第 3 讲 集合的基本运算（交集与并集）

学习目标点

1、熟练掌握交集、并集的概念及其性质。

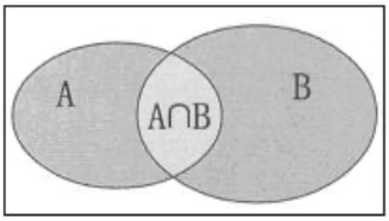
2、能利用数轴、韦恩图来解决交集、并集问题。

3、体会数学语言的简洁性与明确性，发展运用数学语言交流问题的能力。

知识集装箱

知识点 1：交集

一般地，由属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合，叫做集合 A 与 B 的交集；记作：A∩B，读作：“A 交 B”，即 A∩B={x|x∈ A，且 x∈ B}；交集的 Venn 图表示：



要点诠释：

（1）并不是任何两个集合都有公共元素，当集合 A 与 B 没有公共元素时，不能说 A 与 B 没有交集，而是 $A\bigcap B=\varnothing$.

（2）概念中的“所有”两字的含义是，不仅“A∩B 中的任意元素都是 A 与 B 的公共元素”，同时“A 与 B 的公共元素都属于 A∩B”．

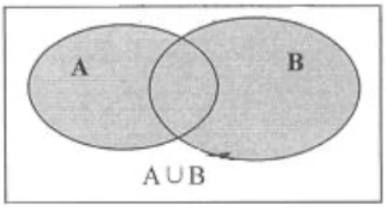
（3）两个集合求交集，结果还是一个集合，是由集合 A 与 B 的所有公共元素组成的集合.

2.并集

一般地，由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合，称为集合 A 与 B 的并集，

记作：A∪B 读作：“A 并 B”，即：A∪B={x|x∈ A，或 x∈ B}

Venn 图表示：



要点诠释：

（1）“x∈ A，或 x∈ B”包含三种情况：“$x\in A$, 但 $x\notin B$”；“$x\in B$, 但 $x\notin A$”；“$x\in A$, 且 $x\in B$”.

（2）两个集合求并集，结果还是一个集合，是由集合 A 与 B 的所有元素组成的集合(重复元素只出现一次).

3、并集与交集的运算性质

并集的运算性质	交集的运算性质
$A\cup B=B\cup A$	$A\cap B=B\cap A$
$A\cup A=A$	$A\cap A=A$
$A\cup\varnothing=A$	$A\cap\varnothing=\varnothing$

案例研究室

案例 1：并集的概念与运算

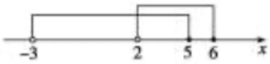
(1)设集合 A＝{1,2,3}，B＝{2,3,4,5}，求 A∪B；

(2)设集合 A＝{x| - 3<x≤5}，B＝{x|2<x≤6}，求 A∪B．

[思路分析] 第(1)题由定义直接求解，第(2)题借助数轴求很方便．

[解析] (1)$A\cup B=\{1,2,3\}\cup\{2,3,4,5\}=\{1,2,3,4,5\}$．

(2)画出数轴如图所示：



$\therefore A\cup B=\{x|-3<x\le 5\}\cup\{x|2<x\le 6\}=\{x|-3<x\le 6\}$．

『规律方法』 并集运算应注意的问题

(1)对于描述法给出的集合，应先看集合的代表元素是什么，弄清是数集，还是点集，然后将集合化简，再按定义求解．

(2)求两个集合的并集时要注意利用集合元素的互异性这一属性，重复的元素只能算一个．

(3)对于元素个数无限的集合进行并集运算时，可借助数轴，利用数轴分析法求解，但要注意端点的值能否取到．

实验 1.1：

（1）已知集合 $A=\{x|-2<x<2\}$，$B=\{x|-1\le x<3\}$，则 $A\cup B=$(A)

A．$\{x|-2<x<3\}$　B．$\{x|1\le x<2\}$

C．$\{x|-2<x\le 1\}$　D．$\{x|2<x<3\}$

(2) 满足条件 $M\cup\{a\}=\{a，b\}$的集合 M 的个数是(C)

A．4　B．3

C．2　D．1

[解析] (1)$A\cup B=\{x|-2<x<2\}\cup\{x|-1\le x<3\}=\{x|-2<x<3\}$．

$\because M\cup\{a\}=\{a，b\}$，$\therefore M=\{b\}$或 $M=\{a，b\}$，故选 C．

案例 2：交集的概念及其运算

(1)设集合 $M=\{-1,0,1\}$，$N=\{x|x2=x\}$则 $M\cap N=$(B)

