第 10 讲　一次函数与二次函数

学习目标点

1.掌握一次函数和二次函数的性质及图象特征.

2.运用一次函数与二次函数的性质解决有关问.

知识集装箱

一、一次函数

函数 $y=kx+b\quad(k\neq 0)$ 叫做一次函数，它的定义域是 R，值域是 R

1、一次函数的图象是直线，所以一次函数又叫线性函数；

2、一次函数 $y=kx+b\quad(k\neq 0)$ 中，k 叫直线的斜率，b 叫直线在 y 轴上的截距； $k>0$ 时，函数是增函数，$k<0$ 时，函数是减函数；

3、 $b=0$ 时该函数是奇函数且为正比例函数，直线过原点；$b\neq 0$ 时，它既不是奇函数，也不是偶函数；

二、二次函数

函数 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ 叫做二次函数，它的定义域为是 R，图象是一条抛物线；

1、当 $b=0$ 时，该函数为偶函数，其图象关于 y 轴对称；

2、当 $a>0$ 时，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 开口向上，二次函数的单调减区间为 $\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right]$，单调增区间为 $\left[-\frac{b}{2a},+\infty\right)$，值域为 $\left[\frac{4ac-b^2}{4a},+\infty\right)$；

3、当 $a<0$ 时，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 开口向下，二次函数的单调增区间为 $\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right]$，

单调减区间为$\left[-\dfrac{b}{2a},+\infty\right)$，值域为$\left(-\infty,\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right]$；

三、二次函数的补充

1.二次函数的三种表示形式

（1）一般式：$y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$．

（2）顶点式：$y=a(x-m)^2+h\ (a\neq 0)$，其中 (m,h)为抛物线的顶点坐标．

（3）两根式：$y=a(x-x_1)(x-x_2)(a\neq 0)$，其中$x_1$、$x_2$是抛物线与 x 轴交点的横坐标．

2.利用配方法求二次函数$y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$的对称轴方程为：$x=-\dfrac{b}{2a}$．

3.若二次函数$f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$对应方程$f(x)=0$的两根为$x_1$、$x_2$，那么函数

$f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$图象的对称轴方程为：$x=\dfrac{x_1+x_2}{2}=-\dfrac{b}{2a}$．

4.用待定系数法求解析式时，要注意函数对解析式的要求，一次函数、正比例函数、反比例函数的比例系数、二次函数的二次项系数等；要应视具体问题，灵活地选用其形式，再根据题设条件列方程组，确定其系数．

案例研究室

案例 1

已知函数$y=(2m-1)x+1-3m$，求当m为何值时：

(1)这个函数为正比例函数?

(2)这个函数为奇函数?

(3)函数值y随x的增大而减小?

答案：(1)由题意，得$\begin{cases}1-3m=0\\2m-1\neq 0\end{cases}$，解得$\begin{cases}m=\dfrac{1}{3}\\m\neq\dfrac{1}{2}\end{cases}$．$\therefore m=\dfrac{1}{3}$．(2)$\because$函数为奇函数，

$\therefore \begin{cases} 1-3m=0 \\ 2m-1\neq 0 \end{cases} \therefore m=\dfrac{1}{3}$.

(3)由题意，得$2m-1<0$,$\therefore m<\dfrac{1}{2}$.

实验 1-1

已知一次函数 $y=2x+1$，

(1)当 $y\leq 3$ 时，求 x 的范围；

(2)当 $y\in[-3,3]$时，求 x 的范围；

(3)求图象与两坐标轴围成的三角形的面积．

答案：(1) $x\leq 1$. (2) $-2\leq x\leq 1$ (3) $S=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times 1=\dfrac{1}{4}$.

实验 1-2

求直线 $y=-3x+1$ 和直线 $y=2x+6$ 以及 x 轴围成的三角形的面积．

答案： $\dfrac{20}{3}$

案例 2

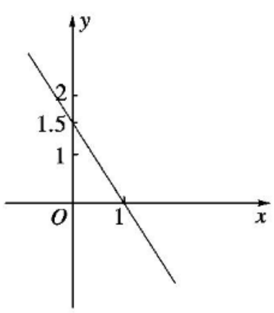
已知一次函数的图象经过点 $A(1,1)$、$B(-2,7)$,求这个一次函数的解析式．

答案：设 y 关于 x 的函数解析式为 $y=ax+b(a\neq 0)$,把 $A(1,1)$、$B(-2,7)$ 的坐标分别代入 $y=ax+b$，得$\begin{cases} 1=a+b \\ 7=-2a+b \end{cases}$，解得$\begin{cases} a=-2 \\ b=3 \end{cases}$.

$\therefore y$ 关于 x 的函数解析式为 $y=-2x+3$.

