



第6讲 函数的表示方法（一）



学习目标点

1. 了解函数的一些基本表示法(列表法、图象法、解析法), 会根据不同实际情境选择合适的方法表示函数, 树立应用数形结合的思想.
2. 会用描点法画一些简单函数的图象, 培养学生应用函数的图象解决问题的能力.
3. 了解映射的概念及表示方法, 会利用映射的概念来判断“对应关系”是否是映射, 感受对应关系在刻画函数和映射概念中的作用, 提高对数学高度抽象性和广泛应用性的进一步认识.



知识集装箱

一、函数的常用表示方法简介:

1、解析法

如果函数 $y = f(x)$ ($x \in A$) 中, $f(x)$ 是用代数式 (或解析式) 来表达的, 则这种表达函数的方法叫做解析法 (公式法).

例如, $s = 60t^2$, $A = \pi r^2$, $S = 2\pi rl$, $y = \sqrt{x-2}$ ($x \geq 2$) 等等都是用解析式表示函数关系的.

特别提醒:

解析法的优点: (1) 简明、全面地概括了变量间的关系; (2) 可以通过解析式求出任意一个自变量的值所对应的函数值; (3) 便于利用解析式研究函数的性质. 中学阶段研究的函数主要是用解析法表示的函数.

解析法的缺点: (1) 并不是所有的函数都能用解析法表示; (2) 不能直观地观察到函数的变化规律.

2、列表法:

通过列出自变量与对应函数值的表格来表示函数关系的方法叫做列表法.

例如: 初中学习过的平方表、平方根表、三角函数表. 我们生活中也经常遇到列表法, 如银行里的利息表, 列车时刻表, 公共汽车上的票价表等等都是用列表法来表示函数关系的.

特别提醒:

列表法的优点: 不需要计算就可以直接看出与自变量的值相对应的函数值. 这种表格常常应用到实际生产和生活中.

列表法的缺点: 对于自变量的有些取值, 从表格中得不到相应的函数值.

3、图象法：

用函数图象表示两个变量之间的函数关系的方法，叫做图象法。

例如：气象台应用自动记录器描绘温度随时间变化的曲线，工厂的生产图象，股市走向图等都是用图象法表示函数关系的。

特别提醒：

图象法的优点：能直观形象地表示出自变量的变化，相应的函数值变化的趋势，这样使得我们可以通过图象来研究函数的某些性质。

图象法的缺点：不能够精确地求出某一自变量的相应函数值。

二、函数图像：

1、判断一个图像是不是函数图像的方法：

要检验一个图形是否是函数的图像，其方法为：任作一条与 x 轴垂直的直线，当该直线保持与 x 轴垂直并左右任意移动时，若与要检验的图像相交，并且交点始终唯一的，那么这个图像就是函数图像。

2、函数图像的作图方法大致分为两种：

- (1) 描点作图法。步骤分三步：列表，描点，连线成图。
- (2) 图像变换法。利用我们熟知基本初等函数图像，将其进行平移、对成等变换，从而得到我们所求的函数图像的方法。

三、根据函数图像确定函数的定义域和值域：

- 1、由函数图像来确定函数的值域的方法是看函数图像在 y 轴上的正投影所覆盖的区域；
- 2、由函数图像来确定函数的定义域的方法是看函数图像在 x 轴上的正投影所覆盖的区域；



案例研究室

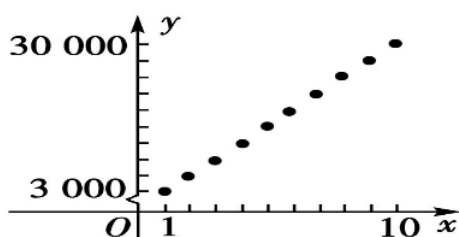
案例 1

某商场新进了 10 台彩电，每台售价 3 000 元，试分别用列表法、图象法、解析法表示售出台数 $x(x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\})$ 与收款总额 y (元)之间的函数关系。

答案：(1)该函数关系用列表法表示为：

$x/\text{台}$	1	2	3	4	5
$y/\text{元}$	3 000	6 000	9 000	12 000	15 000
$x/\text{台}$	6	7	8	9	10
$y/\text{元}$	18 000	21 000	24 000	27 000	30 000

(2) 该函数关系用图象法表示, 如图所示.



(3) 该函数关系用解析法表示为 $y=3\,000x$, $x \in \{1, 2, 3, \dots, 10\}$.

