第 9 讲　函数的奇偶性

学习目标点

理解函数奇偶性的概念，能利用定义判断函数的奇偶性；

掌握用奇偶性求解析式的方法，理解奇偶性对单调性的影响并能用以解不等式；

能运用函数的单调性、奇偶性解决综合性的相关问题.

知识集装箱

板块一（奇、偶函数）

1.偶函数的定义

一般地，如果对于函数 $f(x)$的定义域内任意一个 x，都有 $f(-x)=f(x)$，那么函数 $f(x)$就叫做偶函数.

2.奇函数的定义

一般地，如果对于函数 $f(x)$的定义域内任意一个 x，都有 $f(-x)=-f(x)$，那么函数 $f(x)$就叫做奇函数.若奇函数在原点有定义，则 $f(0)=0$.

3.函数按奇偶性分类

函数按奇偶性分类：奇函数（如 $y=x$，$y=x^3$），偶函数（如 $y=x^2$），既是奇函数又偶函数（$f(x)=0(x\in R)$），非奇非偶函数（$y=3x+2$）.

4.奇偶函数的图象特征

(1)奇函数的图象关于原点成中心对称图形；反之，如果一个函数的图象是以坐标原点为对称中心的中心对称图形，则这个函数是奇函数.

(2)偶函数的图象关于 y 轴对称；反之，如果一个函数的图象关于 y 轴对称，则这个函数是

偶函数.

注意：奇偶函数的定义域关于原点对称，反之，若定义域不关于原点对称，则这个函数一定不具有奇偶性.

板块二（函数奇偶性的判定方法）

1.定义法

第一步：求函数的定义域，并判断定义域是否关于原点对称，若定义域不关于原点对称，则是非奇非偶函数，若定义域关于原点对称，进行下一步；

第二步：求 $f(-x)$；

第三步：根据 $f(-x)$与 $f(x)$之间的关系，判断函数 $f(x)$的奇偶性.

2.图象法

若函数的图象关于原点对称，则函数为奇函数；若函数图象关于 y 轴对称，则函数为偶函数. **3.性质法**

偶函数的和、差、奇、商仍为偶函数；

奇函数的和、差仍为奇函数；

奇数个奇函数的积、商为奇函数，偶数个奇函数的积、商为偶函数；

一个奇函数与一个偶函数的积、商为奇函数.

4.抽象函数奇偶性的判断

判定抽象函数的奇偶性时，因无具体的解析式，故需利用函数的奇偶性的定义，结合给定的函数关系式，找准方向，巧妙赋值，合理、灵活地变形配凑，找出 $f(-x)$与 $f(x)$的关系.

板块三 （奇、偶函数的性质）

1.定义域

奇偶函数的定义域都关于原点对称.

2.图像

奇函数⇔图象关于原点对称；偶函数⇔图象关于 y 轴对称.

3.最值

若一个奇函数在$[a,b]$上的最大值为 M，最小值为 m，则它在$[-b,-a]$上的最大值为$-m$，最小值为$-M$；

一个偶函数在$[a,b]$和$[-b,-a]$上的最大值和最小值分别相同.

4.单调性

奇函数在$[a,b]$和$[-b,-a]$上的单调性相同，偶函数在$[a,b]$和$[-b,-a]$上的单调性相反.

5.奇函数与偶函数的特有性质

若 $f(x)$为奇函数，则 $f(-x)+f(x)=0$；

若 $f(x)$为偶函数，则 $f(x)=f(-x)=f(|x|)=f(-|x|)$.

板块四 （函数奇偶性的应用）

1.求函数值

对于一些抽象函数或系数中含有参数的函数求值问题，通过构造一个具有奇偶性的新函数，利用奇函数偶函数的定义来解决问题.

2.求解析式

（1）求谁设谁，即在哪个区间求函数解析式，x 就设在哪个区间内；

（2）利用已知区间的函数解析式进行代入；

（3）利用奇偶性写出$-f(x)$或 $f(-x)$，从而解出 $f(x)$.

3.求参数的值或取值范围

根据奇偶性定义列出等式 $f(-x)=-f(x)$（或 $f(-x)=f(x)$），由等式求出参数的值或者取值范围，有时也可由特殊值或由函数的性质直接分析求解.