实验 2-1

已知函数 $f(x)$ 为一次函数，其图象如图，求 $f(x)$ 的解析式．



答案： $f(x)=-1.5x+1.5$.

实验 2-2

已知一次函数 $y=kx+b$ 的图象经过点($\frac{5}{2}$，0)，且与坐标轴围成的三角形面积为$\frac{25}{4}$，求该一次函数的解析式.

答案： $y=2x-5$ 或 $y=-2x+5$.

例 3： 已知函数 $f(x)=x^2+x-2$，则函数 $f(x)$ 在区间[- 1,1)上(　　)

A．最大值为 0，最小值为 - $\frac{9}{4}$

B．最大值为 0，最小值为 - 2

C．最大值为 0，无最小值

D．无最大值，最小值为 - $\frac{9}{4}$

答案： D

实验 3-1

已知函数 $f(x)=x^2+2x+4, x\in[-2,2]$，则 $f(x)$ 的值域是_______.

答案： [3,12]

实验 3-2

函数 $y=x^2-6x+7$ 的值域是(　　)

$A.\{y|y<-2\}$　　　　$B.\{y|y>-2\}$

$C.\{y|y\ge-2\}$　　　　$D.\{y|y\le-2\}$

答案： C

案例 4

已知二次函数 $y=4x^2-4ax+a^2-2a+2$ 在 $0\le x\le 2$ 上的最小值为 3，求 a 的值。

答案：$a=1-\sqrt{2}$ 或 $a=5+\sqrt{10}$

实验 4

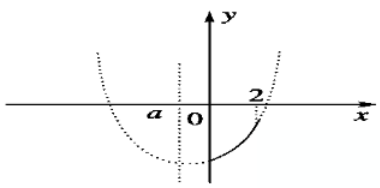
已知二次函数 $y=x^2-4x+a-3b$ 在 $0\le x\le 5$ 上的最小值为 -1，最大值为 $4a$，求 a,b 的值。

答案：$a=2,b=-\dfrac{1}{3}$

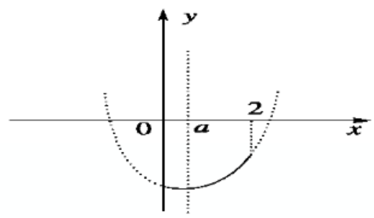
案例 5

求 $f(x)=x^2-2ax-1$ 在[0,2]上的最大值 $M(a)$ 和最小值 $m(a)$ 的表达式.

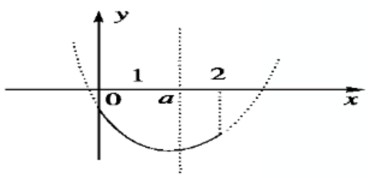
答案： $f(x)=(x-a)^2-a^2-1,x\in[0,2]$, 顶点是 $(a,-a^2-1)$, 二次项系数为正，图象开口向上，对称轴 $x=a$.由 $f(x)$ 在顶点左边(即 $x\le a$)单调递减，在顶点右边(即 $x\ge a$)单调递增，所以 $f(x)$ 图象的对称轴 $x=a$ 与闭区间[0,2]的位置关系(求两种最值)分 4 种情况求解．如图①～④中抛物线的实线部分.



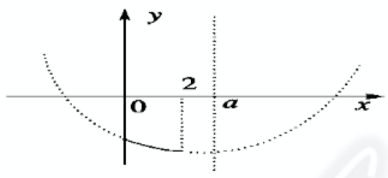
图①



图②



图③



图④

在图①中，当 $a<0$ 时，$f(x)$ 在[0,2]上单调递增，所以 $M(a)=f(2)=-4a+3,m(a)=f(0)=-1$.在图②中，当 $0\le a<2$, 且 $f(0)\le f(2)$，即 $0\le a\le 1$ 时，$f(x)$ 在 $[a,2]$ 上单调递增，所以 $M(a)=f(2)=-4a+3$, $m(a)=f(a)=-a^2-1$.

在图③中，$\begin{cases}0<a\le 2\\ f(0)>f(2)\end{cases}$, 即 $1<a\le 2$ 时，$f(x)$ 在 $[0,a]$ 上单调递减，最大值 $M(a)=f(0)=-1$，最小值 $m(a)=f(a)=-a^2-1$.

在图④中，当 $a>2$ 时，$f(x)$ 在 [0,2] 上单调递减，所以 $M(a)=f(0)=-1, m(a)=f(2)=-4a+3$.

综上可知，$f(x)$ 在[0,2]上的最大值与最小值分别为

$$M(a)=\begin{cases}-4a+3, a\le 1\\ -1, a>1\end{cases}, m(a)=\begin{cases}-1, a<0\\ -a^2-1, 0\le a\le 2\\ -4a+3, a>2\end{cases}$$

实验 5-1

函数 $f(x)=-x^2+2ax+1-a$ 在区间[0,1]上有最大值 2，求实数 a 的值.

