第 8 讲　函数的最值

学习目标点

理解函数的最大值和最小值的概念及其几何意义．

能借助函数的图象和单调性，求一些简单函数的最值，能利用函数的最值解决有关的实际应用问题．

通过本节内容的学习，学生体会数形结合思想、分类讨论思想在求解最值中的作用，提高逻辑推理、数学运算的能力.

知识集装箱

板块一（函数最大值与最小值）

<table>
<tr><td></td><td>最大值</td><td>最小值</td></tr>
<tr><td rowspan="3">条件</td><td colspan="2">设函数 $y=f(x)$的定义域为 I，如果存在实数 M 满足：对于任意的 $x\in I$，都有</td></tr>
<tr><td>$f(x)\le M$</td><td>$f(x)\ge M$</td></tr>
<tr><td colspan="2">存在$x_0\in I$，使得 $f(x_0)=M$；</td></tr>
<tr><td>结论</td><td>M 是函数 $y=f(x)$的最大值</td><td>M 是函数 $y=f(x)$的最小值</td></tr>
<tr><td>几何意义</td><td>$f(x)$图象上最高点的纵坐标</td><td>$f(x)$图象上最低点的纵坐标</td></tr>
</table>

板块二（利用函数的图象求函数的最值或值域）

利用图象求函数最值的方法：

①画出函数 $y=f(x)$的图象；

②观察图象，找出图象的最高点和最低点；

③写出最值，最高点的纵坐标是函数的最大值，最低点的纵坐标是函数的最小值.

板块三 （利用函数的单调性求最值或值域）

1．利用单调性求函数的最大（小）值的一般步骤：

（1）判断函数的单调性．(2）利用单调性求出最大（小）值.

2．函数的最大(小)值与单调性的关系

(1) 若函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上是增 (减) 函数, 则 $f(x)$在区间$[a,b]$上的最小 (大) 值是 $f(a)$，最大（小）值是 $f(b)$.

（2）若函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上是增（减）函数，在区间$[b,c]$上是减（增）函数，则 $f(x)$在区间$[a,c]$上的最大（小）值是 $f(b)$，最小（大）值是 $f(a)$与 $f(c)$中较小（大）的一个.

注意：

（1）求最值勿忘求定义域.

（2）闭区间上的最值，不判断单调性而直接将两端点值代入是最容易出现的错误，求解时一定注意.

板块四 （函数最值的实际应用）

解实际应用题的四个步骤：

（1）审题：解读实际问题，找出已知条件、未知条件，确定自变量和因变量的条件关系；

（2）建模：建立数学模型，列出函数关系式；

（3）求解：分析函数性质，利用数学知识探究问题解法（一定注意自变量的取值范围）；

（4）回归：数学问题回归实际问题，写出答案.

板块四　（二次函数的最值问题）

二次函数在闭区间上的最值：

闭区间上二次函数最值的取得一定是在区间端点或顶点处.

对二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$，当 $a>0$ 时，$f(x)$在区间$[p,q]$上的最大值为 M，最小值为 m，令$x_0=\frac{p+q}{2}$：

（1）若$-\frac{b}{2a}\leq p$，则 $\mathrm{M}=f(q)$，$m=f(p)$；

（2）若 $p<-\frac{b}{2a}<x_0$，则 $\mathrm{M}=f(q)$，$m=f\left(-\frac{b}{2a}\right)$；

（3）若$x_0\leq -\frac{b}{2a}<q$，则 $M=f(p)$，$m=f(-\frac{b}{2a})$；

（4）若$-\frac{b}{2a}\geq q$，则 $\mathrm{M}=f(p)$,$m=f(q)$.

案例研究室

例 1. 设函数 $f(x)=2x-1(x>0)$，则 $f(x)$(　　)

A．有最大值　　B．有最小值

C．既有最大值又有最小值　　D．既无最大值又无最小值

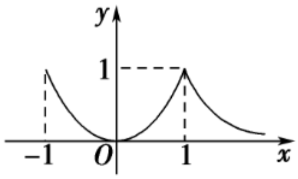
【答案】 D.

