第 7 讲 函数的单调性

学习目标点

1、 通过已学过的函数模型，特别是二次函数，理解函数的单调性；

2、 理解增函数、减函数的概念及函数单调性的定义；

3、 掌握单调性的判断方法，并能简单应用；

知识集装箱

一、函数单调性的定义

1、图形描述：

对于函数 $f(x)$ 的定义域 **I** 内某个区间 **D** 上，若其图像为从左到右的一条上升的曲线，我们就说函数 $f(x)$ 在区间 **D** 上为单调递增函数；若其图像为从左到右的一条下降的曲线，我们就说函数 $f(x)$ 在区间 **D** 上为单调递减函数。

2、定量描述

对于函数 $f(x)$ 的定义域 I 内某个区间 D 上的任意两个自变量的值 x_1,x_2，

(1) 若当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)<f(x_2)$,则说 $f(x)$ 在区间 D 上是增函数；

(2) 若当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)>f(x_2)$,则说 $f(x)$ 在区间 D 上是减函数。

3、单调性与单调区间

若函数 $y=f(x)$ 在某个区间是增函数或减函数，则就说函数 $f(x)$ 在这一区间具有（严格的）单调性，这一区间叫做函数 $f(x)$ 的单调区间。此时也说函数是这一区间上的单调函数。在单调区间上，增函数的图象是上升的，减函数的图象是下降的。

二、用定义证明函数的单调性：

定义法证明函数在某个区间上是增（减）函数是最基本方法其步骤是：

1、取量定大小：即设 x_1,x_2 是区间上的任意两个实数，且 $x_1<x_2$；

2、作差定符号：即 $f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)$，并通过因式分解、配方、有理化等方法，向有利于判断差的符号的方向变形；

3、判断定结论： 即根据定义得出结论.

三、判断较复杂函数的单调性的几条有用的结论

1、函数 $y=-f\left(x\right)$ 与函数 $y=f\left(x\right)$ 的单调性相反

2、当 $f\left(x\right)$ 恒为正或恒为负时，函数 $y=\dfrac{1}{f\left(x\right)}$ 与函数 $y=f\left(x\right)$ 的单调性相反

3、在公共区间内，增函数＋增函数＝增函数，增函数－减函数＝增函数，减函数－增函数＝减函数.

四、复合函数单调性的判断

对于函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$，如果 $u=g(x)$ 在区间 (a,b) 上是具有单调性，当 $x\in(a,b)$ 时，$u\in(m,n)$，且 $y=f(u)$ 在区间 (m,n) 上也具有单调性，则复合函数 $y=f(g(x))$ 在区间 (a,b) 具有单调性的规律见下表:

$y=f(u)\quad u\in(m,n)$	增 ↗		减 ↘	
$u=g(x)\quad x\in(a,b)$	增 ↗	减 ↘	增 ↗	减 ↘
$y=f(g(x))\quad x\in(a,b)$	增 ↗	减 ↘	减 ↘	增 ↗

以上规律还可总结为：“同增异减”.

案例研究室

案例 1

证明：函数 $f(x)=2x^2+4x$ 在 $(-\infty,-1]$ 上是减函数.

答案：f(x)在(－∞，－1]上是减函数.

实验 1

证明函数 $f(x)=-\sqrt{x}$ 在定义域上是减函数

答案： f(x)＝－$\sqrt{x}$在[0，＋∞)上是减函数.

案例 2

已知函数 $f(x)=\dfrac{ax}{x^2-1}$（a 为常数且 $a\neq0$），试判断函数 $f(x)$ 在(－1,1)上的单调性.

答案： $f(x)$在(－1,1)上为增函数.

实验 2

讨论函数 $f(x)x^2-2ax+3$ 在 $(2,-2)$ 内的单调性.

答案： $a\le-2$,**递增**；$-2<a<2$, 在（-2，a）**递增，在** $\left(a,2\right)$ **递减.**

案例 3

已知函数 $y=f(x)$ 在(0，+∞)上为增函数，且 $f(x)<0(x>0)$，试判断 $F(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ 在(0，+∞)上的单调性，并证明．

答案：减函数

实验 3-1

已知函数 $y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为减函数，且 $f(x)<0(x>0)$，试判断 $F(x)=f^2(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的单调性，并证明.