4.函数奇偶性的综合应用

函数的单调性与奇偶性是函数的两个重要性质，解答问题时，要善于运用函数的观点挖掘函数奇偶性和单调性，并注意两者的联系；另外，函数的单调性、奇偶性还常与其他知识结合在一起进行考查，应引起足够的重视.

案例研究室

例 1. 函数 $y=x$ 是(　　)

A．奇函数　　B．偶函数　　C．奇函数又是偶函数　　D．非奇非偶函数

【答案】 A.

【变式 1】 判断(正确的打“√”，错误的打“×”)

(1)偶函数的图象关于[0,0]对称．(　)

(2)奇函数的图象关于 y 轴对称．(　)

(3)函数 $f(x)=x^2$，$x\in[-1,2]$是偶函数．(　)

(4)若 $f(x)$是定义在 R 上的奇函数，则 $f(x)+f(-x)=0$．(　)

【答案】 (1)× (2)× (3)× (4)√

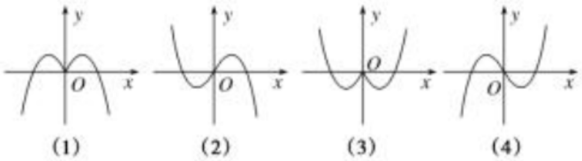
例 2. 下列条件，可以说明函数 $y=f(x)$是偶函数的是(　　)

A. 在定义域内存在 x 使得 $f(-x)=f(x)$　　B. 在定义域内存在 x，使得 $f(-x)=-f(x)$

C．对定义域内任意 x，都有 $f(-x)=-f(x)$　　D．对定义域内任意 x，都有 $f(-x)=f(x)$

【答案】 D.

【变式 2】 下列图象表示的函数是奇函数的是________，是偶函数的是________．(填序号)



【答案】 (2)(4)　(1)(3)

例 3. 判断下列函数的奇偶性：

(1)$f(x)=x+1$；　　(2)$f(x)=x^3+3x,x\in[-4,4)$；

(3)$f(x)=|x-2|+|x+2|$；　　(4) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2+1,x>0,\\ -\frac{1}{2}x^2-1,x<0\end{cases}$

【答案】（1）非奇非偶函数；（2）非奇非偶函数；（3）偶函数；（4）奇函数.

【变式 3】 设函数 $y=f(x)(x\in R$ 且 $x\neq 0)$ 对定义域内任意的 x_1,x_2 恒有 $f(x_1\cdot x_2)=f(x_1)+f(x_2)$.

（1）求证：$f(1)=f(-1)=0$；

（2）求证：$y=f(x)$是偶函数；

【答案】 解：（1）令 $x_1=x_2=1$ 则 $f(1)=f(1)+f(1)$

$\therefore f(1)=0$.

令 $x_1=x_2=-1$，则 $f(-1)=f(-1)+f(-1)$，

$\therefore f(-1)=0$.

（2）证明：$x\in R$ 且 $x\neq 0$，定义域关于原点对称，

令$x_1=x$，$\chi_2=-1$，

$\therefore f(-x)=f(x)+f(-1)=f(x)$

$\therefore f(-x)=f(x)$

所以 $f(x)$在$\{x\in R$ 且 $x\neq 0\}$上是偶函数．

例 4. 下列四个结论：

①偶函数的图象一定与 y 轴相交；　　②奇函数的图象一定通过原点；

③偶函数的图象关于 y 轴对称；　　④奇函数 $y=f(x)(x\in R)$的图象必过$(-a,f(a))$.

表述正确的个数是(　)

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

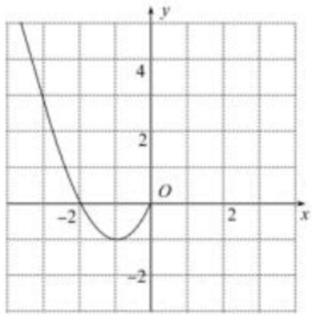
【答案】A.

【变式 4】若函数 $f(x)=kx^2+(k+1)x+3$ 是偶函数，则 k 等于________.