【变式 1】 函数 $f(x)=\frac{1}{x}$，$x\in[1,2]$，则 $f(x)$的最大值为______，最小值为______.

【答案】 1 $\frac{1}{2}$

例 2. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & -1\le x\le 1\\ \frac{1}{x}, & x>1\end{cases}$，求 $f(x)$的最大值、最小值.

【答案】作出函数 $f(x)$的图象(如图).



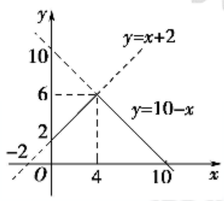
由图象可知,当 $x=\pm 1$ 时,$f(x)$取最大值为 $f(\pm 1)=1$,当 $x=0$ 时,$f(x)$取最小值 $f(0)=0$,

故 $f(x)$的最大值为 1，最小值为 0.

【变式 2】用 $min\{a,b\}$表示 a，b 两个数中的最小值，设 $f(x)=min\{x+2,10-x\}(x\ge 0)$，则 $f(x)$的最大值为________.

【答案】6

在同一个平面直角坐标系内画出函数 $y=x+2$ 和 $y=10-x$ 的图象.



根据 $min\{x+2,10-x\}(x\ge 0)$的含义可知，$f(x)$的图象应为图中的实线部分.

解方程 $x+2=10-x$，得 $x=4$，此时 $y=6$，故两图象的交点为$(4,6)$.

所以 $f(x)=\begin{cases}x+2, & 0\le x\le 4\\ 10-x, & x>4\end{cases}$其最大值为交点的纵坐标，所以 $f(x)$的最大值为 6.

例 3. 已知函数 $f(x)=\frac{2x+1}{x+1}$.

（1）判断函数在区间$(-1,+\infty)$上的单调性，并用定义证明你的结论；

（2）求该函数在区间$[2,4]$上的最大值和最小值.

【答案】（1）$f(x)$在$(-1,+\infty)$上为增函数，证明如下：

任取$-1<x_1<x_2$,

则 $f(x_1)-f(x_2)=\frac{2x_1+1}{x_1+1}-\frac{2x_2+1}{x_2+1}=\frac{x_1-x_2}{(x_1+1)(x_2+1)}$,

因为$-1<x_1<x_2\Rightarrow x_1+1>0$，$x_2+1>0$，$x_1-x_2<0$,

所以 $f(x_1)-f(x_2)<0\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$,

所以 $f(x)$在$(-1,+\infty)$上为增函数.

（2）由（1）知 $f(x)$在$[2,4]$上单调递增,

所以 $f(x)$的最小值为 $f(2)=\frac{2\times2+1}{2+1}=\frac{5}{3}$,

最大值 $f(4)=\frac{2\times4+1}{4+1}=\frac{9}{5}$.

【变式 3】已知函数 $f(x)=-x^2+2x-3$.

（1）求 $f(x)$在区间$[2a-1,2]$上的最小值 $g(a)$;

（2）求 $g(a)$的最大值.

【答案】解:（1）$f(x)=-(x-1)^2-2$，$f(2)=-3$，$f(0)=-3$,

$\therefore$当 $2a-1\leq0$，即 $a\leq\frac{1}{2}$时，$f(x)_{min}=f(2a-1)=-4a^2+8a-6$;

当 $0<2a-1<2$，即$\frac{1}{2}<a<\frac{3}{2}$时，$f(x)_{min}=f(2)=-3$.

所以 $g(a)=\begin{cases}-4a^2+8a-6, & a\leq\frac{1}{2}\\ -3, & \frac{1}{2}<a<\frac{3}{2}\end{cases}$.