答案：增函数

实验 3-2

函数 $f(x)=x^2+2x+3$ 在 $[-1,+\infty)$ 的单调性为____

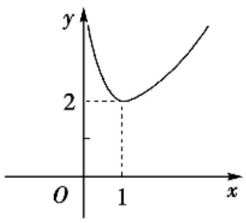
答案：增函数。

案例 4

求函数 $y=x+\dfrac{1}{x}, x\in(0,+\infty)$ 的单调区间，并画出函数的大致图象．

答案：

函数的大致图象如图所示．



单调减区间(0,1]，单调增区间是(1，+∞)。

实验 4-1

求函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ 的单调区间．

答案：单调递增区间为(-∞，1)和(1，+∞)．

实验 4-2

函数 $y=\dfrac{x(2-x)}{|x-1|-1}$ 的单调递减区间是_________

答案： $[1,2)$ 和 $(2,+\infty)$ ．

案例 5

已知 $y=f(x)$ 在定义域 $(-1,1)$ 上是减函数，且 $f(1-a)<f(a^2-1)$，求 a 的取值范围.

答案： $0<a<1$.

实验 5-1

已知 $f(x)$ 是定义在[- 1,1]上的增函数，且 $f(x-2)<f(1-x)$，求 x 的取值范围.

答案： x 的取值范围为 $\left\{x\middle|1\le x<\dfrac{3}{2}\right\}$.

实验 5-2

函数 $f(x)$ f在(- ∞，+∞)上是减函数，且 a 为实数，则有(　　)

$A.f(a)<f(2a)$　　$B.f(a^2)<f(a)$　　$C.f(a^2+1)<f(a)$　　$D.f(a^2-a)<f(a)$

答案： C，

案例 6

(1) 判断函数 $y=\dfrac{1}{x^2+4x+5}$ 的单调性；(2) 已知函数 $y=f(x)$ 在 **R** 上是减函数，判断函数 $y=f(|x-3|)$ 单调性；

答案： (1) $x<-2$ 时，增函数；$x>-2$ 时，减函数.
(2) $(-\infty,3)$ 上单调递增，$(3,+\infty)$ 上单调递减.

实验 6

(1) 判断函数 $y=\sqrt{-x^2+4x+5}$ 的单调性；

(2) 已知函数 $y=f(x)$ 在 **R** 上是减函数，且 $f(3)=3$，判断函数 $y=|f(x)-3|$ 的单调性.

答案： (1)单调增区间为 $(-1,2)$，单调减区间为 $(2,5)$
(2) $(-\infty,3)$ 上单调递增，$(3,+\infty)$ 上单调递减.

案例 7 已知函数 $f(x)=\dfrac{x}{2x-1}$，证明函数 $f(x)$ 在区间(1，+∞)上是减函数.

答案： 设任意 $x_1\in(1,+\infty)$，$x_2\in(1,+\infty)$，且 $x_1<x_2$.

$$f(x_2)-f(x_1)=\frac{x_2}{2x_2-1}-\frac{x_1}{2x_1-1}=\frac{2x_1x_2-x_2-2x_1x_2+x_1}{2x_2-1\quad 2x_1-1}=\frac{x_1-x_2}{2x_2-1\quad 2x_1-1}$$

$\because x_1<x_2$，$\therefore x_1-x_2<0$.又$\because x_1>1$，$x_2>1$，$\therefore 2x_1-1>0, 2x_2-1>0$，

$\therefore \frac{x_1-x_2}{(2x_2-1)(2x_1-1)}<0$，$\therefore f(x_2)<f(x_1)$．故函数 $f(x)$在区间$(1, +\infty)$上是减函数．