【答案】1.

例 5. 已知函数 $y=f(x)$是定义在 R 上的偶函数，且当 $x\leq 0$ 时，$f(x)=x^2+2x$.现已画出

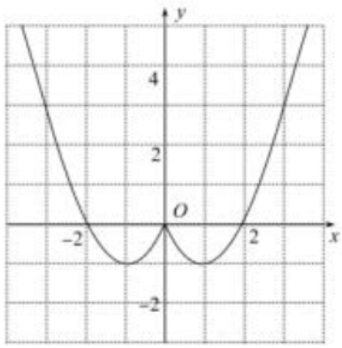
函数 $f(x)$在 y 轴左侧的图象，如图所示．



（1）请补全完整函数$y=f(x)$的图象；

（2）根据图象写出函数 $y=f(x)$的增区间．

【答案】（1）由题意作出函数图象如图：



（2）据图可知，单调增区间为$(-1,0)$，$(1,+\infty)$．

【变式 5】已知偶函数 $f(x)$在【0，$+\infty$）上单调递减，且 $f(-2)=0$，若 $f(x-2)>0$，则 x 的取值范围是____________．

【答案】（0，4）．

例 6. $f(x)=ax^7+bx-2$，若 $f(2017)=10$，则 $f(-2017)$的值为____________．

【答案】-14.

【变式 6】设函数 $f(x)$是奇函数，若 $f(-2)+f(-1)-3=f(1)+f(2)+3$，则 $f(1)+f(2)=$ _____．

【答案】-3.

例 7. 函数 $f(x)$是定义域为 R 的奇函数，当 $x>0$ 时，$f(x)=-x+1$，求 $f(x)$的解析式；

【答案】 设 $x<0$，则 $-x>0$，

$\therefore f(-x)=-(-x)+1=x+1$，

又$\because$函数 $f(x)$是定义域为 R 的奇函数，

$\therefore f(-x)=-f(x)=x+1$，

$\therefore$当 $x<0$ 时，$f(x)=-x-1$.

又 $x=0$ 时，$f(0)=0$，

所以 $f(x)=\begin{cases}-x-1,\ x<0\\ 0,x=0\\ -x+1,\ x>0\end{cases}$

【变式 7】 设 $f(x)$是偶函数，$g(x)$是奇函数，且 $f(x)+g(x)=\frac{1}{x-1}$，求函数 $f(x)$，$g(x)$的解析式.

【答案】 $\because f(x)$是偶函数，$g(x)$是奇函数，

$\therefore f(-x)=f(x)$，$g(-x)=-g(x)$.

由 $f(x)+g(x)=\frac{1}{x-1}$，①

用 $-x$ 代替 x 得 $f(-x)+g(-x)=\frac{1}{-x-1}$，

$\therefore f(x)-g(x)=\frac{1}{-x-1}$，②

(①+②)÷2，得 $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$；

(①−②)÷2，得 $g(x)=\frac{x}{x^2-1}$.

例 8. 设函数 $f(x)=\frac{(x+1)(x+a)}{x}$为奇函数，则 $a=$_______.

【答案】 $a=-1$.

解：$\because$函数 $f(x)=\frac{(x+1)(x+a)}{x}$为奇函数，

$\therefore f(x)+f(-x)=0$，

$\therefore f(1)+f(-1)=0$，

即 $2(1+a)+0=0$，

$\therefore a=-1$．

【变式 8】已知函数 $f(x)$的定义域为$(3-2a，a+1)$，且 $f(x-1)$为偶函数，则实数 a 的值可以是（　　）

A．$\frac{2}{3}$　　B．2　　C．4　　D．6

【答案】D．解：$f(x-1)$为偶函数；

$\therefore f(x-1)$的定义域关于原点对称；

由 $3-2a<x-1<a+1$ 得 $4-2a<x<a+2$；

$\therefore 4-2a+a+2=0$；

$\therefore a=6$．故选：D．

例 9. 奇函数 $f(x)$是定义在$(-1,1)$上的减函数，若 $f(m-1)+f(3-2m)<0$，求实数 m 的取值范围．

【答案】原不等式化为 $f(m-1)<-f(3-2m)$．

$\because f(x)$是奇函数，

$\therefore f(m-1)<f(2m-3)$．

$\because f(x)$为$(-1,1)$上的减函数，

$\therefore \begin{cases}-1<m-1<1\\-1<2m-3<1\\m-1>2m-3\end{cases}$，解得 $1<m<2$，

故实数 m 的取值范围是$(1,2)$．

【变式 9】已知 $f(x)$为奇函数，且当 $x<0$ 时，$f(x)=x^2+3x+2$，若当 $x\in[1,3]$时，$f(x)$的最大值为 m，最小值为 n，求 $m-n$ 的值．