(2)当 $a\leq\frac{1}{2}$时，$g(a)=-4a^2+8a-6$ 单调递增,

$\therefore g(a)\leq g\left(\frac{1}{2}\right)=-3$;

又当$\frac{1}{2}<a<\frac{3}{2}$时，$g(a)=-3$,

$\therefore g(a)$的最大值为-3.

例 4. 函数 $g(x)=2x-\sqrt{x+1}$的值域为_______.

【答案】$[-\frac{17}{8},+\infty)$

设$\sqrt{x+1}=t(t\geq 0)$，则 $x+1=t^2$，

即 $x=t^2-1$，$\therefore g(t)=2t^2-t-2=2\left(t-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{17}{8}$，$t\geq 0$，

$\therefore$当 $t=\frac{1}{4}$时，$g(t)_{min}=-\frac{\mathbf{17}}{\mathbf{8}}$，

$\therefore$函数 $g(x)$的值域为$[-\frac{\mathbf{17}}{\mathbf{8}},+\infty)$.

【变式 4】已知 $a\in\boldsymbol{R}$，函数 $f(x)=x\cdot|x-a|$.

（1）当 $a=2$ 时，写出函数 $f(x)$的单调区间（不必证明）；

（2）若 $a=2$，求函数 $f(x)$在区间$[0,3]$上的最大值；

（3）当 $a>2$ 时，求函数 $y=f(x)$在区间$[1,2]$上的最小值.

【答案】解：（1）当 $a=2$ 时，$f(x)=x|x-2|=\begin{cases}x(x-2), & x\geq 2\\ x(2-x), & x<2\end{cases}$

由二次函数的性质知，单调递增区间为$(-\infty,1]$，$[2,+\infty)$；单调减区间为$(1,2)$；

（2）$a=2$，函数在$[0,1]$，$[2,3]$上单调递增，在$(1,2)$上单调递减，

$\because f(1)=1$，$f(3)=1$，

$\therefore$函数 $f(x)$在区间$[0,3]$上的最大值为 1；

（3）$\because a>2$，$x\in[1,2]$时，所以 $f(x)=x(a-x)=-x^2+ax=-(x-\frac{a}{2})^2+\frac{a^2}{4}$

当 $1<\frac{a}{2}\leq\frac{3}{2}$，即 $2<a\leq 3$ 时，$f(x)_{min}=f(2)=2a-4$

当$\frac{a}{2}>\frac{3}{2}$，即 $a>3$ 时，$f(x)_{min}=f(1)=a-1$

$\therefore f(x)_{min}=\begin{cases}2a-4, & 2<a\leq 3\\ a-1, & a>3\end{cases}$.

例 5. 一个工厂生产某种产品每年需要固定投资 100 万元，此外每生产 1 件该产品还需要增加投资 1 万元，年产量为 $x(x\in\boldsymbol{N}^*)$件．当 $x\leq 20$ 时，年销售总收入为$(33x-x^2)$万元；

当 $x>20$ 时，年销售总收入为 260 万元．记该工厂生产并销售这种产品所得的年利润为 y 万元．(年利润＝年销售总收入 - 年总投资)

（1）求 y(万元)与 x(件)的函数关系式．

（2）当该工厂的年产量为多少件时，所得年利润最大？最大年利润是多少？

【答案】解:（1）当 $0<x\leq 20$ 时, $y=(33x-x^2)-x-100=-x^2+32x-100$; 当 $x>20$ 时，$y=260-100-x=160-x$，故 $y=\begin{cases}-x^2+32x-100，0<x\leq 20\\ 160-x，x>20\end{cases}$ $(x\in \boldsymbol{N}^*)$．

（2）当 $0<x\leq 20$ 时，$y=-x^2+32x-100=-(x-16)^2+156$，$x=16$ 时，$y_{max}=156$．而当 $x>20$ 时，$160-x<140$，故 $x=16$ 时取得最大年利润，最大年利润为 156 万元．即当该工厂年产量为 16 件时，取得最大年利润为 156 万元．