A．$\{-1,0,1\}$　B．$\{0,1\}$　C．$\{1\}$　D．$\{0\}$

(2)若集合 $A=\{x|-2\le x\le 3\}$，$B=\{x|x<-1$ 或 $x>4\}$，则集合 $A\cap B$ 等于(D)

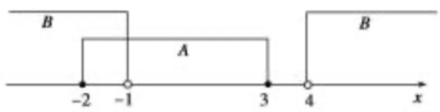
A．$\{x|x\le 3$ 或 $x>4\}$　B．$\{x|-1<x\le 3\}$

C．$\{x|3\le x<4\}$　　D．$\{x|-2\le x<-1\}$

(3)已知 $A=\{(x，y)|4x+y=6\}$，$B=\{(x，y)|3x+2y=7\}$，则 $A\cap B=$__{(1,2)}__.

[解析] (1)$N=\{x|x2=x\}=\{0,1\}$，$\therefore M\cap N=\{0,1\}$，故选 B.

(2)将集合 A、B 表示在数轴上，由数轴可得 $A\cap B=\{x|-2\le x<-1\}$，故选



D.

(3)$A\cap B=\{(x，y)|4x+y=6\}\cap\{(x，y)|3x+2y=7\}$

$=\begin{cases}4x+y=6\\3x+2y=7\end{cases}=\{(1,2)\}$.

『规律方法』 求集合 A∩B 的方法与步骤

(1)步骤

①首先要搞清集合 A、B 的代表元素是什么；

②把所求交集的集合用集合符号表示出来，写成“A∩B\”的形式；

③把化简后的集合 A、B 的所有公共元素都写出来即可(若无公共元素则所求交集为∅).

(2)方法

①若 A、B 的代表元素是方程的根，则应先解方程，求出方程的根后，再求两集合的交集；若集合的代表元素是有序数对，则 A∩B 是指两个方程组成的方程组的解集，解集是点集.

②若 A、B 是无限数集，可以利用数轴来求解．但要注意，利用数轴表示不等式时，含有端点的值用实心点表示，不含有端点的值用空心点表示.

实验 2.1：

设集合 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{y|y=2x-1，x\in A\}$，则 A∩B 等于(A)

A．{1,3}　　B．{2,4}

C．{2,4,5,7}　D．{1,2,3,4,5,7}

实验 2.2：

设集合 $A=\{1,2,4\}$，$B=\{x|x2-4x+m=0\}$，若 $A\cap B=\{1\}$，则集合 B＝(D)

A．{-3,1}　B．{0,1}

C．{1,5} D．{1,3}

[解析] (1)∵A={1,2,3,4}，B={y|y=2x-1，x∈A}，∴B={1,3,5,7}，

∴A∩B={1,3}，故选 A．

(2)∵A∩B={1}，

∴1∈B，

∴1 是方程 x2-4x+m=0 的根，

∴1-4+m=0，∴m=3.[来源:Zxxk.Com]

∴B={x|x2-4x+3=0}={x|(x-1)(x-3)=0}={1,3}．

案例 3：集合交集、并集运算的性质及应用

已知集合 $A=\{x|x^2-px-2=0\}$，$B=\{x|x^2+qx+r=0\}$，且 $A\cup B=\{-2,1,5\}$，$A\cap B=\{-2\}$，则 $p+q+r=$__-14__.

[思路分析] -2 是不是方程 $x^2-px-2=0$ 的根？怎样确定集合 B?

[解析] ∵$A\cap B=\{-2\}$，∴$-2\in A$ 且$-2\in B$，

将 $x=-2$ 代入 $x^2-px-2=0$，得 $p=-1$，∴$A=\{1，-2\}$，

∵$A\cup B=\{-2,1,5\}$，$A\cap B=\{-2\}$，∴$B=\{-2,5\}$，

∴$q=-[(-2)+5]=-3$，$r=(-2)\times5=-10$，∴$p+q+r=-14$.

『规律方法』 利用集合交集、并集的性质解题的方法及关注点

(1)方法：利用集合的交集、并集性质解题时，常常遇到 $A\cup B=B$，$A\cap B=A$ 等这类问题，解答时常借助于交集、并集的定义及已知集合间的关系去转化为集合间的关系求解，如 $A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B$，$A\cup B=B\Leftrightarrow A\subseteq B$.