【答案】$\frac{9}{4}$∵$x<0$ 时，$f(x)=x^2+3x+2=(x+\frac{3}{2})^2-\frac{1}{4}$，

∴当 $x\in[-3,-1]$时，

$f(x)_{min}=f\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{1}{4}$，$f(x)_{max}=f(-3)=2$.

∵$f(x)$为奇函数，

∴$f(x)$在 $x\in[1,3]$上的最小值和最大值分别是-2，$\frac{1}{4}$，

∴$m-n=\frac{1}{4}-(-2)=\frac{9}{4}$，

即 $m-n$ 的值为$\frac{9}{4}$.

思维军械库

1. 一般地，如果对于函数 $f(x)$的定义域内任意一个 x，都有 $f(-x)=f(x)$，那么函数 $f(x)$就叫做偶函数.

2. 一般地，如果对于函数 $f(x)$的定义域内任意一个 x，都有 $f(-x)=-f(x)$，那么函数 $f(x)$就叫做奇函数.若奇函数在原点有定义，则 $f(0)=0$.

3. 奇偶函数的定义域都关于原点对称.

4. 奇函数⇔图象关于原点对称；偶函数⇔图象关于 y 轴对称.

能力训练场

1．下列函数为偶函数的是（　　）

A．$f(x)=x^2(-1<x<3)$　　　　B．$f(x)=\frac{x^4}{x}$

C．$f(x)=x^4-1$　　　　D．$f(x)=x+\frac{1}{x}$

2．函数 $f(x)$，$g(x)$在区间[- a，a]上都是奇函数，有下列结论：

①$f(x)+g(x)$在区间[- a，a]上是奇函数；

②$f(x)-g(x)$在区间[- a，a]上是奇函数；

③$f(x)\cdot g(x)$在区间[- a，a]上是偶函数．

其中正确结论的个数是（　　）

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

3. 若函数 $f(x)=ax^2+(2a^2-a-1)x+1$ 为偶函数，则实数 a 的值为（　　）

A．1　　B．$-\frac{1}{2}$　　C．1 或$-\frac{1}{2}$　　D．0

4. 函数 $y=f(x)$在[1,3]上单调递减，且函数 $f(x+3)$是偶函数，则下列结论成立的是（　　）

A．$f(2)<f(\pi)<f(5)$　　　　B．$f(\pi)<f(2)<f(5)$

C．$f(2)<f(5)<f(\pi)$　　　　D．$f(5)<f(\pi)<f(2)$

5. 判断下列函数的奇偶性

（1）$f(x)=|x+1|+|x-1|$

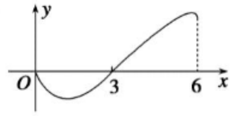
（2）$f(x)=\frac{x}{1+x^2}$

（3）$f(x)=\frac{x^3-x^2}{x-1}$

（4）$f(x)=x^2$，　$x\in[-2,3]$

6. 判断函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2+1, & x>0\\ -\frac{1}{2}x^2-1, & x<0\end{cases}$的奇偶性．

7. 设奇函数 $f(x)$的定义域为[- 6,6]，当 $x\in[0,6]$时 $f(x)$的图象如图所示，不等式 $f(x)<0$ 的解集用区间表示为______________.



8. 若函数 $f(x)=(x-2)(ax+b)$为偶函数，且在$(0,+\infty)$上单调递增，则 $f(2-x)>0$ 的解集为__________.

9. 已知函数 $f(x)$是定义在 R 上的偶函数,且当 $x\leq 0$ 时, $f(x)=x^2+2x$,求函数 $f(x)(x\in R)$的解析式.