【变式 5】将进货单价为 40 元的商品按 50 元一个出售时，能卖出 500 个，已知这种商品每涨价 1 元，其销售量就减少 10 个，为得到最大利润，售价应为多少元？最大利润为多少？

【答案】解：设售价为 x 元，利润为 y 元，单个涨价$(x-50)$元，销量减少 $10(x-50)$个，销量为 $500-10(x-50)=(1\,000-10x)$个，则 $y=(x-40)(1\,000-10x)=-10(x-70)^2+9\,000\leq 9\,000$.

故当 $x=70$ 时，$y_{max}=9\,000$.

即售价为 70 元时，利润最大值为 9 000 元．

例 6. 函数 $f(x)=x^2-2x+2$ 在区间$[-1,0]$，$[-1,2]$，$[2,3]$上的最大值和最小值分别是什么?

【答案】函数 $f(x)=x^2-2x+2$ 的图象开口向上，对称轴为 $x=1$.

(1)因为 $f(x)$在区间$[-1,0]$上单调递减,所以 $f(x)$在区间$[-1,0]$上的最大值为 $f(-1)=5$,

最小值为 $f(0)=2$.

（2）因为 $f(x)$在区间$[-1,1]$上单调递减，在$[1,2]$上单调递增，则 $f(x)$在区间$[-1,2]$上的最小值为 $f(1)=1$，又因为 $f(-1)=5$，$f(2)=2$，$f(-1)>f(2)$，所以 $f(x)$在区间$[-1,2]$上的最大值为 $f(-1)=5$.

（3）因为 $f(x)$在区间$[2,3]$上单调递增，所以 $f(x)$在区间$[2,3]$上的最小值为 $f(2)=2$，最大值为 $f(3)=5$.

【变式 6】已知函数 $f(x)=x^2-ax+1$，求 $f(x)$在$[0,1]$上的最大值.

母题探究：（1）在题设条件不变的情况下，求 $f(x)$在$[0,1]$上的最小值；

（2）在题设条件不变的情况下，若 $a=1$，求 $f(x)$在$[t,\ t+1]$$(t\in \boldsymbol{R})$上的最小值

【答案】解：因为函数 $f(x)=x^2-ax+1$ 的图象开口向上，其对称轴为 $x=\frac{a}{2}$,

当$\frac{a}{2}\le\frac{1}{2}$，即 $a\le 1$ 时，$f(x)$的最大值为 $f(1)=2-a$；

当$\frac{a}{2}>\frac{1}{2}$，即 $a>1$ 时，$f(x)$的最大值为 $f(0)=1$.

（1）①当$\frac{a}{2}\le 0$，即 $a\le 0$ 时，$f(x)$在$[0,1]$上单调递增，$\therefore f(x)_{min}=f(0)=1$.

②当$\frac{a}{2}\ge 1$，即 $a\ge 2$ 时，$f(x)$在$[0,1]$上单调递减，$\therefore f(x)_{min}=f(1)=2-a$.

③当 $0<\frac{a}{2}<1$，即 $0<a<2$ 时，$f(x)$在$[0,\frac{a}{2}]$上单调递减，在$[\frac{a}{2},1]$上单调递增，故$\therefore f(x)_{min}=f\left(\frac{a}{2}\right)=1-\frac{a^2}{4}$.

（2）当 $a=1$ 时，$f(x)=x^2-x+1$，其图象的对称轴为 $x=\frac{1}{2}$,

①当 $t\ge\frac{1}{2}$时，$f(x)$在其上是增函数，$\therefore f(x)_{min}=f(t)=t^2-t+1$；

②当 $t+1\le\frac{1}{2}$，即 $t\le-\frac{1}{2}$时，$f(x)$在其上是减函数，

$\therefore f(x)_{min}=f(t+1)=(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}=t^2+t+1$；

③当 $t<\frac{1}{2}<t+1$，即$-\frac{1}{2}<t<\frac{1}{2}$时，函数 $f(x)$在$[t,\frac{1}{2}]$上单调递减，在$[\frac{1}{2},t+1]$上单调递增，

所以 $f(x)_{min}=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$.

