是全集，A，B，C 是它的子集，则阴影部分所表示的集合是(D)



A．$(\complement_I A\cap B)\cap C$ B．$(\complement_I B\cup A)\cap C$

C．$(A\cap B)\cap(\complement_I C)$ D．$(A\cap \complement_I B)\cap C$

3．已知集合 $U=\{1,2,3,4,5,6,7\}$，$A=\{2,3,4,5\}$，$B=\{2,3,6,7\}$，则 $B\cap(\complement_U A)=$(C)

A．$\{1,6\}$ B．$\{1,7\}$

C．$\{6,7\}$ D．$\{1,6,7\}$

二、填空题

4. 已知集合 $U=\{1,2,3,4,5,6\}$，$A=\{3,4,5\}$，$B=\{4,5,6\}$，则$(\complement_U A)\cup(\complement_U B)=$__$\{1,2,3,6\}$__.

5．设全集 $U=\{n\in \mathbf{N}|1\leqslant n\leqslant 10\}$，$A=\{1,2,3,5,8\}$，$B=\{1,3,5,7,9\}$，则$(\complement_U A)\cap B=$__$\{7,9\}$__.

6．设 $U=\{0,1,2,3\}$，$A=\{x\in U|x^2+mx=0\}$，若 $\complement_U A=\{1,2\}$，则实数 $m=$__-3__.

[解析] $\because \complement_U A==\{1,2\}$，$\therefore A=\{0,3\}$.

$\therefore 0,3$ 是方程 $x^2+mx=0$ 的两根.

$\therefore 0+3=-m.\therefore m=-3$.

7．已知全集 $U=\mathbf{R}$，$M=\{x|-1<x<1\}$，$\complement_U N=\{x|0<x<2\}$，那么集合 $M\cup N=$__$\{x<1$ 或 $x\geqslant 2\}$__.

[解析] $\because U=\mathbf{R}$，$\complement_U N=\{x|0<x<2\}$，

$\therefore N=\{x|x\leqslant 0$ 或 $x\geqslant 2\}$，

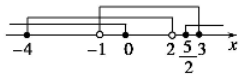
$\therefore M\cup N=\{x|-1<x<1\}\cup\{x|x\leqslant 0$ 或 $x\geqslant 2\}$

$=\{x|x<1$ 或 $x\geq 2\}$.

三、解答题

8．已知全集 $U=\mathbf{R}$，$A=\{x|-4\leq x<2\}$，$B=\{x|-1<x\leq 3\}$，$P=\{x|x\leq 0$ 或 $x\geq\dfrac{5}{2}\}$，求 $A\cap B$，$(\complement_U B)\cup P$，$(A\cap B)\cap(\complement_U P)$.

[解析]　将集合 A，B，P 表示在数轴上，如图.



$\because A=\{x|-4\leq x<2\}$，$B=\{x|-1<x\leq 3\}$，

$\therefore A\cap B=\{x|-1<x<2\}$.

$\because \complement_U B=\{x|x\leq -1$ 或 $x>3\}$，

$\therefore (\complement_U B)\cup P=\{x|x\leq 0$ 或 $x\geq\dfrac{5}{2}\}$，

$\therefore (A\cap B)\cap(\complement_U P)=\{x|-1<x<2\}\cap\{x|0<x<\dfrac{5}{2}\}=\{x|0<x<2\}$.