(2)关注点：当集合 $A\subseteq B$ 时，若集合 A 不确定，运算时要考虑 A=∅的情况，否则易漏解．

实验 3.1：

已知集合 $M=\{x|2x-4=0\}$，$N=\{x|x^2-3x+m=0\}$．

(1)当 $m=2$ 时，求 $M\cap N$，$M\cup N$;

(2)当 $M\cap N=M$ 时，求实数 m 的值．

[解析] 由已知得 $M=\{2\}$，

(1)当 $m=2$ 时，$N=\{1,2\}$，

所以 $M\cap N=\{2\}$，$M\cup N=\{1,2\}$.

(2)若 $M\cap N=M$，则 $M\subseteq N$,

$\therefore 2\in N$,

所以 $4-6+m=0$，$m=2$.

案例 4：集合运算时忽略空集致错

集合 $A=\{x|x^2-3x+2=0\}$，$B=\{x|x^2-2x+a-1=0\}$，$A\cap B=B$，求 a 的取值范围.

[错解] 由题意，得 $A=\{1,2\}$. $\because A\cap B=B$，$\therefore 1\in B$，或者 $2\in B$，$\therefore a=2$ 或 $a=1$.

[错因分析] $A\cap B=B\Leftrightarrow A\supseteq B$. 而 B 是二次方程的解集，它可能为空集，如果 B 不为空集，它可能是 A 的真子集，也可以等于 A.

[思路分析] $A\cap B=B$，B 可能为空集，千万不要忘记.

[正解] 由题意，得 $A=\{1,2\}$，$\because A\cap B=B$，当 $B=\varnothing$ 时，$(-2)^2-4(a-1)<0$，解得 $a>2$；

当 $1\in B$ 时，$1-2+a-1=0$，解得 $a=2$，且此时 $B=\{1\}$，符合题意；

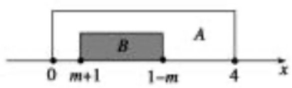
当 $2\in B$ 时，$4-4+a-1=0$，解得 $a=1$，此时 $B=\{0,2\}$，不合题意；当 $1\in B$ 且 $2\in B$ 时，此时 a 无解. 综上所述，$a\geqslant 2$.

案例 5：数形结合思想的应用

已知集合 $A=\{x|0\leqslant x\leqslant 4\}$，集合 $B=\{x|m+1\leqslant x\leqslant 1-m\}$，且 $A\cup B=A$，求实数 m 的取值范围.

[思路分析] 先将 $A\cup B=A$ 等价转化，再借助于数轴直观表达 A、B 之间的关系，列出关于 m 的不等式组，解不等式组得到 m 的取值范围.

[解析] $\because A\cup B=A$，$\therefore B\subseteq A$. $\because A=\{x|0\leqslant x\leqslant 4\}\neq\varnothing$，$\therefore B=\varnothing$ 或 $B\neq\varnothing$.



当 $B=\varnothing$ 时，有 $m+1>1-m$，解得 $m>0$.

当 $B\neq\varnothing$ 时，用数轴表示集合 A 和 B，如图所示，

∵$B\subseteq A$，∴$\begin{cases}0\leq m+1\\1-m\leq 4\end{cases}$，解得$-1\leq m\leq 0$.

检验知 $m=-1$，$m=0$ 符合题意．综上可得，实数 m 的取值范围是 $m>0$ 或$-1\leq m\leq 0$，即 $m\geq -1$.

『规律方法』 求解此类问题一定要看是否包括端点(临界)值．集合问题大都比较抽象，解题时要尽可能借助 Venn 图、数轴等工具利用数形结合思想将抽象问题直观化、形象化、明朗化，从而使问题获解．

思维军械库

求集合 A∩B 的方法与步骤

(1)步骤

①首先要搞清集合 A、B 的代表元素是什么；

②把所求交集的集合用集合符号表示出来，写成“A∩B\”的形式；

③把化简后的集合 A、B 的所有公共元素都写出来即可(若无公共元素则所求交集为∅)．

(2)方法

①若 A、B 的代表元素是方程的根，则应先解方程，求出方程的根后，再求两集合的交集；若集合的代表元素是有序数对，则 A∩B 是指两个方程组成的方程组的解集，解集是点集．

②若 A、B 是无限数集，可以利用数轴来求解．但要注意，利用数轴表示不等式时，含有端点的值用实心点表示，不含有端点的值用空心点表示．

能力训练场

一、选择题

1. 若集合 $A=\{x|-1<x<2\}$，$B=\{x|1<x<3\}$，则 $A\cup B=$(B)

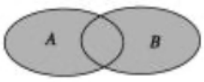
A. $\{x|1<x<2\}$　　　B. $\{x|-1<x<3\}$

C. $\{x|-1<x<2\}$　D. $\{x|1<x<3\}$

[解析] $A\cup B=\{x|-1<x<2\}\cup\{x|1<x<3\}$

$=\{x|-1<x<3\}$.