思维军械库

1．利用单调性求函数的最大（小）值的一般步骤：(1）判断函数的单调性．(2）利用单调性求出最大（小）值．

2．函数的最大(小)值与单调性的关系：

(1) 若函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上是增 (减) 函数, 则 $f(x)$在区间$[a,b]$上的最小 (大) 值是 $f(a)$, 最大（小）值是 $f(b)$.

(2）若函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上是增（减）函数，在区间$[b,c]$上是减（增）函数，则 $f(x)$在区间$[a,c]$上的最大（小）值是 $f(b)$，最小（大）值是 $f(a)$与 $f(c)$中较小（大）的一个．

能力训练场

1．函数 $f(x)=\frac{1}{2}$在$[1,+\infty)$上(　　)

A．有最大值无最小值　　B．有最小值无最大值

C．有最大值也有最小值　　D．无最大值也无最小值

2．函数 $f(x)=-x^2+4x-6$，$x\in[0,5]$的值域为(　　)

A．$[-6,-2]$　　B．$[-11,-2]$　　C．$[-11,-6]$　　D．$[-11,-1]$

3．函数 $f(x)=\begin{cases}2x+6, & x\in[1,2]\\ x+7, & x\in[-1,1)\end{cases}$，则 $f(x)$的最大值、最小值分别为(　　)

A．10,6　　B．10,8　　C．8,6　　D．以上都不对

4. 函数 $f(x)=-x+\frac{1}{x}$在$[-2,-\frac{1}{3}]$上的最大值是(　　)

A. $\frac{3}{2}$　　　　B. $-\frac{8}{3}$　　　　C. -2　　　　D. 2

5. 函数 $f(x)=\sqrt{6-x}-3x$ 在区间$[2,4]$上的最大值为________.

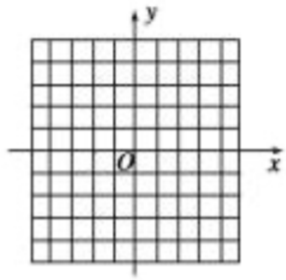
6. 已知函数 $f(x)=-x^2+4x+a$，$x\in[0,1]$，若 $f(x)$有最小值-2，则 $f(x)$的最大值为

________.

7. 对 a，$b\in\boldsymbol{R}$，记 $max\{a，b\}=\begin{cases}a，a\geq b\\b，a<b\end{cases}$，函数 $f(x)=max\{|x+1|，|x-2|\}\ (x\in\boldsymbol{R})$

的最小值为_________.

8. 已知函数 $f(x)=|x|(x+1)$，试画出函数 $f(x)$的图象，并根据图象解决下列两个问题.



（1）写出函数 $f(x)$的单调区间；

（2）求函数 $f(x)$在区间$[-1,\frac{1}{2}]$的最大值

9. 某商场经营一批进价是每件 30 元的商品，在市场试销中发现，该商品销售单价 x(不低于进价，单位：元)与日销售量 y(单位：件)之间有如下关系：

x	45	50
y	27	12

（1）确定 x 与 y 的一个一次函数关系式 $y=f(x)$(注明函数定义域).

（2）若日销售利润为 P 元，根据（1）中的关系式写出 P 关于 x 的函数关系式，并指出当销售单价为多少元时，才能获得最大的日销售利润?