实验 1

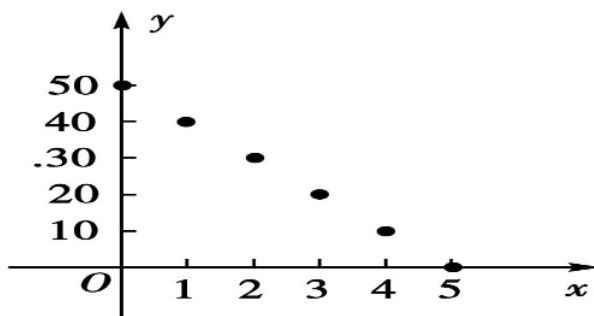
某问答游戏的规则是: 共 5 道选择题, 基础分为 50 分, 每答错一道题扣 10 分, 答对不扣分, 试分别用列表法、图象法、解析法表示一个参与者的得分 y 与答错题目道数 x ($x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$) 之间的函数关系.

答案:

(1) 该函数关系用列表法表示为:

$x/\text{道}$	0	1	2	3	4	5
$y/\text{分}$	50	40	30	20	10	0

(2) 该函数关系用图象法表示, 如图所示



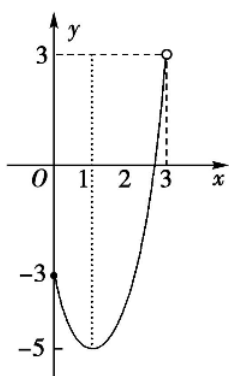
(3) 该函数关系用解析法表示为 $y = 50 - 10x (x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\})$.

案例 2

作出函数 $y = 2x^2 - 4x - 3, 0 \leq x \leq 3$ 的图象.

答案:

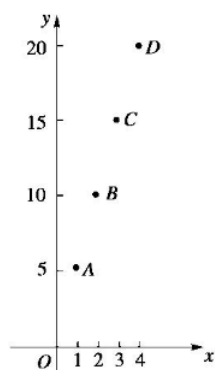
$\because 0 \leq x \leq 3$, 这个函数的图象是抛物线 $y = 2x^2 - 4x - 3$ 介于 $0 \leq x \leq 3$ 之间的一段弧



实验 2

某种笔记本每个 5 元, 买 $x (x \in \{1, 2, 3, 4\})$ 个笔记本的钱数记为 y (元), 试写出以 x 为自变量的函数 y 的解析式, 并画出这个函数的图象.

答案:

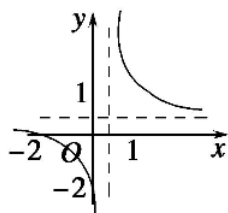


案例 3

作出函数的图象:

$$y = \frac{x+2}{x-1}.$$

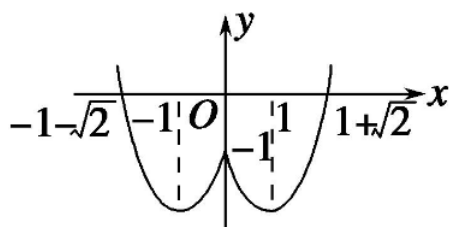
答案:

**实验 3**

作出下列函数的图象:

$$(1) y = x^2 - 2|x| - 1.$$

答案:

**案例 4**

将长为 a 的铁丝折成矩形, 求矩形面积 y 关于一边长 x 的函数关系式, 并求定义域和值域,

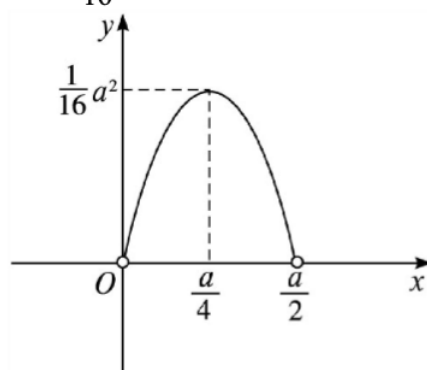
作出函数的图象.

答案:

设矩形一边长为 x , 则另一边长为 $\frac{1}{2}(a-2x)$, 则面积 $y = \frac{1}{2}(a-2x)x = -x^2 + \frac{1}{2}ax$. 又

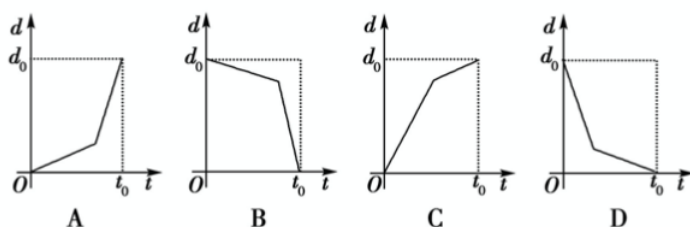
$$\begin{cases} x > 0, \\ a-2x > 0, \end{cases} \text{ 得, 即定义 } 0 < x < \frac{a}{2} \text{ 域为 } (0, \frac{a}{2}). \text{ 由于 } y = -(x - \frac{a}{4})^2 + \frac{1}{16}a^2 \leq \frac{1}{16}a^2, \text{ 如图所}$$

示, 结合函数的图象得值域为 $(0, \frac{1}{16}a^2)$.