答案： $a=-1$，或 $a=2$

实验 5-2

若函数 $y=x^2+(a+2)x+3, x\in[a,b]$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，则 b =______.

答案： 6

案例 6

已知函数 $f(x)=x^2-2(a+2)x+a^2, g(x)=-x^2+2(a-2)x-a^2+8$。设 $H_1(x)=\max\{f(x),g(x)\}, H_2(x)=\min\{f(x),g(x)\}$.记 $H_1(x)$ 的最小值为 A，$H_2(x)$ 的最大值为 B，则 $A-B=$（　　　　）。

$A.a^2-2a-16$　　　$B.a^2+2\text{-}16$　　　$C.-16$　　　$D.16$

答案： C

实验 6

a 为实数，函数 $f(x)=|x^2-ax|$ 在区间 $[0,1]$ 上的最大值记为 $g(a)$.当 $a=$__________ 时, $g(a)$ 的值最小.

答案： $2\sqrt{2}-2$

案例 7

已知 $f(x)=x^2-2kx+k$ 在区间 $[0,1]$ 上的最小值 $\frac{1}{4}$，则 $k=$____________.

答案： $\frac{1}{2}$

实验 7

若函数 $f(x)=2x^2-mx+3$, 当 $x\in[-2,+\infty)$ 时是增函数，当 $x\in(-\infty,-2)$ 时是减函数，则 $f(1)=$____________.

思维导航序

1.二次函数最值问题，一定要考虑自变量的取值范围；

2.二次函数最值问题，要注意对称轴的位置，以及对称轴左边与右边函数的增减性；

3.分类讨论时，要注意连续性和完整性；

4.分类讨论思想在这里运用广泛。

能力训练场

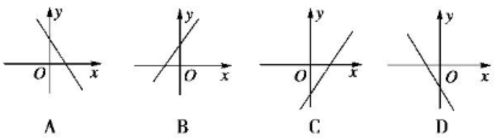
1．若函数 $y=(2m-3)x+(3n+1)$ 的图象经过第一、二、三象限，则 m 与 n 的取值是(　　)

$A.m>\dfrac{3}{2},n>-\dfrac{1}{3}$　　　　$B.m>3,n>-3$

$C.m<-\dfrac{3}{2},n<-\dfrac{1}{3}$　　　　$D.m>\dfrac{3}{2},n<\dfrac{1}{3}$

答案：　A

2．如果 $ab>0$，$bc<0$，那么一次函数 $ax+by+c=0$ 的图象的大致形状是(　　)



答案：A

3．已知函数 $f(x)=-x^2+bx+c$ $f(x)=-x^2+bx+c$ 的图象的对称轴为 $x=2$，则(　　)

A．$f(0)<f(1)<f(3)$　　　　B．$f(3)<f(1)<f(0)$

C．$f(3)<f(1)=f(0)$　　　　D．$f(0)<f(1)=f(3)$

答案：　D

4．函数 $y=x^2-2x+3$ 在区间 $[0,m]$ 上有最大值 3，最小值 2，则 m 的取值范围是(　　)

$A.[1,+\infty)$　　　　$B.[0,2]$

$C.(-\infty,2]$　　　　$D.[1,2]$

答案：　D

5．已知二次函数 $y=f(x)$ 满足 $f(3+x)=f(3-x)$，且 $f(x)=0$ 有两个实根 x_1、x_2，则 x_1+x_2 等于(　　)

A．0　　　　B．3

C．6　　　　D．不确定

答案：　C

6．一次函数 $y=(3a-7)x+a-2$ 的图象与 y 轴的交点在 x 轴上方，且 y 随 x 的增大而减小，则 a 的取值范围是__________.

答案：$(2，\frac{7}{3})$

7．若函数 $y=(2m-9)x+m^2-9m+15$ 是正比例函数，其图象经过第二、四象限，则 m = _____.

答案：2

8．若函数 $f(x)=x^2-3x-4$ 的定义域为 $[0,4]$，值域为 $\left[-\frac{25}{4},-4\right]$，则 m 的取值范围是______.

答案：$[\frac{3}{2}，3]$

9. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}(x-1)^2+n$ 的定义域和值域都是区间 $[1, m]$，求 m、n 的值.

答案：$\begin{cases} m=3 \\ n=1 \end{cases}$

10. 已知函数 $f(x)=x^2-4x+2$ 在区间 $[t,t+2]$ 上的最小值为 $g(t)$，求 $g(t)$ 的表达式.

答案：$g(t)=\begin{cases} t^2-2 & t\le 0 \\ -2 & 0<t<2 \\ t^2-4t+2 & t\ge 2 \end{cases}$.