10. 已知函数 $f(x)=\frac{x^2+2x+a}{x}$，$x\in[1,+\infty)$，

（1）当 $a=\frac{1}{2}$时，求函数 $f(x)$的最小值；

（2）若对任意 $x\in[1,+\infty)$，$f(x)>0$ 恒成立，试求实数 a 的取值范围．

【答案】

1．答案：A　　2. 答案：B　　3. 答案：A　　4．答案：A

5. 答案：-4　解析：$\because\sqrt{6-x}$在区间上是减函数，$-3x$ 在区间上是减函数，$\therefore$函数 $f(x)=\sqrt{6-x}-3x$ 在区间上是减函数，$\therefore f(x)_{max}=f(2)=\sqrt{6-2}-3\times2=-4$.

6. 答案：**1**　解析：函数 $f(x)=-x^2+4x+a=-(x-2)^2+4+a$，$x\in[0,1]$，且函数有最小值$-2$.

故当 $x=0$ 时，函数有最小值，当 $x=1$ 时，函数有最大值.

$\because$当 $x=0$ 时，$f(0)=a=-2$，$\therefore f(x)_{max}=f(1)=-1+4-2=1$.

7. 答案：解：当 $x<-1$ 时，$|x+1|=-x-1$，$|x-2|=2-x$，因为$(-x-1)-(2-x)=-3<0$，所以 $2-x>-x-1$；

当 $-1\le x<\frac{1}{2}$时，$|x+1|=x+1$，$|x-2|=2-x$，因为 $(x+1)-(2-x)=2x-1<0$，$x+1<2-x$；

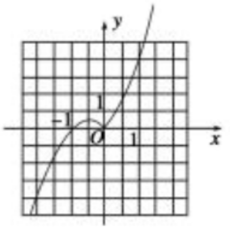
当$\frac{1}{2}<x<2$ 时，$x+1>2-x$；

当 $x\ge2$ 时，$|x+1|=x+1$，$|x-2|=x-2$，显然 $x+1>x-2$；

故 $f(x)=\begin{cases}2-x,\ x\in(-\infty,\frac{1}{2})\\ x+1,\ x\in[\frac{1}{2},+\infty)\end{cases}$

据此求得最小值为$\frac{3}{2}$.

8. 答案：$f(x)=|x|(x+1)=\begin{cases}-x^2-x,\ x\le0\\ x^2+x,\ x>0\end{cases}$的图象如图所示.



（1）$f(x)$的单调增区间为$(-\infty,-\frac{1}{2}]$，$[0,+\infty)$，单调减区间$[-\frac{1}{2},0]$.

（2）$f(x)$在区间$[-1,\frac{1}{2}]$的最大值为$\frac{3}{4}$.

9. 答案：（1）因为$f(x)$是一次函数，设$f(x)=ax+b$，由表格得方程组$\begin{cases}45a+b=27\\50a+b=12\end{cases}$，

解得$\begin{cases}a=-3\\b=162\end{cases}$，所以$y=f(x)=-3x+162$.

又$y\geq 0$，所以$30\leq x\leq 54$，

故所求函数关系式为$y=-3x+162$，$x\in[30,54]$.

（2）由题意得，$P=(x-30)y=(x-30)(162-3x)=-3x^2+252x-4860=-3(x-4)^2+432$，$x\in[30,54]$.

当$x=42$时，最大的日销售利润$P=432$，即当销售单价为42元时，获得最大的日销售利润.

10. 答案：解：（1）因为$f(x)=x+\frac{1}{2x}+2$，$f(x)$在$[1,+\infty)$上为增函数，

所以$f(x)$在$[1,+\infty)$上的最小值为$f(1)=\frac{7}{2}$.

（2）问题等价于$f(x)=x^2+2x+a>0$，在$[1,+\infty)$上恒成立.

即$a>-(x+1)^2+1$在$[1,+\infty)$上恒成立.

令$g(x)=-(x+1)^2+1$，则$g(x)$在$[1,+\infty)$上递减，

当$x=1$时，$g(x)_{max}=-3$，所以$a>-3$，

即实数a的取值范围是$(-3,+\infty)$.