实验 4

某学生离家去学校, 由于怕迟到, 所以一开始就跑步, 等跑累了再走余下的路程. 在图中, 纵轴表示离学校的距离, 横轴表示出发后的时间, 则四个图形中较符合该学生走法的是 ()



答案: D

案例 5 下列哪些对应是从集合 A 到集合 B 的映射?

- (1) 集合 $A = \{p \mid p \text{ 是数轴上的点}\}$, 集合 $B = \mathbb{R}$, 对应关系 f : 数轴上的点与它所代表的实数对应;
- (2) 集合 $A = \{p \mid p \text{ 是平面直角坐标系中的点}\}$, 集合 $B = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$, 对应关系 f : 平面直角坐标系中的点与它的坐标对应;
- (3) 集合 $A = \{x \mid x \text{ 是三角形}\}$, 集合 $B = \{x \mid x \text{ 是圆}\}$, 对应关系 f : 每一个三角形都对应它的内切圆;
- (4) 集合 $A = \{x \mid x \text{ 是新华中学的班级}\}$, 集合 $B = \{x \mid x \text{ 是新华中学的学生}\}$, 对应关系 f : 每一个班级都对应班里的学生.

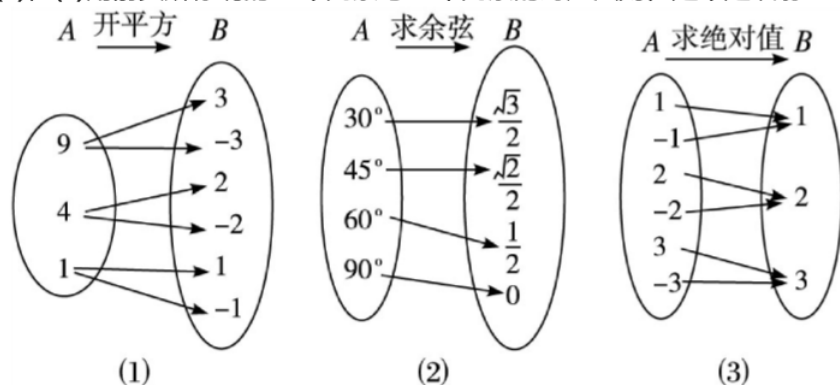
答案:

(1)是映射; (2)是映射; (3)是映射;

(4)不是映射. 新华中学的每个班级对应其班内的多个学生, 是一对多, 不符合映射的

实验 5-1

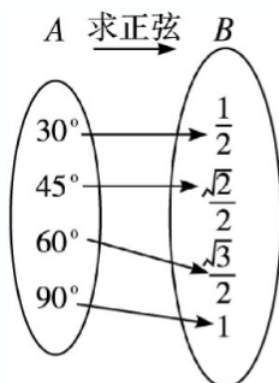
图(1), (2), (3)用箭头所标明的 A 中元素与 B 中元素的对应法则, 是不是映射?



答案: (1)不是; (2)是; (3)是.

实验 5-2

在图中的映射中, A 中元素 60° 对应的元素是什么? 在 A 中的什么元素与 B 中元素 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 对应?



答案: A 中元素 60° 对应的元素是 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 在 A 中的元素 45° 与 B 中元素 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 对应.

案例 6 已知集合 $M = \{a, b, c, d\}$, $P = \{x, y, z\}$, 则从 M 到 P 能建立不同映射的个数是

_____.

答案: 81

实验 6-1

设集合 A 和 B 都是自然数集, 映射 $f: A \rightarrow B$ 把 A 中的元素 n 映射到 B 中的元素 $2^n + n$, 则在映射 f 下, A 中的元素_____对应 B 中的元素 3.()

A. 1 B. 3 C. 9 D. 11

答案: A

实验 6-2

已知集合 $A = \{1, 2, 3, k\}$, $B = \{4, 7, a^4, a^2 + 3a\}$, 且 $a \in \mathbf{N}$, $k \in \mathbf{N}$, $x \in A$, $y \in B$ 映射 $f: A \rightarrow B$, 使 B 中元素 $y = 3x + 1$ 和 A 中元素 x 对应, 求 a 及 k 的值.