实验 7：

已知函数$f(x)$对任意$x, y\in R$，总有$f(x)+f(y)=f(x+y)$，且当$x>0$时，$f(x)<0$

求证：$f(x)$是 **R** 上的单调递减函数；

答案：证明：设 x_1、x_2是任意的两个实数，且 $x_1<x_2$，则$\Delta x=x_2-x_1>0$，

$\because x>0$ 时，$f(x)<0$，$\therefore f(x_2-x_1)<0$，又$\because x_2=(x_2-x_1)+x_1$，

$\therefore f(x_2)=f[(x_2-x_1)+x_1]=f(x_2-x_1)+f(x_1)$，

$\therefore f(x_2)-f(x_1)=f(x_2-x_1)<0$，$\therefore f(x_2)<f(x_1)$．$\therefore f(x)$是 **R** 上的单调递减函数．

思维军械库

当内层函数与外层函数单调性相同时，复合函数为增函数；当内层函数与外层函数的单调性相，反时，复合函数为减函数；简称为同增异减．

$y=f(u)$	增函数	增函数	减函数	减函数
$u=g(x)$	增函数	减函数	增函数	减函数
$y=f[g(x)]$	增函数	减函数	减函数	增函数

能力训练场

1. 下列函数中，在$(-\infty, 0)$上为减函数的是(　　)

$A.y=\frac{1}{x}$　　　　$B.y=x^3$

$C.y=x^0$　　　　$D.y=x^2$

答案：D

2．设函数 $f(x)=(2a-1)x+b$ 是 **R** 上的增函数，则有(　　)

$A.a>\frac{1}{2}$　　　　$B.a\le\frac{1}{2}$

$C.a>-\frac{1}{2}$　　　　$D.a<\frac{1}{2}$

答案：A

3．如果函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是增函数，对于任意的 $x_1,x_2\in[a,b](x_1\ne x_2)$，则下列结论中不正确的是(　　)

$A.\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$　　　　$B.(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]>0$

$C.f(a)<f(x_1)<f(x_2)<f(b)$　　　　$D.\frac{x_1-x_2}{f(x_1)-f(x_2)}>0$

答案：　　　　C

4．函数 $f(x)=-x^2+2ax+3$ 在区间 $(-\infty,4)$ 上单调递增，则实数 a 的取值范围是(　　)

$A.a<4$　　　　$B.a\le 4$

$C.a>4$　　　　$D.a\ge 4$C

答案：D

5．若函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b]$ 上是增函数，在区间 (b,c) 上也是增函数，则函数 $f(x)$ 在区间 (a,c) 上(　　)

A．必是增函数　　　　B．必是减函数

C．是增函数或是减函数　　　　D．无法确定单调性

答案：D

6．下列函数在区间 $(0,1)$ 上是增函数的是(　　)

$A.y=|x|$　　　　$B.y=3-2x$

$C.y=\frac{1}{2+x}$　　　　$D.y=x^2-4x+3$

答案：A

7．函数 $y=x^2+bx+c$ 在区间 $(-\infty,1)$ 上是减函数时，b 的取值范围是(　　)

$A.b\le -2$ $B.b\ge -2$

$C.b>-2$ $D.b<-2$

答案：A

8、证明函数$f(x)=x^3\left(x\in R\right)$是增函数.

答案：证明：设x_1,x_2是 R 上的任意两个实数，且$x_1<x_2$

$$f(x_1)-f(x_2)=x_1^{\ 3}-x_2^{\ 2}=(x_1-x_2)(x_1^{\ 2}+x_1x_2+x_2^{\ 2})$$

$\because x_1<x_2$ $\therefore x_1-x_2<0$ ， 又$\because x_1^{\ 2}+x_1x_2+x_2^{\ 2}=(x_1+\dfrac{x_2}{2})^2+\dfrac{3x_2^{\ 2}}{4}>0$，

$\therefore f(x_1)-f(x_2)<0$ 即 $f(x_1)<f(x_2)$ $\therefore f(x)=x^3$在R上是增函数.

9、求函数$f\left(x\right)=\dfrac{-x^2+a}{x}\left(a>0\right)$的单调区间.

答案：$\left(-\infty,0\right)$和$\left(0,+\infty\right)$.