



第 1 讲 集合的含义与表示



学习目标

1. 了解集合的含义，会使用符号“ \in ”“ \notin ”表示元素与集合之间的关系。
2. 能选择自然语言、图象语言、集合语言（列举法或描述法）描述不同的具体问题，感受集合语言的意义和作用。
3. 理解集合的特征性质，会用集合的特征性质描述一些集合，如常用数集、解集和一些基本图形的集合等。



知识集宝箱

知识点 1: 集合的定义与表示方法

定义：一般的，指定的某些对象的全体称为集合，集合中的每个对象叫做这个集合的元素。

集合的表示法：集合常用大写字母表示，元素常用小写字母表示。

知识点 2: 集合元素的特征

(1) 确定性：集合中的元素必须是确定的。

设 A 是一个给定的集合， x 是某一个具体对象，则 x 或者是 A 的元素，或者不是 A 的元素，两种情况必有一种且只有一种成立。

(2) 互异性：一个给定集合中的元素，指属于这个集合的互不相同的个体(对象)，因此，同一集合中不应重复出现同一元素。

(3) 无序性：集合中的元素的次序无先后之分。如：由 1, 2, 3 组成的集合，也可以写成由 1, 3, 2 组成一个集合，它们都表示同一个集合。

要点诠释：

1

集合中的元素，必须具备确定性、互异性、无序性。反过来，一组对象若不具备这三性，则这组对象也就不能构成集合，集合中元素的这三大特性是我们判断一组对象是否能构成集合的依据。

解决与集合有关的问题时，要充分利用集合元素的“三性”来分析解决，也就是，一方面，我们要利用集合元素的“三性”找到解题的“突破口”；另一方面，问题被解决之时，应注意检验元素是否满足它的“三性”。

知识点 3: 元素与集合的关系：

(1) 如果 a 是集合 A 的元素，就说 a 属于(belong to) A ，记作 $a \in A$ 。

(2) 如果 a 不是集合 A 的元素，就说 a 不属于(not belong to) A ，记作 $a \notin A$ 。

知识点 4: 集合的分类

(1) 空集：不含有任何元素的集合称为空集(empty set)，记作： \emptyset 。

(2) 有限集：含有有限个元素的集合叫做有限集。

(3) 无限集：含有无限个元素的集合叫做无限集。

知识点 5: 常用数集及其表示

非负整数集(或自然数集)，记作 N

正整数集，记作 N^* 或 N_+

整数集，记作 Z

有理数集，记作 Q

实数集，记作 R

知识点 6: 集合的表示方法

我们可以用自然语言来描述一个集合，但这将给我们带来很多不便，除此之外还常用列举法和描述法来表示集合。

(1) 自然语言法: 用文字叙述的形式描述集合的方法. 如: 大于等于 2 且小于等于 8 的偶数构成的集合.

(2) 列举法: 把集合中的元素一一列举出来, 写在大括号内. 如: $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\{x^2, 3x + 2, 5y^3 - x, x^2 + y^2\}$, ...

(3) 描述法: 把集合中的元素的公共属性描述出来, 写在大括号{ }内. 具体方法: 在大括号内先写上表示这个集合元素的一般符号及取值(或变化)范围, 再画一条竖线, 在竖线后写出这个集合中元素所具有的共同特征, 如 $\{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$.

要点诠释:

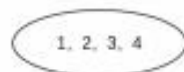
(1) 用描述表示集合时应注意:

① 弄清元素所具有的形式 (即代表元素是什么), 是数, 还是有序实数对 (点) 还是其他形式.

② 元素具有怎样的属性? 当题目中用了其他字母来描述元素所具有的属性时, 要去伪存真, 而不能被表面的字母形式所迷惑.

(2) 用描述法表示集合时, 若需要多层次描述属性时, 可选用逻辑联结词 “且” 与 “或” 等连接; 若描述部分出现元素记号以外的字母时, 要对新字母说明其含义或指出其取值范围.

4. 图示法: 图示法主要包括 Venn 图、数轴上的区间等. 为了形象直观, 我们常常画一条封闭的曲线, 用它的内部来表示一个集合. 这种表示集合的方法称为韦恩 (Venn) 图法. 如下图, 就表示集合 $\{1, 2, 3, 4\}$.



案例研究室

案例 1: 集合元素及元素的性质

例 1. 下列各组对象哪些能构成一个集合?

- (1) 著名的数学家;
- (2) 比较小的正整数的全体;
- (3) 某校 2011 年在校的所有高个子同学;
- (4) 不超过 20 的非负数;
- (5) 方程 $x^2 - 9 = 0$ 在实数范围内的解;
- (6) $\sqrt{2}$ 的近似值的全体.

实验 1.1:

判断下列语句能否确定一个集合? 如果能表示一个集合, 指出它是有限集还是无限集

- (1) 你所在的班, 体重超过 75kg 的学生的全体;
- (2) 举办 2008 年奥运会的城市;
- (3) 高一数学课本中的所有难题;
- (4) 在 2011 年 3 月 11 日日本地震海啸中遇难的人的全体;
- (5) 大于 0 且小于 1 的所有的实数.