解: $\because B$ 中元素 $y = 3x + 1$ 和 A 中元素 x 对应,

$\therefore A$ 中元素 1 的象是 4; 2 的象是 7; 3 的象是 10, 即 $a^4 = 10$ 或 $a^2 + 3a = 10$.

$\because a \in \mathbf{N}$,

\therefore 由 $a^2 + 3a = 10$, 得 $a = 2$.

$\because k$ 的象是 a^4 ,

$\therefore 3k + 1 = 16$, 得 $k = 5$.

$\therefore a = 2, k = 5$.

案例 7

已知集合 $A = \{(x, y) | x + y < 3, x \in \mathbf{N}, y \in \mathbf{N}\}$, $B = \{0, 1, 2\}$, $f: (x, y) \rightarrow x + y(x, y)$, 则这个对应是否为映射? 是否为函数? 请说明理由.

答案: 是映射, 不是函数. 由题意得 $A = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (2, 0)\}$, 显然对于 A 中的每一个有序实数对, 它们的和是 0 或 1 或 2, 则在 B 中都有唯一一个数与它对应, 所以是映射, 因为集合 A 不是数集而是点集, 所以不是函数.

实验 7

集合 M 中有 m 个元素, 集合 N 中有 n 个元素, 则从 M 到 N 能建立多少个不同的映射?

答案: n^m

例 8

如果 $f(\frac{1}{x}) = \frac{x}{1-x}$, 则当 $x \neq 0$ 且 $x \neq 1$ 时, $f(x)$ 等于()

A. $\frac{1}{x}$ B. $\frac{1}{x-1}$ C. $\frac{1}{1-x}$ D. $\frac{1}{x}-1$

答案: D

实验 8

(1) 已知 $f(x)$ 是一次函数, 且满足 $3f(x+1)-2f(x-1)=2x+17$, 则 $f(x) =$ _____.

(2) 已知 $f(x)$ 满足 $2f(x)+f(\frac{1}{x})=3x$, 则 $f(x) =$ _____.

答案: (1) 设 $f(x)=ax+b(a \neq 0)$, 则 $3f(x+1)-2f(x-1)=3ax+3a+3b-2ax$

$+2a-2b=ax+5a+b$, 即 $ax+5a+b=2x+17$ 不论 x 为何值都成立,

$$\therefore \begin{cases} a=2 \\ b+5a=17 \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a=2 \\ b=7 \end{cases} \therefore f(x)=2x+7.$$

(2) $\because 2f(x)+f(\frac{1}{x})=3x$ ① 把①中的 x 换成 $\frac{1}{x}$, 得 $2f(\frac{1}{x})+f(x)=\frac{3}{x}$ ② ① $\times 2$ - ② 得

$$3f(x)=6x-\frac{3}{x}, \therefore f(x)=2x-\frac{1}{x} (x \neq 0).$$

答案 (1) $2x+7$ (2) $2x-\frac{1}{x} (x \neq 0)$

**思维军械库**

1. 函数的三种表示方法, 在具体的实际问题中能够选用恰当的代表法来表示函数.

2. 函数与映射的知识记忆口诀:

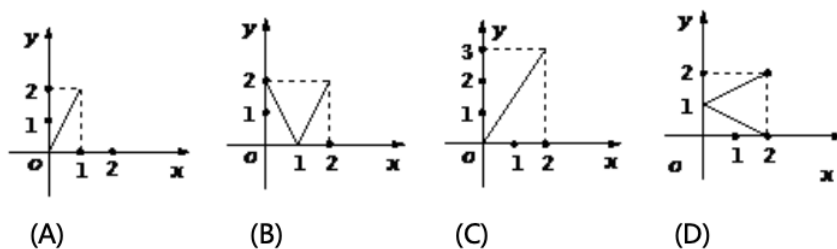
函数新概念, 记准要素三; 定义域值域, 关系式相连;

函数表示法, 记住也不难; 图象和列表, 解析最常见;

对应变映射, 只是变唯一; 映射变函数, 集合变数集.