2. 设集合 $A=\{2,4,6\}$，$B=\{1,3,6\}$，则如图中阴影部分表示的集合是(C)



A. $\{2,4,6\}$　B. $\{1,3,6\}$

C. $\{1,2,3,4,6\}$　D. $\{6\}$

[解析] 图中阴影表示 $A\cup B$，又因为 $A=\{2,4,6\}$，$B=\{1,3,6\}$，所以 $A\cup B=\{1,2,3,4,6\}$，故选 C.

3. 设集合 $A=\{-1,1,2,3,5\}$，$B=\{2,3,4\}$，$C=\{x\in\mathbf{R}|1\leqslant x<3\}$，则$(A\cap C)\cup B=$(D)

A. $\{2\}$　B. $\{2,3\}$

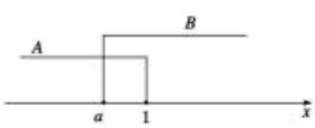
C. $\{-1,2,3\}$ D. $\{1,2,3,4\}$

[解析] $\because A\cap C=\{-1,1,2,3,5\}\cap\{x\in\mathbf{R}|1\leqslant x<3\}=\{1,2\}$，

$\therefore(A\cap C)\cup B=\{1,2\}\cup\{2,3,4\}=\{1,2,3,4\}$，故选 D.

4. 已知集合 $A=\{x|x\leqslant 1\}$，$B=\{x|x\geqslant a\}$，且 $A\cup B=\mathbf{R}$，则实数 a 的取值范围是__$\underline{a\leqslant 1}$__.

[解析] 利用数轴画图解题．[



要使 $A\cup B=\mathbf{R}$，则 $a\leqslant 1$.

5. 设集合 $A=\{a^2，-3,9\}$，$B=\{4，-3,8\}$，若 $A\cap B=\{4，-3\}$，求实数 a 的值.

[解析] $\because A\cap B=\{4，-3\}$，$\therefore 4\in A$.

$\therefore a^2=4$，$a=\pm 2$.

∴实数 a 的值为±2.

二、填空题

6．设集合 $M=\{x|x^2=x\}$，$N=\{x|0<x\leqslant 1\}$，则 $M\cup N=$ $\underline{\quad\{x|0\leqslant x\leqslant 1\}\quad}$.

[解析] ∵$M=\{x|x^2=x\}=\{0,1\}$，$N=\{x|0<x\leqslant 1\}$，

∴$M\cup N=\{x|0\leqslant x\leqslant 1\}$.

7．若集合 $A=\{x|x\leqslant 2\}$，$B=\{x|x\geqslant a\}$，满足 $A\cap B=\{2\}$，则实数 $a=$ $\underline{\quad 2\quad}$.

[解析] ∵$A=\{x|x\leqslant 2\}$，$B=\{x|x\geqslant a\}$，$A\cap B=\{2\}$，

∴$a=2$.

三、解答题

8．设集合 $A=\{a^2，a+1，-3\}$，$B=\{a-3,2a-1，a^2+1\}$，$A\cap B=\{-3\}$，求实数 a 的值.

[解析] ∵$A\cap B=\{-3\}$，∴$-3\in B$.

∵$a^2+1\neq -3$，

∴$a-3=-3$ 或 $2a-1=-3$.

①若 $a-3=-3$，则 $a=0$，

此时 $A=\{0,1，-3\}$，$B=\{-3，-1,1\}$，

但由于 $A\cap B=\{1，-3\}$与已知 $A\cap B=\{-3\}$矛盾，

∴$a\neq 0$.

②若 $2a-1=-3$，则 $a=-1$，

此时 $A=\{1,0，-3\}$，$B=\{-4，-3,2\}$，$A\cap B=\{-3\}$.

综上可知 $a=-1$.

10．已知 $A=\{x|2a<x\leqslant a+8\}$，$B=\{x|x<-1$ 或 $x>5\}$，$A\cup B=\mathbf{R}$，求 a 的取值范围.

[解析] ∵$B=\{x|x<-1$ 或 $x>5\}$，$A\cup B=\mathbf{R}$，

∴$\begin{cases}2a<-1\\ a+8\geqslant 5\end{cases}$，解得 $-3\leqslant a<-\frac{1}{2}$.