10. 定义在$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$上的函数 $y=f(x)$满足 $f(\frac{x}{y})=f(x)-f(y)$，且函数 $f(x)$在$(0,+\infty)$上是增函数.

（1）求 $f(-1)$，并证明函数 $y=f(x)$是偶函数;

（2）若 $f(4)=2$，解不等式 $f(x-5)-f(\frac{3}{x})\leq 1$.

【答案】

1．答案：C　　2. 答案：D　　3. 答案：C　　4．答案：B

5. 答案：解：(1) $\because$函数 $f(x)=|1+x|+|x-1|$的定义域为 R，关于原点对称,

又 $f(-x)=|-x+1|+|-x-1|=|x+1|+|x-1|=f(x)$

$\therefore f(x)$是偶函数;

（2）定义域为 R，关于原点对称，$f(-x)=\frac{-x}{1+(-x)^2}=-\frac{x}{1+x^2}=-f(x)$，$\therefore f(x)$是奇函数;

（3）定义域为$\{x|x\neq 1\}$，不关于原点对称，非奇非偶函数;

（4）定义域为$\{x\in[-2,3]$，不关于原点对称，非奇非偶函数.

6. 答案：解：$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2+1, & x>0\\ -\frac{1}{2}x^2-1, & x<0\end{cases}$ 的定义域$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$关于原点对称,

当 $x>0$ 时，$-x<0$，此时 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+1$，$f(-x)=-\frac{1}{2}x^2-1$，满足 $f(-x)=-f(x)$,

当 $x<0$ 时，$-x>0$，此时 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2-1$，$f(-x)=\frac{1}{2}x^2+1$，满足 $f(-x)=-f(x)$,

故函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2+1, & x>0\\ -\frac{1}{2}x^2-1, & x<0\end{cases}$ 为奇函数.

7. 答案：$[-6,-3)\cup(0,3)$.

8. 答案：$\{x|x>4$ 或 $x<0\}$.

解：函数 $f(x)=(x-2)(x+b)=ax^2+(b-2a)x-2b$ 为偶函数，

$\therefore b-2a=0$，$b=2a$，$f(x)=ax^2-4a$.

再根据 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，$\therefore a>0$.

令 $ax^2-4a=0$，求得 $x=\pm 2$，

则由 $f(2-x)>0$，可得 $2-x>2$，或 $2-x<-2$，求得 $x<0$，或 $x>4$，

故 $f(2-x)>0$ 的解集为$\{x|x>4$ 或 $x<0\}$.

9. 答案：解：$\because f(x)$是偶函数，

$\therefore$若 $x>0$，则$-x<0$，

则当$-x<0$ 时，$f(-x)=x^2-2x=f(x)$，

即当 $x>0$ 时，$f(x)=x^2-2x$.

即 $f(x)=\begin{cases}x^2+2x, & x\le 0\\ x^2-2x, & x>0\end{cases}$

10. 答案：（1）令 $x=y\neq 0$，则 $f(1)=f(x)-f(x)=0$，

再令 $x=1$，$y=-1$ 可得 $f(-1)=f(1)-f(-1)=-f(-1)$，

$\therefore f(-1)=0$.

令 $y=-1$ 可得 $f(-x)=f(x)-f(-1)=f(x)$，

$\therefore f(x)$是偶函数.

（2）$\because f(2)=f(4)-f(2)$，

$\therefore f(2)=\frac{1}{2}f(4)=1$，

又 $f(x-5)-f(\frac{3}{x})=f(\frac{x^2-5x}{3})$，

$\therefore f(\frac{x^2-5x}{3})\le f(2)$，

$\because f(x)$是偶函数，在$(0,+\infty)$上单调递增，

$\therefore 0<\frac{x^2-5x}{3}\leq 2$或$-2\leq\frac{x^2-5x}{3}<0$，

解得$-1\leq x<0$或$0<x\leq 2$或$3\leq x<5$或$5<x\leq 6$.

所以不等式的解集为$\{x|-1\leq x<0$或$0<x\leq 2$或$3\leq x<5$或$5<x\leq 6\}$.