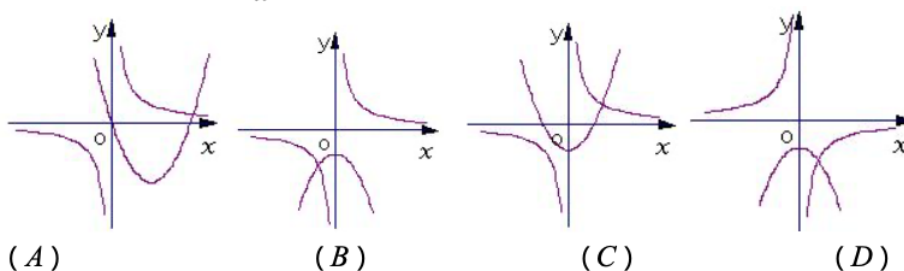
能力训练场

1. 设 $M = \{x | 0 \leq x \leq 2\}$, $N = \{y | 0 \leq y \leq 2\}$ 给出下列四个图形, 其中能表示从集合 M 到集合 N 的函数关系的有 ()



答案: B

2. 函数 $y = ax^2 + a$ 与 $y = \frac{a}{x} (a \neq 0)$ 在同一坐标系内的图像可能是 ()



答案: D

3. 已知函数 $f(x) = 3(x-2)^2 + 5$, 且 $|x_1 - 2| > |x_2 - 2|$, 则 ()

A. $f(x_1) > f(x_2)$

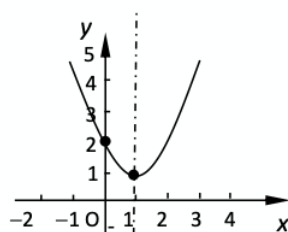
B. $f(x_1) = f(x_2)$

C. $f(x_1) < f(x_2)$

D. 不确定大小

答案: A

4. 如图, 已知函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称, 则满足不等式 $f(m-2) > f(3)$ 的实数 m 的取值范围是_____。

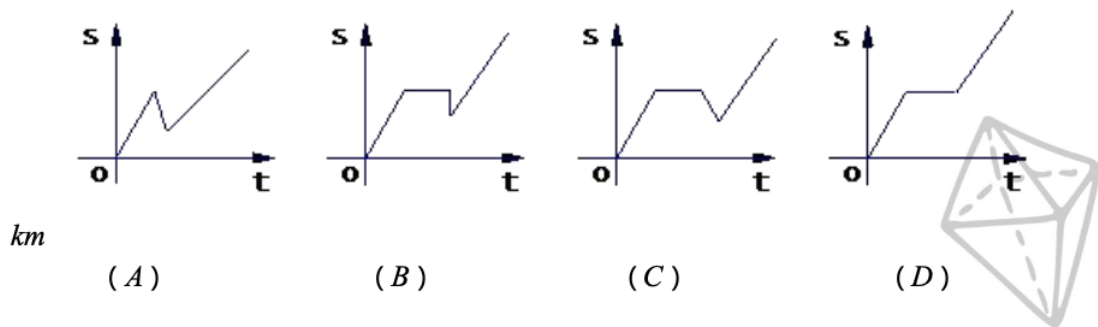


答案: $m < 1$ $m > 5$

5. 根据函数 $y = (x-1)^2 + 1 (0 \leq x \leq 3)$ 的图象, 可以知道, $f(0)$ _____ $f(1)$, $f(0)$ _____ $f(1)$, $f(3)$ _____ $f(1)$ (横线上填 ">" 或 "<" 符号)

答案: > < >

6. 某人开车沿直线旅行, 先前进 akm , 到达目的地后游玩用去了一段时间, 由原路返回 bkm ($b < a$), 再前进 ckm , 此人离起点的距离 s 与时间 t 的关系示意图是 ()



答案: C

7. 下列对应是从集合 S 到 T 的映射的是 ()

A. $S = N, T = \{-1, 1\}$, 对应法则是 $(-1)^n, n \in S$

B. $S = \{0, 1, 4, 9\}, T = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, 对应法则是开平方

C. $S = \{0, 1, 2, 5\}, T = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}\}$, 对应法则是取倒数

D. $S = \{x | x \in R\}, T = \{y | y \in R\}$, 对应法则是 $x \rightarrow y = \frac{1+x}{1-x}$

答案: A

8. 已知集合 $M = \{x | 0 \leq x \leq 6\}, P = \{y | 0 \leq y \leq 3\}$, 则下列对应关系中不能看作从 M 到 P 的映射的是 ()

A. $f: x \rightarrow y = \frac{1}{2}x$

B. $x \rightarrow y = \frac{1}{3}x$

C. $f: x \rightarrow y = \frac{1}{3}x$

D. $f: x \rightarrow y = \frac{1}{6}x$

答案: C