案例 2: 元素与集合间关系

判断下列六个关系是否正确:

- (1) $0 \in \mathbb{N}^*$ (2) $0 \notin \{-1, 1\}$ (3) $\emptyset \in \{0\}$
(4) $\emptyset \subsetneq \{0\}$ (5) $\{0\} \in \{0, 1\}$ (6) $\{0\} \subseteq \{0\}$

其中正确的关系是

案例 3: 集合中元素性质的应用

已知集合 $A = \{x \in \mathbb{R} \mid ax^2 - 3x + 2 = 0, a \in \mathbb{R}\}$.

- (1) 若 A 是空集, 求 a 的取值范围;
- (2) 若 A 中只有一个元素, 求 a 的值, 并把这个元素写出来;
- (3) 若 A 中至多只有一个元素, 求 a 的取值范围.

实验 3.1:

定义集合运算: $A * B = \{z \mid z = xy, x \in A, y \in B\}$, 设 $A = \{1, 2\}$, $B = \{0, 2\}$, 则集合 $A * B$

的所有元素之和为 ()

- A. 0 B. 2 C. 3 D. 6

实验 3.2:

设集合 $A = \{x \in \mathbb{R} \mid ax^2 + 2x + 1 = 0\}$, 当集合 A 为单元素集时, 求实数 a 的值.

案例 4: 集合的表示方法

试分别用列举法和描述法表示下列集合:

- (1) 方程 $x^2 - 3 = 0$ 的所有实数根组成的集合;
- (2) 由大于 15 小于 25 的所有整数组成的集合.

实验 4.1:

下列四个选项表示的集合中, 有一个集合不同于另三个集合, 这个集合是 ()

- A. $\{x \mid x = 0\}$ B. $\{a \mid a^2 = 0\}$ C. $\{a = 0\}$ D. $\{0\}$

能力训练题

一、选择题

- 下列四个集合中，是空集的是()
 A. $\{x|x+3=3\}$ B. $\{(x,y)|y^2=-x^2, x,y \in R\}$
 C. $\{x|x^2 \leq 0\}$ D. $\{x|x^2-x+1=0, x \in R\}$
- 集合 $\{x \in Z | (3x-1)(x-4)=0\}$ 可化简为()
 A. $\{\frac{1}{3}\}$ B. $\{4\}$ C. $\{\frac{1}{3}, 4\}$ D. $\{-\frac{1}{3}, -4\}$
- 集合 $A = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$ 用描述法可表示为()
 A. $\{x|x=n, n \in N\}$ B. $\{x|x=2n-1, n \in N\}$
 C. $\{x|x=2n+1, n \in N\}$ D. $\{x|x=n+2, n \in N\}$
- 若以集合 $S = \{a, b, c\}$ 中的三个元素为边长可构成一个三角形，则这个三角形一定不是()
 A. 锐角三角形 B. 直角三角形 C. 钝角三角形 D. 等腰三角形
- 已知 x, y, z 为非零实数，代数式 $\frac{x}{|x|} + \frac{y}{|y|} + \frac{z}{|z|} + \frac{|xyz|}{|xyz|}$ 的值所组成的集合是 M ，则下列判断正确的是()
 A. $0 \notin M$ B. $2 \in M$ C. $-4 \in M$ D. $4 \in M$
- 已知集合 $A = \{t^2 + s^2 | t, s \in Z\}$ ，且 $x \in A, y \in A$ 则下列结论正确的是()
 A. $x+y \in A$ B. $x-y \in A$ C. $xy \in A$ D. $\frac{x}{y} \in A$
- 设集合 $A = \{x \in Q | x > -1\}$ ，则()
 A. $2 \notin A$ B. $\{\sqrt{2}\} \notin A$ C. $2 \in A$ D. $\{\sqrt{2}\} \subseteq A$

二、解答题

- 方程组 $\begin{cases} x+y=2 \\ x-y=0 \end{cases}$ 的解用列举法表示为

- 已知集合 $A = \{x \in N | \frac{8}{6-x} \in N\}$ ，试用列举法表示集合 A 。

- 已知集合 $A = \{x | ax^2 + 2x + 1 = 0, x \in R\}$ ， a 为实数。
 (1) 若 A 是空集，求 a 的取值范围
 (2) 若 A 是单元集，求 a 的值。

- 已知集合 $A = \{x \in R | ax^2 + 2x + 1 = 0\}$ 。
 (1) 若 A 中只有一个元素，实数 a 的取值范围。
 (2) 若 A 中至少有一个元素，实数 a 的取值范围。
 (3) 若 A 中元素至多只有一个，求实数 a 的取值范围。

- 设集合 $M = \{a | a = x^2 - y^2, x, y \in Z\}$ 。

求证：(1) 一切奇数属于集合 M ；
 (2) 偶数 $4k-2 (k \in Z)$ 不属于 M ；
 (3) 属于 M 的两个整数，其乘积仍属于 M 。